T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CANSU BABADAĞLI

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CANSU BABADAĞLI

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Recep ŞAHİN (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Cansu BABADAĞLI tarafından hazırlanan "**GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27.08.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
CANSU BABADAĞLI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2019

Bu tezde, $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grupları tanıtılmış ve bu grupların kuvvet ve komütatör alt grupları çalışılmıştır.

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Hecke, genel Hecke ve genelleştirilmiş Heke grupları tanıtılır.

İkinci bölümde, çalışmada gerekli olan bazı temel tanım, teorem ve sonuçlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, genelleştirilmiş Hecke gruplarının $H_{2,p,q}^m$ kuvvet alt grupları tanıtılmıştır. Ayrıca m, p ve q 'nun durumlarına göre kuvvet alt gruplarının üreteçleri, simgeleri ve sunuşları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt grupları tanıtılmış ve üreteçleri, simgeleri, sunuşları elde edilmiştir.

Beşinci ve son bölümde, tezde bulunan sonuçlar verilmiştir. İleride yapılacak çalışmalar için bazı açık problemler ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: genelleştirilmiş Hecke grupları, komütatör alt grup, kuvvet alt grup.

ABSTRACT

GENERALIZED HECKE GROUPS
MSC THESIS
CANSU BABADAĞLI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, AUGUST 2019

In this thesis, generalized Hecke groups $H_{2,p,q}$ are introduced and their power and commutator subgroups are studied.

Thesis consist of five chapters. In the first chapter, Hecke, general Hecke and generalized Hecke groups are introduced.

In the second chapter, some fundamental defitions, theorems and results that are necessary to this study are given.

In the third chapter, power subgroups $H_{2,p,q}^m$ of generalized Hecke groups $H_{2,p,q}$ are introduced. Also, according to the cases of $m,\ p$ and $q,$ the generators, the signatures and the group presentations of these subgroups are obtained.

In the fourth chapter, commutator subgroups $H_{2,p,q}'$ of generalized Hecke groups $H_{2,p,q}$ are introduced and the generators, the signatures and the group presentations of these subgroups are obtained.

In the fifth and end chapter, found results in this thesis are given. For further studies, some open problems and suggestions are discussed.

KEYWORDS: generalized Hecke groups, commutator subgroup, power subgroup.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge		Adı
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi, Sonsuz Mertebeli Devirli Grup
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}$	:	p Mertebeli Devirli Grup
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	:	Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{g'}$	:	Grubun cinsi
$\boldsymbol{U}$	:	Üst Yarı Düzlem
$[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H}]$	:	H Alt Grubunun G Grubu İçindeki İndeksi
$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q})$	:	p ve q elemanlarının obebi
$\boldsymbol{C_n}$	:	Devirli Grup
$\boldsymbol{S_n}$	:	Simetrik Grup
$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})$	:	Üçgen Grup
$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$	:	Direk Çarpım Grubu
$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$	:	Serbest Çarpım Grubu
$\boldsymbol{G'}$	:	Komütatör Alt Grup
$\boldsymbol{G^m}$	:	Kuvvet Alt Grup
$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	:	a ile b elemanlarının komütatörü
$\boldsymbol{\Sigma}$	:	Schreier Transverseli

ÖNSÖZ

Bu çalışmada bilgisini ve emeğini büyük bir sabırla bana aktaran, çalışmamın her aşamasında yardımını gördüğüm değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e,

Bilgi ve deneyimleri ile her zaman yol gösterici olan hocam Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e,

Desteğini, bana olan sonsuz inancını ve sevgisini her daim yanımda hissettiğim canım anneme ve babama,

İzinden yürüdüğüm ablam Arş. Gör. Aslı KÖKSOY'a ve uğuruna inandığım canım yeğenim Nilda KÖKSOY'a,

Sabrı, sevgisi ve bana olan sonsuz inancı için yol arkadaşım Yunus Emre KAYNAR'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Can ŞAHİN ve Tuğba KAYNAR'ın anısına…

1. GİRİŞ

Bu bölümde, çalışmanın ortaya çıkışı ve tezde yapılanlar verilecektir.

Hecke grupları E. Hecke tarafından literatüre sunulmuştur [1]. Bu gruplar λ pozitif bir reel sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümleriyle üretilir. Hecke, bu grupların ayrık grup olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$, q ≥ 3 tamsayı veya $\lambda \geq 2$ olması gerektiğini göstermiştir. Eğer $\lambda = \lambda_q$ ise Hecke grubuna 1. tip, $\lambda \geq 2$ ise Hecke grubuna 2. tip Hecke grubu adı verilir. Literatürde genelde 1. tip Hecke grubu ile çalışılır ve bu grup $H(\lambda_q)$ veya H_q ile gösterilir [1].

1. tip Hecke grupları 2 ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Bu tip Hecke grupları özellikle Cangül, Şahin, Koruoğlu, İkikardeş, Bizim gibi yazarlar tarafından çalışılmıştır [2, 3, 4, 5, 6].

Hecke gruplarının genellemesi olan grupları Lehner ve Newman 1956 yılında literatüre kazandırmışlardır [7]. Bu gruplar özellikle Lehner tarafından çalışılmıştır [8].

Lehner $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ koşullarını sağlayan p ve q tamsayıları için;

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p} \text{ ve } Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q},$$

$\lambda_i = 2cos\frac{\pi}{i}$ $(i = p, q)$ elde edilen grupları çalışmıştır. Bu gruplar p ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Lehner bu grupları $H_{p,q}$ şeklinde göstermiştir [8].

Bu gruplar Meral ve Demir tarafından yapılan çalışmalarda genel Hecke grubu adı verilmiş ve bu grupların birçok özellikleri incelenmiştir [9, 10].

Ayrıca, Huang tarafından çalışılan genel Hecke gruplarının da genelmesi olan p_i mertebeli ($p_i \geq 2$ tamsayı, $1 \leq i \leq n$), n tane ($n \geq 3$ tamsayı) devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan grupları tanıtılmıştır [11, 12].

Bu tezde Huang'ın tanıttığı genel Hecke gruplarından $n = 3$ olmak üzere 2, p ve q mertebeli 3 devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke gruplarını çalışacağız.

Tezde 2. bölümde diğer bölümlerde kullanılacak metodlar, teoremler ve bazı tanımlar verilmiştir.

Tezin 3. bölümünde genelleştirilmiş Hecke gruplarının $H^m_{2,p,q}$ kuvvet alt grupları tanıtılmıştır. $m,\ p$ ve q 'nun durumlarına göre kuvvet alt gruplarının üreteçleri, simgeleri ve sunuşları bulunmuştur.

Tezin 4. bölümünde genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt grupları tanıtılmış ve üreteçleri, simgeleri, sunuşları elde edilmiştir.

Son bölümde tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiş, ileride yapılacak araştırmalar için öneri ve açık problemler verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Burada tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan tanımlar, metodlar ve kavramlar verilmiştir.

2.1 Fucshian (Ayrık) Gruplar

2.1.1 Tanım : $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık her Γ alt grubuna bir Fuchsian grup denir.

Her Γ Fuchsian grubunun bir temsili vardır. Herhangi bir Γ Fuchsian grubunun üreteçleri;

$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$	(Hiperbolik üreteçler)
$x_1, x_2, \dots, x_r$	(Eliptik üreteçler)
$p_1, p_2, \dots, p_r$	(Parabolik üreteçler)
$h_1, h_2, \dots, h_r$	(Hiperbolik sınır elemanları)

ve bu üreteçler arasında;

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$$

bağıntıları varsa Fuchsian grubunun

$$(g;\ m_1, \dots, m_r; t; u)$$

biçiminde bir simgesi olur. Burada $m_1, m_2, \dots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılardır ve bunlara Γ nın periyotları denir. g sayısı Γ Fuchsian grubunun üzerinde ayrık olarak hareket ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsi olur.

2.2 Genel Hecke Grupları

E. Hecke, 1936 yılında, ‘‘Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen’’ adlı çalışmasıyla Hecke gruplarını literatüre kazandırmıştır [1]. Lehner ise ‘‘Uniqueness of a class of Fuchsian groups’’ adlı çalışmasında Hecke gruplarının genellemesi olan grupları tanıtmıştır [8].

2.2.1 Tanım : $2 \leq p \leq \infty$ ve $p+q > 4$ koşullarını sağlayan p ve q tamsayıları için;

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p} \text{ ve } Y(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q},\ \lambda_i = 2cos\frac{\pi}{i}\ i{=}p{,}q$$

dönüşümleriyle üretilen gruplara, genel Hecke grupları denir ve $H_{p,q}$ ile gösterilir. $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun gösterimi;

$$H_{p,q} = \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} | \mathrm{X}^{\mathrm{p}} = \mathrm{Y}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I} \rangle \cong \mathbb{Z}_{\mathrm{p}} * \mathbb{Z}_{\mathrm{q}}$$

şeklindedir. $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının simgesi;

$$(0; p, q, \infty)$$

olarak tanımlanır.

Burada; $p = 2$ ise elde edilen gruplar Hecke gruplarıdır. Yani; $H_{2,q} = H_q$ olur. Aynı zamanda Lehner $H_{q,q}$ nun H_q nun 2 indeksli bir alt grubu olduğunu göstermiştir [8].

2.3 Genelleştirilmiş Hecke Grupları

Huang genel Hecke gruplarının genellemesi olan p_i mertebeli ($p_i \geq 2$ tamsayı), n tane ($n \geq 3$ tamsayı $1 \leq i \leq n$) devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan grupları tanıtılmıştır [11, 12].

Şimdi $n = 3$ olma durumu için genelleştirilmiş Hecke gruplarının tanımını verelim.

2.3.1 Tanım : $2 \leq p_1 \leq p_2 \leq p_3 < \infty$ ve $p_1 + p_2 + p_3 > 6$ eşitsizliklerini sağlayan p_1, p_2, p_3 tamsayıları için;

$$T(z) = -\frac{1}{z-\lambda_{p_1}},\ S(z) = -\frac{1}{z-\lambda_{p_2}} \text{ ve } W(z) = -\frac{1}{z+\lambda_{p_3}}$$

üreteçleri ile üretilen gruplara, genelleştirilmiş Hecke grupları denir ve H_{p_1,p_2,p_3} ile gösterilir. Bu grupların grup sunuşları

$$H_{p_1,p_2,p_3} = \langle T, S, W | T^{p_1} = S^{p_2} = W^{p_3} = I \rangle \cong C_{p_1} * C_{p_2} * C_{p_3}$$

şeklindedir. Yukarıdaki tanımdan açık olarak;

i) $p_1 = p_2 = 2$ ve $p_3 = q$ değerleri için $H_{2,2,q} = H_q$ Hecke grupları elde edilir.

ii) $p_1 = p_2 = p \neq 2$ ve $p_3 = q$ seçilirse $T = S$ olduğundan $H_{p,p,q} = H_{p,q}$ genel Hecke grupları elde edilir.

Bu tezde $p_1 = 2$, $p_2 = p$ ve $p_3 = q$ özel durumları için elde edilen $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları çalışılmıştır.

Burada çalışmamızda kullanılacak bazı metodlar verilecektir.

2.4 Permütasyon Metodu

D. Singerman permütasyon metodunu ‘‘Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups’’ ve ‘‘Finitely maximal Fuchsian groups’’ çalışmalarında literatüre kazandırmıştır [13, 14]. Bu yöntem yardımıyla bir Fuchsian grubun sonlu indeksli normal alt grubunun simgesi bulunup, alt grubun cebirsel yapısı hakkında bazı bilgiler elde edilebilir.

2.4.1 Teorem : [13] Bir Γ Fuchsian grubu $(g;\, m_1, m_2, \ldots, m_r;\, t, u)$ simgesine sahip ise Γ grubunun N indeksli ve

$$(g';\; n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1p_1}, \ldots, n_{r1}, n_{r2}, \ldots, n_{rp_r};\; s';\; t')$$

simgeli bir Γ_1 alt grubu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki koşulların sağlamasıdır.

a) G, N nokta üzerinde geçişli bir permütasyon grubu olmak üzere, aşağıdaki iki koşulu sağlayan bir $\theta\colon \Gamma \rightarrow G$ epimorfizması vardır;

1) $\theta(x_j)$ permütasyonu, uzunlukları m_j den daha kısa olan p_j tane devirden oluşur ve bu devirlerin uzunlukları;

$$\frac{m_j}{n_{j1}}, \frac{m_j}{n_{j2}}, \dots, \frac{m_j}{n_{jp_j}}$$

sayıları olur.

2) $\theta(\gamma)$ sayısı, her bir $\delta(\gamma)$ permütasyonundaki devirlerin sayısı ise;

$$s' = \sum_{k=1}^{s} \delta(p_k)$$

ve

$$t' = \sum_{k=1}^{t} h_1$$

eşitlikleri vardır.

b) Hiperbolik alan $2\pi\mu(\Gamma)$ olmak üzere;

$$\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)} = N$$

eşitliği vardır.□

2.4.1 Teoremin en önemli sonucu şudur:

Γ Fuchian grubu $(g;\, m, m_2, \dots, m_r)$ simgesine sahip ve Γ grubunun N indeksli bir normal alt grubu Γ_1 ile x_i $(i = 1, 2, \dots, k)$ üreteçlerinin bölüm grubundaki mertebeleri l_i olmak üzere Γ_1 alt grubunun simgesi;

$$\left(g';\left(\frac{m_1}{l_1}\right)^{N/l_1}, \left(\frac{m_2}{l_2}\right)^{N/l_2}, \dots, \left(\frac{m_k}{l_k}\right)^{N/l_k}\right)$$

biçimindedir. Buradaki g' cinsi Riemann-Hurtwitz formülü yardımıyla bulunur [14].

2.5 Riemann-Hurwitz Formülü

$(g;\, m_1, \dots, m_r; t; u)$ simgeye sahip bir Γ Fuchsian grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanı, $2\pi\mu(\Gamma)$ ise;

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

eşitliği vardır. Bu eşitlik ile Γ grubunun cinsi olan g sayısı bulunabilir. Eğer Γ_1, Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu ise;

$$\left|{}^{\Gamma}/_{\Gamma_1}\right| = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)}$$

eşitliği indeksi verir. Bu eşitliğe Riemann-Hurtwitz Formülü adı verilir$[2, 14]$.

2.6 Reidemeister ve Schreier Metodu

Reidemeister ve Schreier metodu, bir grubun sonlu indeksli bir normal alt grubunun üreteçlerini ve grup sunuşunu elde etmek için kullanılır [15].

G bir grup ve üreteçlerinin ailesi $\{g_i\}$ olsun. G grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu H ise metod, ${}^{G}/_{H}$ bölüm grubunun sunuşuna ve eleman sayısına göre uygulanır. Bölüm grubunun eleman sayısına eşit elemanlı bir Σ Schreier transversali seçilir. Transversal aşağıdaki iki koşulu sağlamalıdır:

a) Birim transversalde olmalıdır. Yani $I \in \Sigma$ dır.

b) Σ transversali sağdan sadeleştirme işlemine göre kapalı olmalıdır. Yani; $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1}, g_{i_2}, \dots, g_{i_{r-1}} \in \Sigma$ olmalıdır.

Transversal kümesi oluşturulduktan sonra H grubunu üreten üreteçler aşağıdaki yöntem yardımıyla hesaplanabilir $[2]$;

$$(\Sigma nın\ bir\ elemanı).(G\ nin\ bir\ üreteci).(önceki\ çarpımın\ koset\ gösterimi)^{-1}$$

2.7 Kuvvet Alt Gruplar

G bir grup ve m pozitif bir tamsayı olsun. G grubundaki bütün elemanların m. kuvvetleri ile üretilen ve G^m sembolü ile gösterilen alt gruba kuvvet alt grubu denir. G^m kuvvet alt grubunun gösterimi;

$$G^m = \langle x_1^m, x_2^m, \dots \rangle$$

şeklindedir.

Burada $m, n \in \mathbb{Z}^+$ iken

$$G^{m.n} \subset (G^m)^n$$

olduğu görülür.

Kuvvet alt gruplarının, normal alt grup olduğu durumları gösterebilmek için bazı tanımlar gereklidir. Aşağıda bu tanımlamalar yapılmıştır. Kuvvet alt grupları tamamen değişmez özelliğe sahip olduklarından normal alt gruplardır [16].

Hecke grupları ve bu grupların genellemelerinin, genişletilmelerinin kuvvet alt grupları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır[3,4,13,18,19,20,21,22,23,24].

Genelleştirilmiş Hecke gruplarının $m.$ kuvvet alt grupları bulunurken, var olan bağıntılara, bütün elemanların $m.$ kuvvetlerini birime eşitleyen bağıntılar eklenerek bölüm grubunun sunuşu elde edilir. Daha sonra Reidemeister-Schreier yöntemi kullanılarak kuvvet alt grubunun üreteçleri bulunur.

2.7.4 Örnek : Reidemeister-Schreier metodunun kullanarak S_3 üçgen grubunun 2. kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulalım. S_3 üçgen grubunun sunuşunun

$$S_3 = \langle a, b | a^2 = b^3 = (ab)^2 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Burada bütün elemanların karelerini birime eşitleyen bağıntılarak eklenerek, bölüm grubu aşağıdaki gibi bulunur.

$$S_3 \big/ S_3^2 = \langle a, b | a^2 = b^3 = (ab)^2 = a^2 = b^2 = (ab)^2 = I \rangle$$

Buradaki, $b^3 = b^2 = I$ bağıntılarıyla $b = I$ elde edilir. Böylece,

$$S_3 \big/ S_3^2 = \langle a | a^2 = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2$$

bulunur. Burada Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, a\}$$

olarak seçerek, Reidemeister-Schreier metodunu uygulayabiliriz. Burada mümkün olan çarpımlar;

$$I.a.(a)^{-1} = I$$

$$a.a.(I)^{-1} = I$$

$$I.b.(I)^{-1} = b$$

$$a.b.(a)^{-1} = aba.$$

biçimindedir. Burada $(ab)^2 = I$ olduğundan $aba = b^{-1}$ bulunur. Buradan

$$S_3^2 = \langle b | b^3 = I \rangle \cong \mathbb{Z}_3$$

elde edilir.

2.8 Komütatör Alt Gruplar

G bir grup ve a, b ∈ G olsun. Bu iki elamanın komütatörü,

$$[a,b] = aba^{-1}b^{-1}$$

biçiminde tanımlanabilir.

2.8.1 Tanım : Bir G grubunda G' sembolüyle gösterilen ve bütün elemanların komütatörleri tarafından üretilen alt gruba komütatör alt grup denir. ve $G' \leq G$ özelliği sağlanır. Komütatör alt gruplar, kuvvet alt grupları gibi tamamen değişmez özelliğe sahip olduğundan normal alt gruplardır [16].

Bir G grubu için, $G/_{G'}$ bölüm grubu değişmeli olan en büyük eleman sayılı gruptur. Ayrıca G bir grup ve $N \trianglelefteq$ G olsun. Eğer $G/_{N}$ değişmeli ise $G' \leq N$ olur [17].

Genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt grubu bulunurken grup sunuşlarına üreteçlerin değişmelilik koşulu eklenir. Daha sonra Reidemeister-Schreier metodu kullanılarak komütatör alt grubun üreteçleri bulunur.

Hecke grupları ve bu grupların genellemelerinin, genişletilmelerinin komütatör alt grupları bir çok yazar tarafından çalışılmıştır [18,25,26,27,28].

3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ KUVVET ALT GRUPLARI

3.1 Teorem : p tek tamsayısı ile q tamsayısı; $2 \leq p \leq q < \infty$, $p+q > 4$ ve $(p,q)=1$ koşullarını sağlasın. $m|p$ olacak biçimdeki m pozitif tamsayısı için $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H_{2,p,q}^{m}$ kuvvet alt grubu; 2 mertebeli m tane, $\frac{p}{m}$ mertebeli 1 tane ve q mertebeli m tane devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

$H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun üreteçleri;

$$T, STS^{-1}, S^{2}TS^{-2}, \ldots, S^{m-1}TS^{1-m}, S^{m}, W, SWS^{-1}, \ldots, S^{m-1}WS^{1-m}$$

ve simgesi

$$\left(0; 2^{(m)}, \frac{p}{m}, q^{(m)}, \infty\right)$$

şeklindedir.

İspat : Öncelikle $H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^{m}$ bölüm grubunu oluşturalım. Bölüm grubu

$$H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^{m} = \left\langle T, S, W \middle| \begin{array}{c} T^{2} = S^{P} = W^{q} = (TSW)^{\infty} = I, \\ T^{m} = S^{m} = W^{m} = (TSW)^{m} = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

biçimindedir. Burada $(p,q)=1$ ve $m|p$ olduğundan m tek ve $(m,q)=1$ olur. Böylece,

$T^{2} = T^{m} = I$ ise, $T = I$,

$S^{p} = S^{m} = I$ ise, $S^{m} = I$,

$W^{q} = W^{m} = I$ ise, $W = I$,

bulunur. Bölüm grubunun son hali,

$$H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^{m} = \langle S | S^{m} = I \rangle \cong C_{m}$$

şeklinde oluşur.

Şimdi $H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bir Σ Schreier transversalini bölüm grubunun son halinden yararlanarak

$$\Sigma = \{I, S, S^2, S^3, \dots, S^{m-1}\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$$I.T.(I)^{-1} = T,$$
$$S.T.(S)^{-1} = STS^{-1},$$

$$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^{-2},$$

$$\vdots$$

$$S^{m-1}.T.(S^{m-1})^{-1} = S^{m-1}TS^{1-m},$$

$$I.S.(S)^{-1} = I,$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I,$$
$$S^2.S.(S^3)^{-1} = I,$$

$$\vdots$$

$$S^{m-1}.S.(I)^{-1} = S^m,$$

$$I.W.(I)^{-1} = W,$$

$$S.W.(S^2)^{-1} = SWS^{-2},$$

$$S^2.W.(S^3)^{-1} = SWS^{-3},$$

$$\vdots$$

$$S^{m-1}.W.(S^{m-1})^{-1} = S^{m-1}WS^{1-m},$$

biçiminde yazılır.

Buradan $H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun üreteçleri;

$$T, STS^{-1}, S^2TS^{m-2}, \dots, S^2TS^{m-1}, S^m, W, SWS^{-1}, \dots, S^{m-1}WS^{1-m}$$

olarak bulunur.

Şimdi $H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun cinsini Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak bulalım. Burada $H_{2,p,q}$ grubunun simgesi $(0; 2, p, q, \infty)$ ve $H_{2,p,q}^{m}$ kuvvet alt grubunun simgesi $(g'; 2^{(m)}, \frac{p}{m}, q^{(m)}, \infty)$ olduğundan, Riemann-Hurwitz formülüne göre,

$$m = \frac{2.g' - 2 + m.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 1 - \frac{1}{\frac{p}{m}} + m.\left(1 - \frac{1}{q}\right) + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g' = 0$ elde edilir. $H_{2,p,q}^{m}$ kuvvet alt grubunun simgesi,

$$\left(0; 2^{(m)}, \frac{p}{m}, q^{(m)}, \infty\right)$$

olarak bulunur.□

3.2 Örnek : $H_{2,35,39}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H_{2,35,39}^{7}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini bulalım. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,35,39}/H_{2,35,39}^{7} = \left\langle T, S, W \,\middle|\, \begin{matrix} T^2 = S^{35} = W^{39} = (TSW)^{\infty} = I, \\ T^7 = S^7 = W^7 = (TSW)^7 = \dots = I \end{matrix} \right\rangle$$

biçimindedir. Gösterimdeki $T^2 = T^7 = I$, $W^{39} = W^7 = I$ ve $S^{35} = S^7 = I$ bağıntıları kullanılarak $T = I$, $W = I$ ve $S^7 = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubu;

$$H_{2,35,39}/H_{2,35,39}^{7} = \langle S | S^7 = I \rangle \cong C_7$$

şeklindedir. Burada $\sum$ Schreier transversali

$$\{I, S, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6\}$$

olarak seçilirse, Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar;

$I.T.(I)^{-1} = T$

$S.T.(S)^{-1} = STS^{34}$

$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^{33}$

$S^3.T.(S^3)^{-1} = S^3TS^{32}$

$S^4.T.(S^4)^{-1} = S^4TS^{31}$

$S^5.T.(S^5)^{-1} = S^5T\,S^{30}$

$S^6.T.(S^6)^{-1} = S^6TS^{29}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$S.S.(S^2)^{-1} = I$

$S^2.S.(S^3)^{-1} = I$

$S^3.S.(S^4)^{-1} = I$

$S^4.S.(S^5)^{-1} = I$

$S^5.S.(S^6)^{-1} = I$

$S^6.S.(I)^{-1} = S^7$

$I.W.(I)^{-1} = W$

$S.W.(S)^{-1} = SWS^{34}$

$S^2.W.(S^2)^{-1} = S^2WS^{33}$

$S^3.W.(S^3)^{-1} = S^3WS^{32}$

$S^4.W.(S^4)^{-1} = S^4WS^{31}$

$S^5.W.(S^5)^{-1} = S^5WS^{30}$

$S^6.W.(S^6)^{-1} = S^6WS^{29}$

biçimindedir. O halde $H^7_{2,35,39}$ kuvvet alt grubunun üreteçleri,

T $, STS^{34}$, S^2TS^{33}, S^3TS^{32}, S^4TS^{31}, S^5TS^{30}, S^6TS^{29}, W, SWS^{34} , S^2WS^{33}

$S^3WS^{32}, S^4WS^{31}, S^5WS^{30}$, S^6WS^{29}, S^7

olarak bulunur.

Ayrıca $H_{2,35,39}$ grubunun simgesi $(0; 2,35,39,\infty)$ ve $H^7_{2,35,39}$ kuvvet alt grubunun simgesi $(g'; 2^{(7)}, 5,\ 39^{(7)}, \infty)$ olduğundan Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak,

$$7 = \frac{2.g' - 2 + 7.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 7.\left(1 - \frac{1}{39}\right) + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{35} + 1 - \frac{1}{39} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

$H^7_{2,35,39}$ kuvvet alt grubunun cinsi $g' = 0$ olarak bulunur. Böylece $H^7_{2,35,39}$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(7)}, 5, 39^{(7)}, \infty)$$

olarak bulunur.

3.3 Örnek : $H_{2,21,24}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^7_{2,21,24}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini elde edelim. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,21,24}/H^7_{2,21.24} = \left\langle T,S,W \middle| \begin{matrix} T^2 = S^{21} = W^{24} = (TSW)^{\infty} = I, \\ T^7 = S^7 = W^7 = (TSW)^7 = \cdots = I \end{matrix} \right\rangle$$

biçimindedir. Gösterimdeki bağıntılar kullanılarak

$$T^2 = T^7 = I \text{ ise } T = I$$

$$S^{21} = S^7 = I \text{ ise } S^7 = I$$

$$W^{24} = W^7 = I \text{ ise } W = I$$

olarak bulunur. Böylece bölüm grubu;

$$H_{2,21,24}/H^7_{2,21,24} = \langle S | S^7 = I \rangle \cong C_7$$

şeklindedir. Burada $\sum$ Schreier transversali aşağıdaki gibi seçilirse

$$\sum = \{I, S, S^2, S^3, S^4, S^5, S^6\}$$

Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar;

$I.T.(I)^{-1} = T$

$S.T.(S)^{-1} = STS^{20}$

$S^2.T.(S^2)^{-1} = S^2TS^{19}$

$S^3.T.(S^3)^{-1} = S^3TS^{18}$

$S^4.T(S^4)^{-1} = S^4TS^{17}$

$S^5.T.(S^5)^{-1} = S^5TS^{16}$

$S^6.T.(S^6)^{-1} = S^6TS^{15}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$S.S.(S^2)^{-1} = I$

$S^2.S.(S^3)^{-1} = I$

$S^3.S.(S^4)^{-1} = I$

$S^4.S.(S^5)^{-1} = I$

$S^5.S.(S^6)^{-1} = I$

$S^6.S.(I)^{-1} = S^7$

$I.W.(I)^{-1} = W$

$S.W.(S)^{-1} = SWS^{20}$

$S^2.W.(S^2)^{-1} = S^2WS^{19}$

$S^3.W.(S^3)^{-1} = S^3WS^{18}$

$S^4.W.(S^4)^{-1} = S^4WS^{17}$

$S^5.W.(S^5)^{-1} = S^5WS^{16}$

$S^6.W.(S^6)^{-1} = S^6WS^{15}$

$H^7_{2,4,21}$ grubunun üreteçleri ;

T , $\mathrm{ST}S^{20}$, $S^2\mathrm{T}S^{19}$, $S^3\mathrm{T}S^{18}$, $S^4\mathrm{T}S^{17}$, $S^5\mathrm{T}S^{16}$, $S^6\mathrm{T}S^{15}$, W, $\mathrm{SW}S^{20}$, $S^2\mathrm{W}S^{19}$, $S^3\mathrm{W}S^{18}$, $S^4\mathrm{W}S^{17}$, $S^5\mathrm{W}S^{16}$, $S^6\mathrm{W}S^{15}$, S^7

biçiminde elde edilir.

Ayrıca bu normal alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,21,24}$ grubunun simgesi $(0; 2,21,24, \infty)$ ve $H^7_{2,21,24}$ grubunun simgesi $(g'; 2^{(7)}, 3, 24^{(7)}, \infty)$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$7 = \frac{2.g' - 2 + 7.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{3}\right) + 7.\left(1 - \frac{1}{24}\right) + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{21} + 1 - \frac{1}{24} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

buradan $g' = 0$ elde edilir. $H^7_{2,21,24}$ grubunun simgesi

$$(0; 2^{(7)}, 3\, , 24^{(7)}, \infty)$$

olarak bulunur.

3.4 Teorem : p tamsayısı ile q tek tamsayısı;$2 \leq p \leq q < \infty$,$p + q > 4$ ve $(p, q) = 1$ koşullarını sağlasın. $m \mid q$ olacak biçimdeki m pozitif tamsayısı için $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^m_{2,p,q}$ kuvvet alt grubu; 2 mertebeli m tane, p mertebeli m tane ve $\frac{q}{m}$ mertebeli 1 tane devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

$H^m_{2,p,q}$ alt grubunun üreteçleri;

$$T, WTW^{-1}, W^2TW^{-2}, \ldots, W^{m-1}TW^{1-m}, S, WSW^{-1}, \ldots, W^{m-1}SW^{1-m}, W^m$$

ve simgesi,

$$\left(0; 2^{(m)}, p^{(m)}, \frac{q}{m}, \infty\right)$$

şeklindedir.

İspat : $H_{2,p,q}/H^m_{2,p,q}$ bölüm grubu

$$H_{2,p,q}/H^m_{2,p,q} = \left\langle T, S, W \,\middle|\, \begin{array}{c} T^2 = S^P = W^q = (TSW)^\infty = I, \\ T^m = S^m = W^m = (TSW)^m = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

biçimindedir.

Burada $(m, q) = 1$ ve $m \mid q$ olduğundan m tek ve $(m, p) = 1$ olur. Böylece,

$$T^2 = T^m = I \text{ ise } T = I$$

$$S^p = S^m = I \text{ ise } S = I$$

$$W^q = W^m = I \text{ ise } W^m = I$$

bulunur. Böylece bölüm grubu,

$$H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^m = \langle W | W^m = I \rangle \cong C_m$$

şeklindedir.

Şimdi $H_{2,p,q}^m$ alt grubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bir $\sum$ Schreier transversalini;

$$\sum = \{I, W, W^2, W^3, \dots, W^{m-1}\}$$

olarak seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$I.T.(I)^{-1} = T$

$W.T.(W)^{-1} = WTW^{-1}$

$W^2.\mathrm{T}.(W^2)^{-1} = W^2$

$\vdots$

$W^{m-1}.T.(W^{m-1})^{-1} = W^{m-1}TW^{1-m}$

$I.S.(I)^{-1} = S$

$W^2.S.(W^3)^{-1} = I$

$W.S.(W^2)^{-1} = I$

$\vdots$

$W^{m-1}.S.(W^{m-1})^{-1} = W^{m-1}.S.W^{1-m}$

$I.W.(I)^{-1} = I$

$W.W.(W^2)^{-1} = I$

$W^2.W.(W^3)^{-1} = I$

$\vdots$

$W^{m-1}.W.(I)^{-1} = W^m$

biçiminde yazılır. Buradan $H_{2,p,q}^m$ alt grubunun üreteçleri;

$$T, WTW^{-1}, W^2TW^{-2}, \dots, W^{m-1}TW^{1-m}, S, WSW^{-1}, \dots, W^{m-1}SW^{1-m}, W^m$$

olarak bulunur.

Şimdi bu alt grubun cinsini Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak bulalım. Burada $H_{2,p,q}$ grubunun simgesi $(0; 2, p, q, \infty)$ ve $H_{2,p,q}^m$ kuvvet alt grubunun simgesi; $\left(g'; 2^{(m)}, p^{(m)}, \frac{q}{m}, \infty\right)$ olduğundan, Riemann-Hurwitz formülüne göre,

$$m = \frac{2.g' - 2 + m.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + m.\left(1 - \frac{1}{p}\right) + 1 - \frac{1}{\frac{q}{m}} + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g' = 0$ elde edilir. $H_{2,p,q}^m$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$\left(0; 2^{(m)}, p^{(m)}, \frac{q}{m}, \infty\right)$$

olarak bulunur.□

3.5 Örnek : $H_{2,7,25}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H_{2,7,25}^5$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini bulalım. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,7,25}/H_{2,7,25}^5 = \langle T, S, W \mid T^2 = S^7 = W^{25} = (TSW)^\infty = I, T^5 = S^5 = W^5 = I \rangle$$

biçimindedir. Gösterimdeki $T^2 = T^5 = I$, $S^7 = S^5 = I$ ve $W^{25} = W^5 = I$ bağıntıları kullanılarak $T = I, S = I$ ve $W^5 = I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubu;

$$H_{2,7,25}/H_{2,7,25}^5 = \langle W | W^5 = I \rangle \cong C_5$$

şeklindedir. Burada $\sum$ Schreier transversali

$$\{I, W, W^2, W^3, W^4\}$$

olarak seçilirse, Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar,

$I.T.(I)^{-1} = T$

$W.T.(W)^{-1} = WTW^{24}$

$W^2.T.(W^2)^{-1} = W^2TW^{23}$

$W^3.T.(W^3)^{-1} = W^3TW^{22}$

$W^4.T.(W^4)^{-1} = W^4TW^{21}$

$I.S.(I)^{-1} = S$

$W.S.(W)^{-1} = WSW^{24}$

$W^2.S.(W^2)^{-1} = W^2SW^{23}$

$W^3.S.(W^3)^{-1} = W^3SW^{22}$

$W^4.S.(W^4)^{-1} = W^4SW^{21}$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$W.W.(W^2)^{-1} = I$

$W^2.W.(W^3)^{-1} = I$

$W^3.W.(W^4)^{-1} = I$

$W^4.W.(I)^{-1} = W^5$

biçimindedir. O halde $H^5_{2,7,25}$ grubunun üreteçleri;

T $,\mathrm{WT}W^{24},\ W^2\mathrm{T}W^{23}, W^3\mathrm{T}W^{22},\ W^4\mathrm{T}W^{21}, S, \mathrm{WS}W^{24},\ W^2\mathrm{S}W^{23}, W^3\mathrm{S}W^{22}, W^4\mathrm{S}W^{21}, W^5$

olarak bulunur.

Ayrıca $H_{2,7,25}$ grubunun simgesi $(0; 2,7,25, \infty)$ ve $H^5_{2,7,25}$ kuvvet alt grubunun simgesi $(g'; 2^{(5)}, 7^{(5)}, 5, \infty)$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak,

$$5 = \frac{2.g' - 2 + 5.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 5.\left(1 - \frac{1}{7}\right) + \left(1 - \frac{1}{5}\right) + 1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{7} + 1 - \frac{1}{25} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

$H^5_{2,7,25}$ kuvvet alt grubunun cinsi $g' = 0$ olarak bulunur. Böylece $H^5_{2,7,25}$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(5)}, 7^{(5)}, 5, \infty)$$

olarak bulunur.

3.6 Örnek : $H_{2,4,9}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^3_{2,4,9}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini bulalım. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,4,9}/H^3_{2,4,9} = \left\langle T, S, W \middle| \begin{array}{c} T^2 = S^4 = W^9 = (TSW)^\infty = I, \\ T^3 = S^3 = W^3 = (TSW)^3 = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

biçimindedir. Burada;

$$T^2 = T^3 = I \text{ ise}, T = I$$

$$S^4 = S^3 = I \text{ ise}, \quad S = I$$

$$W^9 = W^3 = I \text{ ise}, \quad W^3 = \mathrm{I}$$

elde edilir. Böylece bölüm grubu;

$$H_{2,4,9}/H_{2,4,9}^{3} = \langle W \mid W^{3} = I \rangle \cong C_3$$

şeklindedir. Burada $\sum$ Schreier transversali

$$\sum = \{I, W, W^2\}$$

olarak seçilirse, Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar;

$I.T.(I)^{-1} = T$

$W.T.(W)^{-1} = WTW^{-1}$

$W^2.T.(W^2)^{-1} = W^2TW^{-2}$

$I.S.(I)^{-1} = S$

$W.S.(W)^{-1} = I$

$W^2.S.(W^2)^{-1} = W^2SW^{-2}$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$W.W.(W^2)^{-1} = I$

$W^2.W.(I)^{-1} = W^3$

biçimindedir. O halde $H_{2,4,9}^{3}$ kuvvet alt grubunun üreteçleri,

$$\mathrm{T}\ , \mathrm{WT}W^{-1},\ W^2\mathrm{T}W^{-2}, S, WSW^{-1}\ , W^2\mathrm{S}W^{-2}, W^3$$

olarak bulunur.

Ayrıca $H_{2,4,9}$ grubunun simgesi $(0; 2,4,9,\infty)$ ve $H_{2,4,9}^{3}$ kuvvet alt grubunun simgesi $(g'; 2^{(3)}, 4^{(3)}, 3, \infty)$ olduğundan Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak,

$$3 = \frac{2.g' - 2 + 3.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 3.\left(1 - \frac{1}{4}\right) + 1 - \frac{1}{3} + +1 - \frac{1}{\infty}}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

$H^3_{2,4,9}$ kuvvet alt grubunun cinsi $g' = 0$ olarak bulunur. Böylece $H^3_{2,4,9}$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$(0; 2^{(3)}, 4^{(3)}, 3, \infty)$$

olarak bulunur.

3.7 Teorem : p çift ile q tek tamsayısı; $2 \leq p \leq q < \infty$, $p + q > 4$ ve $(p, q) = 1$ koşullarını sağlasın. m pozitif çift tamsayısı için $(p, m) = 2$ ve *(q,m) =1* olmak üzere, $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun alt grubu $H^m_{2,p,q}$ grubu; $2m$ mertebeli dihedral gruba izomorftur.

$H^m_{2,p,q}$ grubunun üreteçleri,

$$S^2, TS^2T^{-1}, TSTS^2T^{-1}S^{-1}T^{-1}, \dots, TSTSTS \dots TS^2T^{-1} \dots S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T, \dots,$$
$$W, TWT^{-1}, SWS^{-1}, TSWS^{-1}T^{-1}, TSTWT^{-1}, TSTWT^{-1}S^{-1}T^{-1},$$
$$TSTSWS^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}, \dots, TSTSTS \dots TSWS^{-1}T \dots S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}S^{-1}T^{-1}.$$

Ayrıca bu alt grubun simgesi,

$$\left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(m)}, q^{(2m)}, \infty^{(2)}\right)$$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle $H_{2,p,q}/H^m_{2,p,q}$ bölüm grubunu oluşturalım.

$$\langle T, S, W \mid T^2 = S^P = W^q = (TSW)^\infty = I, T^m = S^m = W^m = (TSW)^m = I \rangle$$

elde edilir.

$T^2 = T^m = I$ ise $T^2 = I$

$S^p = S^m = I$ ise $S^{(p,m)} = S^2 = I$

$W^m = W^q = I$ ise $W = I$

$T^2 = I$ ve $S^m = I$ ise $(TS)^m = I$

Şimdi $H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun gösterimini bulmak için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bölüm grubunun bir Schreier transversalini;

$$\sum = \{I, T, S, TS, TST, TSTS, \dots, TSTSTS \dots TS\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$S.T.(TSTS \dots TS)^{-1} = I$

$TS.T.(TST)^{-1} = I$

$TST.T.(TS)^{-1} = I$

$TSTS.T.(TSTST)^{-1} = I$

$\vdots$

$TSTS \dots TS.T.(S)^{-1} = TSTS \dots TSTS^{-1}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(TS)^{-1} = I$

$S.S.(I)^{-1} = S^2$

$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$

$TST.S.(TSTS)^{-1} = I$

$\vdots$

$TSTS.S.(TSTSTS \dots T)^{-1} = TSTSTS \dots TS^2T^{-1} \dots S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T$

$I.W.(I)^{-1} = W$

$T.W.(T)^{-1} = TWT$

$S.W.(S)^{-1} = SWS^{-1}$

$TS.W.(TS)^{-1} = TSWS^{-1}T$

$TST.W.(TST)^{-1} = TSTWT^{-1}S^{-1}T$

$TSTS.W(TSTS)^{-1} = TSTSWS^{-1}T^{-1}S^{-1}T$

$\vdots$

$TSTSTS \dots TS.W.(TSTSTS \dots TS)^{-1} = TSTSTS \dots TSWS^{-1}T \dots S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T$

şeklinde elde edilir. $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun üreteçlerini;

$S^2, TS^2T, TSTS^2TS^{-1}T, \dots, TSTSTS \dots TS^2T \dots S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T, W, TWT, SWS^{-1}, TSWS^{-1}T,$

$TSTWTS^{-1}T, TSTSWS^{-1}TS^{-1}T, \dots, TSTSTS \dots TSWS^{-1}T \dots S^{-1}TS^{-1}TS^{-1}T$

olarak elde etmiş oluruz.

Ayrıca bu alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,p,q}$ grubunun simgesi $(0; 2, p, q, \infty)$ ve $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun simgesi $\left(g'; \left(\frac{p}{2}\right)^{(m)}, q^{(2m)}, \infty^{(2)}\right)$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$2m = \frac{2.g' - 2 + m.\left(1 - \frac{1}{\frac{p}{2}}\right) + 2m.\left(1 - \frac{1}{q}\right) + 2\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

buradan $g' = 0$ elde edilir. $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun simgesi

$$\left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(m)}, q^{(2m)}, \infty^{(2)}\right)$$

olarak bulunur.□

3.8 Örnek : 3.7 teoreme göre $H^2_{2,10,11}$ alt grubunun grup sunuşunu elde edelim. Bu normal alt grup ile elde edilen bölüm grubu;

$H_{2,10,11}/H^2_{2,10,11} = \langle T, S, W | T^2 = S^{10} = W^{11} = (TSW)^\infty = I, T^2 = S^2 = W^2 = I \rangle$

biçimindedir. Burada ;

$S^{10} = S^2 = I$ eşitliğinden, $S^2 = I$

$W^{11} = W^2 = I$ eşitliğinden, $W = I$

$T^2 = I$ ve $S^2 = I$ eşitliğinden, $(TS)^2 = I$

şeklinde bulunur.

Bölüm grubu için Schreier transversali aşağıdaki gibi oluşturalım

$$\sum = \{I, T, S, TS\}$$

Artık Reidemeister-Schreier metodunu uygulayabiliriz.

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$

$TS.T(S)^{-1} = TSTS^{-1}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(TS)^{-1} = I$

$S.S.(I)^{-1} = S^2$

$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$

$$I.W.(I)^{-1} = W$$

$$T.W.(T)^{-1} = TWT$$

$$S.W.(S)^{-1} = SWS^{-1}$$

$$TS.W.(TS)^{-1} = TSWS^{-1}T$$

elde edilir. Böylece $H^2_{2,10,11}$ grubunun üreteçleri;

$$STS^{-1}T, TSTS^{-1}, S^2, TS^2T, W, TWT, SWS^{-1}, TSWS^{-1}T$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca bu alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,10,11}$ grubunun simgesi $(0; 2,10,11,\infty)$ ve $H^2_{2,10,11}$ grubunun simgesi $(g'; 5^{(2)}, 11^{(4)}, \infty^{(2)})$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$4 = \frac{2.g' - 2 + 2.\left(1 - \frac{1}{5}\right) + 4.\left(1 - \frac{1}{11}\right) + 2.\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{10} + 1 - \frac{1}{11} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

buradan $g' = 0$ elde edilir. $H^2_{2,10,11}$ grubunun simgesi

$$(0; 5^{(2)}, 11^{(4)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.9 Teorem : p tek ile q çift tamsayısı; $2 \leq p \leq q < \infty$, $p + q > 4$ ve $(p,q) = 1$ koşullarını sağlasın. m pozitif çift tamsayısı için $(q,m) = 2$ ve *(p,m)=1* olmak üzere, $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş hecke grubunun alt grubu $H^m_{2,p,q}$ grubu; $2m$ mertebeli dihedral gruba izomorftur. $H^m_{2,p,q}$ grubunun üreteçleri,

$$W^2, TW^2T^{-1}, TWTW^2T^{-1}W^{-1}T^{-1}, \dots, TWTWTW \dots TW^2T^{-1} \dots W^{-1}TW^{-1}TW^{-1}T, \dots,$$
$$S, TST^{-1}, WSW^{-1}, TWSW^{-1}T^{-1}, TWTST^{-1}W^{-1}T^{-1}, TWTST^{-1}W^{-1}T^{-1},$$
$$TWTWSW^{-1}T^{-1}W^{-1}T^{-1}, \dots, TWTW \dots TWTW^{-1}$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grubun simgesi ,

$$\left(0;\ p^{(2m)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(m)}, \infty^{(2)}\right)$$

şeklindedir.

İspat : Öncelikle $H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^{m}$ bölüm grubunu oluşturalım.

$$\langle T,S,W \mid T^2 = S^P = W^q = (TSW)^\infty = I\ , T^m = S^m = W^m = (TSW)^m = I \rangle$$

elde edilir.

$T^2 = T^m = I$ ise $T^2 = I$

$S^p = S^m = I$ ise $S^{(p,m)} = S^2 = I$

$W^q = W^m = I$ ise $W^{(q,m)} = W^2 = I$

$T^2 = I$ ve $W^m = I$ ise $(TW)^m = I$

Şimdi $H_{2,p,q}^{m}$ alt grubunun gösterimini bulmak için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bölüm grubunun bir Schreier transversalini;

$$\sum = \{I, T, W, TW, TWT, TWTW, \dots, TWTWTW \dots TW\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$W.T.(TWTW \dots TW)^{-1} = I$

$TW.T.(TWT)^{-1} = I$

$TWT.T.(TW)^{-1} = I$

$TWTW.T.(TWTWT)^{-1} = I$

$\vdots$

$TWTW \dots TW.T.(W)^{-1} = TWTW \dots TWTW^{-1}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(T)^{-1} = I$

$W.S.(I)^{-1} = S^2$

$TW.S.(T)^{-1} = TS^2T$

$TWT.S.(TSTS)^{-1} = I$

$\vdots$

$TWTW \dots TW.S.(TSTSTS \dots T)^{-1} = TWTW \dots TWSW^{-1}T \dots W^{-1}TW^{-1}T$

$I.W.(W)^{-1} = W$

$T.W.(TW)^{-1} = I$

$W.W.(I)^{-1} = W^2$

$TW.W.(T)^{-1} = TW^2T$

$TWT.W.(TWT)^{-1} = I$

$TWTW.W(TWT)^{-1} = TWTW^2T^{-1}W^{-1}T$

$\vdots$

$TWTW \dots TW.W.(TWTW \dots T)^{-1} = TWTW \dots TW^2T \dots W^{-1}TW^{-1}T$

şeklinde elde edilir. $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun üreteçlerini

$W^2, TW^2T, TWTW^2TW^{-1}T, \dots, TWTWTW \dots TW^2T \dots W^{-1}TW^{-1}TW^{-1}T, \dots, S, TST,$

$TWSW^{-1}T, TWTSTW^{-1}T, TWTSTW^{-1}T, TWTWSW^{-1}TW^{-1}T, \dots, TWTW \dots TWTW^{-1}$

olarak elde etmiş oluruz.

Ayrıca bu alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,p,q}$ grubunun simgesi $(0;2,p,q,\infty)$ ve $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun simgesi $\left(g';p^{(2m)},\left(\frac{q}{2}\right)^{(m)},\infty^{(2)}\right)$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$2m=\frac{2.g'-2+m.\left(1-\frac{1}{\frac{q}{2}}\right)+2m.\left(1-\frac{1}{p}\right)+2.\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{2.0-2+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{\infty}}$$

buradan $g'=0$ elde edilir. $H_{2,p,q}^{m}$ grubunun simgesi

$$\left(0;p^{(2m)},\left(\frac{q}{2}\right)^{(m)},\infty^{(2)}\right)$$

olarak bulunur.□

3.10 Örnek : 3.9 teoreme göre $H_{2,3,4}^{2}$ alt grubunun sunuşunu bulalım. Bu normal alt grup ile elde edilen bölüm grubu;

$H_{2,3,4}/H_{2,3,4}^{2}=\langle T,S,W \mid T^2=S^3=W^4=(TSW)^{\infty}=I,T^2=S^2=W^2=I\rangle$

biçimindedir. Burada ;

$S^3=S^2=I$ eşitliğinden, $S=I$

$W^4=W^2=I$ eşitliğinden, $W^2=I$

$T^2=I$ ve $W^2=I$ eşitliğinden, $(TW)^2=I$

şeklinde bulunur.

Bölüm grubunu bulmak için Schreier transversalini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$\sum=\{I,T,W,TW\}$$

Artık Reidemeister-Schreier metodunu uygulayabiliriz.

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$W.T.(TW)^{-1} = WTW^{-1}T$

$TW.T(W)^{-1} = TWTW^{-1}$

$I.S.(I)^{-1} = S$

$T.S.(T)^{-1} = TST$

$W.S.(W)^{-1} = WSW^{-1}$

$TW.S.(TW)^{-1} = TWSW^{-1}T$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$T.W.(TW)^{-1} = I$

$W.W.(I)^{-1} = W^2$

$TW.W.(T)^{-1} = TW^2T$

olur. Böylece $H^2_{2,3,4}$ grubunun üreteçleri;

$$WTW^{-1}T, TWTW^{-1}, W^2, TW^2T, S, TST, WSW^{-1}, TWSW^{-1}T$$

biçiminde elde edilir.

Ayrıca bu alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,3,4}$ grubunun simgesi $(0; 2,3,4,\infty)$ ve $H^2_{2,3,4}$ grubunun simgesi $(g'; 3^{(4)}, 2^{(2)}, \infty^{(2)})$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$4 = \frac{2.g' - 2 + 4.\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 2.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 2.\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

buradan $g' = 0$ elde edilir. $H^2_{2,3,4}$ grubunun simgesi

$$(0; 3^{(4)}, 2^{(2)}, \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

3.11 Teorem : p ile q ; $2 \le p \le q < \infty$ ve $p + q > 4$ koşullarını sağlayan iki çift tamsayı olsun. $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^2_{2,p,q}$ kuvvet alt grubu ; $\frac{p}{2}$ mertebeli dört tane ve $\frac{q}{2}$ mertebeli dört tane devirli grubun direkt çarpımına izomorftur. $H^2_{2,p,q}$ alt grubunun üreteçleri,

$S^2, TS^2T, WS^2W^{-1}, TWS^2W^{-1}T, W^2, TW^2T, SW^2S^{-1}, TSW^2S^{-1}T, TSTS^{-1}, TWTW^{-1},$

$, TSWTW^{-1}S^{-1}, TSWSW^{-1}T$

ve simgesi

$$\left(1; \left(\frac{p}{2}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}\right)$$

şeklindedir.

İspat : Öncelikle $H_{2,p,q}/H^m_{2,p,q}$ bölüm grubunu oluşturalım.

$$H_{2,p,q}/H^m_{2,p,q} = \left\langle T, S, W \middle| \begin{array}{c} T^2 = S^P = W^q = (TSW)^\infty = I, \\ T^2 = S^2 = W^2 = (TSW)^2 = \cdots = I \end{array} \right\rangle$$

biçimindedir. Burada yanlızca $m = 2$ için hesaplanabildiğinden $(\mathrm{m}, \mathrm{p}) = 2$,(m,q) = 2 eşitliklerinden

$T^2 = I$ eşitliğinden, $T = T^{-1}$

$S^p = S^2 = I$ eşitliğinden, $S^2 = I$ ise $S = S^{-1}$

$W^q = W^2 = I$ eşitliğinden, $W^2 = I$ ise $W = W^{-1}$

$T^2 = I$ ve $S^2 = I$ eşitliğinden, $(TS)^2 = I$ ise $TS = ST$

$T^2 = I$ ve $W^2 = I$eşitliğinden, $(TW)^2 = I$ ise $TW = WT$

$S^2 = I$ ve $W^2 = I$eşitliğinden, $(SW)^2 = I$ ise $SW = WS$

elde edilir. Böylece $H_{2,p,q}/H_{2,p,q}^2$ bölüm grubuna değişmelilik koşulu gelir ve bölüm grubunun en son hali;

$$\langle T, S, W | T^2 = S^2 = W^2 = (TS)^2 = (TW)^2 = (SW)^2 = (TSW)^2 = I \rangle$$

şeklinde oluşur.

Şimdi $H_{2,p,q}^2$ alt grubunun üreteçlerini elde etmek için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bir $\sum$ Schreier transversalini bölüm grubunun son halinden yararlanarak;

$$\sum = \{I, T, S, W, TS, TW, SW, TSW\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$

$W.T.(TW)^{-1} = WTW^{-1}T$

$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$

$TW.T(W)^{-1} = TWTW^{-1}$

$SW.T.(TSW)^{-1} = SWT\,W^{-1}S^{-1}T$

$TSW.T.(SW)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(TS)^{-1} = I$

$S.S.(I)^{-1} = S^2$

$W.S.(SW)^{-1} = WSW^{-1}S^{-1}$

$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$

$TW.S.(TSW)^{-1} = TWSW^{-1}S^{-1}T$

$SW.S.(W)^{-1} = SWSW^{-1}$

$TSW.S.(TW)^{-1} = TSWSW^{-1}T$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$T.W.(TW)^{-1} = I$

$S.W.(SW)^{-1} = I$

$W.W.(I)^{-1} = W^2$

$TS.W.(TSW)^{-1} = I$

$TW.W.(T)^{-1} = TW^2T$

$SW.W.(S)^{-1} = S\,W^2S^{-1}$

$TSW.W.(TS)^{-1} = TSW^2S^{-1}T$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$(\mathrm{ST}S^{-1}T)^{-1} = TSTS^{-1}$

$(\mathrm{WT}W^{-1}T)^{-1} = TWTW^{-1}$

$(\mathrm{SWT}W^{-1}S^{-1}T)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}T$ …(1)

$(SWSW^{-1}).(WSW^{-1}S^{-1}) = SWS^2W^{-1}S^{-1}$

$(TWSW^{-1}S^{-1}T).(TSWSW^{-1}T) = TWS^2W^{-1}T$ … (2)

(1) ve (2) deki eşitlikler göz önüne alınarak; $H^2_{2,p,q}$ grubunun üreteçlerini;

$S^2, TS^2T, WS^2W^{-1}, TWS^2W^{-1}T, TWTW^{-1}, SWSW^{-1}, TSWTW^{-1}S^{-1}, TSWSW^{-1}T$

olarak buluruz.

Şimdi $H^2_{2,p,q}$ alt grubunun cinsini Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak bulalım. Burada $H_{2,p,q}$ grubunun simgesi $(0; 2, \mathrm{p}, \mathrm{q}, \infty)$ ve $H^2_{2,p,q}$ kuvvet alt grubunun simgesi $\left(g'; \left(\frac{p}{2}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}\right)$ olduğundan, Riemann-Hurwitz formülüne göre,

$$8 = \frac{2.g' - 2 + 4.\left(1 - \frac{1}{\frac{p}{2}}\right) + 4.\left(1 - \frac{1}{\frac{q}{2}}\right) + 4.\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{p} + 1 - \frac{1}{q} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g' = 1$ elde edilir. $H^2_{2,p,q}$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$\left(1; \left(\frac{p}{2}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}\right)$$

olarak bulunur.□

3.12 Örnek : $H_{2,4,6}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^2_{2,4,6}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini bulalım. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,4,6}/H^2_{2,4,6} = \left\langle T, S, W \middle| \begin{matrix} T^2 = S^4 = W^6 = (TSW)^2 = I, \\ T^2 = S^2 = W^2 = (TSW)^2 = \cdots = I \end{matrix} \right\rangle$$

biçimindedir. Burada

$T^2 = I$ eşitliğinden, $T = T^{-1}$

$S^4 = S^2 = I$ eşitliğinden, $S^2 = I$ ise $S = S^{-1}$

$W^6 = W^2 = I$ eşitliğinden $W^2 = I$ ise $W = W^{-1}$

$T^2 = I$ ve $S^2 = I$ eşitliğinden $(TS)^2 = I$ ise $TS = ST$

$T^2 = I$ ve $W^2 = I$eşitliğinden $(TW)^2 = I$ ise $TW = WT$

$S^2 = I$ ve $W^2 = I$ eşitliğinden $(SW)^2 = I$ ise $SW = WS$

olarak bulunur. Böylece $H_{2,4,6}/H^2_{2,4,6}$bölüm grubu;

$$\langle T, S, W | T^2 = S^2 = W^2 = (TS)^2 = (TW)^2 = (SW)^2 = (TSW)^2 = I \rangle$$

şeklindedir.Burada $\sum$ Schreier transversali

$$\sum = \{I, T, S, W, TS, TW, SW, TSW\}$$

olarak seçilirse, Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar,

$$I.T.(T)^{-1} = I$$

$$T.T.(I)^{-1} = I$$

$$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$$

$$W.T.(TW)^{-1} = WTW^{-1}T$$

$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$$

$$TW.T.(W)^{-1} = TWTW^{-1}$$

$$SW.T.(TSW)^{-1} = SWT\,W^{-1}S^{-1}T$$

$$I.S.(S)^{-1} = I$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I$$

$$S.S.(I)^{-1} = S^2$$

$$W.S.(SW)^{-1} = WSW^{-1}S^{-1}$$

$$TS.S.(T)^{-1} = TS^2T$$

$$TW.S.(TSW)^{-1} = TWSW^{-1}S^{-1}T$$

$$SW.S.(W)^{-1} = SWSW^{-1}$$

$$TSW.S.(TW)^{-1} = TSWSW^{-1}T$$

$$I.W.(W)^{-1} = I$$

$$T.W.(TW)^{-1} = I$$

$$S.W.(SW)^{-1} = I$$

$$W.W.(I)^{-1} = W^2$$

$$TS.W.(TSW)^{-1} = I$$

$TW.W.(T)^{-1} = TW^2T$

$SW.W.(S)^{-1} = SW^2S^{-1}$

$TSW.W.(TS)^{-1} = TSW^2S^{-1}T$

şeklinde elde edilir. Buradan,

$(STS^{-1}T)^{-1} = TSTS^{-1}$

$(WTW^{-1}T)^{-1} = TWTW^{-1}$

$(SWTW^{-1}S^{-1}T)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}T$ … (1)

$(SWSW^{-1}).(WSW^{-1}S^{-1}) = SWS^2W^{-1}S^{-1}$

$(TWSTWSW^{-1}S^{-1}T).(TSWSW^{-1}T) = TWS^2W^{-1}$ … (2)

(1) ve (2) deki eşitlikler göz önüne alınarak $H^2_{2,4,6}$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini

$S^2, TS^2T, WS^2W^{-1}, TWS^2W^{-1}T, W^2, TW^2T, SW^2S^{-1}, TSW^2S^{-1}T, TSTS^{-1}, TWTW^{-1}$,

$SWSW^{-1}, TSWTW^{-1}S^{-1}, TSWSW^{-1}T$

olarak buluruz.

Ayrıca $H_{2,4,6}$ grubunun simgesi $(0; 2,4,6,\infty)$ ve $H^2_{2,4,6}$ kuvvet alt grubunun simgesi$(g'; 2^{(4)}, 3^{(4)}, \infty^{(4)})$ olduğundan Riemann-Hurwitz formülü kullanılarak,

$$8 = \frac{2.g' - 2 + 4.\left(1 - \frac{1}{2}\right) + 4.\left(1 - \frac{1}{3}\right) + 4.\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{6} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

$H^2_{2,4,6}$ kuvvet alt grubunun cinsi $g' = 1$ olarak bulunur. Böylece $H^2_{2,4,6}$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$(1; 2^{(4)}, 3^{(4)}, \infty^{(4)})$$

olarak bulunur.

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ KOMÜTATÖR ALT GRUPLARI

4.1 Teorem : p ve q; $(p,q) = 1$, $2 \leq p \leq q < \infty$ ve $p + q < 4$ şartlarını sağlayan, p ve q tamsayı olmak üzere $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun komütatör alt grubu $H'_{2,p,q}$ grubu; iki tane sonsuz mertebeli devirli grubun direkt çarpımına izomorftur.

$H'_{2,p,q}$ grubunun üreteçleri;

$$[T, S^x], x = 1,2, \dots, p-1$$

$$[T, W^y], y = 1,2, \dots, q-1$$

$$[S^x, W^y], x = 1,2, \dots, p-1 \; ve \; y = 1,2, \dots, q-1$$

$$[TS^x, W^y], x = 1,2, \dots, p-1 \; ve \; y = 1,2, \dots, q-1$$

$$[T, S^x W^y], x = 1,2, \dots, p-1 \; ve \; y = 1,2, \dots, q-1$$

biçimindedir. Ayrıca bu alt grubun simgesi,

i) p ve q tek olduğunda $\left(\frac{3pq-2p-2q+1}{2}; \infty\right)$

ii) p ya da q çift olduğunda $\left(\frac{3pq-2p-2q}{2}; \infty^{(2)}\right)$

iii) p çift ve q çift olduğunda $\left(\frac{3pq-2p-2q-2(p,q)+2}{2}; \infty^{2(p,q)}\right)$

şeklindedir.

İspat : Öncelikle$H_{2,p,q}/H'_{2,p,q}$ bölüm grubunu oluşturalım. Bölüm grubu

$$H_{2,p,q}/H'_{2,p,q} = \left\langle T, S, W \middle| \begin{matrix} T^2 = S^P = W^q = (TSW)^\infty = I, \\ TS = ST, TW = WT, SW = WS \end{matrix} \right\rangle$$

biçimindedir.

Şimdi $H'_{2,p,q}$ alt grubunun sunuşunu elde etmek için Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Burada bölüm grubunun bir Schreier transversalini;

$$\Sigma = \left\{ \begin{matrix} I, T, S, \dots, S^{p-1}, W, \dots, W^{q-1}, TS, \dots, TS^{p-1}, TW, \dots, TW^{q-1}, SW, \dots, SW^{q-1}, \\ \vdots \\ S^{p-1}W, \dots, S^{p-1}W^{q-1}, TSW, \dots, TSW^{q-1}, \dots, TS^{p-1}W, \dots, TS^{p-1}W^{q-1} \end{matrix} \right\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çarpımlar;

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$

$\vdots$

$S^{p-1}.T.(TS^{p-1}) = S^{p-1}TS^{1-p}T$

$\mathrm{W.T.}(TW)^{-1} = WTW^{-1}T$

$\vdots$

$W^{q-1}.T.(T W^{q-1})^{-1}W^{q-1}TW^{1-q}T$

$TS.T(S)^{-1} = TSTS^{-1}$

$\vdots$

$TS^{p-1}.S.(S^{p-1})^{-1} = TS^{p-1}T^{1-p}$

$TW.T.(W)^{-1} = TWTW^{-1}$

$$\vdots$$

$$TW^{q-1}.T.(W^{q-1})^{-1} = TW^{q-1}TW^{1-q}$$

$$SW.T(TSW)^{-1} = SWTW^{-1}S^{-1}T$$

$$\vdots$$

$$SW^{q-1}.T.(TSW^{q-1})^{-1} = SW^{q-1}TW^{1-q}S^{-1}T$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W.T.(TS^{p-1})^{-1} = S^{p-1}WTW^{-1}S^{1-p}T$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W^{q-1}.T.(TS^{p-1}W^{q-1})^{-1} = S^{p-1}W^{q-1}TW^{1-p}T$$

$$TSW.T(SW)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}$$

$$TSW^2.T.(SW^2)^{-1} = TSW^2TW^{-2}S^{-1}$$

$$\vdots$$

$$TSW^{q-1}.T.(SW^{q-1})^{-1} = TSW^{q-1}TW^{q-1}S^{-1}$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W.T.(S^{p-1}W)^{-1} = TS^{p-1}WTW^{-1}S^{1-p}$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W^{q-1}.T.(S^{p-1}W^{q-1})^{-1} = TS^{p-1}W^{q-1}TW^{1-q}S^{1-p}$$

$$I.S.(S)^{-1} = I$$

$$T.S.(TS)^{-1} = I$$

$$S.S.(S^2)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}.S.(I) = I$$

$$W.S.(\,SW)^{-1} = WSW^{-1}S^{-1}$$

$$\vdots$$

$$W^{q-1}\,.S.(S\,W^{q-1})^{-1} = \ W^{q-1}SW^{1-q}S^{-1}$$

$$TS.S.(TS^2)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}.S.(T)^{-1} = I$$

$$TW.S.(TSW)^{-1} = \ TWSTW^{-1}S^{-1}T$$

$$\vdots$$

$$TW^{q-1}.S.(TSW^{q-1})^{-1} = TW^{q-1}SW^{1-q}S^{-1}T$$

$$SW.S.(S^2W)^{-1} = \ SWSW^{-1}S^{-2}$$

$$\vdots$$

$$SW^{q-1}.S.(S^2W^{q-1})^{-1} = \ SW^{q-1}SW^{1-q}S^{-2}$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W.S.(W)^{-1} = S^{p-1}WSW^{-1}$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W^{q-1}.S.(W^{q-1})^{-1} = S^{p-1}W^{q-1}SW^{1-q}$$

$$TSW.S.(TW)^{-1} = TSWSW^{-1}T$$

$$TSW^2.S.(TW^2)^{-1} = TSW^2SW^{-2}T$$

$$\vdots$$

$$TSW^{q-1}.S.(TW^{q-1})^{-1} \ = \ TSW^{q-1}SW^{1-q}T$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W.S.(TW)^{-1} = \ TS^{p-1}WSW^{-1}T$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W^{q-1}.S.(TW^{q-1})^{-1} = \ TS^{p-1}W^{q-1}SW^{1-q}T$$

$$I.W.(W)^{-1} = I$$

$$T.W.(TW)^{-1} = I$$

$$S.W.(SW)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}.W.(S^{p-1}W)^{-1}) \ = I$$

$$W.W.(\ W^2)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$W^{q-1}\ .W.(\ W^q)^{-1} = I$$

$$TS.W.(TSW)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}.W.(TS^{p-1}W)^{-1} = I$$

$$TW.W.(TW^2)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$TW^{q-1}.W.(TW^q)^{-1} = I$$

$$SW.W.(SW^2)^{-1} = I$$

$$\vdots$$

$$SW^{q-1}.W.(SW^{q})^{-1}=I$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W.W.(S^{p-1}W^{2})^{-1}=I$$

$$\vdots$$

$$S^{p-1}W^{q-1}.W.(S^{p-1}W^{q})^{-1}=I$$

$$TSW.W.(TSW^{2})^{-1}=I$$

$$TSW^{2}.W.(TSW^{3})^{-1}=I$$

$$\vdots$$

$$TSW^{q-1}.W.(TSW^{q})^{-1}=I$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W.W.(TS^{p-1}W^{2})^{-1}=I$$

$$\vdots$$

$$TS^{p-1}W^{q-1}.W.(TS^{p-1}W)^{-1}=I$$

biçiminde yazılır. Buradan $H'_{2,p,q}$ alt grubunun üreteçleri;

$$[T,S^{x}], x=1,2,\dots,p-1$$

$$[T,W^{y}], y=1,2,\dots,q-1$$

$$[S^{x},W^{y}], x=1,2,\dots,p-1 \ ve\ y=1,2,\dots,q-1$$

$$[TS^{x},W^{y}], x=1,2,\dots,p-1 \ ve\ y=1,2,\dots,q-1$$

$$[T,S^{x}W^{y}], x=1,2,\dots,p-1 \ ve\ y=1,2,\dots,q-1$$

olarak bulunur.Burada $H'_{2,p,q}$ alt grubunun üreteçlerinin sayısı;

$$1+2.p.q\left(-1\ +1-\tfrac{1}{2}+1-\tfrac{1}{p}+1-\tfrac{1}{q}\right)=3pq-2p-2q+1$$

olur.

Şimdi $H'_{2,p,q}$ alt grubunun cinsini Riemann-Hurwitz formülünü kullanarak bulalım.

i) p ve q tek olsun.

$$2pq=\frac{2.g'-\ 2+\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{2.0-2+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g'=\frac{3pq-2p-2q+1}{2}$ elde edilir. $H'_{2,p,q}$ komütatör grubun simgesi,

$$\left(\frac{3pq-2p-2q+1}{2};\infty\right)$$

ii) p ya da q çift olsun.

$$2pq=\frac{2.g'-\ 2+2.\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{2.0-2+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g'=\frac{3pq-2p-2q}{2}$ elde edilir. $H'_{2,p,q}$ komütatör grubun simgesi,

$$\left(\frac{3pq-2p-2q}{2};\infty^{(2)}\right)$$

iii) p ve q çift olsun.

$$2pq=\frac{2.g'-\ 2+2(p,q).\left(1-\frac{1}{\infty}\right)}{2.0-2+1-\frac{1}{2}+1-\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}+1-\frac{1}{\infty}}$$

eşitliğinden $g'=\frac{3pq-2p-2q-2(p,q)+2}{2}$ elde edilir. $H'_{2,p,q}$ komütatör grubun simgesi,

$$\left(\frac{3pq-2p-2q-2(p,q)+2}{2};\infty^{2(p,q)}\right)$$

olarak bulunur.□

4.2 Örnek : $H_{2,3,4}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H'_{2,3,4}$ komütatör alt grubunun üreteçlerini ve grup gösterimini bulalım. Burada bölüm grubu;

$$H_{2,3,4}/H'_{2,3,4} = \left\langle T,S,W \middle| \begin{matrix} T^2 = S^3 = W^4 = (TSW)^\infty = I, \\ TS = ST, TW = WT, SW = WS \end{matrix} \right\rangle$$

biçimindedir.

Bölüm grubu için $\sum$ Schreier transversali;

$$\Sigma = \begin{Bmatrix} I,T,S,S^2,W,W^2,W^3,TS,TS^2,TW,TW^2,TW^3,SW,SW^2SW^3, \\ S^2W,S^2W^2,S^2W^3,TSW,TSW^2,TSW^3,TS^2W,TS^2W^2,TS^2W^3 \end{Bmatrix}$$

olarak seçilirse, Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpımlar;

$$I.T.(T)^{-1} = I$$

$$T.T.(I)^{-1} = I$$

$$S.T\,.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$$

$$S^2.T.(TS^2)^{-1} = S^2TS^{-2}T$$

$$W.T.(\,TW)^{-1} = WTW^{-1}T$$

$$W^2\,.T.(T\,W^2)^{-1} = W^2TW^{-2}T$$

$$W^3\,.T.(T\,W^3)^{-1} = W^3TW^{-3}T$$

$$TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$$

$$TS^2.T.(S^2)^{-1} = TS^2TS^{-2}$$

$$TW.T.(W)^{-1} = TWTW^{-1}$$

$$TW^2.T.(W^2)^{-1} = TW^2TW^{-2}$$

$TW^3.T.(W^3)^{-1} = TW^3TW^{-3}$

$SW.T.(TSW)^{-1} = \ SWTW^{-1}S^{-1}T^{-1}$

$SW^2.T.(TSW^2)^{-1} = \ SW^2TW^{-2}S^{-1}T$

$SW^3.T.(TSW^3)^{-1} = \ SW^3TW^{-3}S^{-1}T$

$S^2W.T.(TS^2W)^{-1} = S^2WTW^{-1}S^{-2}T$

$S^2W^2.T.(TS^2W^2)^{-1} = S^2W^2TW^{-2}S^{-2}T$

$S^2W^3.T.(TS^2W^3)^{-1} = S^2W^3TW^{-3}S^{-2}T$

$TSW.T.(SW)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}$

$TSW^2.T.(SW^2)^{-1} = TSW^2TW^{-2}S^{-1}$

$TSW^3.T.(SW^3)^{-1} = TSW^3TW^{-3}S^{-1}$

$TS^2W.T.(S^2W)^{-1} = TS^2WTW^{-1}S^{-2}$

$TS^2W^2.T.(S^2W^2)^{-1} = TS^2W^2TW^{-2}S^{-2}$

$TS^2W^3.T.(S^2W^3)^{-1} = TS^2W^3TW^{-3}S^{-2}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(TS)^{-1} = I$

$S.S.(S^2)^{-1} = I$

$S^2.S.(I) = I$

$W.S.(SW)^{-1} = WSW^{-1}S^{-1}$

$W^2\ .S.(S\,W^2)^{-1} = \ W^2SW^{-2}S^{-1}$

$W^3\ .S.(S\,W^3)^{-1} = W^3SW^{-3}S^{-1}$

$TS.S.(TS^2)^{-1} = I$

$TS^2.S.(T)^{-1} = I$

$TW.S.(TSW)^{-1} = TWSTW^{-1}S^{-1}T$

$TW^2.S.(TSW^2)^{-1} = TW^2SW^{-2}S^{-1}T$

$TW^3.S.(TSW^3)^{-1} = TW^3SW^{-3}S^{-1}T$

$SW.S.(S^2W)^{-1} = SWSW^{-1}S^{-2}$

$SW^2.S.(S^2W^2)^{-1} = SW^2SW^{-2}S^{-2}$

$SW^3.S.(S^2W^3)^{-1} = SW^3SW^{-3}S^{-2}$

$S^2W.S.(W)^{-1} = S^2WSW^{-1}$

$S^2W^2.S.(W^2)^{-1} = S^2W^2SW^{-2}$

$S^2W^3.S.(W^3)^{-1} = S^2W^3SW^{-3}$

$TSW.S.(TS^2W)^{-1} = TSWSW^{-1}S^{-2}T$

$TSW^2.S.(TS^2W^2)^{-1} = TSW^2SW^{-2}S^{-2}T$

$TSW^3.S.(TS^2W^3)^{-1} = TSW^3SW^{-3}S^{-2}T$

$TS^2W.S.(TW)^{-1} = TS^2WSW^{-1}T$

$TS^2W^2.S.(TW^2)^{-1} = TS^2W^2SW^{-2}T$

$TS^2W^3.S.(TW^3)^{-1} = TS^2W^3SW^{-3}T$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$T.W.(TW)^{-1} = I$

$S.W.(SW)^{-1} = I$

$S^2.W.(S^2W)^{-1}) = I$

$W.W.(W^2)^{-1} = I$

$W^2 .W.(W^3)^{-1} = I$

$W^3 .W.(I)^{-1} = I$

$TS.W.(TSW)^{-1} = I$

$TS^2.W.(TS^2W)^{-1} = I$

$TW.W.(TW^2)^{-1} = I$

$TW^2.W.(TW^3)^{-1} = I$

$SW.W.(SW^2)^{-1} = I$

$SW^2.W.(SW^3)^{-1} = I$

$SW^3.W.(S)^{-1} = I$

$S^2W.W.(S^2W^2)^{-1} = I$

$S^2W^2.W.(S^2W^3)^{-1} = I$

$S^2W^3.W.(S^2)^{-1} = I$

$TSW.W.(TSW^2)^{-1} = I$

$TSW^2.W.(TSW^3)^{-1} = I$

$TSW^3.W.(TS)^{-1} = I$

$TS^2W.W.(TS^2W^2)^{-1} = I$

$TS^2W^2.W.(TS^2W^3)^{-1} = I$

$TS^2W^3.W.(TS^2)^{-1} = I$

olur.

$H'_{2,3,4}$ grubunun $3pq - 2p - 2q + 1$ formülünde, $p = 3$ ve $q = 4$ yerine yazarsak, 23 tane üreteç elde etmiş oluruz. Bu üreteçler;

$[T,S], [T,S^2], [T,W], [T,W^2], [T,W^3][S,W], [S,W^2], [S,W^3], [S^2,W], [S^2,W^2], [S^2,W^3],$

$[TS,W], [TS,W^2], [TS,W^3], [TS^2,W], [TS^2,W^2], [TS^2,W^3], [T,SW], [T,SW^2], [T,SW^3],$

$[T, S^2W], [T, S^2W^2], [T, S^2W^3]$ olarak bulunur.

Ayrıca bu normal alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,3,4}$ grubunun simgesi $(0; 2,3,4, \infty)$ ve $H'_{2,3,4}$ grubunun simgesi $(g'; \infty^{(2)})$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$24 = \frac{2.g' - 2 + 2.\left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

buradan; $g' = 11$ elde edilir. $H'_{2,3,4}$ grubunun simgesi

$$(11; \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

4.3 Örnek: 4.1 teoreme göre $H'_{2,4,5}$ alt grubunun sunuşunu bulalım. Burada normal alt grup ile elde edilen bölüm grubu;

$H_{2,4,5}/H'_{2,4,5} = \langle T, S, W | T^2 = S^4 = W^5 = I, TS = ST, TW = WT, SW = WS \rangle$

biçimindedir.

Bölüm grubu için Schreier transversali;

$$\sum = \left\{ \begin{array}{c} I, T, S, S^2, S^3, W, W^2, W^3, W^4, TS, TS^2, TS^3, TW, TW^2, TW^3, TW^4, SW, SW^2, \\ SW^3, SW^4, S^2W, S^2W^2, S^2W^3, S^2W^4, S^3W, S^3W^2, S^3W^3, S^3W^4, TSW, TSW^2, \\ TSW^3, TSW^4, TS^2W, TS^2W^2, TS^2W^3, TS^2W^4, TS^3W, TS^3W^2, TS^3W^3, TS^3W^4 \end{array} \right\}$$

şeklinde elde edilir.

Artık Reidemeister-Schreier metodunu uygulayabiliriz.

$I.T.(T)^{-1} = I$

$T.T.(I)^{-1} = I$

$S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T$

$S^2.T.(TS^2)^{-1} = S^2TS^{-2}T$

$S^3.T.(TS^3)^{-1} = S^3TS^{-3}T$

$W.T.(\,TW)^{-1} = WTW^{-1}T$

$W^2\,.T.(T\,W^2)^{-1} = W^2TW^{-2}T$

$W^3\,.T.(T\,3)^{-1} = W^3TW^{-3}T$

$W^4\,.T.(T\,W^4)^{-1} = W^4TW^{-4}T$

$TS.T.(S)^{-1} = \ TSTS^{-1}$

$TS^2.T.(S^2)^{-1} = TS^2T^{-2}$

$TS^3.T.(S^3)^{-1} = TS^3T^{-3}$

$TW.T.(W)^{-1} = \ TWTW^{-1}$

$TW^2.T.(W^2)^{-1} = \ TW^2TW^{-2}$

$TW^3.T.(W^3)^{-1} = \ TW^3TW^{-3}$

$TW^4.T.(W^4)^{-1} = \ TW^4TW^{-4}$

$SW.T.(TSW)^{-1} = SWTW^{-1}S^{-1}T$

$SW^2.T.(TSW^2)^{-1} = SW^2TW^{-2}S^{-1}T$

$SW^3.T.(TSW^3)^{-1} = SW^3TW^{-3}S^{-1}T$

$SW^4.T.(TSW^4)^{-1} = SW^4TW^{-4}S^{-1}T$

$S^2W.T.(TS^2W)^{-1} = S^2WTW^{-1}S^{-2}T$

$S^2W^2.T.(TS^2W^2)^{-1} = S^2W^2TW^{-2}S^{-2}T$

$S^2W^3.T.(TS^2W^3)^{-1} = S^2W^3TW^{-3}S^{-2}T$

$S^2W^4.T.(TS^2W^4)^{-1} = S^2W^4TW^{-4}S^{-2}T$

$S^3W.T.(TS^3W)^{-1} = S^3WTW^{-1}S^{-3}T$

$S^3W^2.T.(TS^3W^2)^{-1} = S^3W^2TW^{-2}S^{-3}T$

$S^3W^3.T.(TS^3W^3)^{-1} = S^3W^3TW^{-3}S^{-3}T$

$S^3W^4.T.(TS^3W^4)^{-1} = S^3W^4TW^{-4}S^{-3}T$

$TSW.T.(SW)^{-1} = TSWTW^{-1}S^{-1}$

$TSW^2.T.(SW^2)^{-1} = TSW^2TW^{-2}S^{-1}$

$TSW^3.T.(SW^3)^{-1} = TSW^3TW^{-3}S^{-1}$

$TSW^4.T.(SW^4)^{-1} = TSW^4TW^{-4}S^{-1}$

$TS^2W.T.(S^2W)^{-1} = TS^2WTW^{-1}S^{-2}$

$TS^2W^2.T.(S^2W^2)^{-1} = TS^2W^2TW^{-2}S^{-2}$

$TS^2W^3.T.(S^2W^3)^{-1} = TS^2W^3TW^{-3}S^{-2}$

$TS^2W^4.T.(S^2W^4)^{-1} = TS^2W^4TW^{-4}S^{-2}$

$TS^3W.T.(S^2W)^{-1} = TS^3WTW^{-1}S^{-3}$

$TS^3W^2.T.(S^3W^2)^{-1} = TS^3W^2TW^{-2}S^{-3}$

$TS^3W^3.T.(S^3W^3)^{-1} = TS^3W^3TW^{-3}S^{-3}$

$TS^3W^4.T.(S^3W^4)^{-1} = TS^3W^4TW^{-4}S^{-3}$

$I.S.(S)^{-1} = I$

$T.S.(TS)^{-1} = I$

$S.S.(S^2)^{-1} = I$

$S^2.S.(S^3)^{-1} = I$

$S^3.S.(I)^{-1} = I$

$W.S.(\,SW)^{-1} = WSW^{-1}S^{-1}$

$W^2\,.S.(S\,W^2)^{-1} = \; W^2SW^{-2}S^{-1}$

$W^3\,.S.(S\,W^3)^{-1} = \; W^3SW^{-3}S^{-1}$

$W^4\,.S.(S\,W^4)^{-1} = \; W^4SW^{-4}S^{-1}$

$TS.S.(TS^2)^{-1} = I$

$TS^2.S.(TS^3)^{-1} = I$

$TS^3.S.(T)^{-1} = I$

$TW.S.(TSW)^{-1} = TWSTW^{-1}S^{-1}T$

$TW^2.S.(TSW^2)^{-1} = \; TW^2SW^{-2}S^{-1}T$

$TW^3.S.(TSW^3)^{-1} = \; TW^3SW^{-3}S^{-1}T$

$TW^4.S.(TSW^4)^{-1} = \; TW^4SW^{-4}S^{-1}T$

$SW.S.(S^2W)^{-1} = SWSW^{-1}S^{-2}$

$SW^2.S.(S^2W^2)^{-1} = SW^2SW^{-2}S^{-2}$

$SW^3.S.(S^2W^3)^{-1} = SW^3SW^{-3}S^{-2}$

$SW^4.S.(S^2W^4)^{-1} = SW^4SW^{-4}S^{-2}$

$S^2W.S.(S^3W)^{-1} = S^2WSW^{-1}S^{-3}$

$S^2W^2.S.(S^3W^2)^{-1} = S^2W^2SW^{-2}S^{-3}$

$S^2W^3.S.(S^3W^3)^{-1} = S^2W^3SW^{-3}S^{-3}$

$S^2W^4.S.(S^3W^4)^{-1} = S^2W^4SW^{-4}S^{-3}$

$S^3W.S.(W)^{-1} = S^3WSW^{-1}$

$S^3W^2.S.(W^2)^{-1} = S^3W^2SW^{-2}$

$S^3W^3.S.(W^3)^{-1} = S^3W^3SW^{-3}$

$S^3W^4.S.(W^4)^{-1} = S^3W^4SW^{-4}$

$TSW.S.(TS^2W)^{-1} = TSWSW^{-1}S^{-2}T$

$TSW^2.S.(TS^2W^2)^{-1} = TSW^2SW^{-2}S^2T$

$TSW^3.S.(TS^2W^3)^{-1} = TSW^3SW^{-3}S^{-2}T$

$TSW^4.S.(TS^2W^4)^{-1} = TSW^4SW^{-4}S^{-2}T$

$TS^2W.S.(TS^3W)^{-1} = TS^2WSW^{-1}S^{-3}T$

$TS^2W^2.S.(TS^3W^2)^{-1} = TS^2W^2SW^{-2}S^{-3}T$

$TS^2W^3.S.(TS^3W^3)^{-1} = TS^2W^3SW^{-3}S^{-3}T$

$TS^2W^4.S.(TS^3W^4)^{-1} = TS^2W^4SW^{-4}S^{-3}T$

$TS^3W.S.(TW)^{-1} = TS^3WSW^{-1}T$

$TS^3W^2.S.(TW^2)^{-1} = TS^3W^2SW^{-2}T$

$TS^3W^3.S.(TW^3)^{-1} = TS^3W^3SW^{-3}T$

$TS^3W^4.S.(TW^4)^{-1} = TS^3W^4SW^{-4}T$

$I.W.(W)^{-1} = I$

$T.W.(TW)^{-1} = I$

$S.W.(SW)^{-1} = I$

$S^2.W.(S^2W)^{-1} = I$

$S^3.W.(S^3W)^{-1} = I$

$W.W.(\,W^2)^{-1} = I$

$W^2\,.W.(\,W^3)^{-1} = I$

$W^3\,.W.(\,W^4)^{-1} = I$

$W^4\,.W.(\,I)^{-1} = I$

$TS.W.(TSW)^{-1} = I$

$TS^2.W.(TS^2W)^{-1} = I$

$TS^3.W.(TS^3W)^{-1} = I$

$TW.W.(TW^2)^{-1} = I$

$TW^2.W.(TW^3)^{-1} = I$

$TW^3.W.(TW)^{-1} = I$

$TW^4.W.(T)^{-1} = I$

$SW.W.(SW^2)^{-1} = I$

$SW^2.W.(SW^3)^{-1} = I$

$SW^3.W.(SW^4)^{-1} = I$

$SW^4.W.(S)^{-1} = I$

$S^2W.W.(S^2W^2)^{-1} = I$

$S^2W^3.W.(S^2W^4)^{-1} = I$

$S^3W.W.(S^3W^2)^{-1} = I$

$S^3W^2.W.(S^3W^3)^{-1} = I$

$S^3W^3.W.(S^3W^4)^{-1} = I$

$S^3W^4.W.(S^3)^{-1} = I$

$TSW.W.(TSW^2)^{-1} = I$

$TSW^2.W.(TSW^3)^{-1} = I$

$TSW^3.W.(TSW^4)^{-1} = I$

$TSW^4.W.(TS)^{-1} = I$

$TS^2W.W.(TS^2W^2)^{-1} = I$

$TS^2W.W.(TS^2W^2)^{-1} = I$

$TS^2W^2.W.(TS^2W^3)^{-1} = I$

$TS^2W^3.W.(TS^2W^4)^{-1} = I$

$TS^2W^4.W.(TS^2)^{-1} = I$

$TS^3W.W.(TS^3W^2)^{-1} = I$

$TS^3W^2.W.(TS^3W^3)^{-1} = I$

$TS^3W^3.W.(TS^3W^4)^{-1} = I$

$TS^3W^4.W.(TS^3)^{-1} = I$

olur.

$H'_{2,4,5}$ grubunun $3pq - 2p - 2q + 1$ formülünde, $p = 4$ ve $q = 5$ yerine yazarsak 43 tane üreteç elde etmiş oluruz. Bu üreteçler;

$[T,S], [T,S^2], [T,S^3], [T,W], [T,W^2], [T,W^3], [T,W^4], [S,W], [S,W^2], [S,W^3], [S,W^4], [S^2,W],$

$[S^2,W^2], [S^2,W^3], [S^2,W^4], [S^3,W], [S^3,W^2], [S^3,W^3], [S^3,W^4], [TS,W], [TS,W^2], [TS,W^3],$

$[TS,W^4], [TS^2,W], [TS^2,W^2], [TS^2,W^3], [TS^2,W^4], [TS^3,W], [TS^3,W^2], [TS^3,W^3], [TS^3,W^4]$

$[T,SW], [T,SW^2], [T,SW^3], [T,SW^4], [T,S^2W], [T,S^2W^2], [T,S^2W^3], [T,S^2W^4], [T,S^3W],$

$[T,S^3W^2], [T,S^3W^3], [T,S^3W^3]$ olarak bulunur.

Ayrıca bu normal alt grubun cinsini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$H_{2,4,5}$ grubunun simgesi $(0; 2,4,5, \infty)$ ve $H'_{2,4,5}$ grubunun simgesi $(g'; \infty^{(2)})$ olmak üzere Riemann-Hurwitz formülünde yerine yazarsak,

$$40 = \frac{2. g' - 2 + 2. \left(1 - \frac{1}{\infty}\right)}{2.0 - 2 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{\infty}}$$

$g' = 21$ elde edilir. $H'_{2,4,5}$ grubunun simgesi

$$(21; \infty^{(2)})$$

olarak bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu kısımda çalışma süresince bulunan sonuçların özeti verilecek ve gelecekte neler yapılabileceğinden bahsedilmiştir.

Genelleştirimiş Hecke grupları, Hecke ve genel Hecke gruplarının bir genellemesi olduğundan çalışmadaki sonuçlar, özel hallerde (p=2 iken), Hecke ve genel Hecke grupları için olan sonuçlarla çakışır.

Tezin üçüncü bölümünde $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının üreteçleri, simgesi ve grup gösterimleri bulunmuştur. Bulunan bu sonuçlar p, q sayılarının tek veya çift oluşuna göre birbirinden farklı bölüm grupları elde edilmiş ve $m.$ derece kuvvet alt gruplarının grup sunuşları ve simgeleri elde edilmiştir. Bu incelemede $H^m_{2,p,q}$, p ve q çift iken sadece $m = 2$ için hesaplanabildiği sonucuna ulaşılmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde $H_{2,p,q}$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt gruplarının üreteçleri, simgesi ve grup gösterimleri elde edilmiştir. Burada p ve q sayılarının tek veya çift oluşuna göre simgeleri bulunmuştur. Ayrıca genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt gruplarının cinsi hesaplanmıştır.

Tezde bulunan sonuçlar ve literatürdeki çalışmalar dikkate alınarak ileride yapılabilecek çalışmalar için öneri ve açık problemler aşağıda belirtilmiştir.

Üçüncü bölümde bulunan kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları incelenebilir. Ayrıca burada çalışılan gruplara yansıma dönüşümü eklenerek genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları elde edilerek, bunların kuvvet ve komütatör alt grupları çalışılabilir.

Ayrıca burada çalışılan 2, p ve q mertebeli 3 devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan gruplar yerine $p_i \geq 2$ mertebeli n tane $n \geq 3$ devirli grubun serbest çarpımına izomorf gruplar çalışılabilir. Bu grupların kuvvet ve komütatör alt gruplarının üreteçleri, simge ve sunuşları ve bu alt gruplar arasındaki ilişkiler bulunabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., "Über die bestimmung dirichletscher reichen durch ihre funktionalgleichungen", *Math. Ann.*, 112, 664-699, (1936).

[2] Cangül, İ. N., "Normal subgroups of Hecke groups", Ph.D. Thesis, *Southampton University,* Southampton, (1993).

[3] İkikardeş, S., Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups", *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 497-508, (2006).

[4] Newman, M., "The structure of some subgroups of the modular group", *Illionis J. Math.,*8, 480-487, (1962).

[5] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups", *Ramanujan J.*, 24, 151-159, (2011).

[6] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of Hecke groups II", *C.R. Math. Acad. Sci. Paris,* 349, 3, 4, 127-130, (2011).

[7] Lehner, J. and Newman, M., "Real two-dimensional representations of the modular group and related groups", *Amer. J. Math.*, 87, 945-954, (1965).

[8] Lehner, J., "Uniqueness of a class of Fuchsian groups" *Illinois J. Math.*, 19, 2, 308-315, (1975).

[9] Yaral, "Commutator Subgroups of the Power subgroups of Generalized Hecke Groups" PhD. Thesis, *Balıkesir University, Balıkesir University*, Balıkesir, (2015).

[10] Demir, "Extended Generalized Hecke groups" PhD. Thesis, *Balıkesir University*, Balıkesir, (2015).

[11] Huang, S., "Realizability of torsioon free subgroups with prescribed signatures in Fuchsian groups" *Taiwanese J. Math.*, 13, 441-457, (2009).

[12] Huang, S., “Generalized Hecke groups and Hecke polygon” *Annales Acedemiæ Scientiarum Fennicæ Math.*, 24, 187-214, (1999).

[13] Singerman, D., “Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups”, *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319-323, (1970).

[14] Singerman, D., “Finitely maximal Fuchsian groups”, *J. London Math. Soc.*, 2,6, 29-38, (1972).

[15] Johnson, D.L. “Topics in the Theory of Group” Presentations, L.M.S Lecture Note Series, 42, Cambridge Univ. Press., (1980).

[16] Robinson, D. J. S., *A Course in the theory of groups*, New York: Springer-Verlag,(2001).

[17] Fraleigh, J. B., *A first course in abstract algebra*, 6, New York: Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[18] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö. “Commutator subgroups of the power subgroups of Hecke groups II”, *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349, 3, 4, 127-130, (2011).

[19] Newman, M., “The structure of some subgroups of the modular group”, *Illionis J. Math.*,8, 480-487, (1962).

[20] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., “On the power subgroups of the extended modular group $\overline{\Gamma}$ ”, *Turk. J. Math.* , 28, 143-151, (2004).

[21] Newman, M., “Free subgroups and normal subgroups of the modular group”, *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).

[22] Koruoğlu, Ö., “$\overline{H}(\lambda_p)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[23] Sarıgedik, Z., İkikardeş, S., Şahin, R., “Power subgroups of the extended Hecke groups”, Miskolc Math. Notes 16 (2015), no.3, 447-464.

[24] Şahin, R., Meral T. and Koruoğlu, Ö., "Power and free normal subgroups of generalized Hecke groups", Asian-eurepean journal of mathematics, yayına kabul edildi.

[25] Şahin, R., Bizim, O. and Cangul, İ.N., "Commutator subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Czechoslovak Mathematical Journal,* 54, 129, 253-259, (2004).

[26] Knopp, M.I. and Newman, M., "On groups related to The Hecke Groups", *Proc. American Math. Soc.*, 119,1, 77-80, (1993).

[27] Kaymak, Ş., Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Commutator subgroups of generalized Hecke and extended generalized Hecke groups", Yayına Sunuldu.

[28] Koruoğlu, Ö., Meral T. and Şahin, R., "Commutator subgroups of the power subgroups of generalized Hecke groups", Algebra and Discrete Mathematics, yayına kabul edildi.