T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GALILEAN UZAYDA BAZI YÜZEYLERİN TEMEL FORMA GÖRE LAPLASLARI

ÖZGÜN BİÇGİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Bengü BAYRAM (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR
Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK

BALIKESİR, OCAK - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Özgün BİÇGİN tarafından hazırlanan "**GALİLEAN UZAYDA BAZI YÜZEYLERİN TEMEL FORMA GÖRE LAPLASLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 23 Ocak 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Bengü BAYRAM Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK İzmir Demokrasi Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Galilean Uzayda Bazı Yüzeylerin Temel Forma Göre Laplasları**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Özgün BİÇGİN

ÖZET

GALILEAN UZAYDA BAZI YÜZEYLERİN TEMEL FORMA GÖRE LAPLASLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÖZGÜN BİÇGİN

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)

BALIKESİR, OCAK - 2020

Bu çalışmanın amacı; Öklid ve Galilean uzayda, birinci, ikinci ve üçüncü temel formların Laplas operatörüne göre yüzey örneklerini incelemektir. Öncelikle Öklid uzayında, daha sonra Galilean uzayda bu örnekler çeşitlendirilerek incelenmiştir.

Birinci bölüm giriş bölümüdür. Bu bölümde, bugüne kadar yapılan çalışmalardan bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan tanım ve kavramlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayındaki dönel ve küresel çarpım yüzeyleri ele alınmıştır. Bu yüzeyler, ikinci ve üçüncü temel formların laplas operatörüne göre sınıflandırılmıştır.

Dördüncü bölümde, Galilean uzaydaki yüzeyler ele alınmıştır. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Bunlar sırasıyla $\Delta^{II} N = 0$ şartını sağlayan özel yüzeyler ve $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan küresel çarpım yüzeyleridir. Bu bölümde bazı orijinal sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Galilean uzay, temel formların Laplas operatörü, küresel çarpım yüzeyi

Bilim Kod / Kodları : 20402 Sayfa Sayısı : 74

ABSTRACT

LAPLACE OPERATOR WITH RESPECT TO THE FUNDAMENTAL FORM IN SOME SURFACES IN GALILEAN SPACE
MSC THESIS
ÖZGÜN BİÇGİN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)
BALIKESİR, JANUARY - 2020

The aim of this thesis is to study surfaces according to Laplacian operator of the first, second and third fundamental forms in Euclidean and Galilean space. Firstly in the Euclidean space and later Galilean space these samples were studied by diversifying.
First chapter is introduction. In this section, the studies conducted so far have been mentioned.
In the second chapter, some basic definitions and theorems which will be used in the other chapters are given.
In the third chapter, surfaces of revolution and spherical product surfaces in 3-dimensional Euclidean space are considered. These surfaces have been classified according to Laplacian operator of the second and third fundamental forms.
In the fourth chapter, surface in Galilean space are considered. This chapter consist of two parts. These are respectively, special surfaces satisfying the condition $\Delta^{II} N = 0$ and spherical product surface satisfying the condition $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$. In this section, some original results are obtained.

KEYWORDS: Galilean space, Laplacian operator of the fundamental forms, spherical product surface

Science Code / Codes : 20402 Page Number : 74

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbf{IE^3}$	: 3-boyutlu Öklid uzay
$\mathbf{G_3}$	: 3-boyutlu Galilean uzay
$\mathbf{P^3}$	: 3-boyutlu projektif uzay
$\langle , \rangle$	: İç çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım
$\chi(\mathbf{M})$	: M'nin teğet vektör alanlarının uzayı
$\chi(\mathbf{M})^{\perp}$	: M'nin normal vektör alanlarının uzayı
$\mathbf{S}$	: Şekil operatörü
$\mathbf{I^q}$	: q'nuncu temel form
$\mathbf{T_pM}$	: p noktasındaki tanjant vektör uzayı
$\mathbf{C^\infty(M,\mathbb{R})}$	: M'den $\mathbb{R}$ 'ye diferansiyellenebilir fonksiyonların kümesi
$\mathbf{K}$	: Gauss eğriliği
$\vec{\mathbf{H}}$	: Ortalama eğrilik
$\mathbf{d_{X_p}}$	: Türev dönüşümü
Δ	: Laplas operatörü
$\mathbf{E, F, G, g_{ij}}$	: Birinci temel form katsayıları
$\mathbf{L_{ij}}$	: İkinci temel form katsayıları
$\mathbf{e_{ij}}$	: Üçüncü temel form katsayıları
$\lVert , \rVert$	: Norm
$\mathbf{X}$	: Regüler yama
$\mathbf{I}$, $\mathbf{II}$, $\mathbf{III}$	: Birinci, ikinci, üçüncü temel form
w	: İdeal düzlem
f	: İdeal doğru
$\mathbf{N}$	: Birim normal vektör alanı
∂	: Kısmi türev

ÖNSÖZ

Yüksek lisans sürecinin her aşamasında bana değerli zamanını ayıran, beni sabırla destekleyen ve yol gösteren çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Bengü BAYRAM'a içtenlikle teşekkür eder saygılarımı sunarım.

Bununla birlikte beni bu günlere getiren ve desteklerini üzerimden hiç esirgemeyen kıymetli anne ve babama ayrıca teşekkür ederim.

Balıkesir, 2020 **Özgün Biçgin**

1. GİRİŞ

$x : M \to IE^m$, IE^m m-boyutlu Öklid uzayındaki n-boyutlu bağlantılı manifoldun bir izometrik immersiyonu olsun. IE^m'den indirgenmiş M'deki Riemann metriğine göre M'nin Laplası Δ ile belirtilir. Takahashi [1], IE^m'deki altmanifoldları x izometrik immersiyonlarına ve M'nin Laplasına göre sınıflandırdı. Takahashi, tüm koordinat fonksiyonları, aynı $\lambda \in \mathbb{R}$ özdeğerine sahip özfonksiyonlar olmak üzere, $\Delta x = \lambda x$ şartını sağlayan M'nin; IE^m'de S^{m-1} hiperküresinin minimal altmanifoldları veya IE^m'nin minimal altmanifoldları olduğunu kanıtladı.

Takahashi teoreminin bir genişlemesi olarak Garay [2], koordinat fonksiyonları yine laplasın özfonkisyonları olan fakat aynı özdeğerlere sahip olmayan IE^m'deki hiperyüzeyleri çalıştı. Garay, $\Delta x = Ax$ koşulunu sağlayan IE^m'deki hiperyüzeyleri göz önüne aldı. Burada $A \in$ $Mat(m, \mathbb{R})$ bir $m \times m$ köşegen matristir.

Dillen, Pas ve Verstraelen [3], $\Delta x = Ax + B$ şartını sağlayan IE^3'teki yüzeyleri inceledi. Burada $A \in Mat\ (3, \mathbb{R})$ bir 3×3 reel matristir ve $B \in \mathbb{R}^3$'tür.

x izometrik immersiyon kavramı, Öklid uzayı ya da pseudo-Öklid uzayının altmanifoldlarının difbilir fonksiyonlarının doğal bir genişlemesidir. Bunların en doğal örneği altmanifoldların Gauss dönüşümüdür. Özel olarak eğer altmanifold bir hiperyüzeyse, Gauss dönüşümü birim normal vektör alanı ile özdeşleştirilebilir. Dillen, Pas and Verstraelen [4], G Gauss dönüşümü $\Delta G = AG$ şartını sağlayan IE^3'teki dönel yüzeyleri çalıştı. Burada $A \in Mat\ (3, \mathbb{R})$'dir.

[5, 6] daki yazarlar, üç boyutlu uzayda $\Delta^{III} r_i = \mu_i r_i$ şartını sağlayan dönel yüzeyleri ve öteleme yüzeylerini sınıflandırdı.

Senoussi ve Bekkar [7], IE^3'teki helicoidal yüzeyleri $\Delta^J r = Ar$ şartı altında incelediler. Burada; $J = I, II, III$, $A = (a_{ij})$ sabit 3×3 tipinde bir matris, r yer vektörü, Δ^J ise birinci, ikinci ve üçüncü temel forma göre Laplas operatörüdür.

Yoon [8], üç boyutlu Galilean uzayda $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ şartı altında öteleme yüzeylerini sınıflandırdı. Burada $\lambda_i \in \mathbb{R}$'dir.

Karacan, Yoon ve Bukçü [9], $\Delta^{III} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan 1. tip öteleme yüzeylerini sınıflandırdı.

Son dönemlerde, Ali Çakmak, Murat Kemal Karacan, Sezai Kızıltuğ ve Dae Won Yoon [10], üç boyutlu Galilean uzayda $\Delta^{II} x_i = \lambda_i x_i$ şartını sağlayan öteleme yüzeylerini incelediler.

Öklid olmayan geometri olarak genellikle hiperbolik ve eliptik geometri akla gelmektedir. Cayley ve Klein bu geometrileri genişletmişlerdir. Riemann; Öklidyen, hiperbolik ve eliptik geometrilerinin birbiri ile ilgili olduğunu fakat bu geometrilerin farklılık gösterdiğini belirtmiştir. Öklid olmayan geometrilerden biri olan Galilean geometrisi, Galile ile Einstein'ın görelilik kuramıyla alakalıdır ve tüm Klein geometrilerinin en basiti ve en sadesidir. Klein, Öklid ve hiperbolik geometri dahil olmak üzere dokuz tane bağlantılı düzlem geometri olduğunu açıklamıştır. Galilean geometrisi ((x, t) koordinatlı, iki boyutlu olayların manifoldunun geometrisi) bunlardan biridir. Burada x doğru üzerindeki noktanın koordinatı, t ise zamandır. Galilean geometri bir doğru üzerindeki kayma ve ötelemenin klasik mekaniği olarak göz önüne alınabilir. Son yıllarda birçok yazar Galilean geometrisi ile ilgili birçok çalışma yaptı. Yaglom [11], 1979 senesinde yazdığı kitapta Galilean geometrisinin fiziksel temellerini ortaya koymuştur. 1984'te Röschel [12] tarafından Galilean uzayı daha detaylı incelenmiştir.

Bu çalışmada Öklid uzayı ve Galilean uzayı hakkında temel bilgiler verilmiş ve özel bazı yüzeyler hem Öklid uzayında hem de Galilean uzayında temel formların Laplas operatörüne göre incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Burada sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda Öklid uzay, ikinci kısımda Galilean uzay ele alınmıştır.

2.1 Öklid Uzay

2.1.1 Tanım

Boş olmayan bir A cümlesi ve bir K cismi üstünde bir vektör uzayı V olsun. Aşağıdaki önermeleri doğrulayan bir $f: A \times A \to V$ fonksiyonu varsa A'ya V ile birleştirilmiş bir ***afin uzay*** denir.

(1) $\forall P, Q, R \in A$ için $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$

(2) $\forall P \in A$ ve $\forall \alpha \in V$ için $f(P,Q) = \alpha$ olacak biçimde bir tek $Q \in A$ noktası vardır [13].

2.1.2 Tanım

3-boyutlu standart reel standart afin uzay 3-boyutlu standart vektör uzayı $\mathbb{R}^3$ ile eşlensin $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

iç çarpımı $\forall x, y \in \mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ için

$$\langle , \rangle (x, y) = \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

şeklinde tanımlansın. Bu iç çarpıma $\mathbb{R}^3$'te ***standart iç çarpım*** veya ***Öklid iç çarpımı*** adı verilir. $\{\mathbb{R}^3, \langle , \rangle\}$ iç çarpım uzayı ile eşlenen reel standart afin uzay, ***3-boyutlu Öklid uzayı*** adını alır ve IE^3 ile gösterilir [13].

$\mathbb{R}^3$ ile birleştirilmiş $\mathbb{R}^3$ afin uzayını ele alalım. $x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3)$ iki vektör olsun. Bu $\mathbb{R}^3$ vektör uzayında Öklid iç çarpımı,

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

biçiminde tanımlanır. Böylece $\mathbb{R}^3$ afin uzayı 3-boyutlu Öklid uzayı olur ve IE^3 ile gösterilir [13].

2.1.3 Tanım

$x = (x_1, x_2, x_3)$ ve $y = (y_1, y_2, y_3) \in IE^3$ olmak üzere

$$d : IE^3 \times IE^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2}$$

olarak tanımlanan *d* fonksiyonuna Öklid uzayında ***uzaklık fonksiyonu*** ve $d(x, y)$ reel sayısına da $x, y \in IE^3$ noktaları arasındaki uzaklık denir [13].

2.1.4 Tanım

$$d : IE^3 \times IE^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \to d(x, y) = \left\| \overrightarrow{xy} \right\|$$

biçiminde tanımlanan *d* fonksiyonuna IE^3'te ***Öklid metriği*** denir [13].

2.1.5 Tanım

IE^3'te sıralı bir $\{P_0, P_{1,} P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne, $\mathbb{R}^3$'te karşılık gelen $\{\overrightarrow{P_0 P_1}, \overrightarrow{P_0 P_2}, \overrightarrow{P_0 P_3}\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için bir ortanormal baz ise $\{P_0, P_{1,} P_2, P_3\}$ sistemine IE^3'ün bir ***dik çatısı*** veya ***Öklid çatısı*** denir [13].

2.1.6 Tanım

IE^n n-boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ ***boyutlu bir yüzey***, IE^n'de boş olmayan bir M kümesine denir, öyle ki bu M kümesi,

$$M = \left\{ x \in U \subset IE^n \,\middle|\, f : U \xrightarrow{\text{dif.bilir}} \mathbb{R}, f(x) = c, \nabla f|_p \neq 0, \forall P \in M \right\}$$

biçiminde tanımlanır. IE^n 'de bir $(n-1)$ yüzey, n>3 olması halinde daha çok bir hiperyüzey olarak adlandırılır [13].

2.1.7 Tanım

IE^n 'de bir hiperyüzey M olsun $\chi(M)^{\perp}$ 'in bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N'ye M'nin ***birim normal vektör alanı*** denir [13].

2.1.8 Tanım

IE^n 'in bir hiperyüzeyi M ve M'nin birim normal vektör alanı N olsun. IE^n 'de Riemann konneksiyonu D olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S(X) = -D_X N$$

olarak tanımlı S dönüşümüne M üzerinde ***şekil operatörü*** veya M'nin ***Weingarten dönüşümü*** denir [13].

2.1.9 Tanım

IE^n 'in bir M hiperyüzeyi üzerinde ***q-yuncu temel form*** diye, $1 \le q \le n$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} I^q &: \chi(M)\times\chi(M) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ &(X,Y) \to I^q(X,Y) = \langle S^{q-1}(X), Y\rangle \end{aligned} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlı I^q fonksiyonuna denir [13].

M, IE^n uzayında bir yüzey olsun. M' nin $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı T_pM, $\{X_u, X_v\}$ ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M yüzeyinin birinci temel formu $I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$ eşitliği ile hesaplanır. Burada ***birinci temel form katsayıları***,

$$E = \langle X_u, X_u\rangle, \qquad F = \langle X_u, X_v\rangle, \qquad G = \langle X_v, X_v\rangle \tag{2.2}$$

olup $\langle,\rangle$ bir Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.2) yardımıyla $\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2$ ile elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \ne 0$ ise $X(u,v)$ yaması ***regülerdir*** denir.

Aksi söylenmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve $EG-F^2=W^2$ ile gösterilecektir.

2.1.10 Tanım

$M\subset IE^n$ yüzeyi $X(u,v)$ regüler yaması ile verilsin. $X(u,v)$ regüler yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve normal vektör alanları $N_1, N_2, ..., N_{n-2}$ olmak üzere M'nin ***ikinci temel form katsayıları***

$$L_{11}^k=\langle X_{uu},N_k\rangle,\qquad L_{12}^k=\langle X_{uv},N_k\rangle,\qquad L_{22}^k=\langle X_{vv},N_k\rangle \tag{2.3}$$

$1\le k\le n-2$, şeklinde tanımlanır [14].

2.1.11 Tanım

$X(u,v):(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ regüler yamasıyla verilen $M\subset IE^n$ yüzeyinin ***Gauss eğrilik fonksiyonu***

$$K=\frac{1}{W^2}\sum_{k=1}^{n-2}\left(L_{11}^kL_{22}^k-\left(L_{12}^k\right)^2\right)$$

şeklinde tanımlanır [15].

2.1.12 Tanım

$M\subset IE^n$ yüzeyi $X(u,v):(u,v)\in D\subset\mathbb{R}^2$ regüler yamasıyla verilsin. Bu durumda M'nin ***ortalama eğrilik vektör alanı***

$$\vec{H}=\frac{1}{2W^2}\sum_{k=1}^{n-2}\left(L_{11}^kG+L_{22}^kE-2L_{12}^kF\right)N_k \tag{2.4}$$

şeklinde tanımlanır. Bununla birlikte M'nin ***ortalama eğrilik fonksiyonu*** $H=\left\|\vec{H}\right\|$ dir [14].

2.1.13 Tanım

M yüzeyinin, Gauss eğriliği sıfırsa M'ye ***flat yüzey***, ortalama eğrilik vektörü sıfırsa M'ye ***minimal yüzey*** denir [16].

2.1.14 Tanım

M, n-boyutlu diferansiyellenebilir (C^∞ sınıfından) bir manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M'den $\mathbb{R}$ 'ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M,\mathbb{R})$ olmak üzere M üzerinde $g:\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$ şeklinde metrik tanımlı ise M'ye bir ***Riemann manifoldu*** denir. Burada g'ye ***Riemann metriği*** (veya metrik tensör) adı verilir.

2.1.15 Tanım

M ve N, sırasıyla n ve (n+d) boyutlu diferansiyellenebilir manifoldlar olmak üzere $X:M\to N$ diferansiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\forall p\in M$ için $dX_p:T_pM\to T_{X_p}N$, birebir ise X'e bir ***immersiyon (daldırma)*** denir. Ek olarak $X:M\to X(M)$ bir homeomorfizm ise X'e bir ***imbedding (gömme)*** denir. Eğer $M\subset N$ ve $i:M\to N$ dönüşümü bir gömme ise M'ye N'nin n-boyutlu bir altmanifoldu denir.

$X:M\to N$ dönüşümü bir immersiyon olsun. N manifoldu bir Riemann yapıya sahipse X yardımıyla N'den indirgenen metrik için,

$$\langle X,Y\rangle_p=\langle d_{X_p}(X),d_{X_p}(Y)\rangle_{X(p)},\quad X,Y\in T_pM$$

eşitliği sağlandığında X'e bir ***izometrik immersiyon*** adı verilir [16].

2.1.16 Tanım

$X:M\to IE^{n+d}$ fonksiyonu n-boyutlu Riemann manifoldu M'den (n+d)-boyutlu öklit uzayı IE^{n+d} ye bir izometrik immersiyon olsun. M üzerindeki lokal koordinatlar $u_1,u_2,...,u_n$ verildiğinde IE^{n+d} den indirgenen metriği,

$$g_{ij}=\left\langle\frac{\partial X}{\partial u_i},\frac{\partial X}{\partial u_j}\right\rangle\quad;\quad 1\le i,\ j\le n$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece,

$$G=\det(g_{ij})\ \text{ve}\ (g^{ij})=(g_{ij})^{-1}\tag{2.5}$$

olmak üzere M' nin IE^{n+d} den indirgenmiş metriğe göre ***Laplas operatörü***

$$\Delta = -\frac{1}{\sqrt{G}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{G}\, g^{ij} \frac{\partial}{\partial u^j} \right) \tag{2.6}$$

şeklinde tanımlanır. Burada det ile determinant fonksiyonu ifade edilmektedir [17].

2.1.17 Tanım

$M \subset IE^{n+d}$ kompakt altmanifold olsun. X yer vektörü, M' nin Δ laplasının özfonksiyonlarının sonlu toplamı olarak yazılabiliyorsa diğer bir ifadeyle x_0 sabit vektör ve $\Delta x_i = \lambda_i x_i$ olmak üzere

$$X = x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i$$

ayrışımına sahip ise M' ye ***sonlu tiptedir*** aksi halde M' ye ***sonsuz tiptedir*** denir. Burada $x_1, x_2, ..., x_k$ lar sabit olmayan dönüşümlerdir [18].

2.1.18 Tanım

Tanım 2.1.17'de ifade edilen bütün $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerleri birbirlerinden farklıysalar o zaman X immersiyonu (yada M altmanifoldu) ***k – tipinde*** dir. Burada $1 \le i \le k$ ve $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_k$ dır. Özellikle $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerlerinden biri sıfır ise o zaman M'ye ***null k-tipinde***dir denir [19].

2.1.19 Tanım

Eğer M yüzeyinin X yer vektörü , Δ^J operatörünün sabit olmayan özvektörlerinin sonlu toplamı olarak yani,

$$X = x_0 + \sum_{i=1}^{k} x_i, \qquad \Delta^J x_i = \lambda_i x_i, \qquad i = 1, ..., k$$

olarak yazılabilirse M yüzeyine ***J temel formuna göre sonlu tip'*** tir yada ***sonlu J-tip*** $J = II, III$ denir. Öyle ki x_0 sabit vektör ve $x_1, ..., x_k$ lar sabit olmayan dönüşümlerdir. Eğer özel olarak bütün $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k$ özdeğerleri birbirinden farklıysalar o zaman M yüzeyine ***J temel formuna göre k tipindedir*** denir. Diğer durumda M yüzeyi ***sonsuz tipte*** olur. Bazı

$i=1,...,k$ için $\lambda_i = 0$ olduğu zaman M'ye ***J temel formuna göre null k tipindedir*** denir [20].

M parabolik noktalara sahip olmayan bir yüzey olsun. Yani $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \neq 0$. M'nin (u_1, u_2) lokal koordinatlarına göre ikinci temel formun Laplas operatörü Δ^{II},

$$\Delta^{II} X = -\frac{1}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right|}}\left[\left(\frac{L_{22}X_{u_1} - L_{12}X_{u_2}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right|}}\right)_{u_1} - \left(\frac{L_{12}X_{u_1} - L_{11}X_{u_2}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right|}}\right)_{u_2}\right] \tag{2.7}$$

formülüyle hesaplanır. Burada L_{11} , L_{12} , L_{22} ikinci temel form katsayılarıdır. M'nin (u_1, u_2) lokal koordinatlarına göre üçüncü temel formun Laplas operatörü Δ^{III}

$$\Delta^{III} = -\frac{1}{\sqrt{|e|}}\left(\sum_{i,j}\frac{\partial}{\partial u_i}\left(\sqrt{|e|}\,e^{ij}\frac{\partial}{\partial u_j}\right)\right) \tag{2.8}$$

$$e = \det e_{ij}, \qquad e_{ij} = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}, \qquad e^{ij} = \left(e_{ij}\right)^{-1} \tag{2.9}$$

dir. Burada e_{ij} 'ler üçüncü temel form katsayılarıdır. [21]

2.2 Galilean Uzay

Bu kısımda, Galilean uzayda metrik özellikler, ayrıntılı olarak incelenmiştir.

2.2.1 Tanım

G_3 3-boyutlu Galilean uzay, ideal şekli $\{w, f, I, I_1\}$ olan bir kompleks projektif uzaydır. Burada w reel düzlemi ideal düzlem, $f \subset w$ reel doğrusu ideal doğru, I ve I_1 iki kompleks eşlenik noktalardır [22].

G_3 uzayının reel modeli P^3 projektif uzayda $\{w, f\}$ idealini alabiliriz. Burada $w \subset G_3$ reel düzlem, üzerinde ε eliptik involüsyonu tanımlı $f \subset w$ reel doğrudur. Homojen koordinatlarda ε eliptik involüsyonu

$$(0:0:x_2:x_3) \rightarrow (0:0:x_3:-x_2)$$

şeklinde tanımlanabilir.

2.2.2 Tanım

G_3 uzayda 4 çeşit doğru vardır.

1) Reel izotropik olmayan doğrular; f ile kesişmezler.
2) Reel izotropik doğrular; w düzlemine ait olmayıp f ile kesişenler.
3) Reel ve izotropik olmayan doğrular; w düzleminin tüm doğruları (f dışında).
4) f ideal doğrusu.

$x = \text{sabit}$ düzlemler ***Öklidyen*** ve böylece w düzlemidir. Diğer düzlemler ***izotropiktir*** [22].

2.2.3 Tanım

3- boyutlu Galilean uzayda $x =$ sabit olan düzlemler (w) ideal düzlemi de dahil reel Öklidiyen düzlemlerdir. Diğer düzlemler ise izotropiktir [23].

2.2.4 Tanım

3-boyutlu Galilean uzayda herhangi bir $v = (x, y, z)$ vektörü için

$$\begin{cases} x \neq 0 & \text{ise v vektörüne izotropik olmayan,} \\ x = 0 & \text{ise v vektörüne izotropiktir} \end{cases}$$

denir. 3-boyutlu Galilean uzayda $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisini düşünelim. Eğer bu eğrinin teğet vektörü hiçbir yerde izotropik değilse yani $x'(s) \neq 0$ ise eğriye ***izotropik olmayan eğri*** denir. Aksi takdirde eğriye izotropik eğri denir [11].

2.2.5 Tanım

3-boyutlu Galilean uzayda $P_1 = (x, y, z)$ ve $P_2 = (x_1, y_1, z_1)$ iki nokta olsun. Bu iki nokta arasındaki uzaklık

$$d_{P_1P_2} = \begin{cases} |x_1 - x| & \text{eğer} \quad x \neq x_1 \\ \sqrt{(y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2} & \text{eğer} \quad x = x_1 \end{cases}$$

olur [23].

2.2.6 Tanım

3-boyutlu Galilean uzayda $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ve $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ iki vektör olmak üzere bu iki vektörün iç çarpımı

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \begin{cases} x_1 x_2 & , \quad x_1 \neq 0 \text{ yada } x_2 \neq 0 \text{ ise} \\ y_1 y_2 + z_1 z_2 & , \quad x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [11].

2.2.7 Tanım

G_3 Galilean uzayda vektörel çarpım ise $v_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $v_2 = (x_2, y_2, z_2)$ vektörleri için

$$u \times v = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} & , \quad x_1 \neq 0 \text{ yada } x_2 \neq 0 \text{ ise} \\ \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix} & , \quad x_1 = 0 \text{ ve } x_2 = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanabilir [11].

2.2.8 Tanım

G_3 Galilean uzayında $v = (x, y, z)$ vektörünün normu (büyüklüğü)

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle} = \begin{cases} |x| & , \quad x \neq 0 \text{ ise} \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , \quad x = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Eğer $\|v\| = 1$ ise v birim vektör olarak adlandırılır [11].

2.2.9 Tanım

Üç boyutlu Galilean uzayında C^r $(r \geq 1)$ sınıfından bir yüzey

$$X : U \to M, \quad U \subset \mathbb{R}^2,$$
$$X(u_1, u_2) = (x(u_1, u_2), y(u_1, u_2), z(u_1, u_2))$$

olarak parametrelendirilmiş olsun. Burada x, y, z U üzerinde türevlenebilir reel değerli fonksiyonlardır [12].

$$\frac{\partial x}{\partial u_i} = x_{u_i} \text{ ve } \frac{\partial^2 x}{\partial u_i \partial u_j} = x_{u_i u_j}, \quad 1 \leq i, j \leq 2$$

göstersin. Benzer işlemler y ve z için de geçerlidir. $x_{u_i} \neq 0$ olduğu zaman yüzey ***admissible*** (yani Öklid teğet düzlemleri olmayan) yüzeydir.

$$g_i = x_{u_i}, \quad h_{ij} = y_{u_i} y_{u_j} + z_{u_i} z_{u_j} \; (i, j = 1, 2)$$

göstersin. Böylece M'nin birinci temel formu

$$I = ds_1^2 + \varepsilon ds_2^2$$

dir. Burada

$$ds_1^2 = (g_1 du_1 + g_2 du_2)^2, \quad ds_2^2 = h_{11} du_1^2 + 2h_{12} du_1 du_2 + h_{22} du_2^2$$

ve

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & du_1 : du_2 \text{ izotropik değil} \\ 1, & du_1 : du_2 \text{ izotropik} \end{cases}$$

dir. M'nin ikinci temel formu

$$II = L_{11} du_1^2 + 2L_{12} du_1 du_2 + L_{22} du_2^2$$

olarak ifade edilir. Burada

$$L_{ij} = \left\langle \frac{X_{u_i u_j} . x_{u_1} - x_{u_i u_j} . X_{u_1}}{x_{u_1}}, N \right\rangle = \left\langle \frac{X_{u_i u_j} . x_{u_2} - x_{u_i u_j} . X_{u_2}}{x_{u_2}}, N \right\rangle \tag{2.10}$$

dir. Yüzeyin ikinci temel formu özdeş olarak sıfırsa yüzeye ***total geodezik*** denir [23].

3. ÖKLİD UZAYDA TEMEL FORMLARIN LAPLAS OPERATÖRÜNE GÖRE YÜZEY ÖRNEKLERİ

3.1 Dönel Yüzey

J bir açık aralık olmak üzere; $\gamma : J \to \Pi$ $\mathbb{R}^3$'te Π düzleminde bir eğri ve *l*, Π düzleminde γ eğrisi ile kesişmeyen bir düzgün doğru olsun. $\mathbb{R}^3$'teki M dönel yüzeyi γ profil eğrisinin *l* ekseni çevresinde dönmesi ile elde edilir. *l*, z-ekseni ve Π de xz-düzlemi olsun. O zaman γ profil eğrisi,

$$\gamma(u) = (\varphi(u), 0, \psi(u))$$

şeklinde verilir. Burada J üzerinde, φ pozitif fonksiyon ve ψ bir fonksiyondur. O halde M'nin parametrizasyonu

$$X(u,v) = (\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u)) \quad u \in J,\ v \in \mathbb{R} \tag{3.1}$$

şeklindedir.

$\gamma(u) = (\varphi(u), 0, \psi(u))$ profil eğrisi yay uzunluğu ile parametrilendirilmiş olsun yani

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1$$

dir. Teğet vektör alanları,

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (\varphi'\cos v, \varphi'\sin v, \psi') \\ X_v &= (-\varphi\sin v, \varphi\cos v, 0) \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

dir. M'nin birim normal vektör alanı

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ \varphi'\cos v & \varphi'\sin v & \psi' \\ -\varphi\sin v & \varphi\cos v & 0 \end{vmatrix} = (-\varphi\psi'\cos v, -\varphi\psi'\sin v, \varphi\varphi')$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = \varphi$$

olmak üzere

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\left(-\psi'\cos v,-\psi'\sin v,\varphi'\right) \tag{3.3}$$

olur. Birinci temel form katsayıları (2.2) ve (3.2) kullanılarak aşağıdaki gibi elde edilir.

$$E=\left\langle X_u,X_v\right\rangle=1,\qquad F=\left\langle X_u,X_v\right\rangle=0,\qquad G=\left\langle X_v,X_v\right\rangle=\varphi^2 \tag{3.4}$$

M'nin ikinci kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}X_{uu}&=\left(\varphi''\cos v,\varphi''\sin v,\psi''\right)\\X_{uv}&=\left(-\varphi'\sin v,\varphi'\cos v,0\right)\\X_{vv}&=\left(-\varphi\cos v,-\varphi\sin v,0\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

olur. (2.3), (3.3) ve (3.5) kullanılarak ikinci temel form katsayıları

$$L_{11}=\left\langle N,X_{uu}\right\rangle=-\varphi''\psi'+\varphi'\psi'',\ L_{12}=\left\langle N,X_{uv}\right\rangle=0,\ L_{22}=\left\langle N,X_{vv}\right\rangle=\varphi\psi' \tag{3.6}$$

elde edilir. Birim normal vektör alanı N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}N_u&=\left(-\psi''\cos v,-\psi''\sin v,\varphi''\right)\\N_v&=\left(\psi'\sin v,-\psi'\cos v,0\right)\end{aligned}\right\} \tag{3.7}$$

olmak üzere (2.1) ve (3.7) kullanılarak üçüncü temel form katsayıları

$$e_{11}=\left\langle N_u,N_u\right\rangle=\psi''^2+\varphi''^2,\ e_{12}=e_{21}=\left\langle N_u,N_v\right\rangle=0,\ e_{22}=\left\langle N_v,N_v\right\rangle=\psi'^2 \tag{3.8}$$

olur. (2.4), (3.4) ve (3.6) kullanıldığında

$$2H=\varphi'\psi''-\psi'\varphi''+\frac{\psi'}{\varphi}, \tag{3.9}$$

olur. (2.7), (3.6) ve (3.7) kullanılarak $\Delta^{II}N$ hesaplanabilir. İlk olarak,

$$\left(\frac{L_{22}N_u-L_{12}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_u=\left(\frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi\varphi''}}\left(-\psi''\cos v,-\psi''\sin v,\varphi''\right)\right)_u$$

$$
=\begin{pmatrix}
\left(\dfrac{-\psi''\varphi\varphi'\varphi''\psi'-\psi''\varphi^2\left(2\varphi''\psi''-\varphi'''\psi'\right)}{2\left(\varphi\varphi''\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{\varphi\psi'\psi'''}{\sqrt{\varphi\varphi''}}\right)\cos v,\\
\left(\dfrac{-\psi''\varphi\varphi'\varphi''\psi'-\psi''\varphi^2\left(2\varphi''\psi''-\varphi'''\psi'\right)}{2\left(\varphi\varphi''\right)^{\frac{3}{2}}}-\dfrac{\varphi\psi'\psi'''}{\sqrt{\varphi\varphi''}}\right)\sin v,\\
\left(\dfrac{\varphi\varphi'\varphi''^2\psi'+\varphi^2\varphi''\left(2\varphi''\psi''-\varphi'''\psi'\right)}{2\left(\varphi\varphi''\right)^{\frac{3}{2}}}+\dfrac{\varphi\varphi'''\psi'}{\sqrt{\varphi\varphi''}}\right)
\end{pmatrix}
$$

olur. Diğer taraftan,

$$
\left(\frac{L_{12}N_u-L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_v=\frac{-\psi'\left(\varphi'\psi''-\varphi''\psi'\right)}{\sqrt{\varphi\varphi''}}\left(\cos v,\sin v,0\right)
$$

olur. Bu durumda

$$
\Delta^{II}N=\begin{pmatrix}
\left(-\varphi''+\dfrac{1}{2\varphi}+\dfrac{\psi'^2}{2\varphi}-\dfrac{\varphi'\varphi'''}{2\varphi''}\right)\cos v,\\
\left(-\varphi''+\dfrac{1}{2\varphi}+\dfrac{\psi'^2}{2\varphi}-\dfrac{\varphi'\varphi'''}{2\varphi''}\right)\sin v,\\
-\psi''-\dfrac{\varphi'\psi'}{2\varphi}-\dfrac{\psi'\varphi'''}{2\varphi''}
\end{pmatrix} \tag{3.10}
$$

Profil eğrisi birim hızlı olmayan dönel yüzey için üçüncü temel formun Laplas'ı, (2.8), (2.9) ve (3.8) kullanılarak

$$
e_{ij}=\begin{bmatrix}\psi''^2+\varphi''^2 & 0\\ 0 & \psi'^2\end{bmatrix},
$$

$$
e=\det e_{ij}=\psi'^2\left(\psi''^2+\varphi''^2\right),
$$

$$
\left(e_{ij}\right)^{-1}=e^{ij}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{\varphi''^2+\psi''^2} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{\psi'^2}\end{bmatrix},
$$

$$\Delta^{III}=\left(-\frac{\psi''}{\psi'\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)}+\frac{\psi''\psi'''+\varphi''\varphi'''}{\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)^2}\right)\frac{\partial}{\partial u}-\frac{1}{\psi''^2+\varphi''^2}\frac{\partial^2}{\partial u^2}-\frac{1}{\psi'^2}\frac{\partial^2}{\partial v^2} \tag{3.11}$$

dir. O halde (3.3) ve (3.11)'nın kullanılmasıyla

$$\Delta^{III}N=\left(\frac{-\psi''^2\varphi''-\varphi''^3+\psi'\psi'''\varphi''-\psi'\psi''\varphi'''}{\psi'\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)^2}\right)\left(\varphi''\cos v,\varphi''\sin v,\psi''\right) \tag{3.12}$$

olur. γ profil eğrisi birim hızlı olursa (3.12) ifadesi

$$\Delta^{III}N=\frac{-2\varphi''}{\psi'\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)}\left(\varphi''\cos v,\varphi''\sin v,\psi''\right) \tag{3.13}$$

ifadesine dönüşür. $\Delta^{III}N=0$ olması için,

$$\varphi''=0 \ \vee \ \left(\varphi''=0\wedge\psi''=0\right)$$

olmalıdır. Fakat φ'' ve ψ'' aynı anda sıfır olamaz. Çünkü $\Delta^{III}N$ 'nin paydası sıfır olur. O halde φ'' 'nün tek başına sıfır olduğu durum incelenmelidir. Buna göre,

$$\varphi''=0 \ \wedge \ \psi''\neq 0$$

olmalıdır. Bu durumda $c_1,\ c_2,\ d_1,\ d_2$ integral sabitleri olmak üzere

$$\varphi(u)=c_1u+d_1 \text{ ve } \quad \psi(u)\neq c_2u+d_2$$

olur. Fakat profil eğrisi birim hızlı olduğu için $\varphi'^2+\psi'^2=1$ durumundan dolayı,

$$\psi'=\sqrt{1-\varphi'^2}=\sqrt{1-c_1^{\,2}}$$

olur. Buradan da,

$$\psi(u)=\sqrt{1-c_1^{\,2}}\,u+c_3$$

elde edilir. Fakat $\psi(u)\neq c_2u+d_2$ olduğundan bu bir çelişkidir. Dolayısıyla sıradaki sonuç elde edilmiş olur.

3.1.1 Sonuç

γ profil eğrisi birim hızlı olan ve $\Delta^{III}N=0$ şartını sağlayan dönel yüzey yoktur.

3.1.2 Sonuç

Eğer γ profil eğrisi birim hızlı olan M dönel yüzeyi $\Delta^{III}N=f.N$ şartını sağlıyorsa o zaman $f=2$ olur.

İspat

(3.3) ve (3.13) eşitlikleri kullanılarak

$$\left\langle \Delta^{III}N, N\right\rangle = f$$

olur. Gerekli işlemler yapıldığı takdirde $f=2$ elde edilir.

3.1.3 Önerme

Eğer M dönel yüzeyi $\varphi'\varphi''=\varphi\varphi'''$ şartını sağlıyorsa o zaman

$$\Delta^{III}N=-\frac{1}{H}\Delta^{II}N$$

olur.

İspat

$$\Delta^{III}N=f.\Delta^{II}N$$

olsun. (3.10) ve (3.13) kullanılarak, $\Delta^{III}N$ 'nin birinci ve ikinci bileşenleri $\Delta^{II}N$ 'nin birinci ve ikinci bileşenlerinin f katı olarak yazılırsa,

$$\frac{-2\varphi''^2}{\psi'\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)}=f.\frac{-2\varphi\varphi''^2+\varphi''+\psi'^2\varphi''-\varphi\varphi'\varphi'''}{2\varphi\varphi''}$$

olur ve buradan da

$$f=\frac{-4\varphi\varphi''^3}{\psi'\left(\psi''^2+\varphi''^2\right)\left(-2\varphi\varphi''^2+\varphi''+\psi'^2\varphi''-\varphi\varphi'\varphi'''\right)} \tag{3.14}$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.10) ve (3.13) kullanılarak $\Delta^{III}N$ 'nin üçüncü bileşeni $\Delta^{II}N$ 'nin üçüncü bileşeninin f katı olarak yazılırsa,

$$\frac{-2\varphi''\psi''}{\psi'\left(\psi''^{2}+\varphi''^{2}\right)}=f.\frac{-2\varphi\varphi''\psi''-\varphi'\varphi''\psi'-\varphi\varphi'''\psi'}{2\varphi\varphi''}$$

olur ve buradan da

$$f=\frac{-4\varphi\varphi''^{2}\psi''}{\psi'\left(\psi''^{2}+\varphi''^{2}\right)\left(-2\varphi\varphi''\psi''-\varphi'\varphi''\psi'-\varphi\varphi'''\psi'\right)} \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.14) ve (3.15) ifadelerinden

$$\varphi'\varphi''=\varphi\varphi''' \tag{3.16}$$

durumuna ulaşılır. Bu gösteriyor ki (3.16) şartı altında $\Delta^{III}N=f.\Delta^{II}N$ olacaktır. Eğer (3.16) şartı (3.14) veya (3.15)'te yerine yazılırsa,

$$f=\frac{2\varphi\psi'}{\varphi\varphi''-\psi'^{2}}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\Delta^{III}N=\frac{2\varphi\psi'}{\varphi\varphi''-\psi'^{2}}\Delta^{II}N$$

olur. (3.9)'daki ortalama eğrilik kullanılırsa

$$H=\frac{\varphi\varphi'\psi''-\varphi\varphi''\psi'+\psi'}{2\varphi}$$

olur ve bu ifade ψ' ile çarpılıp bölünürse

$$H=\frac{\varphi\varphi'\psi'\psi''-\varphi\varphi''\psi'^{2}+\psi'^{2}}{2\varphi\psi'}$$

elde edilir. Burada profil eğrisinin birim hızlı olmasından gelen $\varphi'\varphi''=-\psi'\psi''$ eşitliği kullanılarak işlemler devam ettirilirse

$$H=\frac{-\varphi\varphi'^{2}\varphi''-\varphi\varphi''\psi'^{2}+\psi'^{2}}{2\varphi\psi'}$$

ve buradan da

$$-\frac{1}{H}=\frac{2\varphi\psi'}{\varphi\varphi''-\psi'^2}=f$$

olur. Böylece $\Delta^{II}N$ ve $\Delta^{III}N$ arasındaki eşitliğin son durumu,

$$\Delta^{III}N=-\frac{1}{H}\Delta^{II}N$$

olarak bulunur.

3.2 Küresel Çarpım Yüzeyi

3.2.1 Tanım

$\alpha,\beta:\mathbb{R}\to IE^2$, $\alpha(u)=(f_1(u),f_2(u))$ ve $\beta(v)=(g_1(v),g_2(v))$ olacak şekilde iki düzlemsel eğri olsun. O zaman bu iki eğrinin küresel çarpım yaması

$$X=\alpha\otimes\beta:IE^2\to IE^3,$$

$$X(u,v)=(f_1(u),f_2(u)g_1(v),f_2(u)g_2(v)) \tag{3.17}$$

$u_0 \langle\, u \,\langle\, u_1,\quad v_0 \,\langle\, v \,\langle\, v_1$ biçiminde tanımlanan bir yüzeydir [24].

IE^3'te (3.17) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyinde $\beta(v)=(\cos v,\sin v)$ çemberi alınarak elde edilen küresel çarpım yüzeyi

$$X(u,v)=(f_1(u),f_2(u)\cos v,f_2(u)\sin v) \tag{3.18}$$

olur. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Yüzeyin kısmi türevleri,

$$\left.\begin{aligned}
X_u&=(f_1',f_2'\cos v,f_2'\sin v)\\
X_v&=(0,-f_2\sin v,f_2\cos v)\\
X_{uu}&=(f_1'',f_2''\cos v,f_2''\sin v)\\
X_{uv}&=(0,-f_2'\sin v,f_2'\cos v)\\
X_{vv}&=(0,-f_2\cos v,-f_2\sin v)
\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

dir. M'nin birim normal vektör alanı

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ f_1' & f_2'\cos v & f_2'\sin v \\ 0 & -f_2\sin v & f_2\cos v \end{vmatrix} = \left(f_2 f_2', -f_1' f_2\cos v, -f_1' f_2\sin v\right)$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = f_2\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}}\left(f_2', -f_1'\cos v, -f_1'\sin v\right) \tag{3.20}$$

olur. (3.20) kullanılarak N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_u &= \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{3}{2}}}\left(f_1', f_2'\cos v, f_2'\sin v\right) = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{(f_1'^2 + f_2'^2)^{\frac{3}{2}}} X_u \\ N_v &= \frac{1}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}}\left(0, f_1'\sin v, -f_1'\cos v\right) \end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

dir. (2.3), (3.19) ve (3.20) kullanılarak ikinci temel form katsayıları

$$L_{11} = \langle N, X_{uu}\rangle = \frac{f_1'' f_2' - f_1' f_2''}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}}, \quad L_{12} = \langle N, X_{uv}\rangle = 0, \quad L_{22} = \langle N, X_{vv}\rangle = \frac{f_1' f_2}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}} \tag{3.22}$$

elde edilir. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = \frac{\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right) f_1' f_2}{f_1'^2 + f_2'^2} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right) f_1' f_2 \neq 0$ olmalıdır. (2.7)'de $L_{12} = 0$ olması durumu yerine yazılırsa

$$\Delta^{II} N = -\frac{1}{\sqrt{|L_{11}L_{22}|}}\left[\left(\frac{L_{22}N_u}{\sqrt{|L_{11}L_{22}|}}\right)_u + \left(\frac{L_{11}N_v}{\sqrt{|L_{11}L_{22}|}}\right)_v\right] \tag{3.23}$$

olur. Bu durumda (3.21) ve (3.22) kullanılarak,

$$L_{22}N_u = \frac{f_1'f_2(f_1'f_2'' - f_1''f_2')}{(f_1'^2 + f_2'^2)^2}X_u$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\left(L_{22}N_u\right)_u = \left(-\frac{f_1'f_2(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{(f_1'^2 + f_2'^2)^2}\right)_u .X_u - \frac{f_1'f_2(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{(f_1'^2 + f_2'^2)^2}.X_{uu}$$

olur. Burada $A\left(u\right) = -\frac{f_1'f_2(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{(f_1'^2 + f_2'^2)^2}$ denilirse o zaman,

$$\left(L_{22}N_u\right)_u = A_u.X_u + A.X_{uu} \tag{3.24}$$

olacaktır. Daha sonra (3.23)'teki $\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}$ ifadesinin u'ya göre diferansiyeline bakılacak olursa,

$$\left(\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}\right)_u = \frac{1}{2}\frac{\left(L_{11}L_{22}\right)_u\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}}{L_{11}L_{22}} \tag{3.25}$$

bulunur. O halde (3.24) ve (3.25) kullanılırsa,

$$\left(\frac{L_{22}N_u}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}}\right)_u = \frac{\left(A_u.X_u + A.X_{uu}\right)\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|} - \frac{1}{2}\frac{\left(L_{11}L_{22}\right)_u\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}}{L_{11}L_{22}}L_{22}N_u}{\left|L_{11}L_{22}\right|}$$

olarak yazılır. Buradan gerekli sadeleştirmeler yapılır, (3.22) kullanılır ve $\left(L_{11}L_{22}\right)_u$ ifadesi yerine $\left(-A\left((f_1'^2 + f_2'^2)\right)\right)_u$ yazılırsa eşitliğin son hali aşağıdaki gibi olur.

$$\left(\frac{L_{22}N_u}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}}\right)_u = \frac{2\left(A_u.X_u + A.X_{uu}\right).L_{11} - \left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u.N_u}{2L_{11}\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}} \tag{3.26}$$

Diğer taraftan,

$$\left(\frac{L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}}\right)_v = \frac{L_{11}N_{vv}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}\right|}} \tag{3.27}$$

olarak bulunup (3.26) ve (3.27) kullanılırsa

$$\Delta^{II}N = -\frac{1}{|L_{11}L_{22}|}\left[\left(A_u.X_u + A.X_{uu}\right) - \frac{1}{2L_{11}}\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u .N_u + L_{11}N_{vv}\right] \tag{3.28}$$

olur. (3.28)'de geçen ifadeler tek tek açılmaya başlanırsa

$$A_u.X_u + A.X_{uu} = \left(A_u f_1' + Af_1'', (A_u f_2' + Af_2'')\cos v, (A_u f_2' + Af_2'')\sin v\right), \tag{3.29}$$

$$\frac{1}{2L_{11}}\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u .N_u = -\frac{1}{2\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)}\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u \left(f_1', f_2'\cos v, f_2'\sin v\right), \tag{3.30}$$

$$L_{11}N_{vv} = \frac{-A(f_1'^2 + f_2'^2)}{f_2}\left(0, \cos v, \sin v\right) \tag{3.31}$$

elde edilir. Bulunan bu ifadeler (3.28)'de yerine yazılırsa

$$\Delta^{II}N = \frac{-1}{|L_{11}L_{22}|}\begin{pmatrix} A_u f_1' + Af_1'' + \dfrac{f_1'\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u}{2\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)}, \\ \left(A_u f_2' + Af_2'' + \dfrac{f_2'\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u}{2\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)} - \dfrac{A(f_1'^2 + f_2'^2)}{f_2}\right)\cos v, \\ \left(A_u f_2' + Af_2'' + \dfrac{f_2'\left(-A(f_1'^2 + f_2'^2)\right)_u}{2\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)} + \dfrac{-A(f_1'^2 + f_2'^2)}{f_2}\right)\sin v \end{pmatrix} \tag{3.32}$$

elde edilir. Eğer α düzlemsel eğrisi birim hızlı olursa,

$$\left.\begin{aligned} & f_1'^2 + f_2'^2 = 1 \\ & f_1' f_1'' = -f_2' f_2'' \\ & f_1''^2 + f_1' f_1''' = -f_2''^2 - f_2' f_2''' \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

olur. (3.33)'teki eşitlikler, (3.32)'de kullanılırsa,

$$\Delta^{II}N=\frac{-1}{\left|L_{11}L_{22}\right|}\begin{pmatrix} A_u f_1'+Af_1''+\dfrac{f_1'(-A)_u}{2}, \\ \left(A_u f_2'+Af_2''+\dfrac{f_2'(-A)_u}{2}-\dfrac{A}{f_2}\right)\cos v, \\ \left(A_u f_2'+Af_2''+\dfrac{f_2'(-A)_u}{2}+\dfrac{-A}{f_2}\right)\sin v \end{pmatrix} \tag{3.34}$$

olarak bulunur. Gerekli ifadeler yerine yazıldığı takdirde

$$\Delta^{II}N=-\frac{1}{f_1'f_2(f_1''f_2'-f_1'f_2'')}\begin{bmatrix} \dfrac{f_2'f_2''\left(2f_2f_2'\left(f_2''^2+f_1''^2\right)-f_2f_2'''-f_2'f_2''\right)}{2f_1''}, \\ \left(\dfrac{1}{2}f_2'\left(f_2f_2'''+f_2'f_2''\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)\right)\cos v, \\ \left(\dfrac{1}{2}f_2'\left(f_2f_2'''+f_2'f_2''\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)\right)\sin v \end{bmatrix} \tag{3.35}$$

elde edilir. Eğer $\Delta^{II}N=0$ durumu incelenecek olursa,

$$\Delta^{II}N=0\Rightarrow\begin{cases} f_2'f_2''=0 \ \vee \ 2f_2f_2'\left(f_2''^2+f_1''^2\right)-f_2f_2'''-f_2'f_2''=0 \\ \wedge \\ \dfrac{1}{2}f_2'\left(f_2f_2'''+f_2'f_2''\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)=0 \end{cases}$$

olduğu görülebilir.

1.Durum:

$$\Delta^{II}N=0\Rightarrow\begin{cases} f_2'f_2''=0\Rightarrow f_2'=0 \ \vee \ f_2''=0 \\ \wedge \\ \dfrac{1}{2}f_2'\left(f_2f_2'''+f_2'f_2''\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)=0 \end{cases}$$

Buna göre eğer $f_2(u)=c_1$ veya $f_2(u)=c_2u+c_3$ olursa ikinci ifadenin sıfır olması otomatik sağlanır. Bu durumda

a) $f_2(u)=c_1$ olursa $f_1'^2+f_2'^2=1$ olduğu için,

$$f_1'^2=1-f_2'^2 \Rightarrow f_1(u)=\pm u+c_4$$

olur.

b) $f_2(u)=c_2u+c_3$ olursa $f_1'^2+f_2'^2=1$ olduğu için,

$$f_1(u)=\pm\sqrt{1-c_2{}^2}\,u+c_5$$

elde edilir. Fakat f_1 ’lerin ve f_2 ’lerin ikinci türevleri sıfır olduğundan $\Delta^{II}N$ ’nin paydası sıfır olur. Dolayısıyla $\Delta^{II}N=0$ sağlayan f_1 ve f_2 bu ilk durum için yoktur.

2. Durum:

$$\Delta^{II}N=0 \Rightarrow \begin{cases} 2f_2f_2'\left(f_2''^2+f_1''^2\right)-f_2f_2'''-f_2'f_2''=0 \\ \wedge \\ \dfrac{1}{2}f_2'\left(f_2f_2'''+f_2'f_2''\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)=0 \end{cases}$$

Burada verilen ilk eşitlik ikincide yerine yazılırsa,

$$\frac{1}{2}f_2'\left(2f_2f_2'\left(f_2''^2+f_1''^2\right)\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)=0$$

olur ve buradan da

$$f_2f_2'^2\left(f_2''^2+f_1''^2\right)-f_2''\left(1-f_2f_2''\right)=0$$

olur. Buradan α eğrisinin birim hızlı olmasının da yardımıyla (3.33) kullanılarak sadeleştirmeler devam ettirilirse son durum

$$f_2''\left(f_2f_2''+f_2'^2-1\right)=0$$

şeklinde elde edilir. Fakat burada $f_2'' \neq 0$ 'dır. Çünkü $f_2'' = 0$ olursa $f_2(u) = c_2 u + c_3$ olur. Buradan $f_1(u) = \pm\sqrt{1 - c_2^2}\, u + c_5$ elde edilir. Burada c_2, c_3, c_5 integral sabitidir. Bulunan bu f_1, f_2 $\Delta^{II}N$ 'nin paydasını sıfır yapar. O halde

$$f_2 f_2'' + f_2'^2 - 1 = 0 \tag{3.36}$$

olmalıdır. Buradan diferansiyel denklem çözülürse

$$f_2(u) = \pm\sqrt{u^2 + 2c_7 u + c_7^2 - c_6}$$

bulunur. f_2 yardımıyla

$$f_1(u) = \pm\sqrt{c_6}\ln\left(\sqrt{u^2 + 2c_7 u + c_7^2 - c_6} + u + c_7\right) + c_8$$

bulunur. Burada c_6, c_7, c_8 integral sabitidir. Aşağıdaki teorem ifade edilir.

3.2.2 Teorem

$\alpha(u) = (f_1(u), f_2(u))$ birim hızlı eğrisiyle elde edilen ve (3.18) parametrizasyonu ile verilen küresel çarpım yüzeyinin $\Delta^{II}N = 0$ olması için gerek ve yeter şart $f_2(u) = \pm\sqrt{u^2 + 2c_7 u + c_7^2 - c_6}$ olmasıdır. Burada c_6, c_7 integral sabitidir.

(3.18)'deki küresel çarpım yüzeyi için (2.1) ile (3.21)'deki N_u ve N_v kullanılarak üçüncü temel form katsayıları

$$\left.\begin{aligned}
e_{11} &= \langle N_u, N_u \rangle = \left(\frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{f_1'^2 + f_2'^2}\right)^2 \\
e_{12} &= e_{21} = \langle N_u, N_v \rangle = 0 \\
e_{22} &= \langle N_v, N_v \rangle = \frac{f_1'^2}{f_1'^2 + f_2'^2}
\end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

elde edilir. (2.9) ve (3.37) kullanılırsa,

$$e_{ij}=\begin{bmatrix} \left(\dfrac{f_1'f_2''-f_1''f_2'}{f_1'^2+f_2'^2}\right)^2 & 0 \\ 0 & \dfrac{f_1'^2}{f_1'^2+f_2'^2} \end{bmatrix},$$

$$e=\det e_{ij}=\frac{f_1'^2\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^2}{\left(f_1'^2+f_2'^2\right)^3}, \tag{3.38}$$

$$\left(e_{ij}\right)^{-1}=e^{ij}=\begin{bmatrix} \dfrac{\left(f_1'^2+f_2'^2\right)^2}{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{f_1'^2+f_2'^2}{f_1'^2} \end{bmatrix} \tag{3.39}$$

olur. O halde (2.8), (3.38) ve (3.39) kullanıldığı takdirde,

$$\Delta^{III}=D_1\frac{\partial}{\partial u}-E_1\frac{\partial^2}{\partial u^2}-F_1\frac{\partial^2}{\partial v^2} \tag{3.40}$$

olacaktır. Burada

$$D_1(u)=\frac{-f_1''\left(f_1'^2+f_2'^2\right)^2}{f_1'\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^2}-\frac{\left(f_1'^2+f_2'^2\right)\left(f_1'f_1''-f_2'f_2''\right)}{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^2}+\frac{\left(f_1'^2+f_2'^2\right)^2\left(f_1'f_2'''-f_1'''f_2'\right)}{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^3},$$

$$E_1(u)=\frac{\left(f_1'^2+f_2'^2\right)^2}{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)^2},$$

$$F_1(u)=\frac{f_1'^2+f_2'^2}{f_1'^2},$$

olur. (3.40)’ta yüzeyin birim normal vektör alanı N kullanıldığı takdirde,

$$\Delta^{III}N=D_1\frac{\partial N}{\partial u}-E_1\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}-F_1\frac{\partial^2 N}{\partial v^2} \tag{3.41}$$

dir. (3.21)'deki N_u ve N_v kullanıldığı zaman,

$$N_{uu} = \left(A_1 f_1' + B_1 f_1'', \left(A_1 f_2' + B_1 f_2''\right)\cos v, \left(A_1 f_2' + B_1 f_2''\right)\sin v\right), \tag{3.42}$$

$$N_{vv} = C_1\left(0, f_1'\cos v, f_1'\sin v\right) \tag{3.43}$$

olur. Burada

$$A_1(u) = \frac{\left(f_1' f_2''' - f_1''' f_2'\right)\left(f_1'^2 + f_2'^2\right) - 3\left(f_1' f_2'' - f_1'' f_2'\right)\left(f_1' f_1'' + f_2' f_2''\right)}{\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)^{\frac{5}{2}}},$$

$$B_1(u) = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)^{\frac{3}{2}}},$$

$$C_1(u) = \frac{1}{\left(f_1'^2 + f_2'^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

dir. Eğer (3.21), (3.41), (3.42) ve (3.43) kullanılırsa $\Delta^{III}N$ aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\Delta^{III}N = \begin{pmatrix} B_1 D_1 f_1' - A_1 E_1 f_1' - B_1 E_1 f_1'', \\ \left(B_1 D_1 f_2' - A_1 E_1 f_2' - B_1 E_1 f_2'' - C_1 F_1 f_1'\right)\cos v \\ \left(B_1 D_1 f_2' - A_1 E_1 f_2' - B_1 E_1 f_2'' - C_1 F_1 f_1'\right)\sin v \end{pmatrix}. \tag{3.44}$$

Yukarıdaki değerler yerine yazıldığı zaman

$$\Delta^{III}N = \frac{2}{\sqrt{f_1'^2 + f_2'^2}}\left(f_2', -f_1'\cos v, -f_1'\sin v\right) \tag{3.45}$$

elde edilir.

3.2.3 Sonuç

Küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{III}N = 0$ şartını sağlayan f_1 ve f_2 yoktur.

4. GALILEAN UZAYDA TEMEL FORMLARIN LAPLAS OPERATÖRÜNE GÖRE YÜZEY ÖRNEKLERİ

4.1 Özel Yüzeyler İçin $\Delta^{II}N = 0$ Durumu

Bu bölümde Galilean uzaydaki yüzey örneklerinde $\Delta^{II}N = 0$ durumu incelenecektir.

4.1.1 Dönel Yüzey

G_3 uzayında bir dönel yüzey IE^3 Öklid uzayındakine benzer şekilde oluşturulur.

Dönel yüzeylerin tanımı için G_3'te iki tip rotasyona ihtiyaç vardır. Bunlardan ilki Non-izotropik x-ekseni civarındaki Öklid rotasyonu

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x \\ y' &= y\cos\theta + z\sin\theta \\ z' &= -y\sin\theta + z\cos\theta \end{aligned}$$

ile verilir. Burada θ Öklid açısıdır. İkincisi izotropik rotasyon

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c\theta \\ \frac{c}{2}\theta^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x' &= x + c\theta \\ y' &= \theta x + y + \frac{c}{2}\theta^2 \\ z' &= z \end{aligned}$$

θ izotropik açı ve $c \in \mathbb{R}_0$ ile verilir. Burada belirlenmiş düzlemlerin demeti z=sabit ile verilir.

4.1.1 Tanım

G_3'te bir dönel yüzey, G_3'te rotasyona maruz kalan düzlemsel olan profil eğrisiyle oluşturulan bir yüzeydir. Bu rotasyon ya profil eğrisinin desteklendiği eksen civarındaki Öklid rotasyon ya da belirlenen düzlem demetinin seçimiyle yapılan izotropik rotasyondur. G_3'te dönel yüzeylerin profil eğrilerinin desteklendiği düzlem için iki durum göz önüne alınır. Bunlar ya Öklid düzlemde ya da izotropik düzlemde yatan profil eğrileridir.
İzotropik düzlem hem izotropik hem non-izotropik vektör içerirken, Öklid düzlemi sadece izotropik vektörler içerdiğinden G_3'te tanımlanan üç tip dönel yüzey vardır.

4.1.1.1 G_3'te Birinci Tip Dönel Yüzey

f ve g reel fonksiyonlar olmak üzere α profil eğrisi Öklid yz-düzleminde yatan ve $\alpha(t)=(0,f(t),g(t))$ parametrizasyonuyla verilen bir eğri olsun. Burada f ve g reel fonksiyonlardır. Bu profil eğrisine izotropik rotasyon uygulandığında G_3'te birinci tip dönel yüzey

$$\varphi(s,t)=\left(cs, f(t)+\frac{c}{2}s^2, g(t)\right) \tag{4.1}$$

parametrizasyonuyla verilir [23]. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Buna göre yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}\varphi_s&=(c,cs,0)\\ \varphi_t&=(0,f',g')\\ \varphi_{ss}&=(0,c,0)\\ \varphi_{st}&=(0,0,0)\\ \varphi_{tt}&=(0,f'',g'')\end{aligned}\right\} \tag{4.2}$$

dir. O halde dönel yüzeyin birim normal vektör alanı (4.2) kullanılarak

$$\varphi_s\times\varphi_t=\begin{vmatrix}0 & e_2 & e_3\\ c & cs & 0\\ 0 & f' & g'\end{vmatrix}=(0,-cg',cf')$$

ve

$$\left\|\varphi_s \times \varphi_t\right\| = c\sqrt{f'^2 + g'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}\left(0, -g', f'\right) \tag{4.3}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.2) ve (4.3) kullanılırsa

$$L_{11} = \frac{-cg'}{\sqrt{f'^2 + g'^2}}, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = \frac{f'g''-g'f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2}} \tag{4.4}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22} - L_{12}^{\ 2} = \frac{-cg'\left(f'g''-g'f''\right)}{f'^2 + g'^2} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $f' \neq 0$ ve $g' \neq 0$ olmalıdır. (4.3) kullanılarak N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_s &= (0,0,0) \\ N_t &= \frac{\left(f''g'-f'g''\right)}{\left(f'^2 + g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, f', g'\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.5}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.4) ve (4.5) kullanılırsa

$$\Delta^{II} N = -\frac{\sqrt{f'^2 + g'^2}}{\sqrt{(cg')(g'f''-f'g'')}}\left(\frac{-\sqrt{cg'}\sqrt{f'g''-g'f''}}{\left(f'^2 + g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, f', g'\right)\right)_t$$

olur. Burada

$$\left.\begin{aligned} A(t) &= \sqrt{cg'} \\ B(t) &= \left(f'^2 + g'^2\right)^{\frac{3}{2}} \\ C(t) &= \sqrt{f'g''-g'f''} \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

olmak üzere

$$\left(-\frac{AC}{B}(0,f',g')\right)_t=-\frac{1}{B^2}\begin{pmatrix}0,\\ \left[(A_tC+C_tA)B-B_tAC\right]f'+ABCf'',\\ \left[(A_tC+C_tA)B-B_tAC\right]g'+ABCg''\end{pmatrix}$$

olarak bulunur. $\Delta^{II}N=0$ için;

$$\begin{aligned}&\left[(A_tC+C_tA)B-B_tAC\right]f'+ABCf''=0\\ &\wedge\\ &\left[(A_tC+C_tA)B-B_tAC\right]g'+ABCg''=0\end{aligned}$$

olmalıdır. İlk denklem ikinci denklemde yerine yazılırsa,

$$\left[(A_tC+C_tA)B-B_tAC\right](f''g'-f'g'')=0$$

elde edilir. Burada $f''g'-f'g''\neq 0$ olduğundan $(A_tC+C_tA)B-B_tAC=0$ olmalıdır. (4.6) kullanılırsa

$$\left.\begin{aligned}A_t&=\frac{\sqrt{c}g''}{2\sqrt{g'}}\\ B_t&=3\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(f'f''+g'g''\right)\\ C_t&=\frac{f'g'''-g'f'''}{2\sqrt{-g'f''+f'g''}}\end{aligned}\right\}\tag{4.7}$$

elde edilir. (4.6) ve (4.7)'ye göre $(A_tC+C_tA)B-B_tAC=0$ ifadesi yeniden düzenlenirse,

$$\frac{\sqrt{c}\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{g'}\sqrt{-g'f''+f'g''}}\begin{pmatrix}-7f'^2f''g'g''+f'^3g''^2+5f''g'^3g''\\ -5f'g'^2g''^2+f'^3g'g'''+f'g'^3g'''\\ -f'^2f'''g'^2-g'^4f'''+6f'f''^2g'^2\end{pmatrix}=0$$

bulunur. Bu durumda $\Delta^{II}N=0$ için,

$$f'^3g''^2+g'\left(-7f'^2f''g''+5f''g'^2g''-5f'g'g''^2+6f'f''^2g'+f'^3g'''+f'g'^2g'''-f'^2f'''g'-g'^3f'''\right)=0$$

olmalıdır. Görünüş kolaylığı açısından parantez içindeki ifade $D(t)$ ile gösterilsin. O zaman $\Delta^{II}N=0$ için,

$$g''=0 \wedge D(t)=0$$

olur. Buradan $g''=0$ ifadesi $D(t)$ ifadesinde yerine yazılırsa

$$g=c_5t+d \text{ ve } 6f'f''^2-f'^2f'''-c_5{}^2f'''=0$$

olur. Fakat bulunan bu ifade $\Delta^{II}N$ 'yi sıfır yapmaz. O zaman aşağıdaki sonuç yazılabilir.

4.1.2 Sonuç

Birinci tip dönel yüzey için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları yoktur.

4.1.1.2 G_3 'te İkinci Tip Dönel Yüzey

f ve g reel fonksiyonlar olmak üzere $\alpha(t)=\left(f(t),g(t),0\right)$ parametrizasyonuyla verilen ve izotropik xy-düzleminde yatan $\alpha(t)$ profil eğrisini göz önüne alalım. $c\in\mathbb{R}_0$ olmak üzere bu profil eğrisine izotropik rotasyon uygulandığında G_3 'te ikinci tip dönel yüzey

$$\varphi(s,t)=\left(f(t)+cs, g(t), sf(t)+\frac{c}{2}s^2\right) \tag{4.8}$$

parametrizasyonuyla verilir [25]. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Buna göre yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_s&=\left(c,0,f+cs\right)\\
\varphi_t&=\left(f',g',sf'\right)\\
\varphi_{ss}&=\left(0,0,c\right)\\
\varphi_{st}&=\left(0,0,f'\right)\\
\varphi_{tt}&=\left(f'',g'',sf''\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.9}$$

dir. O halde dönel yüzeyin birim normal vektör alanı (4.9) kullanılırsa

$$\varphi_s \times \varphi_t = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ c & 0 & f+cs \\ f' & g' & sf' \end{vmatrix} = \left(0, ff', cg'\right)$$

ve

$$\left\|\varphi_s \times \varphi_t\right\| = \sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}}\left(0, ff', cg'\right) \tag{4.10}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.9) ve (4.10) kullanılırsa

$$L_{11} = \frac{c^2 g'}{\sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}}, \qquad L_{12} = \frac{cf'g'}{\sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}}, \qquad L_{22} = \frac{f\left(f'g''\text{-}f''g'\right)}{\sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}} \tag{4.11}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22} - {L_{12}}^2 = \frac{c^2 g'\left(ff'g'' - ff''g' - f'^2 g'\right)}{f^2 f'^2 + c^2 g'^2} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $g' \neq 0$ ve $ff'g'' - ff''g' - f'^2 g' \neq 0$ olmalıdır. (4.10) kullanılarak N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_s &= \left(0,0,0\right) \\ N_t &= \frac{c\left(f'^2 g' + ff''g' - ff'g''\right)}{\left(f^2 f'^2 + c^2 g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, cg', -ff'\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.11) ve (4.12) kullanıldığı takdirde

$$\left(\frac{L_{22}N_s - L_{12}N_t}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - {L_{12}}^2\right|}}\right)_s = \left(\frac{cf'\sqrt{g'}\sqrt{ff'g'' - ff''g' - f'^2 g'}}{\left(f^2 f'^2 + c^2 g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, cg', -ff'\right)\right)_s$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned} A_1(t) &= cf'\sqrt{g'} \\ B_1(t) &= \sqrt{ff'g'' - ff''g' - f'^2 g'} \\ C_1(t) &= \left(f^2 f'^2 + c^2 g'^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

olmak üzere

$$\left(\frac{A_1 B_1}{C_1}\left(0, cg', -ff'\right)\right)_s = 0$$

olarak bulunur. Diğer taraftan,

$$\left(\frac{L_{12}N_s - L_{11}N_t}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}^{\ 2}\right|}}\right)_t = \left(\frac{c^2\sqrt{g'}\sqrt{ff'g'' - ff''g' - f'^2 g'}}{\left(f^2 f'^2 + c^2 g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, cg', -ff'\right)\right)_t$$

olur. Burada (4.13) kullanılırsa

$$\left(\frac{cA_1 B_1}{f'C_1}\left(0, cg', -ff'\right)\right)_t$$

$$= \frac{c}{f'^2 C_1^{\ 2}}\begin{pmatrix} 0, \\ cg'f'C_1\left(A_{1t}B_1 + A_1 B_{1t}\right) - cg'A_1 B_1\left(f''C_1 + f'C_{1t}\right) + cf'g''A_1 B_1 C_1, \\ \text{-}ff'^2 C_1\left(A_{1t}B_1 + A_1 B_{1t}\right) + ff'A_1 B_1\left(f''C_1 + f'C_{1t}\right) \text{-} f'^3 A_1 B_1 C_1 - ff'f''A_1 B_1 C_1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde bulunan bu ifade ile birlikte (2.7) kullanılarak

$$\Delta^{II}N = \frac{\sqrt{f^2 f'^2 + c^2 g'^2}}{\sqrt{g'}\sqrt{ff'g'' - ff''g' - f'^2 g'}f'^2 C_1^{\ 2}}\begin{pmatrix} 0, \\ cg'f'C_1\left(A_{1t}B_1 + A_1 B_{1t}\right) - cg'A_1 B_1\left(f''C_1 + f'C_{1t}\right) \\ +cf'g''A_1 B_1 C_1, \\ \text{-}ff'^2 C_1\left(A_{1t}B_1 + A_1 B_{1t}\right) + ff'A_1 B_1\left(f''C_1 + f'C_{1t}\right) \\ \text{-}f'^3 A_1 B_1 C_1 - ff'f''A_1 B_1 C_1 \end{pmatrix}$$

elde edilir. Buna göre $\Delta^{II}N = 0$ olması için

$$cg'f'C_1\left(A_{1t}B_1+A_1B_{1t}\right)-cg'A_1B_1\left(f''C_1+f'C_{1t}\right)+cf'g''A_1B_1C_1=0$$

$$\wedge$$

$$-ff'^2C_1\left(A_{1t}B_1+A_1B_{1t}\right)+ff'A_1B_1\left(f''C_1+f'C_{1t}\right)-f'^3A_1B_1C_1-ff'f''A_1B_1C_1=0$$

olmalıdır. İlk eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$A_1B_1C_1\left(ff'^2g''-f'^3g'-ff'f''g'\right)=0$$

elde edilir. (4.13) kullanılıp A_1 , B_1 ve C_1 yerine yazılırsa

$$cf'^2\sqrt{g'}\left(ff'g''-ff''g'-f'^2g'\right)^{\frac{3}{2}}\left(f^2f'^2+c^2g'^2\right)^{\frac{3}{2}}=0$$

olarak bulunur. Bu bir çelişkidir.

4.1.3 Sonuç

İkinci tip dönel yüzey için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları yoktur.

4.1.1.3 G_3'te Üçüncü Tip Dönel Yüzey

f ve g reel fonksiyonlar olmak üzere $\alpha(t)=\left(f(t),g(t),0\right)$ parametrizasyonuyla verilen ve izotropik xy-düzleminde yatan $\alpha(t)$ profil eğrisini göz önüne alalım. Bu profil eğrisine x ekseni civarında Öklid rotasyon uygulandığında G_3'te üçüncü tip dönel yüzey

$$\varphi(s,t)=\left(f(t),g(t)\cos s,-g(t)\sin s\right) \tag{4.14}$$

parametrizasyonuyla verilir [23]. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Buna göre yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_s&=\left(0,-g\sin s,-g\cos s\right)\\
\varphi_t&=\left(f',g'\cos s,-g'\sin s\right)\\
\varphi_{ss}&=\left(0,-g\cos s,g\sin s\right)\\
\varphi_{st}&=\left(0,-g'\sin s,-g'\cos s\right)\\
\varphi_{tt}&=\left(f'',g''\cos s,-g''\sin s\right)
\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

dir. O halde dönel yüzeyin birim normal vektör alanı (4.15) kullanılarak

$$\varphi_s \times \varphi_t = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 0 & -g\sin s & -g\cos s \\ f' & g'\cos s & -g'\sin s \end{vmatrix} = \left(0, -f'g\cos s, f'g\sin s\right)$$

ve

$$\left\|\varphi_s \times \varphi_t\right\| = f'g$$

olmak üzere

$$N = \left(0, -\cos s, \sin s\right) \tag{4.16}$$

olur. (2.10), (4.15) ve (4.16) kullanılarak ikinci temel form katsayıları,

$$L_{11} = g, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = \frac{f''g'\text{-}f'g''}{f'} \tag{4.17}$$

olur. (4.16) kullanılırsa N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{array}{l} N_s = \left(0, \sin s, \cos s\right) \\ N_t = \left(0, 0, 0\right) \end{array}\right\} \tag{4.18}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.17) ve (4.18) kullanıldığı takdirde,

$$\left(\frac{L_{22}N_s - L_{12}N_t}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}{}^2\right|}}\right)_s = \frac{\sqrt{f''g' - f'g''}}{\sqrt{gf'}}\left(0, \cos s, -\sin s\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\left(\frac{L_{12}N_s - L_{11}N_t}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}{}^2\right|}}\right)_t = \left(\frac{0\left(0, \sin s, \cos s\right) - g\left(0, 0, 0\right)}{\sqrt{g\dfrac{f''g'\text{-}f'g''}{f'}}}\right)_t = 0$$

olur. O halde bulunan bu ifadeler ile birlikte (2.7) kullanılırsa

$$\Delta^{II}N = -\frac{\sqrt{f'}}{\sqrt{g\left(f''g' - f'g''\right)}}\frac{\sqrt{f''g' - f'g''}}{\sqrt{gf'}}\left(0, \cos s, -\sin s\right)$$

$$=-\frac{1}{g}(0,\cos s,-\sin s)$$

olur.

4.1.4 Sonuç

Üçüncü tip dönel yüzey için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde $f(t)$ ve $g(t)$ fonksiyonları yoktur.

4.1.5 Sonuç

(4.14) parametrizasyonuyla verilen üçüncü tip dönel yüzey için

$$\Delta^{II}N=-\frac{1}{g(t)}(0,\cos s,-\sin s)=\frac{1}{g(t)}N$$

elde edilir.

4.1.2 Öteleme Yüzeyi

Bu bölümde Galilean uzaydaki öteleme yüzeyleri incelenmiştir.

Öteleme yüzeyleri iki düzlemsel eğrinin ötelenmesiyle elde edilir. Kısaca öteleme yüzeyleri

$$X:I_1\times I_2\subset\mathbb{R}^2\to G_3$$

$$X(u,v)=\alpha(u)+\beta(v)$$

olacak şekilde α ve β düzlemsel eğrileriyle ifade edilir [26]. Öteleme yüzeyleri, $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrilerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılır.

1. Tip: $\alpha(u)$ izotropik olmayan düzlemsel eğri ve $\beta(v)$ izotropik eğridir.

2. Tip: $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ ikisi birden izotropik olmayan eğri [27].

4.1.2.1 G_3'te 1. Tip Öteleme Yüzeyi

Galilean uzayda 1. Tip öteleme yüzeyleri

$$X(u,v)=(u,v,f(u)+g(v)) \tag{4.19}$$

parametrizasyonuyla ifade edilir. Burada $\alpha(u)=(u,0,f(u))$, $y=0$ düzleminde izotropik olmayan ve $\beta(v)=(0,v,g(v))$, $x=0$ düzleminde izotropik olan eğridir. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Öteleme yüzeyinin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1,0,f') \\ X_v &= (0,1,g') \\ X_{uu} &= (0,0,f'') \\ X_{uv} &= (0,0,0) \\ X_{vv} &= (0,0,g'') \end{aligned}\right\} \tag{4.20}$$

dir. O halde öteleme yüzeyinin birim normal vektör alanı (4.20) kullanılarak

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f' \\ 0 & 1 & g' \end{vmatrix} = (0,-g',1)$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1+g'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+g'^2}}(0,-g',1) \tag{4.21}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.20) ve (4.21) kullanılırsa

$$L_{11} = \frac{f''}{\sqrt{1+g'^2}}, \qquad L_{12}=0, \qquad L_{22} = \frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}} \tag{4.22}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22} - L_{12}{}^2 = \frac{f''g''}{1+g'^2} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $f'' \neq 0$ ve $g'' \neq 0$ olmalıdır. (4.21) kullanılırsa N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_u &= (0,0,0) \\ N_v &= \frac{-g''}{\left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,1,g'\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.23}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.22) ve (4.23) kullanılırsa ilk olarak,

$$\left(\frac{L_{22}N_u - L_{12}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_u = \left(\frac{\frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}}(0,0,0) - 0\,\frac{-g''}{\left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,1,g'\right)}{\sqrt{\frac{f''}{\sqrt{1+g'^2}}\,\frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}}}}\right)_u = 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\left(\frac{L_{12}N_u - L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_v = \left(\frac{\sqrt{f''g''}}{\left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,1,g'\right)\right)_v$$

elde edilir. O halde bu ifade ile beraber (2.7) ve (4.22) kullanılarak $\Delta^{II}N$ hesaplandığı takdirde

$$\Delta^{II}N = -\frac{\sqrt{1+g'^2}}{\sqrt{f''g''}}\left[-\left(\frac{\sqrt{f''g''}}{\left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,1,g'\right)\right)_v\right] \tag{4.24}$$

elde edilir. Burada,

$$A(u,v) = \sqrt{f''g''}$$
$$B(v) = \left(1+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

olmak üzere,

$$A_v = \frac{f''g'''}{2\sqrt{f''g''}}$$
$$B_v = 3g'g''\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olur. Elde edilen ifadeler (4.24)'te yerine yazılırsa

$$\Delta^{II}N=\frac{\sqrt{1+g'^2}}{\sqrt{f''g''B^2}}\left(0,\ A_vB-B_vA,\ g'\left(A_vB-B_vA\right)+g''AB\right) \tag{4.25}$$

olarak elde edilir. (4.25) düzenlenirse

$$A_vB-B_vA=\frac{\sqrt{f''}\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(g'''\left(1+g'^2\right)-6g'g''^2\right)}{2\sqrt{g''}}$$

ve

$$g'\left(A_vB-B_vA\right)+g''AB=\frac{\sqrt{f''}\sqrt{1+g'^2}\left(g'g'''\left(1+g'^2\right)-4g'^2g''^2+2g''^2\right)}{2\sqrt{g''}}$$

olmak üzere

$$\Delta^{II}N=\frac{1}{2g''\left(1+g'^2\right)^2}\begin{pmatrix}0,\\ g'''\left(1+g'^2\right)-6g'g''^2,\\ g'g'''\left(1+g'^2\right)-4g'^2g''^2+2g''^2\end{pmatrix}$$

elde edilir. Buna göre $\Delta^{II}N=0$ olması için aşağıdaki koşulların sağlanması gerekir.

$$g'''\left(1+g'^2\right)-6g'g''^2=0$$
$$\wedge$$
$$g'g'''\left(1+g'^2\right)-4g'^2g''^2+2g''^2=0.$$

İlk eşitlik ikincide yerine yazıldığı takdirde $\Delta^{II}N=0$ olması için

$$2g''^2\left(g'^2+1\right)=0$$

koşulunun sağlanması yeterli olacaktır. Fakat $g''\neq 0$ olduğundan bu eşitlik sıfır olamaz.

4.1.6 Sonuç

Birinci tip öteleme yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonları yoktur.

4.1.2.2 G_3'te 2. Tip Öteleme Yüzeyi

Galilean uzayda 2. tip öteleme yüzeyleri

$$X(u,v) = \left(u+v,\ g(v),\ f(u)\right) \tag{4.26}$$

parametrizasyonuyla ifade edilir. Burada $\alpha(u) = (u,\ 0,\ f(u))$, $y=0$ izotropik düzleminde bir eğri ve $\beta(v) = (v,\ g(v),\ 0)$, $z=0$ izotropik düzleminde bir eğridir. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Buna göre yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1,0,f') \\ X_v &= (1,g',0) \\ X_{uu} &= (0,0,f'') \\ X_{uv} &= (0,0,0) \\ X_{vv} &= (0,g'',0) \end{aligned}\right\} \tag{4.27}$$

dir. O halde dönel yüzeyin birim normal vektör alanı (4.27) kullanılarak

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & f' \\ 1 & g' & 0 \end{vmatrix} = (0,f',g')$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{f'^2 + g'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}(0,f',g') \tag{4.28}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.27) ve (4.28) kullanılırsa

$$L_{11} = \frac{f''g'}{\sqrt{f'^2+g'^2}}, \qquad L_{12} = 0, \qquad L_{22} = \frac{g''f'}{\sqrt{f'^2+g'^2}} \tag{4.29}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22}-L_{12}{}^2=\frac{f'f''g'g''}{f'^2+g'^2}\neq 0$$

olur. Dolayısıyla $f'f''g'g''\neq 0$ olmalıdır. (4.28) kullanılırsa N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_u&=\frac{f''g'}{\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,g',-f'\right)\\ N_v&=\frac{g''f'}{\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,-g',f'\right)\end{aligned}\right\}\tag{4.30}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.29) ve (4.30) kullanılırsa,

$$\left(\frac{L_{22}N_u-L_{12}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_u=\left(\frac{\sqrt{f'f''g'g''}}{\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,g',-f'\right)\right)_u$$

ve

$$\left(\frac{L_{12}N_u-L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^2\right|}}\right)_v=\left(\frac{\sqrt{f'f''g'g''}}{\left(f'^2+g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,g',-f'\right)\right)_v$$

olur. Bu türevler hesaplandığı takdirde

$$\Delta^{II}N=-\frac{1}{\left(f'^2+g'^2\right)^2f'f''g'g''}\begin{pmatrix}0,\\ g'\begin{bmatrix}\left(f''^2+f'f'''\right)g'g''\left(f'^2+g'^2\right)-6f'^2f''^2g'g''\\ -\left(g''^2+g'g'''\right)f'f''\left(f'^2+g'^2\right)+6f'f''g'^2g''^2\end{bmatrix}\\ -2f'f''g'g''^2\left(f'^2+g'^2\right),\\ -f'\begin{bmatrix}\left(f''^2+f'f'''\right)g'g''\left(f'^2+g'^2\right)-6f'^2f''^2g'g''\\ -\left(g''^2+g'g'''\right)f'f''\left(f'^2+g'^2\right)+6f'f''g'^2g''^2\end{bmatrix}\\ -2f'f''^2g'g''\left(f'^2+g'^2\right)\end{pmatrix}\tag{4.31}$$

elde edilir.

Buna göre $\Delta^{II}N=0$ için

$$g'\begin{bmatrix}\left(f''^2+ff'''\right)g'g''\left(f'^2+g'^2\right)-6f'^2f''^2g'g'' \\ -\left(g''^2+g'g'''\right)f'f''\left(f'^2+g'^2\right)+6f'f''g'^2g''^2\end{bmatrix}-2f'f''g'g''^2\left(f'^2+g'^2\right)=0$$

$\wedge$

$$-f'\begin{bmatrix}\left(f''^2+f'f'''\right)g'g''\left(f'^2+g'^2\right)-6f'^2f''^2g'g'' \\ -\left(g''^2+g'g'''\right)f'f''\left(f'^2+g'^2\right)+6f'f''g'^2g''^2\end{bmatrix}-2f'f''^2g'g''\left(f'^2+g'^2\right)=0$$

olmalıdır. Birinci eşitlik ikincide yerine yazılırsa

$$-2f'f''g'g''\left(f'^2+g'^2\right)\left(f'g''+f''g'\right)=0 \tag{4.32}$$

durumu elde edilir. Burada $2f'f''g'g''\left(f'^2+g'^2\right)\neq 0$ olduğundan

$$f'(u)g''(v)+g'(v)f''(u)=0$$

olması gerekir. u ve v'ye göre integraller alınırsa aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.7 Sonuç

(4.26) parametrizasyonuyla verilen 2. tip öteleme yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ olması için $f(u)=-\dfrac{e^{-cu}}{c}+c_1$ ve $g(v)=\dfrac{e^{cv}}{c}+c_2$ fonksiyonları elde edilir. Burada c, c_1, c_2 integral sabitleridir.

4.1.3 Çarpanlara Ayrılabilir Yüzey

M, G_3 Galilean uzayında bir yüzey olsun. Eğer M yüzeyi $z(u,v)=f(u)g(v)$ kapalı formuyla verilirse o zaman yüzey çarpanlara ayrılabilir yüzey olarak adlandırılır. Burada f ve g türevlenebilir fonksiyonlardır. Böylece çarpanlara ayrılabilir yüzey

$$X(u,v)=\left(u,v,f(u).g(v)\right) \tag{4.33}$$

yamasıyla yazılabilir. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Buna göre yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} X_u &= (1,0,gf') \\ X_v &= (0,1,fg') \\ X_{uu} &= (0,0,gf'') \\ X_{uv} &= (0,0,g'f') \\ X_{vv} &= (0,0,fg'') \end{aligned}\right\} \tag{4.34}$$

dir. O halde çarpanlara ayrılabilir yüzeyin birim normal vektör alanı (4.34) kullanılarak

$$X_u \times X_v = \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ 1 & 0 & gf' \\ 0 & 1 & fg' \end{vmatrix} = (0,-fg',1)$$

ve

$$\|X_u \times X_v\| = \sqrt{1+f^2g'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{1+f^2g'^2}}(0,-fg',1) \tag{4.35}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.34) ve (4.35) kullanılırsa

$$L_{11} = \frac{gf''}{\sqrt{1+f^2g'^2}}, \qquad L_{12} = \frac{g'f'}{\sqrt{1+f^2g'^2}}, \qquad L_{22} = \frac{fg''}{\sqrt{1+f^2g'^2}} \tag{4.36}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22} - L_{12}{}^2 = \frac{ff''gg'' - f'^2g'^2}{1+f^2g'^2} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $ff''gg'' - f'^2g'^2 \neq 0$ olmalıdır. (4.35) kullanılırsa N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_u &= \frac{f'g'}{\left(1+f^2g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}(0,-1,-fg') \\ N_v &= \frac{fg''}{\left(1+f^2g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}(0,-1,-fg') \end{aligned}\right\} \tag{4.37}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.36) ve (4.37) kullanılırsa ilk olarak,

$$\left(\frac{L_{22}N_u - L_{12}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}{}^2\right|}}\right)_u = 0$$

bulunur. Öte yandan,

$$\left(\frac{L_{12}N_u - L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}{}^2\right|}}\right)_v = \left(\frac{\sqrt{\left|ff''gg'' - f'^2g'^2\right|}}{\left(1+f^2g'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,-1,-fg'\right)\right)_v$$

elde edilir. Burada,

$$\left.\begin{aligned} A(u,v) &= \sqrt{\left|ff''gg'' - f'^2g'^2\right|} \\ B(u,v) &= \left(1+f^2g'^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.38}$$

olmak üzere,

$$\left(\frac{A}{B}\left(0,-1,-fg'\right)\right)_v = \frac{1}{B^2}\left(0,-BA_v + AB_v, fg'\left(-BA_v + AB_v\right) - ABfg''\right)$$

olur. Burada (2.7) ve (4.38) kullanılarak

$$\Delta^{II}N = \frac{1}{AB^{\frac{5}{3}}}\left(0,-BA_v + AB_v, fg'\left(-BA_v + AB_v\right) - ABfg''\right)$$

elde edilir. Buna göre $\Delta^{II}N = 0$ olması için

$$-BA_v + AB_v = 0 \tag{4.39}$$

ve

$$ABfg'' = 0 \tag{4.40}$$

olmalı. Fakat $A \neq 0$ ve $B \neq 0$ olduğundan (4.40)’tan $g'' = 0$ olmalı. Buradan

$$g(v) = c_1v + c_2 \tag{4.41}$$

olur. (4.41) ifadesi (4.39) ifadesini sağlar.

4.1.8 Sonuç

(4.33) parametrizasyonuyla verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey için $g(v)=c_1v+c_2$ olursa $\Delta^{II}N=0$ elde edilir. Burada c_1, c_2 integral sabitidir.

4.1.9 Örnek

G_3'te

$$X(u,v)=\left(u,v,u^2(v+1)\right)$$

parametrizasyonuyla verilen yüzey için,

$$\begin{aligned}
X_u &= \left(1,0,2u(v+1)\right)\\
X_v &= \left(0,1,u^2\right)\\
X_{uu} &= \left(0,0,2(v+1)\right)\\
X_{uv} &= \left(0,0,2u\right)\\
X_{vv} &= \left(0,0,0\right)
\end{aligned}$$

olur. Yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N=\frac{1}{\sqrt{1+u^4}}\left(0,-u^2,1\right)$$

elde edilir. İkinci temel form katsayıları

$$L_{11}=\frac{2(v+1)}{\sqrt{1+u^4}}, \qquad L_{12}=\frac{2u}{\sqrt{1+u^4}}, \qquad L_{22}=0$$

olur. N'nin kısmi türevleri

$$\begin{aligned}
N_u &= \frac{2u}{\left(1+u^4\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0,-1,-u^2\right)\\
N_v &= 0
\end{aligned}$$

dir. Bulunan ifadeler aşağıda yerine yazılırsa

$$\Delta^{II}N=-\frac{1}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}^2\right|}}\left[\left(\frac{L_{22}N_u-L_{12}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}^2\right|}}\right)_u-\left(\frac{L_{12}N_u-L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}^2\right|}}\right)_v\right]$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{\frac{4u^2}{1+u^4}}}\left[-\left(\frac{4u^2}{\left(1+u^4\right)^2}\left(0,-1,-u^2\right)\right)_v\right]=0$$

olur.

4.1.4 Küresel Çarpım Yüzeyi

$\alpha,\beta:I_i\subset\mathbb{R}\to G_2$, $\alpha(u)=\left(f_1(u),f_2(u)\right)$ ve $\beta(v)=\left(g_1(v),g_2(v)\right)$ olacak şekilde iki Galilean düzlem eğrisi olsun. Burada f_i ve g_i $(i=1,2)$ sırasıyla I_1 ve I_2 açıklarında reel değerli sabit olmayan türevlenebilir fonkisyonlardır. O zaman G_3'te iki düzlem eğrisinin M küresel çarpım yaması

$$\begin{aligned}&X=\alpha\otimes\beta:I_1\times I_2\to G_3,\\&X(u,v)=\left(f_1(u),f_2(u)g_1(v),f_2(u)g_2(v)\right)\end{aligned}\tag{4.42}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_0\langle u\langle u_1$, $v_0\langle v\langle v_1$ dir [28, 29]. Bu yüzey parabolik noktalara sahip olmasın. Yüzeyin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned}X_u&=\left(f_1',f_2'g_1,f_2'g_2\right)\\X_v&=\left(0,f_2g_1',f_2g_2'\right)\\X_{uu}&=\left(f_1'',f_2''g_1,f_2''g_2\right)\\X_{uv}&=\left(0,f_2'g_1',f_2'g_2'\right)\\X_{vv}&=\left(0,f_2g_1'',f_2g_2''\right)\end{aligned}\right\}\tag{4.43}$$

dir. O halde küresel çarpım yüzeyinin birim normal vektör alanı (4.43) kullanılarak

$$X_u\times X_v=\begin{vmatrix}0&e_2&e_3\\f_1'&f_2'g_1&f_2'g_2\\0&f_2g_1'&f_2g_2'\end{vmatrix}=\left(0,-f_1'f_2g_2',f_1'f_2g_1'\right)$$

ve

$$\left\| X_u \times X_v \right\| = f_1' f_2 \sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}$$

olmak üzere

$$N = \frac{1}{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}} \left(0, -g_2', g_1'\right) \tag{4.44}$$

olur. İkinci temel form katsayıları (2.10), (4.43) ve (4.44) kullanılarak

$$L_{11} = \frac{\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)}{f_1' \sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}}, \; L_{12} = 0, L_{22} = \frac{f_2\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)}{\sqrt{g_1'^2 + g_2'^2}} \tag{4.45}$$

olur. Burada yüzeyin parabolik noktalarının olmamasından

$$L_{11}.L_{22} - L_{12}^2 = \frac{f_2\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right)}{f_1'\left(g_1'^2 + g_2'^2\right)} \neq 0$$

olur. Dolayısıyla $f_2\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1' g_2'' - g_1'' g_2'\right) \neq 0$ olmalıdır. N'nin kısmi türevleri

$$\left.\begin{aligned} N_u &= (0,0,0) \\ N_v &= \frac{g_1'' g_2' - g_1' g_2''}{\left(g_1'^2 + g_2'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, g_1', g_2'\right) \end{aligned}\right\} \tag{4.46}$$

olarak bulunur. O halde (2.7), (4.45) ve (4.46) kullanılırsa ilk olarak,

$$\left(\frac{L_{22} N_u - L_{12} N_v}{\sqrt{\left|L_{11} L_{22} - L_{12}^2\right|}}\right)_u = 0$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$\left(\frac{L_{12}N_u - L_{11}N_v}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22} - L_{12}^2\right|}}\right)_v = \frac{\sqrt{f_1''f_2' - f_1'f_2''}}{\sqrt{f_1'f_2}}.\left(\frac{\sqrt{g_1g_2' - g_1'g_2}\sqrt{g_1'g_2'' - g_1''g_2'}}{\left(g_1'^2 + g_2'^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(0, g_1', g_2'\right)\right)_v$$

elde edilir. Burada

$$\left.\begin{aligned} A(v) &= \sqrt{g_1g_2' - g_1'g_2} \\ B(v) &= \sqrt{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \\ C(v) &= \left(g_1'^2 + g_2'^2\right)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}\right\} \tag{4.47}$$

olmak üzere

$$\frac{\sqrt{f_1''f_2' - f_1'f_2''}}{\sqrt{f_1'f_2}}\left(\frac{AB}{C}\left(0, g_1', g_2'\right)\right)_v = \frac{\sqrt{f_1''f_2' - f_1'f_2''}}{C^2\sqrt{f_1'f_2}}\begin{pmatrix} 0, \\ g_1'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) \\ +ABCg_1'', \\ g_2'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) \\ +ABCg_2'' \end{pmatrix}$$

elde edilir. O halde bu ifade ile birlikte (2.7) ve (4.45) kullanılarak $\Delta^{II}N$ oluşturulursa,

$$\Delta^{II}N = -\frac{1}{\sqrt{(g_1g_2' - g_1'g_2)\left(g_1'g_2'' - g_1''g_2'\right)}\left(g_1'^2 + g_2'^2\right)^{\frac{5}{2}} f_2}.\begin{pmatrix} 0, \\ g_1'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) \\ +ABCg_1'', \\ g_2'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) \\ +ABCg_2'' \end{pmatrix}$$

elde edilir. Dolayısıyla $\Delta^{II}N = 0$ için

$$\begin{aligned} &g_1'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) + ABCg_1'' = 0 \\ &\wedge \\ &g_2'\left(BCA_v + ACB_v - ABC_v\right) + ABCg_2'' = 0 \end{aligned}$$

olur. İlk eşitlik ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$ABC\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)=0$$

şartı kalacaktır. (4.47) kullanılarak değerler yerine yazılırsa $\Delta^{II}N=0$ için gerekli olan koşul,

$$\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}.\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^2.\left(g_1'^2+g_2'^2\right)^{\frac{3}{2}}=0$$

olur. O halde $\Delta^{II}N=0$ olması için yukarıdaki eşitliğin sağlanması gerekir. Fakat bu ifade yüzeyin parabolik noktaları olmadığından sıfır olamaz.

4.1.10 Sonuç

G_3 uzayında küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde $f(u)$ ve $g(v)$ fonksiyonları yoktur.

4.2 Küresel Çarpım Yüzeyinde $\Delta^{II}x_i=\lambda_i x_i$ Durumu

Bu bölümde G_3 Galilean uzayda (4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{II}x_i=\lambda_i x_i$ şartı incelenecektir.

Burada x_1, x_2, x_3 koordinat fonksiyonları ve bunların kısmi türevleri aşağıdaki gibidir.

$$\left.\begin{array}{lll} x_1=f_1(u) & x_2=f_2(u)g_1(v) & x_3=f_2(u)g_2(v) \\ x_{1u}=f_1' & x_{2u}=f_2'g_1 & x_{3u}=f_2'g_2 \\ x_{1v}=0 & x_{2v}=f_2g_1' & x_{3v}=f_2g_2' \end{array}\right\}. \tag{4.48}$$

O halde (2.7), (4.45) ve (4.48) kullanıldığı zaman ilk olarak

$$\left(\frac{L_{22}x_{1u}-L_{12}x_{1v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}^2\right|}}\right)_u=\left(\frac{f_1'^{\frac{3}{2}}\sqrt{f_2}\sqrt{g_1'g_2''-g_1''g_2'}}{\sqrt{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}}\right)_u$$

$$=\frac{1}{2}\frac{f_1'^{\frac{1}{2}}\sqrt{g_1'g_2''-g_1''g_2'}}{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f_2}\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}}\begin{bmatrix}\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(3f_1''f_2+f_2'f_1'\right)\\ -f_1'f_2\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right)\end{bmatrix} \tag{4.49}$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{L_{12}x_{1u}-L_{11}x_{1v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^{2}\right|}}=0 \tag{4.50}$$

olur. (2.7), (4.45), (4.49) ve (4.50) kullanılırsa,

$$\Delta^{II}x_{1}=\lambda_{1}\left(u,v\right).x_{1}$$

olacak şekilde

$$\Delta^{II}x_{1}=\left(-\frac{1}{2}\frac{\sqrt{g_{1}'^{2}+g_{2}'^{2}}f_{1}'}{\left(f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''\right)^{2}\left(g_{1}g_{2}'-g_{1}'g_{2}\right)f_{1}f_{2}}\left[\begin{array}{l}\left(f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''\right)\left(3f_{1}''f_{2}+f_{2}'f_{1}'\right)\\ -f_{1}'f_{2}\left(f_{1}'''f_{2}'-f_{1}'f_{2}'''\right)\end{array}\right]\right)f_{1} \tag{4.51}$$

elde edilmiş olur. Diğer taraftan (2.7), (4.45) ve (4.48) kullanılırsa $\Delta^{II}x_{2}$ hesabı için ilk olarak,

$$\left(\frac{L_{22}x_{2u}-L_{12}x_{2v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^{2}\right|}}\right)_{u}=\left(\frac{\sqrt{f_{1}'}\sqrt{f_{2}}f_{2}'g_{1}\sqrt{g_{1}'g_{2}''-g_{1}''g_{2}'}}{\sqrt{\left(f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''\right)\left(g_{1}g_{2}'-g_{1}'g_{2}\right)}}\right)_{u}$$

$$=\frac{f_{2}g_{1}\sqrt{g_{1}'g_{2}''-g_{1}''g_{2}'}}{\sqrt{g_{1}g_{2}'-g_{1}'g_{2}}\left(f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f_{1}'}\sqrt{f_{2}}}\left(\begin{array}{l}\left(f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''\right)\left(\frac{1}{2}f_{2}'f_{1}''+\frac{1}{2}\frac{f_{1}'f_{2}'^{2}}{f_{2}}+f_{1}'f_{2}''\right)\\ -\frac{1}{2}f_{1}'f_{2}'\left(f_{1}'''f_{2}'-f_{1}'f_{2}'''\right)\end{array}\right) \tag{4.52}$$

dir. İkinci olarak,

$$\left(\frac{L_{12}x_{2u}-L_{11}x_{2v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^{2}\right|}}\right)_{v}=\left(-\frac{\sqrt{f_{2}}g_{1}'\sqrt{f_{1}''f_{2}'-f_{1}'f_{2}''}\sqrt{g_{1}g_{2}'-g_{1}'g_{2}}}{\sqrt{f_{1}'}\sqrt{g_{1}'g_{2}''-g_{1}''g_{2}'}}\right)_{v}$$

$$
=-\frac{f_2 g_1\sqrt{f_1''f_2'-f_1'f_2''}}{\sqrt{f_2}\sqrt{f_1'}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}}=\left(\begin{array}{l} g_1''\left(g_2'-\dfrac{g_1'g_2}{g_1}\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right) \\ +\dfrac{1}{2}g_1'\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(g_2''-\dfrac{g_1''g_2}{g_1}\right) \\ -\dfrac{1}{2}g_1'\left(g_2'-\dfrac{g_1'g_2}{g_1}\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right) \end{array}\right) \tag{4.53}
$$

olur. (2.7), (4.45), (4.52) ve (4.53) kullanılırsa,

$$
\Delta^{II}x_2=\lambda_2(u,v).x_2
$$

olacak şekilde

$$
\Delta^{II}x_2=\frac{-\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}}{\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)f_2}\left[\begin{array}{l} \dfrac{1}{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^2}\left(\begin{array}{l} \left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(\dfrac{1}{2}f_2'f_1''+\dfrac{1}{2}\dfrac{f_1'f_2'^2}{f_2}+f_1'f_2''\right) \\ -\dfrac{1}{2}f_1'f_2'\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right) \end{array}\right) \\ +\dfrac{1}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^2}\left(\begin{array}{l} \dfrac{g_1''}{g_1}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right) \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{g_1'}{g_1}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(g_1g_2''-g_1''g_2\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{g_1'}{g_1}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right) \end{array}\right) \end{array}\right]f_2g_1 \tag{4.54}
$$

elde edilmiş olur. (2.7), (4.45) ve (4.48) kullanılırsa $\Delta^{II}x_3$ hesabı için ilk olarak,

$$
\left(\frac{L_{22}x_{3u}-L_{12}x_{3v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}^2\right|}}\right)_u=\left(\frac{\sqrt{f_1'}\sqrt{f_2}f_2'g_2\sqrt{g_1'g_2''-g_1''g_2'}}{\sqrt{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)}}\right)_u
$$

$$
=\frac{f_2g_2\sqrt{g_1'g_2''-g_1''g_2'}}{\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{f_1'}\sqrt{f_2}}\left(\begin{array}{l} \left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(\dfrac{1}{2}f_2'f_1''+\dfrac{1}{2}\dfrac{f_1'f_2'^2}{f_2}+f_1'f_2''\right) \\ -\dfrac{1}{2}f_1'f_2'\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right) \end{array}\right) \tag{4.55}
$$

olur. İkinci olarak,

$$\left(\frac{L_{12}x_{3u}-L_{11}x_{3v}}{\sqrt{\left|L_{11}L_{22}-L_{12}{}^{2}\right|}}\right)_v=\left(-\frac{\sqrt{f_2}g_2'\sqrt{f_1''f_2'-f_1'f_2''}\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}}{\sqrt{f_1'}\sqrt{g_1'g_2''-g_1''g_2'}}\right)_v$$

$$=-\frac{f_2g_2\sqrt{f_1''f_2'-f_1'f_2''}}{\sqrt{f_2}\sqrt{f_1'}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^{\frac{3}{2}}\sqrt{g_1g_2'-g_1'g_2}}\begin{pmatrix} g_2''\left(\dfrac{g_1g_2'}{g_2}-g_1'\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right) \\ +\dfrac{1}{2}g_2'\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(\dfrac{g_1g_2''}{g_2}-g_1''\right) \\ -\dfrac{1}{2}g_2'\left(\dfrac{g_1g_2'}{g_2}-g_1'\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right)\end{pmatrix} \tag{4.56}$$

olarak bulunur. (2.7), (4.45), (4.55) ve (4.56) kullanılırsa,

$$\Delta^{II}x_3=\lambda_3(u,v).x_3$$

olacak şekilde

$$\Delta^{II}x_3=-\frac{\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}}{\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)f_2}\left[\begin{array}{l}\dfrac{1}{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^2}\begin{pmatrix}\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(\dfrac{1}{2}f_2'f_1''+\dfrac{1}{2}\dfrac{f_1'f_2'^2}{f_2}+f_1'f_2''\right)\\ -\dfrac{1}{2}f_1'f_2'\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right)\end{pmatrix}\\[2em] +\dfrac{1}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^2}\begin{pmatrix}\dfrac{g_2''}{g_2}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{g_2'}{g_2}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(g_1g_2''-g_1''g_2\right)\\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{g_2'}{g_2}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right)\end{pmatrix}\end{array}\right]f_2g_2 \tag{4.57}$$

elde edilmiş olur.

$$A(u)=\frac{1}{\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^2}\begin{pmatrix}\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(\dfrac{1}{2}f_2'f_1''+\dfrac{1}{2}\dfrac{f_1'f_2'^2}{f_2}+f_1'f_2''\right)\\ -\dfrac{1}{2}f_1'f_2'\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right)\end{pmatrix}, \tag{4.58}$$

$$B(v)=\frac{1}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^2}\begin{pmatrix} \dfrac{g_1''}{g_1}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right) \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{g_1'}{g_1}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(g_1g_2''-g_1''g_2\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{g_1'}{g_1}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right) \end{pmatrix}, \tag{4.59}$$

$$C(u,v)=-\frac{\sqrt{g_1'^2+g_2'^2}}{\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)f_2}, \tag{4.60}$$

$$D(v)=\frac{1}{\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)^2}\begin{pmatrix} \dfrac{g_2''}{g_2}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right) \\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{g_2'}{g_2}\left(g_1'g_2''-g_1''g_2'\right)\left(g_1g_2''-g_1''g_2\right) \\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{g_2'}{g_2}\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1'g_2'''-g_1'''g_2'\right) \end{pmatrix}, \tag{4.61}$$

$$E(u)=\frac{f_1'}{2\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)^2 f_1}\begin{bmatrix} \left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)\left(3f_1''f_2+f_2'f_1'\right) \\ -f_1'f_2\left(f_1'''f_2'-f_1'f_2'''\right) \end{bmatrix} \tag{4.62}$$

olacak şekilde,

$$\Delta^{II}x_1=\lambda_1(u,v).x_1=\lambda_1(u,v).f_1(u)=\frac{1}{2}C(u,v).E(u).f_1(u) \tag{4.63}$$

$$\Delta^{II}x_2=\lambda_2(u,v).x_2=\lambda_2(u,v).f_2(u)g_1(v)=C(u,v).\left[A(u)+B(v)\right]f_2(u)g_1(v) \tag{4.64}$$

$$\Delta^{II}x_3=\lambda_3(u,v).x_3=\lambda_3(u,v).f_2(u)g_2(v)=C(u,v).\left[A(u)+D(v)\right]f_2(u)g_2(v) \tag{4.65}$$

elde edilir. Burada $\lambda_i(u,v)$, $i=1,2,3$ bir diferansiyellenebilir fonksiyon ve $f_1\neq c_2f_2+c_3$ ve $g_1\neq cg_2+c_1$ dir. f ve g'nin ikinci türevleri aynı anda sıfır olamaz. Çünkü $A(u)$, $B(v)$, $D(v)$, $E(u)$'yu tanımsız yapar.

Durum 1:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ için

$$E(u) = 0, \tag{4.66}$$

$$A(u) + B(v) = 0 \tag{4.67}$$

$$A(u) + D(v) = 0 \tag{4.68}$$

olmalıdır. Parametrelerden dolayı $A(u)$, $B(v)$ ve $D(v)$ ya aynı anda sıfır olacak ya da sabit olacaklar. Fakat $B(v)$ ve $D(v)$'yi sıfır yapan g_1 ve g_2 fonksiyonları yoktur. Çünkü $B(v) = 0$ ise

$$\left(g_1'' = 0 \ \vee \ g_1 g_2' - g_1' g_2 = 0\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(g_1 g_2'' - g_1'' g_2 = 0\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(g_1 g_2' - g_1' g_2 = 0 \ \vee \ g_1' g_2''' - g_1''' g_2' = 0\right)$$

ve $D(v) = 0$ ise

$$\left(g_2'' = 0 \ \vee \ g_1 g_2' - g_1' g_2 = 0\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(g_1 g_2'' - g_1'' g_2 = 0\right)$$
$$\wedge$$
$$\left(g_1 g_2' - g_1' g_2 = 0 \ \vee \ g_1' g_2''' - g_1''' g_2' = 0\right)$$

olmalıdır. Fakat bu ifadeleri sağlayacak şekilde g_1 ve g_2 fonksiyonları yoktur. Bu yüzden

$$A(u) = c_1 \text{ (sabit)} \tag{4.69}$$

$$B(v) = -c_1 \tag{4.70}$$

$$D(v) = -c_1 \tag{4.71}$$

olmalı. Bu durumda (4.70) ve (4.71)'den $B(v) = D(v)$ yani $B(v) - D(v) = 0$ olursa

$$\frac{\left(g_1'g_2-g_1g_2'\right)^3}{g_1'g_2''-g_1''g_2'}=c_2 \tag{4.72}$$

şartı elde edilir. Burada c_2 integral sabitidir. (4.66)'dan

$$f_1''f_2'-f_1'f_2''=cf_1'^3f_2 \tag{4.73}$$

bulunur. Burada c integral sabitidir. (4.73) ifadesi (4.58)'de yerine yazılırsa

$$A(u)=-1 \tag{4.74}$$

elde edilir. Bu durumda (4.72), (4.73) ve (4.74) şartları altında yüzey 2. Temel Forma göre null-1 tipinde olur. Fakat $A(u)=-1$ olması $B(v)$ ve $D(v)$'nin 1 olmasını gerektirir. $B(v)=1$ve $D(v)=1$ çözümü ele alınırsa

$$4\left(g_1g_2'-g_1'g_2\right)\left(g_1''g_2'-g_1'g_2''\right)=0$$

elde edilir. Fakat bu çarpanlar sıfırdan farklıdır. Eğer birinci çarpan sıfır olursa $g_1=c_1g_2$ elde edilir. Bu ise $g_1\neq c_1g_2+c_2$ ifadesiyle çelişir. Bu durumda yüzey 2. Temel Forma göre null 1-tipinde olamaz.

4.2.1 Tanım

3-boyutlu Galilean uzayda bir yüzey $\Delta^{II}X=0$ şartını sağlıyorsa yüzeye **$\mathbf{II-}$Harmonik (2. Temel forma göre harmonik) yüzey** denir. Kısaca $\left(\Delta^{II}x_1,\Delta^{II}x_2,\Delta^{II}x_3\right)=0$ olmalıdır.

4.2.2 Teorem

G_3 3-boyutlu Galilean uzayda (4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi M olsun. O zaman II-Harmonik olacak şekilde M yüzeyi yoktur.

Durum 2:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u) = 0, \tag{4.75}$$

$$A(u) + B(v) \neq 0, \tag{4.76}$$

$$A(u) + D(v) \neq 0 \tag{4.77}$$

olmalıdır. $B(v)$ ve $D(v)$'yi sıfır yapan fonkisyonlar olmadığı için iki durum söz konusudur.

$$E(u) = 0 \ \wedge \ A(u) = 0 \ \wedge \ B(v) \neq 0 \ \wedge \ D(v) \neq 0$$

yada

$$E(u) = 0 \ \wedge \ A(u) \neq 0 \ \wedge \ B(v) \neq 0 \ \wedge \ D(v) \neq 0 .$$

İlk durum için $A(u) = 0$ ise

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.78}$$

ve $E(u) = 0$ ise

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2 \tag{4.79}$$

elde edilir. Burada c ve c_1 integral sabitleridir. (4.78) ve (4.79)'dan

$$f_1 = \pm\sqrt{\frac{c_1}{c} f_2 + c_2}$$

olur. Bu ise f'nin seçiminden dolayı çelişkidir.

İkinci durum için $E(u) = 0$ olduğu zaman elde edilen (4.79) ifadesi $A(u)$'da yerine yazılırsa $A(u) = -1$ olur. Yani $A(u) \neq 0$ olur. (4.76) ve (4.77) ifadesinden $B(v) = 1$ ve $D(v) = 1$ olamaz. Çünkü $B(v) = 1$ ve $D(v) = 1$ çözümü ele alınırsa

$$4\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) = 0$$

ifadesi çıkar. Bu ise çelişkidir. Bu durumda (4.76) ve (4.77) ifadesi daima sıfırdan farklı olur. Ayrıca $B(v) \neq 0$ ve $D(v) \neq 0$ için $g_1'' \neq 0$ ve $g_2'' \neq 0$ olmalıdır.

4.2.3 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2$ ve $g_1'' \neq 0$ ve $g_2'' \neq 0$ şartları altında 2. Temel Forma göre null 3-tipinde olur.

Durum 3:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u) = 0 \tag{4.80}$$

$$A(u) + B(v) = A(u) + D(v) \neq 0 \tag{4.81}$$

olmalıdır. İki durum söz konusu.

$$E(u) = 0 \ \wedge \ A(u) = 0 \ \wedge \ B(v) = D(v) \neq 0$$

yada

$$E(u) = 0 \ \wedge \ A(u) \neq 0 \ \wedge \ B(v) = D(v) \neq 0.$$

İlk durum için $E(u) = 0$ ise $A(u) = -1$ olur. Bu çelişkidir.

İkinci durum için (4.80)'den $f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2$ olur ve $A(u) = -1 \neq 0$ elde edilir. $B(v) = D(v)$'den

$$\frac{\left(g_1'g_2 - g_1g_2'\right)^3}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} = c_2 \tag{4.82}$$

şartı elde edilir. Burada c_2 integral sabitidir. (4.82) şartı altında $B(v) = -1 \neq 0$ ve $D(v) = -1 \neq 0$ olur.

4.2.4 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2$ ve $\dfrac{\left(g_1'g_2 - g_1g_2'\right)^3}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} = c_2$ şartları altında 2. Temel Forma göre null 2-tipinde olur.

Durum 4:

$\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u) = 0, \tag{4.83}$$

$$A(u) + B(v) = 0, \tag{4.84}$$

$$A(u) + D(v) \neq 0 \tag{4.85}$$

olmalıdır. (4.83)'ten

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' = cf_1'^3 f_2 \tag{4.86}$$

elde edilir. (4.86) ifadesi $A(u)$'da yazılırsa $A(u) = -1$ olur. Dolayısıyla (4.84)'ün sağlanması için $B(v) = 1$ olmalıdır. Eğer $B(v) = 1$ olursa

$$\frac{g_1\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) + 3g_1''\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)}{g_1'\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)} = \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{4.87}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.85)'in sağlanması için $D(v) \neq 1$ olmalıdır. Eğer $D(v) \neq 1$ olursa

$$\frac{g_2\left(g_1''g_2' - g_1'g_2''\right) + 3g_2''\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)}{g_2'\left(g_1g_2' - g_1'g_2\right)} \neq \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{4.88}$$

elde edilir. (4.87) ve (4.88) aynı anda sağlanması gerektiğinden dolayı (4.87) ifadesi (4.88)'de yazılırsa

$4\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1'' g_2' - g_1' g_2''\right) \neq 0$

olur. Birinci ve ikinci çarpan sıfırdan farklı olduğu için bulunan ifade doğru olur. Çünkü birinci çarpanın sıfırdan farklı olması için $g_1 \neq c_1 g_2$ olmalıdır. Bu ise $g_1 \neq c_1 g_2 + c_2$ ifadesinde $c_2 = 0$ olduğu zamanki durumdur.

Benzer şekilde $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ için de aynı sonuç elde edilir.

4.2.5 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $f_1'' f_2' - f_1' f_2'' = c f_1'^3 f_2$ ve $4\left(g_1 g_2' - g_1' g_2\right)\left(g_1'' g_2' - g_1' g_2''\right) \neq 0$ şartları altında 2. Temel Forma göre null 2-tipinde olur.

Durum 5:

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 0$ için

$$E(u) \neq 0 \tag{4.89}$$

$$A(u) + B(v) = 0, \tag{4.90}$$

$$A(u) + D(v) = 0 \tag{4.91}$$

olmalıdır. (4.89)'dan

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 \tag{4.92}$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir. (4.90) ve (4.91)'de $B(v)$ ve $D(v)$ sıfır olacak şekilde g_1 ve g_2 olmadığından $A(u) = c_1$ (sabit), $B(v) = -c_1$ ve $D(v) = -c_1$ olmalıdır.

$B(v) = D(v)$ ifadesinden

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} = c_2 \tag{4.93}$$

elde edilir. Burada c_2 integral sabitidir. (4.93) şartı altında $B(v) = -1$ ve $D(v) = -1$ olur. O zaman $A(u) = 1$ olmalı ki (4.90) ve (4.91) ifadeleri sağlansın.

$A(u)=1$ ele alınırsa

$$\frac{f_2 f_2'^4}{c_3 f_1'} = f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \tag{4.94}$$

elde edilir. Burada c_3 integral sabitidir. (4.94) ifadesi (4.92)'de yerine yazılırsa

$$f_1 \neq \frac{1}{\sqrt[4]{cc_3}} f_2 - \frac{c_4}{\sqrt[4]{cc_3}}$$

olur ki bu da başangıçta seçilen şart için doğrudur. Burada c_4 integral sabitidir.

4.2.6 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} = c_2$ ve $f_1 \neq c_5 f_2 - c_6$ şartları altında 2. Temel Forma göre null 2-tipinde olur.

Durum 6:

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u) \neq 0, \tag{4.95}$$

$$A(u) + B(v) \neq 0, \tag{4.96}$$

$$A(u) + D(v) \neq 0 \tag{4.97}$$

olmalıdır. (4.95)'den

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 \tag{4.98}$$

elde edilir. (4.96) ve (4.97)'den $B(v)$ ve $D(v)$'nin sıfır olmamasından dolayı iki durum ortaya çıkar.

$$A(u)=0 \wedge B(v)\neq 0 \wedge D(v)\neq 0 \tag{4.99}$$

yada

$$A(u)\neq 0 \wedge B(v)\neq 0 \wedge D(v)\neq 0. \tag{4.100}$$

(4.95), (4.99) ve (4.100) ifadelerinden

$$E(u)\neq 0 \wedge \left(A(u)=0 \vee A(u)\neq 0\right) \wedge B(v)\neq 0 \wedge D(v)\neq 0$$

elde edilir. Eğer $A(u)=0$ alınırsa

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' = c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.101}$$

elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. (4.98) ve (4.101) beraber düşünüldüğünde

$$f_1 \neq \sqrt{\frac{c_1}{c}} f_2 + c_2 \tag{4.102}$$

bulunur. Ayrıca $B(v)\neq 0$ ve $D(v)\neq 0$ ifadelerinden

$$g_1'' \neq 0 \text{ ve } g_2'' \neq 0 \tag{4.103}$$

bulunur. (4.102) ve (4.103) şartları başlangıç şartlarıdır. Dolayısıyla bu şartlar altında yüzey 3- tipindedir. Eğer $A(u)\neq 0$ alınırsa

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' \neq c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.104}$$

elde edilir. Burada c_1 integral sabitidir. (4.98) ve (4.104) beraber düşünüldüğünde ya

$$cf_1'^3 f_2 \neq c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.105}$$

yada

$$cf_1'^3 f_2 = c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.106}$$

olur. (4.105)'den tekrar (4.102) elde edilir. (4.106)'dan ise çelişki elde edilir. Bu durumda

$$E(u)\neq 0 \ \wedge \ A(u)=0 \ \wedge \ B(v)\neq 0 \ \wedge \ D(v)\neq 0$$

olur.

4.2.7 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $f_1 \neq \sqrt{\frac{c_1}{c}f_2 + c_2}$ ve $g_1'' \neq 0$ ve $g_2'' \neq 0$ şartları altında 2. Temel Forma göre 3-tipinde olur.

Durum 7:

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u)\neq 0 \tag{4.107}$$

$$A(u)+B(v)=A(u)+D(v), \tag{4.108}$$

olmalıdır. (4.108)'den

$$B(v)=D(v)$$

çıkar. Bu durumda

$$\frac{\left(g_1'g_2 - g_1g_2'\right)^3}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} = c_2 \tag{4.109}$$

bulunur. Burada c_2 integral sabitidir. (4.107)'den

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' \neq cf_1'^3f_2 \tag{4.110}$$

olur. Burada c integral sabitidir. (4.107) ve (4.108)'den $B(v)$ ve $D(v)$'nin sıfır olmaması da göz önüne alınırsa

$$E(u)\neq 0 \ \wedge \ \left(A(u)=0 \ \vee \ A(u)\neq 0\right) \ \wedge \ B(v)=D(v)$$

olur. $A(u)=0$ olursa

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' = c_1f_1'f_2f_2'^2 \tag{4.111}$$

bulunur. Burada c_1 integral sabitidir. (4.110) ve (4.111)'den

$$f_1 \neq \sqrt{\frac{c_1}{c}} f_2 + c_3 \tag{4.112}$$

başlangıç şartı elde edilir. Burada c_3 integral sabitidir. $A(u) \neq 0$ olursa

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c_1 f_1' f_2 f_2'^2 \tag{4.113}$$

bulunur. (4.110) ve (4.113)'ten yine

$$f_1 \neq \sqrt{\frac{c_1}{c}} f_2 + c_3$$

başlangıç şartı elde edilir.

4.2.8 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $f_1 \neq \sqrt{\frac{c_1}{c}} f_2 + c_3$ ve $\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} = c_2$ şartları altında 2. Temel Forma göre 2-tipinde olur.

Durum 8:

$\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 = 0$, $\lambda_3 \neq 0$ için

$$E(u) \neq 0, \tag{4.114}$$

$$A(u) + B(v) = 0, \tag{4.115}$$

$$A(u) + D(v) \neq 0 \tag{4.116}$$

olmalıdır. (4.114)'ten

$$f_1'' f_2' - f_1' f_2'' \neq c f_1'^3 f_2 \tag{4.117}$$

olur. Burada c integral sabitidir. $B(v)$ ve $D(v)$'nin sıfır olmamasından dolayı (4.115) ve (4.116)'dan

$$A(u)=c_1,\ B(v)=-c_1,\ D(v)\neq -c_1$$

olmalıdır. Burada $c_1 \neq 0$ sabittir. $A(u)=c_1$ ifadesinden

$$f_1''f_2' - f_1'f_2'' = \frac{f_1'^{(1-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} f_2}{c_2} \tag{4.118}$$

bulunur. Burada c_2 integral sabitidir. (4.117) ve (4.118)'den

$$f_1'^{(-1-c_1)} f_2'^{(1+c_1)} \neq \sqrt{cc_2} \tag{4.119}$$

elde edilir. $B(v)=-c_1$ ifadesinden

$$\frac{1}{g_1g_2' - g_1'g_2}\left[g_1''\left(\frac{2(1-c_1)g_1g_2'}{g_1'} - 3g_2\right) + 2\left(c_1+\frac{1}{2}\right)g_1g_2''\right] = \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{4.120}$$

bulunur. $D(v)\neq -c_1$ ifadesinden

$$\frac{g_2''}{g_1g_2' - g_1'g_2}\left[3g_1 + \frac{2(c_1-1)g_1'g_2}{g_2'} - \frac{2\left(\frac{1}{2}+c_1\right)g_1''g_2}{g_2'}\right] \neq \frac{g_1'g_2''' - g_1'''g_2'}{g_1'g_2'' - g_1''g_2'} \tag{4.121}$$

bulunur. (4.120) ve (4.121)'den

$$\frac{2\left(\frac{1}{2}+c_1\right)g_1'g_2''\left(g_1''g_2 + g_1g_2'\right) - 3g_1'g_2'\left(g_1g_2'' + g_1''g_2\right)}{2(c_1-1)\left(g_1'^2g_2g_2'' + g_1g_1''g_2'^2\right)} \neq 1 \tag{4.122}$$

elde edilir. Burada $c_1 \neq 1$ ve $c_1 \neq 0$ olmalıdır.

4.2.9 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi (4.119) ve (4.122) şartları altında 2. Temel Forma göre 3-tipinde olur.

Benzer şekilde $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$ için de aynı sonuç elde edilir.

Durum 9:

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \neq 0$ için

$$\frac{E(u)}{2} = A(u) + B(v) = A(u) + D(v) \neq 0 \qquad (4.123)$$

olmalıdır. Buradan $B(v) = D(v)$ ise

$$\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} = c_2 \qquad (4.124)$$

olur. Burada c_2 integral sabitidir. (4.124) ifadesi $B(v) = D(v) = -1$ yapar. O halde (4.123)'ten

$$\frac{E(u)}{2} = A(u) - 1 \qquad (4.125)$$

elde edilir. (4.125)'ten

$$\frac{cf_2\left(2f_1 f_2' - f_1' f_2\right)^2}{f_1'\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)} = e^{-2\int \frac{2f_1 f_2'' - \left(f_1' f_2\right)'}{2f_1 f_2' - f_1' f_2}} \qquad (4.126)$$

elde edilir. Burada c integral sabitidir.

4.2.10 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi $\frac{\left(g_1' g_2 - g_1 g_2'\right)^3}{g_1' g_2'' - g_1'' g_2'} = c_2$ ve

$\frac{cf_2\left(2f_1 f_2' - f_1' f_2\right)^2}{f_1'\left(f_1'' f_2' - f_1' f_2''\right)} = e^{-2\int \frac{2f_1 f_2'' - \left(f_1' f_2\right)'}{2f_1 f_2' - f_1' f_2}}$ şartları altında 2. Temel Forma göre 1-tipindedir.

Durum 10:

$\lambda_1=\lambda_3\neq 0$, $\lambda_2=0$ için

$$\frac{E(u)}{2}=A(u)+D(v)\neq 0 \tag{4.127}$$

$$A(u)+B(v)=0 \tag{4.128}$$

olmalıdır. (4.128)'den $B(v)$ sıfır olamayacağından sabit olmalıdır. Yani

$$A(u)=c_1 \text{ ve } B(v)=-c_1 \tag{4.129}$$

olmalıdır. Burada $c_1\neq 0$ sabittir. (4.127)'den

$$\frac{E(u)}{2}=c_1+D(v)\neq 0$$

dan ve $D(v)$ u parametresi içermediğinden ve sıfır olamayacağından sabit olmalıdır. Fakat $-c_1$ den farklı olmalıdır. $D(v)=c_2$ olsun. O zaman

$$E(u)=2(c_1+c_2) \tag{4.130}$$

olur. Bu durumda (4.130)'dan

$$e^{\int \frac{4(c_1+c_2)f_1\left(f_1' f_2''-f_1'' f_2'\right)}{f_1'^2 f_2}}=\frac{2(c_1+c_2)\left(f_1'' f_2'-f_1' f_2''\right)}{f_1'^3 f_2} \tag{4.131}$$

bulunur. $A(u)=c_1$ den

$$f_1'' f_2'-f_1' f_2''=\frac{f_1'^{(1-2c_1)} f_2'^{(2+2c_1)} f_2}{c_3} \tag{4.132}$$

dir. Burada $c_3\neq 0$ integral sabitidir. $D(v)=c_2$ ise

$$\frac{g_2''}{g_1 g_2'-g_1' g_2}\left[3g_1+\frac{2(-c_2-1)g_1' g_2}{g_2'}-\frac{2\left(\frac{1}{2}-c_2\right)g_1'' g_2}{g_2'}\right]=\frac{g_1' g_2'''-g_1''' g_2'}{g_1' g_2''-g_1'' g_2'} \tag{4.133}$$

olur. $B(v)=-c_1$ den

$$\frac{1}{g_1g_2'-g_1'g_2}\left[g_1''\left(\frac{2(1-c_1)g_1g_2'}{g_1'}-3g_2\right)+2\left(c_1+\frac{1}{2}\right)g_1g_2''\right]=\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{4.134}$$

olur. (4.131) ve (4.132)'den

$$\frac{-2(c_1+c_2)}{c_3(c_1+1)}=\frac{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)f_1'^{2c_1}}{f_1f_2'^{(2c_1+3)}} \tag{4.135}$$

elde edilir. Burada $c_1\neq-1$ dir. (4.133) ve (4.134)'ten

$$\frac{-2g_1'g_2''\left(g_1g_2'(1-c_1)-g_1'g_2(1+c_2)\right)}{g_1''\left[g_1'g_2\left((-1+2c_2)g_2''+3g_2'\right)-2(1-c_1)g_1g_2'^2\right]}=1 \tag{4.136}$$

bulunur.

4.2.11 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi (4.135) ve (4.136) şartları altında 2. Temel Forma göre null 2-tipindedir.

Durum 11:

$\lambda_1=\lambda_2\neq0$, $\lambda_3=0$ için

$$\frac{E(u)}{2}=A(u)+B(v)\neq0 \tag{4.137}$$

$$A(u)+D(v)=0 \tag{4.138}$$

olmalıdır. (4.138)'den $D(v)$ sıfır olamayacağından sabit olmalıdır. Yani

$$A(u)=c_1 \text{ ve } D(v)=-c_1 \tag{4.139}$$

olmalıdır. (4.137)'den

$$\frac{E(u)}{2}=c_1+B(v)\neq0$$

dan ve $B(v)$ u parametresine bağlı olmadığından ve sıfır olamayacağından sabit olur. Fakat $-c_1$ den farklı olmalıdır. $B(v)=c_2$ olsun. O zaman

$$E(u)=2(c_1+c_2) \tag{4.140}$$

olur. Bu durumda (4.140)'tan

$$e^{\int \frac{4(c_1+c_2)f_1\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)}{f_1'^2 f_2}}=\frac{2(c_1+c_2)\left(f_1''f_2'-f_1'f_2''\right)}{f_1'^3 f_2} \tag{4.141}$$

bulunur. $A(u)=c_1$ den

$$f_1''f_2'-f_1'f_2''=\frac{f_1'^{(1-2c_1)}f_2'^{(2+2c_1)}f_2}{c_3} \tag{4.142}$$

dir. Burada $c_3 \neq 0$ integral sabitidir. $B(v)=c_2$ den

$$\frac{1}{g_1g_2'-g_1'g_2}\left[g_1''\left(\frac{2(1+c_2)g_1g_2'}{g_1'}-3g_2\right)+2\left(-c_2+\frac{1}{2}\right)g_1g_2''\right]=\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{4.143}$$

olur. $D(v)=-c_1$ den

$$\frac{g_2''}{g_1g_2'-g_1'g_2}\left[3g_1+\frac{2(c_1-1)g_1'g_2}{g_2'}-\frac{2\left(\frac{1}{2}+c_1\right)g_1''g_2}{g_2'}\right]=\frac{g_1'g_2'''-g_1'''g_2'}{g_1'g_2''-g_1''g_2'} \tag{4.144}$$

olur. (4.141) ve (4.142)'den

$$\frac{-2(c_1+c_2)}{c_3(c_1+1)}=\frac{\left(f_1'f_2''-f_1''f_2'\right)f_1'^{2c_1}}{f_1f_2'^{(2c_1+3)}} \tag{4.145}$$

elde edilir. Burada $c_1 \neq -1$ dir. (4.143) ve (4.144)'ten

$$\frac{-2g_1'g_2''\left((1+c_2)g_1g_2'+(c_1-1)g_1'g_2\right)}{g_1''\left[g_1'g_2\left((-1-2c_1)g_2''+3g_2'\right)-2(1+c_2)g_1g_2'^2\right]}=1 \tag{4.146}$$

bulunur.

4.2.12 Sonuç

(4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi (4.145) ve (4.146) şartları altında 2. Temel Forma göre null 2-tipindedir.

4.2.13 Örnek

$$X = \alpha \otimes \beta : I_1 \times I_2 \to G_3,$$
$$X(u,v) = \left(e^u, \left(\sin e^u + \cos e^u\right)\sin v, \left(\sin e^u + \cos e^u\right)\cos v\right)$$

Parametrizasyonuyla verilen yüzey için $E(u)=0$, $A(u)=-1\neq 0$, $B(v)=D(v)=-1\neq 0$ olduğundan $\lambda_1=0$, $\lambda_2=\lambda_3\neq 0$ elde edilir. Bu durumda yüzey 2. Temel Forma göre null 2-tipinde olur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Üçüncü bölümde, Öklid uzayındaki yüzeylerde ikinci ve üçüncü temel formun laplas operatörü kullanıldı. Sonuç 3.1.1 ile (3.1) parametrizasyonuyla verilen dönel yüzey için $\Delta^{III}N=0$ şartını sağlayan yüzey olmadığı verildi. Sonuç 3.1.2 ile γ profil eğrisi birim hızlı olan M dönel yüzeyi için $\Delta^{III}N=f.N$ şartı sağlanıyorsa o zaman $f=2$ olduğu gösterildi. Önerme 3.1.3'te eğer M dönel yüzeyi $\varphi'\varphi''=\varphi\varphi'''$ şartı sağlıyorsa o zaman

$$\Delta^{III}N=-\frac{1}{H}\Delta^{II}N$$

olduğu gösterildi. Teorem 3.2.2 ile (3.18) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ şartını sağlayan f_1 ve f_2 bulunurken, Sonuç 3.2.3 ile aynı yüzey için $\Delta^{III}N=0$ durumunu sağlayan f_1 ve f_2'nin olmadığı gösterildi.

Dördüncü bölümde, Sonuç 4.1.2, Sonuç 4.1.3 ve Sonuç 4.1.4 ile birinci, ikinci ve üçüncü tip dönel yüzey için; Sonuç 4.1.6 ile de 1. tip öteleme yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ yapan f ve g fonksiyonlarının bulunamadığı gösterildi. Sonuç 4.1.7 ile 2. tip öteleme yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$'ı sağlayan $f(u)=-\frac{e^{-cu}}{c}+c_1$ ve $g(v)=\frac{e^{cv}}{c}+c_2$ fonksiyonları bulundu. Sonuç 4.1.8 ile (4.33) parametrizasyonuyla verilen çarpanlara ayrılabilir yüzey için $g(v)=c_1v+c_2$ olduğu takdirde $\Delta^{II}N=0$ olduğu elde edildi. Sonuç 4.1.10 ile (4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{II}N=0$ olacak şekilde f ve g fonksiyonlarının olmadığı ifade edildi. Son kısımda (4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyi için $\Delta^{II}x_i=\lambda_i x_i$ şartı incelenerek yüzeyin 2. Temel Forma göre null 3-tipinde, null 2-tipinde, 3-tipinde, 2-tipinde ve 1-tipinde olabileceği sonuçlarına ulaşıldı. Ayrıca (4.42) parametrizasyonuyla verilen küresel çarpım yüzeyinin II-Harmonik olamayacağı Teorem 4.2.2 ile gösterildi.

Bu tezde Öklid ve Galilean uzayda bazı özel yüzeyler için ikinci ve üçüncü temel formun laplas operatörü kullanılarak bir çalışma yapılmıştır. İleride bu hesaplamalar farklı yüzey tipleri için de denenebilir ya da farklı uzaylarda benzer çalışmalar yapılabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] T. Takahashi, "Minimal immersions of Riemannian manifolds", *J. Math. Soc. Japan,* vol. 18, pp. 380–385, 1966.

[2] O. J. Garay, "An extension of Takahashi's theorem", *Geom. Dedicata* 34, no. 2, pp. 105-112, 1990.

[3] F. Dillen, J. Pas, and L. Vertraelen, "On surfaces of finite type in Euclidean 3-space", *Kodai Math. J,* vol. 13, no. 1, pp. 10-21, 1990.

[4] F. Dillen, J. Pas, and L. Vertraelen, "On the Gauss map of surfaces of revolution", *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica,* vol. 18, no. 3, pp. 239-246, 1990.

[5] M. Bekkar and B. Senoussi, "Translation surfaces in the 3-dimensional space satisfying $\Delta^{\mathrm{III}} r_i = \mu_i r_i$", *J. Geom.,* vol. 103, no. 3, pp. 367-374, 2012.

[6] G. Kaimakamis, B. Papantoniou, and K. Petoumenos, "Surfaces of revolution in the 3-dimensional Lorentz-Minkowski space satisfying $\Delta^{\mathrm{III}} r = Ar$", *Bull. Greek Math. Soc.*, vol. 50, pp. 75-90, 2005.

[7] B. Senoussi and M. Bekkar, "Helicoidal surfaces with $\Delta^{J} r = Ar$ in 3-dimensional Euclidean space", *Stud. Univ. Babes-Bolyai Math.*, vol. 60, no. 3, pp. 437-448, 2015.

[8] D. W. Yoon, "Some classification of translation surfaces in Galilean 3-space", *Int. J. of Math. Analysis*, vol. 6, no. 28, pp. 1355-1361, 2012.

[9] M. K. Karacan, D. W. Yoon, and B. Bukcu, "Translation surfaces in the three dimensional simply isotropic space I_3^1", *Int. J. Geome. Methods Mod. Phys.*, vol. 13, no. 7, 2016.

[10] A. Çakmak, M. K. Karacan, S. Kiziltug, and D. W. Yoon, "Translation surfaces in the three dimensional Galilean space satisfying $\Delta^{\mathrm{II}} x_i = \lambda_i x_i$", *Bull. Korean Math. Soc.*, vol. 54, no. 4, pp. 1241-1254, 2017.

[11] I. M. Yaglom, *A simple non-Euclidean geometry and physical basis*, Springer Verlag, New York-Heidelberg 1979.

[12] O. Röschel, *Die geometrie des Galileischen raumes*, Habilititaion Schrift, Leoben, 1984.

[13] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel geometri*, Cilt: I, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, 1998.

[14] L. F. Mello, "Mean directionally curved lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$", *Publ. Math.*, vol 47, pp. 415-440, 2003.

[15] L. F. Mello, “Orthogonal asymptotic lines on surfaces immersed in $\mathbb{R}^4$”, Rocky *Mountain Journal of Mathematics*, vol. 39, no. 5, pp. 1597-.1612, 2009.

[16] B. Y. Chen, *Geometry of submanifolds*, Dekker, New York, 1973.

[17] G. Zafindratafa, “Hypersurfaces whose mean curvature function is of finite type”, *J. Geom.*, vol. 55, no 1-2, pp. 182-191, 1996.

[18] B. Y. Chen, “Total mean curvature and submanifolds of finite type”, *World Scientific*, 1984.

[19] B. Y. Chen, “On the total curvature of immersed manifolds, VI: Submanifolds of finite type and their applications”, *Bull. Inst Math. Acad. Sinica*, vol. 11, pp. 309-328, 1983.

[20] S. Stamatakis and H. Al-Zoubi, “On surfaces of finite Chen-type”, *Results. Math.*, vol. 43, no. 1-2, pp. 181-190, 2003.

[21] B. O’Neill, *Semi-Riemannian geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[22] I. Kamenarovic, “Existence theorems for ruled surfaces in the Galilean space G_3”, *Rad Hrvatske Akad. Znan. Umj. Mat.*, vol. 10, pp. 183-196, 1991.

[23] Z. Milin-Sipus, “Ruled weingarten surfaces in Galilean space”, *Periodica Mathematica Hungarica*, vol. 56, no. 2, pp. 213-225, 2008.

[24] B. Bulca, K. Arslan, B. Bayram, G. Öztürk, and H. Ugail, “Spherical product surfaces in IE^4”, *An St. Univ. Ovidius Constanta*, vol. 20, no. 1, pp. 41-54, 2012.

[25] M. Dede, C. Ekici and W. Goemans, “Surfaces of revolution with vanishing curvature in Galilean 3-space”, *Journal of Mathematical Physics, Analysis, Geometry*, vol.14, no.2, 141-152, 2018.

[26] H. Liu, “Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces”, *J. Geom.*, vol. 64, pp. 141-149, 1999.

[27] Z. M. Sipus and B. Divjak, “Translation surface in Galilean space”, *Glasnik Matematicki*, vol. 46 (66), pp. 455-469, 2011.

[28] M. E. Aydın and A. O. Öğrenmiş, “Spherical product surface in the Galilean space”, *Konuralp Journal of Mathematics*, vol 4, no 2, 290-298, 2016.

[29] A. Jaclic, A. Leonordis, and F. Solina F “Segmentation and recovery of superquadries”, *Kluvar Academic Publishers*, vol 20, 2000.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Özgün Biçgin

Doğum tarihi ve yeri : 27/05/1991, Balıkesir

e-posta : ozgunbicgin@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Geometri	2017-2020
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/İlköğretim Mat. Öğrt.	2018-2019
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi/Ortaöğretim Mat. Öğrt.	2010-2015
Lise	İstanbulluoğlu Anadolu Öğretmen Lisesi	2005-2009