T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

ÖNDER YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET(Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DELİL

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2020

KABUL VE ONAY SAYFASI

Önder YILMAZ tarafından hazırlanan “BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 24 Ağustos 2020 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET Balıkesir Üniversitesi	
Üye Prof. Dr. Ali GÜVEN Balıkesir Üniversitesi	
Üye Dr. Öğr. Üyesi Ahmet DELİL Manisa Celal Bayar Üniversitesi	

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Bazı Fonksiyon Uzaylarında Trigonometrik Polinomlar İle Yaklaşım**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Önder YILMAZ
(imza)

ÖZET

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÖNDER YILMAZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. BURÇİN OKTAY YÖNET)

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2020

Bu tez çalışmasında bazı fonksiyon uzaylarında yaklaşım problemleri incelenmiştir.

Birinci bölüm giriş kısmından oluşur.

İkinci bölümde trigonometrik yaklaşım teorisinde çok önemli bir rol oynayan Fourier serileri hakkında bilgi verilmiştir. Fourier serilerinin tanımına ve Fourier serilerinin Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalamalarının tanımlarına yer verilmiştir. Ayrıca bu ortalamaların integral gösterimleri de elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde Lebesgue uzayı, değişken üslü Lebesgue uzayı, Morrey uzayı, değişken üslü Morrey uzayı tanıtılmış ve bu uzayların bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca süreklilik modülü ve en iyi yaklaşım sayısı tanımları verilmiştir.

Dördüncü bölümde değişken üslü Lebesgue ve değişken üslü Morrey uzayında bazı yardımcı teoremlere yer verilmiş ve değişken üslü Morrey uzayından olan bazı özelliklere sahip bir fonksiyona Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalaması ile üstten süreklilik modülü ile yaklaşımı ifade eden sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lebesgue uzayı, Morrey uzayı, değişken üslü Morrey uzayı, en iyi yaklaşım sayısı, süreklilik modülü.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 24

ABSTRACT

APPROXIMATION BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS IN SOME FUNCTION SPACES
MSC THESIS
ÖNDER YILMAZ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. BURÇİN OKTAY YÖNET)

BALIKESİR, AUGUST 2020

In this thesis, we studied approximation problems in some function spaces.

First chapter is the introduction.

Second chapter contains the information about the Fourier series which play an important role in the trigonometric approximation theory. We give the definitions of Fourier series, Cesàro (Fejér) and Zygmund means of Fourier series. We also obtain the integral representations of these means.

In the third chapter, Lebesgue space, Lebesgue space with variable exponents, Morrey space and Morrey space with variable exponents are introduced, and some properties of these spaces are given. Also, the definitions of the modulus of continuity and the number of the best approximation are given.

Some auxiliary theorems in Lebesgue space with variable exponents and Morrey space with variable exponents are given in the fourth chapter. Then, we obtain the results about approximation of a specific function in Morrey space with variable exponents using Cesàro (Fejér) and Zygmund means and the modulus of continuity from above.

KEYWORDS: Lebesgue spaces, Morrey spaces, Morrey spaces with variable exponent, the number of the best approximation, the modulus of continuity.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 24

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{C}$	:Kompleks düzlem
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
T	:Birim çember
$L^p(T)$	:Lebesgue uzayı
$L^{p,\alpha}(T)$	:Morrey uzayı
$L^{p(.)}(T)$	:Değişken üslü Lebesgue uzayı
$M^{p(.),\lambda(.)}(T)$	:Değişken üslü Morrey uzayı
$E_n(f)_{L^{p(\cdot)}(T)}$	:$L^{p(\cdot)}(T)$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı
$E_n(f)_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)}$	: $M^{p(.),\lambda(.)}(T)$ uzayında en iyi yaklaşım sayısı
$\Omega^r_{p(\cdot)}(f,\delta)$	:$L^{p(\cdot)}(T)$ uzayında r. düzgünlük modülü
$\omega^r_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f,\delta)$	: $M^{p(.),\lambda(.)}(T)$ uzayında r. düzgünlük modülü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmamın öneri düzeyinden tamamlanmasına kadar geçen süreçte sürekli katkıda bulunan, önerileri ile yol gösteren değerli hocam ve danışmanım Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET'e burada en derin şükranlarımı arz ederim.

Ayrıca, araştırma sürecinde desteklerini her zaman hissettiğim kıymetli hocalarım Prof. Dr. Ali GÜVEN ve Doç. Dr. Fırat EVİRGEN'e teşekkür ederim.

Tez çalışması sırasında benim için büyük fedakârlıklarda bulunan sevgili eşim Hilal'e ve yetişmemde en büyük emek sahibi annem ile babama duyduğum minnet ise sonsuzdur.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belirli bir sınıftan olan fonksiyonlara daha iyi özellikli fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Çoğunlukla, bu daha iyi özellikli fonksiyonlar kümesi olarak araştırılan fonksiyonlar uzayının bir alt uzayı alınır. Polinomlar ve rasyonel fonksiyonlar kümesi bu tip alt uzaylar olarak alınabilir.

Yaklaşım teorisinde temel problemlerden bazıları yaklaşım hızının değerlendirilmesi ve yaklaşım hızı verildiğinde bu fonksiyonların temel özelliklerinin araştırılmasıdır. Temel uzaydaki fonksiyonların özelliklerine göre yaklaşım hızının üstten değerlendirilmesi ile ilgili problemlere düz problemler, fonksiyonun yaklaşım özelliklerine göre bu fonksiyonun özellikleri ile ilgili bilgi veren problemlere ise ters problemler denir.

Bir üs fonksiyonu yardımıyla bazı önemli fonksiyonların davranışlarını daha detaylı araştırmak mümkün olduğundan son yıllarda matematikte değişken üslü fonksiyon uzaylarında çalışmalar artmıştır. Diğer yandan, değişken üslü fonksiyon uzayları uygulamalı bilimlerde önemli bir yere sahip olmuştur. Örneğin, değişken üslü Lebesgue uzaylarının mekaniğin özellikle akışkanlar dinamiği gibi dallarındaki pek çok probleminde ve görüntüleme biliminin pek çok çalışmalarında kullanışlı oluşu bu uzaylara ilgiyi arttırmıştır. Yaklaşım teorisinde de değişken üslü uzaylar yaklaşımın esaslı olarak lokal olduğunu göstermek için oldukça kullanışlıdırlar.

Klasik Morrey uzayları ilk olarak 1938'de C. Morrey tarafından tanımlanmış ve pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır. $p(.)$ ve $\lambda(.)$ değişken üslü $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(X)$ Morrey uzayları ise Öklid uzayları veya metrik ölçüm uzayları üzerinde [1], [2], [3] ve [4]'teki makalelerde tanımlanmış ve araştırılmıştır. Guliyev'in [5]'teki makalesinde de $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$ uzaylarında bazı düz ve ters teoremler verilmiştir.

Bu tezde bazı yaklaşım problemlerini incelediğimiz değişken üslü $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}([0,2\pi])$ Morrey uzayları ve değişken üslü $L^{p(\cdot)}([0,2\pi])$ Lebesgue uzaylarının bir genelleştirmesidir. Değişken üslü $L^{p(\cdot)}$ Lebesgue uzaylarında yaklaşım teorisindeki bazı sonuçlar üslü $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$ Morrey uzaylarında bazı matematikçiler tarafından araştırılmıştır. Bu tezde de bir f fonksiyonu değişken üslü $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}$ Morrey uzayından olduğunda Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalaması ile yaklaşımı araştırılmıştır.

Bu tezde elde edilen sonuç daha önce Kokilashvili ve Samko tarafından elde edilmiş değişken üslü $L^{p(.)}$ Lebesgue uzaylarında Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalaması ile yaklaşımı ifade eden sonucun bir genelleştirmesidir. Tezde elde edilen bulgular makale haline getirilerek indekste taranan, uluslararası bir dergiye gönderilmiştir.

2. FOURIER SERİLERİ

2.1 Fourier Serileri

2.1.1 Tanım: a_k ve b_k $(k = 0,1,2,\ldots)$ sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \qquad (2.1)$$

serisine trigonometrik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

serisine de (2.1) serisinin eşlenik serisi denir [6].

2.1.2 Tanım: $n \in \mathbb{N}$, $a_k$ve b_k $(k = 0,1,2,\ldots,n)$ sabit sayılar ve $|a_n| + |b_n| \neq 0$ olmak üzere

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n = 1,2,\ldots$$

ifadesine n. dereceden bir trigonometrik polinom denir [6].

2.1.3 Tanım: $T = [0,2\pi]$ olmak üzere $f \in L^1(T)$ olsun.

$$a_k(f) = a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad k = 0,1,2,\ldots$$

$$b_k(f) = b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt, \qquad k = 1,2,\ldots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

trigonometrik serisine f fonksiyonunun Fourier serisi , $a_k(f)$, $b_k(f)$ katsayılarına da f fonksiyonunun Fourier katsayıları denir ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

yazılır[6].

2.1.4 Tanım: $A_0(x) := \frac{a_0}{2}$, $A_k(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $k = 1,2,\ldots$

olmak üzere

$$S_n(f,x) := \sum_{k=0}^{n} A_k(x), \quad n = 0,1,2,\ldots$$

biçiminde tanımlı $\left(S_n(f)\right)$ dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir [6].

2.1.5 Tanım: $f \in L^1$ ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

olsun. $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$ trigonometrik serisi bir fonksiyonun Fourier serisi ise bu fonksiyona f fonksiyonunun eşlenik fonksiyonu denir ve $\tilde{f}$ şeklinde gösterilir [6].

2.1.6 Tanım:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt$$

trigonometrik polinomuna n. mertebeden Dirichlet çekirdeği denir. Dirichlet çekirdeğinin yardımıyla Fourier serisinin kısmi toplamlarının integral gösterimi;

$$\begin{aligned}
S_n(x) = S_n(f,x) &:= \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt\right] + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt\right]\cos kx \\
&\quad + \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt\right]\sin kx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\cos kx \cos kt + \sin kx \sin kt)\right]dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}\cos k(x-t)\right]dt
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_n(x-t)dt$$

şeklindedir [7].

2.1.7 Lemma: Dirichlet çekirdeği

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

şeklinde ifade edilebilir [7].

İspat:

$$D_n(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt = \frac{1}{2}\sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{1}{2}e^{-int}\sum_{k=0}^{2n} e^{ikt}$$

$$= \frac{1}{2}e^{-int}\,\frac{\left[e^{i(2n+1)t}-1\right]}{e^{it}-1} = \frac{e^{i(n+1)t}-e^{-int}}{2e^{i\frac{t}{2}}\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)}$$

$$= \frac{e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}-e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)t}}{2\left(e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}\right)}$$

$$= \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

elde edilir.

2.2 Cesàro (Fejér) Ortalaması

2.2.1 Tanım: $(S_n(f))$, f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$$\sigma_n(f,x) := \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f,x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)A_k(x), \qquad n = 1,2,\ldots$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden Cesàro (Fejér) ortalaması denir [8].

Şimdi Dirichlet çekirdeğini kullanarak Fejér ortalamasının integral gösterimini elde edelim.

f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisinin aritmetik ortalaması

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + S_2(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

olur. Burada $S_0(x) = \frac{1}{2} a_0$ dır.

Dirichlet çekirdeğini ve bazı cebirsel işlemleri kullanarak

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1}\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, D_0(x-t)dt + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_1(x-t)dt + \cdots \right.$$

$$\left. \ldots + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) D_n(x-t)dt\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\left[\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(x-t)\right]dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\, F_n(x-t)dt$$

olduğu görülür.

$$F_n(t) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} D_k(t) = \frac{1}{2(n+1)\sin\frac{t}{2}}\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t$$

olur ve bu ifadeye Fejér çekirdeği denir [7].

$F_n(t)$ Fejér çekirdeğinin pay ve paydasını $2\sin\frac{t}{2}$ ile genişletip,

$$2\sin\left(k+\frac{t}{2}\right)\sin\frac{t}{2} = \cos kt - \cos(k+1)t$$

trigonometrik özdeşliği kullanılırsa

$$F_n(t) = \frac{1-\cos(n+1)t}{4(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} = \frac{1}{2(n+1)}\left[\frac{\sin(n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2$$

elde ederiz.

Bu formül bize Fejér çekirdeğinin pozitif çift fonksiyon olduğunu gösterir. Eğer, $F_n(2k\pi) = \frac{n+1}{2}$ alırsak, F_n tüm $\mathbb{R}$'de sürekli fonksiyon olur. Ayrıca,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} F_n(t)dt = 1$$

olur.

Fourier serilerinin kısmi toplamlarının n. dereceden aritmetik ortalamaları aynı zamanda

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)F_n(x-t)dt$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x+u)F_n\,(u)du$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)F_n(u)du$$

olarak da ifade edilebilir. Burada $F_n(-u) = F_n(u)$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\int_{-\pi}^{0} f(x+u)F_n(u)du = \int_0^{\pi} f(x-u)F_n(u)du$$

olur ve son olarak

$$\sigma_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}\right]F_n(u)du$$

elde edilir [7].

Şimdi $\{\sigma_n\}$ dizisinin yakınsaklığı ile ilgili Fejér'in teoremini verelim.

2.2.2 Teorem (Fejér): $f\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ bir periyodik integrallenebilir fonksiyon ve

$$\sigma_f(x) = \lim_{u\to 0^+}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$$

olsun. Bu durumda, $\sigma_f(x)$'in varolduğu her x noktasında, f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlarının aritmetik ortalamalarının dizisi $\{\sigma_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n(x) = \sigma_f(x) = \lim_{u\to 0^+}\frac{f(x+u)+f(x-u)}{2}$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, eğer f fonksiyonu $[0,2\pi]$ aralığının bazı kapalı $[a,b]$ alt aralıklarında sürekli ise $\{\sigma_n\}$, $[a,b]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsar [7].

2.2.3 Sonuç: $f\colon[0,2\pi]\to\mathbb{C}$ bir periyodik integrallenebilir fonksiyon olsun. Varsayalım ki, bir x noktasında f fonksiyonunun Fourier serisi yakınsak olsun ve $\sigma_f(x)$ mevcut olsun. O zaman,

$$\sigma_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

olur. Özellikle, Fourier serisi f'nin bir x süreklilik noktasında yakınsıyorsa, o zaman

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-inx} = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

olur [7].

Şimdi de bu sonucun bir uygulamasını verelim.

2.2.4 Örnek: $f: [0,2\pi] \to \mathbb{R}$ periyodik fonksiyonu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < \pi \\ 0, & \pi \leq x < 2\pi \\ 1, & x = 2\pi \end{cases}$$

olsun. Doğrudan bir hesaplama ile f fonksiyonun Fourier katsayılarının

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1dx = 1$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \ \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1 - \cos n\pi}{n\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}$$

şeklinde olduğunu görürüz. Böylelikle, Fourier katsayıları her n için $a_0 = 1$, $a_n = 0$, her tek n sayısı için $b_n = \frac{2}{n\pi}$ ve her çift n sayısı için $b_n = 0$ değerini sağlar. Bu yüzden, f fonksiyonunun Fourier serisi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right)$$

şeklinde verilir. Bu seri her x noktasında yakınsar. Sonuçtan, bu Fourier serisi f'in sürekli olduğu her x noktasında $f(x)$'e yakınsar. Daha kesin olarak,

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1} + \frac{\sin 3x}{3} + \frac{\sin 5x}{5} + \frac{\sin 7x}{7} + \cdots\right) = \begin{cases} f(x), & x \in (0,\pi) \cup (\pi, 2\pi) \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \pi, 2\pi \end{cases}$$

olduğunu söyleriz [7].

2.3 Zygmund Ortalaması

2.3.1 Tanım: Fourier serisinin n. dereceden Zygmund ortalaması

$$Z_n^{(v)}(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\left[1-\left(\frac{k}{n+1}\right)^{v}\right]A_k(x)$$

şeklinde tanımlanır [8].

3. FONKSİYON SINIFLARI

3.1 Lebesgue Uzayları

3.1.1 Tanım: $1 \leq p < \infty$ için

$$\|f\|_{L^p(T)} := \left\{ \int_T |f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f: T \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının uzayına Lebesgue uzayı denir ve $L^p(T)$ ile gösterilir. $L^p(T)$, $\|f\|_{L^p(T)}$ normuna göre bir Banach uzayıdır [9].

3.2 Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

3.2.1 Tanım: $p(.): T \to [1, \infty)$ Lebesgue ölçülebilir bir üs fonksiyonu olmak üzere bir $\lambda > 0$ için

$$\int_T \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f: T \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesine değişken üslü Lebesgue uzayı denir ve $L^{p(.)}(T)$ ile gösterilir.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarında üs fonksiyonu uzayın bir takım fonksiyonel özelliklerini belirlemekte önemli rol oynamaktadır. p fonksiyonu T üzerinde tanımlı bir üs fonksiyonu olduğunda $p_- := \operatorname*{essinf}_{x \in T} p(x)$ ve $p_+ := \operatorname*{esssup}_{x \in T} p(x)$ olsun.

Değişken üslü Lebesgue uzaylarında norm $p_+ < \infty$ için

$$\|f\|_{L^{p(.)}(T)} := inf \left\{ \lambda > 0 \colon \int_T \left| \frac{f(x)}{\lambda} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\}$$

şeklinde tanımlanır. $L^{p(.)}(T)$ uzayı bu norm ile bir Banach uzayıdır [10].

3.2.2 Tanım: $p(\cdot): T \to [1, \infty)$ ve $1 \leq p_- \leq p(x) \leq p_+ < \infty$ olmak üzere pozitif bir A sabiti için

$$|p(x) - p(y)| \leq \frac{A}{-\log|x - y|}, \qquad 0 < |x - y| \leq \frac{1}{2}, \qquad x, y \in T$$

koşulunu sağlayan tüm Lebesgue ölçülebilir, 2π periyodik p üs fonksiyonlarının kümesi $\beta(T)$ ile gösterilir. $\beta(T)$ kümesinin $p_- > 1$ koşulunu sağlayan alt kümesi $\beta^0(T)$ ile gösterilir [10].

3.3 Morrey Uzayları

3.3.1 Tanım: $I(x,r) = (x-r, x+r) \subset \mathbb{R}$, $\tilde{I}(x,r) = I(x,r) \cap T$, $0 \leq \alpha \leq 1$ ve $p \geq 1$ olmak üzere

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(T)} := \sup\left\{r^{-\frac{\alpha}{p}}\|f\|_{L^p(\tilde{I}(x,r))} : x \in T, 0 < r < 2\pi\right\} < \infty$$

koşulunu sağlayan $f \in L^p_{loc}(T)$ fonksiyonlarının kümesine $L^{p,\alpha}(T)$ Morrey uzayı denir. Bu tanımda $L^{p,\alpha}(T)$ uzayı bir Banach uzayıdır ve $\alpha = 0$ olduğu durumda $L^p(T)$ uzayıyla, $\alpha = 1$ olduğu durumda da $L^\infty(T)$ uzayıyla çakışır. $f \in L^{p,\alpha}(T)$ ise $f \in L^p(T)$dir ve böylece $f \in L^1(T)$dir [11].

3.4 Değişken Üslü Morrey Uzayları

3.4.1 Tanım: $\lambda(\cdot): T \to [0,1]$ ve $p(\cdot): T \to [1,\infty)$ ölçülebilir fonksiyonlar olsun.

$$\rho_{p(.),\lambda(.)}(f) := \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} \frac{1}{r^{\lambda(x)}} \int_{\tilde{I}(x,r)} |f(y)|^{p(y)} dy < \infty$$

özelliğine sahip ölçülebilir fonksiyonların sınıfına $M^{p(.),\lambda(.)}(T)$ değişken üslü Morrey uzayı denir. Bu uzayda norm

$$\|f\|_1 = \|f\|_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)} = \inf\left\{k > 0 : \rho_{p(.),\lambda(.)}\left(\frac{f}{k}\right) < 1\right\} \quad \text{veya}$$

$$\|f\|_2 = \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|f\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

şeklinde tanımlanır[12].

3.5 Düzgünlük Modülü, Süreklilik Modülü

3.5.1 Tanım: $f \in L^{p(\cdot)}(T)$, $p(\cdot) \in \beta(T)$ ve

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kt)$$

olsun. Bu durumda

$$\Omega_{p(\cdot)}^r(f,\delta) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r f dt \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}, \delta > 0$$

ifadesine r. mertebeden düzgünlük modülü denir. Özel olarak $r = 1$ alındığında bu ifade süreklilik modülüne eşit olur. Bu modül $r = 1$ için ilk olarak Sharapudinov tarafından [13] makalesinde tanımlanmış, [14] çalışmasında ise $r > 1$durumlarına genelleştirilmiştir. Bu modüle denk bir modül [15] çalışmasında tanımlanmıştır. Aynı zamanda süreklilik modülü

$$T_h f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

olmak üzere, süreklilik modülü

$$\Omega_{p(\cdot)}(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta} \|f(x) - T_h f(x)\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

şeklinde de ifade edilebilir [16].

$\Omega_{p(\cdot)}^r(f,\delta)$ düzgünlük modülünün bazı özellikleri şunlardır;

i. $f, g \in L^{p(\cdot)}(T)$ fonksiyonları için $\Omega_{p(\cdot)}^r(f+g,\delta) \le \Omega_{p(\cdot)}^r(f,\delta) + \Omega_{p(\cdot)}^r(g,\delta)$ eşitsizliği geçerlidir.

ii. $p(\cdot) \in \beta(T)$, $r = 1,2,3, \dots$ olsun. Pozitif bir $c(p,r)$ sabiti vardır öyle ki $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ ve $\delta > 0$ için $\Omega_{p(\cdot)}^r(f,\delta) \le c(p,r)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$ eşitsizliği sağlanır.

iii. Eğer $f \in L^{p(\cdot)}(T)$, $p(\cdot) \in \beta(T)$ ise $\delta \to 0$ iken her pozitif r tamsayısı için $\lim_{\delta\to 0} \Omega_{p(\cdot)}^r(f,\delta) = 0$ olur.

3.5.2 Tanım: $f \in M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)$, $p(\cdot) \in \beta(T)$, $\lambda(\cdot): T \to [0,1]$ ölçülebilir bir fonksiyon ve

$$\Delta_t^r f(x) := \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} \binom{r}{k} f(x+kt)$$

olsun. Bu durumda

$$\omega^{r}_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f,\delta) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \frac{1}{h}\int_0^h \Delta_t^r f dt \right\|_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)} \qquad ,\delta > 0$$

ifadesine r. mertebeden düzgünlük modülü denir. Özel olarak $r = 1$ alındığında bu ifade süreklilik modülüne eşit olur. Aynı zamanda süreklilik modülü

$$T_h f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt$$

olmak üzere

$$\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(f,\delta) = \sup_{0<h<\delta} \|f - T_h f\|_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)}$$

şeklinde de ifade edilebilir [17].

3.5.3 Önerme: $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ olmak üzere

$$f(x) - T_h(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right)A_k(x) \tag{3.1}$$

olur.

İspat:

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

olmak üzere

$$\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt \sim \frac{a_0}{2}(x + h - x + h)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\left(\frac{1}{k}\sin kt \Big|_{x-h}^{x+h}\right) + b_k\left(-\frac{1}{k}\cos kt \Big|_{x-h}^{x+h}\right)\right)$$

$$= a_0 h + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}(\sin k(x+h) - \sin k(x-h)) + \frac{b_k}{k}(\cos k(x-h) - \cos k(x+h))\right)$$

$$= a_0 h + 2\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{a_k}{k}\cos kx \sin kh + \frac{b_k}{k}\sin kx \sin kh\right)$$

$$= a_0 h + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{k}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

$$= a_0 h + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{k} A_k(x)$$

elde edilir. Buradan

$$T_h f(x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kh}{kh} A_k(x)$$

ve

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k(x)$$

olduğu için

$$f(x) - T_h f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin kh}{kh}\right) A_k(x)$$

olur.

3.6 En İyi Yaklaşım Sayısı

3.6.1 Tanım: $n = 0,1,\ldots$ için derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi Π_n ile gösterilir [6].

3.6.2 Tanım: $p(\cdot) \in \beta(T)$ olsun.

$$E_n(f)_{L^{p(\cdot)}(T)} := \inf_{T_n \in \Pi_n} \|f - T_n\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

sayısına $f \in L^{p(\cdot)}(T)$'nin en iyi yaklaşım sayısı denir.

$E_n(f)_{L^{p(\cdot)}(T)} := \|f - T_n^{\star}\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$ ise $T_n^{\star}$ trigonometrik polinomuna en iyi yaklaşım polinomu denir [18].

3.6.3 Tanım: $p(\cdot) \in \beta(T)$, $\lambda(\cdot): T \to [0,1]$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f \in M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)$ için

$$E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} := \inf_{T_n \in \Pi_n} \|f - T_n\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

sayısına derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar üzerinden f'nin en iyi yaklaşım sayısı denir.

$E_n(f)_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)} := \|f - T_n^{\star}\|_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)}$ ise $T_n^{\star}$ trigonometrik polinomuna en iyi yaklaşım polinomu denir [5].

4. DEĞİŞKEN ÜSLÜ UZAYLARDA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

4.1 Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım

Değişken üslü $M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)$ Morrey uzayından olan bir fonksiyona Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalamaları ile yaklaşımları değerlendirdiğimiz 4.2 deki teoremimizin ispatında 3.4 kısmında belirttiğimiz $\|\cdot\|_2$ normunu kullanacağız. $\|\cdot\|_2$ normu $L^{p(\cdot)}$ normu ile tanımlandığından ispatımız için $L^{p(\cdot)}$ uzaylarındaki aşağıdaki teoremler yardımcı olacaktır.

4.1.1 Teorem: $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ ve $p(\cdot) \in \beta^0(T)$ ise pozitif bir $c(p)$ sabiti vardır öyle ki

$$\| S_n(f)\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \leq c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \tag{4.1}$$

olur [16].

4.1.2 Teorem: $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ reel sayıların

$$|\lambda_j| \leq M, \qquad \sum_{v=2^j}^{2^{j+1}-1} |\lambda_v - \lambda_{v+1}| \leq M$$

koşullarını sağlayan bir dizisi olsun. Eğer $p(\cdot) \in \beta(T)$ ve $k = 1,2,\ldots$ için $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları $a_k(f)$ve $b_k(f)$ ise

$$\frac{a_0\lambda_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

serisi bir $F \in L^{p(\cdot)}(T)$ fonksiyonunun Fourier serisidir ve f fonksiyonundan bağımsız pozitif bir $c(p)$ sabiti ile

$$\|F\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \leq c(p)\|f\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

eşitsizliği sağlanır [16]. (4.2)

$$\lambda_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{\left(\frac{k}{n+1}\right)^2}{1 - \frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}}, & k \leq n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{4.3}$$

ve

$$\mu_{k,n} = \begin{cases} \dfrac{\frac{k}{n+1}}{n\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)}, & k \le n \\ 0, & k > n \end{cases} \tag{4.4}$$

ifadeleri teoremin özelliklerini sağlar.

4.1.3 Teorem: $f \in L^{p(\cdot)}(T)$ ve $p(\cdot) \in \beta^0(T)$ olmak üzere

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \le c(p)\Omega_{p(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$\| f(\cdot) - \sigma_n(f,\cdot) \|_{L^{p(\cdot)}(T)} \le c(p)n\Omega_{p(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [16].

4.2 Değişken Üslü Morrey Uzaylarında Yaklaşım

Değişken üslü $M^{p(.),\lambda(.)}$ Morrey uzaylarında Guliyev tarafından elde edilen düz teorem aşağıdaki gibidir.

4.2.1 Teorem: $p(\cdot) \in \beta^0(T)$ ve $\lambda(\cdot): T \to [0,1]$ $0 \le \lambda_- \le \lambda_+ < 1$ koşulunu sağlayan T üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f \in M^{p(.),\lambda(.)}(T)$ olmak üzere f ve n'den bağımsız pozitif bir c sabiti vardır ki

$$E_n(f)_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)} \le c\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right) \tag{4.5}$$

eşitsizliği sağlanır [5].

4.1.3 Teoreminde $L^{p(.)}$ uzaylarında elde edilen Zygmund ve Cesàro(Fejér) ortalaması ile yaklaşım teoremini $M^{p(.),\lambda(.)}$ uzaylarında araştırarak aşağıdaki teoremi elde ettik.

4.2.2 Teorem: $p(\cdot) \in \beta^0(T)$ ve $\lambda(\cdot): T \to [0,1]$ $0 \le \lambda_- \le \lambda_+ < 1$ koşulunu sağlayan T üzerinde ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $f \in M^{p(.),\lambda(.)}(T)$ olmak üzere

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{M^{p(.),\lambda(.)}(T)} \le c(p)\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

ve

$$\|f(\cdot)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)n\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat: $S_n(f)$, $f \in M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamları olmak üzere

$$\left\|f(\cdot)-Z_n^{(2)}(f,\cdot)\right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq \|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \left\|S_n(f)-Z_n^{(2)}(f,\cdot)\right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

yazabiliriz. Öncelikle

$$\|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu gösterelim. $T_n^{\star}$, $f \in M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun.

$$\begin{aligned}\|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} &\leq \|f-T_n^{\star}\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \|S_n(f)-T_n^{\star}\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \\ &= E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \|S_n(f)-T_n^{\star}\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \\ &= E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|(S_n(f)-T_n^{\star})\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \\ &= E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|S_n\left((f-T_n^{\star})\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right)\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}\end{aligned}$$

(4.1) den

$$\begin{aligned}&\|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \\ &\quad\leq E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} c(p)\left\|(f-T_n^{\star})\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \\ &\quad= E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + c(p)\sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|(f-T_n^{\star})\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \\ &\quad= E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + c(p)\|f-T_n^{\star}\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}\end{aligned}$$

Buradan

$$\|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)E_n(f)_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

olur. (4.5) den

$$\|f-S_n(f)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right) \tag{4.6}$$

elde edilir. Şimdi

$$\left\|S_n(f)-Z_n^{(2)}(f,\cdot)\right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$\left\|S_n(f)-Z_n^{(2)}(f,\cdot)\right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} = \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|\left(S_n(f)-Z_n^{(2)}(f,\cdot)\right)\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

$$= \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\| \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n+1}\right)^2 A_k(x) \right) \chi_{\tilde{I}(x,r)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(4.3) ten

$$\left\| S_n(f) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

$$= \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\| \left(\sum_{k=0}^{n} \lambda_{k,n} \left(1 - \frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right) A_k(x) \right) \chi_{\tilde{I}(x,r)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(4.2) den

$$\left\| S_n(f) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

$$\leq c(p) \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\| \left(\sum_{k=0}^{n} \left(1 - \frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right) A_k(x) \right) \chi_{\tilde{I}(x,r)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(3.1) den

$$\begin{aligned} \left\| S_n(f) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} &\leq c(p) \sup_{x\in T, 0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\| [f(x) - T_h f(x)] \chi_{\tilde{I}(x,r)} \right\|_{L^{p(\cdot)}(T)} \\ &= c(p) \, \| f(x) - T_h f(x) \|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \\ &\leq c(p) \omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f, \frac{1}{n}\right) \qquad (4.7) \end{aligned}$$

olur. (4.6) ve (4.7) den

$$\left\| f(\cdot) - Z_n^{(2)}(f,\cdot) \right\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p) \omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

elde edilir. Şimdi

$$\| f(\cdot) - \sigma_n(f,\cdot) \|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p) n \omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f, \frac{1}{n}\right)$$

olduğunu gösterelim.

$$\| f(\cdot) - \sigma_n(f,\cdot) \|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq \| f - S_n(f) \|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} + \| S_n(f) - \sigma_n(f,\cdot) \|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

dir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terimi 4.6'da değerlendirdiğimiz için eşitsizliğin sağ tarafındaki ikinci terimi değerlendirmek yeterli olacaktır.

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} = \sup_{x\in T,0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|\left(S_n(f)-\sigma_n(f,\cdot)\right)\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

$$= \sup_{x\in T,0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|\left(\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n+1}\right)A_k(x)\right)\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(4.4) ten

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

$$= \sup_{x\in T,0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|\left(\sum_{k=0}^{n} n\,\mu_{k,n}\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)A_k(x)\right)\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(4.2) den

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

$$\leq c(p)\;n \sup_{x\in T,0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(x)}} \left\|\left(\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{\sin\frac{k}{n}}{\frac{k}{n}}\right)A_k(x)\right)\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

(3.1) den

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)\;n \sup_{x\in T,0<r<2\pi} r^{-\frac{\lambda(x)}{p(\cdot)}} \left\|[f(x)-T_hf(x)]\chi_{\tilde{I}(x,r)}\right\|_{L^{p(\cdot)}(T)}$$

$$= c(p)n\,\|f(x)-T_hf(x)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)}$$

$$\leq c(p)\;n\;\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right) \tag{4.8}$$

(4.6) ve (4.8) den

$$\|f(\cdot)-\sigma_n(f,\cdot)\|_{M^{p(\cdot),\lambda(\cdot)}(T)} \leq c(p)n\omega_{p(\cdot),\lambda(\cdot)}\left(f,\frac{1}{n}\right)$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde öncelikle değişken üslü Lebesgue uzaylarında bazı yaklaşım teoremleri verilmiştir. Aynı yaklaşım teoremleri bu uzayın genelleşmesi olan değişken üslü Morrey uzaylarına taşınarak ispatlanmıştır.

Bu çalışma Cesàro (Fejér) ve Zygmund ortalamalarının değişken üslü Morrey uzaylarındaki bazı yaklaşım özelliklerinden oluşmaktadır. Farklı ortalamaların da değişken üslü Morrey uzaylarındaki bazı yaklaşım özellikleri araştırılabilir.

6. KAYNAKLAR

[1] A. Almeida, J. Hasanov and S. Samko, "Maximal and potential operators in variable exponent Morrey spaces", *Georgian Math J*, vol. 15, no. 2, pp. 195-208, 2008.

[2] X. Fan, "The regularity of lagrangians f(x, ξ) = |ξ| α(x) with Hölder exponents α(x)", *Acta Math Sin*, vol. 12, no. 3, pp. 254-261, 1996.

[3] V. M. Kokilashvili and A. Meskhi, "Boundedness of maximaland singular operators in Morrey spaces with variable exponent", *Armenian Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 18-28, 2008.

[4] T. Ohno, "Continuity properties for logarithmic potentials of functions in Morrey spaces of variable exponent", *Hiroshima Math J*, vol. 38, no. 3, pp. 363-383, 2008, https://doi.org/10.32917/hmj/1233152775.

[5] V. S. Guliyev, A. Ghorbanalizadeh and Y. Sawano, "Approximation by trigonometric polynomials in variable exponent Morrey spaces", *Anal Math Phys*, vol. 9, pp. 1265-1285, 2019, https://doi.org/10.1007/s13324-018-0231-y.

[6] P. K. Suetin, *Series of Faber Polynomials*, Australia:Gordan and Breach, 1998.

[7] C. Aliprantis and O. Burkinshaw, *Principles of Real Analysis Third Edition*, London: Academic Press, 1998.

[8] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Vol. 1*, London: Cambridge University Press, 1959.

[9] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, *Constructive Approximation*, New York: Springer-Verlag, 1993.

[10] I. I. Sharapudinov, "Some questions of approximation theory in the Lebesgue spaces with variable exponent" *Vladikavkaz: Itogi Nauki Yug Rossai Seria Mathematicheskaya Monografia*, vol. 5, pp. 44-178, 2012.

[11] D. M. Israfilov and P. N. Tozman, "Approximation in Morrey Smirnov classes", *Azerbaijan Journal of Mathematics*, vol. 1, no. 1, pp. 99-113, 2011.

[12] V. M. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro and S. Samko, *Integral Operators In Non-Standard Function Spaces, Vol. 2,* Switzerland: Birkhauser, 2016.

[13] I. I. Sharapudinov, "Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$ by trigonometric polynomials", *Izv Math*, vol. 77, no. 2, pp. 407-434, 2013.

[14] D. M. Israfilov and A. Testici, "Approximation problems in the Lebesgue spaces with variable exponent", *J Math Anal App*, vol. 459, no. 1, pp. 112-113, 2018, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2017.10.067.

[15] S. S. Volosivets, "Approximation of functions and their conjugates in variable Lebesgue spaces", *Sb Math*, vol. 208, no. 1, pp. 44-59, 2017, http://dx.doi.org/10.1070/SM8636.

[16] V. M. Kokilashvili and S. Samko, "Operators of harmonic analysis in weighted spaces with non-standard growth", *J Math Anal App*, vol. 352, pp. 15-34, 2009, https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.06.056.

[17] A. Ghorbanalizadeh and R. R. Seraji, "On the equivalence of the K-functional and the modulus of continuity on the periodic variable exponent Morrey spaces", *Period Math Hung*, vol. 80, pp. 185-194,2019, https://doi.org/10.1007/s10998-019-00293-2.

[18] D. M. Israfilov and E. Yırtıcı, "Convolution and best approximations in variable exponent Lebesgue space", *Romanian Academy Mathematical Reports*, vol. 18, no. 4, pp. 497-508, 2016.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Önder Yılmaz

Doğum tarihi ve yeri : Kırkağaç/12.06.1986

e-posta :ondrylmz97@hotmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Bölümü	2009
Lise	Soma Birlik Lisesi	2004