baufbe@balikesir.edu.tr

Balıkesir
Üniversitesi
FBE

2020
DOKTORA TEZİ
ALİ DOĞU

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

Ali DOĞU

Bilim Kod / Kodları : 20404

BALIKESİR, MART-2020

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM PROBLEMLERİ

ALİ DOĞU

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ramazan AKGÜN
Doç. Dr. Erbil ÇETİN
Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, MART- 2020

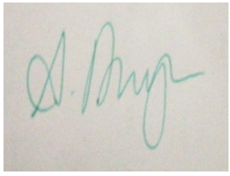
ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Bazı Fonksiyon Uzaylarında Trigonometrik Yaklaşım Problemleri**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ali DOĞU



ÖZET

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM PROBLEMLERİ
DOKTORA TEZİ
ALİ DOĞU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)
BALIKESİR, MART - 2020

Bu tez çalışmasında ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında konvolüsyon tipli dönüşümlerin en iyi yaklaşım sayıları yardımıyla değerlendirilmesi elde edilmiştir. Ayrıca bu fonksiyon uzaylarında Fourier serileri yardımıyla elde edilen bazı trigonometrik polinomlar ile fonksiyonların kesirli türevlerine yaklaşım ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, tezde incelenen problemin önemi vurgulanmış ve konu ile ilgili literatür bilgisi verilmiştir.

İkinci bölümde, üzerinde çalışılan fonksiyon uzaylarının tanımları ve temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların kesirli türevleri için tanımlanan konvolüsyon tipli dönüşümlerin en iyi yaklaşım sayıları ile iyileştirilmiş değerlendirilmesi elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, konveks olması gerekmeyen Young fonksiyonları ile üretilen ağırlıklı Orlicz uzaylarında benzer problem incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise bu iki fonksiyon uzayında Fourier serilerinin bazı lineer toplam metotları ile trigonometrik yaklaşım problemleri incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: En iyi yaklaşım, konvolüsyon tipli dönüşüm, lineer metotlar.

Bilim Kod: 20404 Sayfa sayısı: 44

ABSTRACT

TRIGONOMETRIC APPROXIMATION PROBLEMS IN SOME FUNCTION SPACES
PH.D THESIS
ALİ DOĞU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)
BALIKESİR, MARCH - 2020

In this thesis, convolution type transforms are evaluated with the best approximation numbers in weighted Lorentz and Orlicz spaces. In addition, some theorems related to approximation to fractional derivatives of functions by some trigonometric polynomials obtained by means of Fourier series in these function spaces are proved. This thesis consists of five sections.

In the first section, the importance of the problem examined in the thesis is emphasized and literature information about the subject is given.

In the second section, definitions and basic properties of the function spaces studied are given.

In the third section, it is achieved the improved evaluation of the convolution type transforms which is defined for fractional derivatives of functions in weighted Lorentz spaces with the best approximation numbers.

In the fourth section, similar problems are examined in the weighted Orlicz spaces produced by Young functions which do not need to be convex.

In the fifth section, trigonometric approximation problems by some linear summation methods of Fourier series are investigated in these two function spaces.

KEYWORDS: Convolution type transform, the best approximation, linear methods.

Science Code: 20404 Page Number: 44

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\boldsymbol{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\boldsymbol{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{T}$	: $[-\pi, \pi]$ aralığı
$\boldsymbol{\omega}$	: Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{L_p}$	: Lebesque uzayı
$\boldsymbol{L^p(T, \omega)}$	: Ağırlıklı Lebesque uzayı
$\boldsymbol{L^{pq}(T)}$	: Lorentz uzayı
$\boldsymbol{L^{pq}_{\omega}(T)}$	: Ağırlıklı Lorentz uzayı
$\boldsymbol{L_{M,\omega}(T)}$	: Ağırlıklı Orlicz uzayı
$\boldsymbol{\lVert f \rVert_{M,\omega}}$	: Orlicz normu
$\boldsymbol{\lVert f \rVert_{(M),\omega}}$	: Luxemburg normu
$\boldsymbol{E_n(f)}$	: En iyi yaklaşım sayısı
$\boldsymbol{f^{(\alpha)}(x)}$	: f fonksiyonunun kesirli türevi
$\boldsymbol{T_n(f)}$	: f fonksiyonuna yaklaşan en iyi trigonometrik polinom
$\boldsymbol{f * g}$	: f ve g fonksiyonlarının konvolüsyonu
$\boldsymbol{Mf}$	: f'nin Hardy Little-Wood Maximal fonksiyonu
$\boldsymbol{D(f, \mu, h, M)}$	: Konvolüsyon dönüşümü
$\boldsymbol{\varkappa_E}$	: Karakteristik fonksiyon
$\boldsymbol{\tau_n}$	: Trigonometrik polinomlar sınıfı
$\boldsymbol{A_p}$	: Muchkenhoupt sınıfı

ÖNSÖZ

Akademik çalışmalarım sürecinde bana kıymetli vakitlerini ayıran, beni yönlendiren, değerli danışmanım Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR hocama canı gönülden teşekkür ederim.

Matematik bölümünün kıymetli hocaları Prof. Dr. Ramazan AKGÜN, Prof. Dr. Ali GÜVEN'e ders aşaması ve tez aşamasındaki desteklerinden dolayı teşekkür ederim.

Tüm akademik süreç boyunca desteğini hissettiğim Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR hocama da ayrıca teşekkür ederim.

Akademik hayatım boyunca bana maddi manevi desteklerini esirgemeyen sevgili Eşim Neval'e, Anneme ve çalışmalarım boyunca büyük sabır gösteren beni bekleyen iki oğlum Ahmet Kamil ve Musahan'a da teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca, akademik anlamda çalışmamı çok arzu eden merhum Babamı da rahmetle anıyorum.

Balıkesir, 2020 **ALİ DOĞU**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belirli özelliklere sahip fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip basit fonksiyonlar ile yaklaşım problemleri incelenir. Bu basit fonksiyonlar kümesi genellikle incelenen fonksiyon uzayının bir alt uzayı olarak alınır. Cebirsel polinomlar veya trigonometrik polinomlar yaklaşan fonksiyonlara örnek olarak verilebilir.

Verilen bir fonksiyon uzayından olan fonksiyonlara, polinomlar kümesinden en iyi yaklaşan polinomu bulmak ve yaklaşım hızını belirlemek yaklaşım teorisinin diğer problemleridir. Yaklaşılan fonksiyon ile yaklaşan polinom arasındaki farkın fonksiyon uzayı normunda derecesi n'yi aşmayan polinomlar kümesi üzerinden infimum değerine en iyi yaklaşım sayısı denir. En iyi yaklaşım sayıları dizisinin sıfıra gitme hızı yaklaşımın kalitesini belirler. Bu hızın belirlenmesi problemi, farklı fonksiyon uzaylarında birçok matematikçi tarafından ayrıntılı biçimde incelenmiştir.

Yaklaşım teorisinde yaklaşan polinomların inşası için çeşitli yöntemler kullanılmaktadır. Bu yöntemlerden biri de konvolüsyon ve konvolüsyon tipli dönüşümleri kullanmaktır. Bu dönüşümler yaklaşan polinomların elde edilmesinde önemli bir rol oynar. Ayrıca bu dönüşümlerin teorik ve uygulamalı matematiğin birçok alanında önemli uygulamaları vardır. Bu yüzden, özellikle trigonometrik yaklaşım teorisinde, konvolüsyon tipli dönüşümleri en iyi yaklaşım sayıları dizisi ile değerlendirme problemi birçok matematikçi tarafından incelenmiş önemli bir problemdir. Biz bu problemi bu tez çalışmasında ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında inceledik ve daha önceki çalışmalarda bulunmayan, fonksiyonların kesirli türevleri için ve iyileştirilmiş değerlendirmeler elde ettik.

Lorentz uzayları ilk olarak 1951 yılında G. G. Lorentz tarafından tanımlanmıştır. Bu uzaylar iyi bilinen Lebesgue uzaylarının bir genelleşmesi olduğundan birçok matematikçi bu uzaylardaki yaklaşım problemleri ile ilgilenmiştir. Bir ağırlık fonksiyonu yardımıyla bu uzaylardan daha genel olan ağırlıklı Lorentz uzayları tanımlanmış ve ağırlık fonksiyonunun Muckenhoupt koşulu denilen bir koşulu sağlaması durumunda trigonometrik yaklaşımın temel teoremleri bu uzaylarda çeşitli çalışmalarda elde edilmiştir [1-3]

Orlicz uzayları ise 1931 yılında Z.W. Birnbaum ve W.Orlicz tarafından Lebesgue uzaylarının farklı bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Lebesgue uzaylarının tanımındaki x^p fonksiyonu, Young fonksiyonu denilen daha genel bir konveks fonksiyon ile yer değiştirilir. Bu haliyle Orlicz uzaylarının birçok uygulamaları ortaya çıkmıştır [4-6]. Orlicz uzayları ile ilgili ayrıntılı bilgi [7,8] kaynaklarında bulunabilir. Bu uzaylar da ağırlık fonksiyonları yardımıyla ağırlıklı Orlicz uzayları denilen fonksiyon uzaylarına genelleştirilmiş ve yine Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonları için trigonometrik yaklaşım problemleri birçok çalışmada incelenmiştir [9-13].

Diğer yandan, bu uzaylarla ilgili farklı bir tanımlama [14] nolu kaynakta ortaya çıktı. Bu tanımlamada Orlicz uzayı tanımı, uzayın hemen hemen bütün bilinen özellikleri korunarak genelleştirildi. Bu genelleştirmede uzayı üreten Young fonksiyonu konveks olmak zorunda değildir. Daha sonra [15] nolu kaynakta bu uzay Muckenhoupt ağırlıkları ile genelleştirilmiş ve bu haliyle trigonometrik yaklaşımın temel teoremleri elde edilmiştir.

Yaklaşım teorisinin önemli problemlerinden olan konvolüsyon tipli dönüşümler ile en iyi yaklaşım sayıları arasındaki ilişkinin incelenmesi problemi çeşitli fonksiyon uzaylarında çözülmüş olmakla beraber yukarıda tanıttığımız ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında incelenmemiştir. Biz bu çalışmada, problemi biraz daha ileri taşıyarak bu uzaylardaki fonksiyonların kesirli mertebeden türevleri için konvolüsyon tipli dönüşüm tanımını verdik ve bu dönüşümün en iyi yaklaşım sayıları yardımıyla iyileştirilmiş değerlendirmesini elde ettik [16-18].

Bununla beraber, bu tez çalışmasında üçgen matrisler ile üretilen Fourier serilerinin lineer toplam metotlarının yaklaşım özelliklerini bu iki fonksiyon uzayında inceledik. Bu lineer toplamlar Fourier serisinin kısmı toplamlar dizisine göre daha iyi yaklaşım özelliklerine sahiptir. Fourier serisini üreten üçgen matrislerin farklı kombinasyonları, fonksiyonlar teorisinin birçok tanınmış uzmanının ilgisini çekmiştir. Son yıllarda bu toplamların ve onların özel durumları olan Fejer ve Zygmund toplamlarının yoğun bir şekilde incelendiği görülmektedir. Bu alanda yapılan en önemli çalışmalar ise çeşitli fonksiyon sınıflarında bu toplamların yaklaşım özelliklerinin incelendiği çalışmalardır.

Biz, ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında bu lineer toplamlar ile fonksiyonların kesirli türevlerine yaklaşım problemlerini inceledik. Ayrıca özel olarak belirlenmiş üçgen matrisler yardımıyla elde edilen Fejer ve Zygmund toplamları için yaklaşım sonuçlarını verdik [19-26].

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Ağırlıklı Lorentz Uzayları

2.1.1 Tanım [16] T:=[-π,π] olsun. Hemen her yerde pozitif ve sonlu bir $\omega: T \to [0, \infty]$ ölçülebilir fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

2.1.2 Tanım[16] ω ağırlık fonksiyonu ve e ölçülebilir bir küme olmak üzere

$$\omega(e) = \int_e \omega(x)dx$$

Borel ölçümünü göz önüne alalım.

$$f_\omega^*(t) = inf\,\{\tau \geq 0: \omega(x \in T: |f(x)| > \tau) \leq t\}$$

biçiminde tanımlanan $f_\omega^*(t)$ fonksiyonuna $f: T \to [0, \infty]$ fonksiyonunun azalan rearrangament fonksiyonu denir.

2.1.3 Tanım[16] $1 < p, q < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{pq,\omega} = \left(\int_T [f_\omega^{**}(t)]^q t^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

koşulunu sağlayan bütün 2π periyotlu ve ölçülebilir $f: T \to [0, \infty]$ fonksiyonlarının sınıfına ağırlıklı Lorentz uzayı denir ve $L_\omega^{p,q}(T)$ ile gösterilir.

Burada

$$f_\omega{}^{**}(t) = \frac{1}{t}\int_0^t f_\omega^*(u)du$$

dir.

$L_\omega^{p,q}(T)$ ağırlıklı Lorentz uzayı $\|f\|_{pq,\omega}$ normuna göre bir Banach uzayıdır. Eğer $p = q$ ise $L_\omega^{p,q}(T)$**,** iyi bilinen ağırlıklı Lebesgue uzayına dönüşür.

2.1.4 Tanım[16] $1 < p < \infty$ ve p'=$\frac{p}{p-1}$ olsun. A_p Muckenhoupt sınıfı

$$sup\frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)dx\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{1-p'}(x)dx\right)^{p-1} < \infty$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonsiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır[27]. Burada supremum, uzunluğu 2π den küçük eşit olan I aralıkları üzerinden alınır. $|I|$, I aralığının uzunluğunu gösterir.

2.1.5 Tanım[16] $\omega \in A_p(T)$ ve $1 < p, q < \infty$ için $L_\omega^{p,q}(T) \subset L^1(T)$ [2] olduğundan $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonunun Fourier serisini aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

$$\sum_{r=-\infty}^{\infty} c_r(f)e^{irx} = \sum_{r=-\infty}^{\infty} A_r(x,f) \tag{2.1}$$

Burada

$$c_r(f) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)e^{-irx}dx$$

f fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. x noktasında (2.1) serisinin n. mertebeden kısmi toplamlar dizisi

$$S_n(x,f) := \sum_{r=-n}^{n} A_r(x,f)$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.6 Tanım[16] τ_n, derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesi olsun. $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonuna, derecesi n'yi geçmeyen trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşım sayıları dizisi $E_n(f)_{L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})}$ ile gösterilir ve

$$E_n(f)_{L_\omega^{p,q}(T)} := \inf_{T_n \in \tau_n} \|f - T_n\|_{pq,\omega}$$

olarak tanımlanır.

2.1.7 Tanım[28, sayfa 112] f ve g, R üzerinde yerel integrallenebilir fonksiyonlar olsun.

$$(f * g)(x) = \int_R f(x-y)g(y)dy$$

fonksiyonuna f ve g'nin konvolüsyonu denir.

2.1.8 Tanım[16] $1 < p, q < \infty$ ve $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ olmak üzere σ_h ortalama değer operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\sigma_h f)(x,u) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+tu)dt, \quad 0<h<\pi, \quad x\in T, \quad -\infty<u<\infty.$$

$1<p,q<\infty$ için $\omega\in A_p(T)$ olduğundan $f\in L_\omega^{p,q}(T)$ için Hardy-Littlewood Maximal fonksiyonu ağırlıklı Lorentz uzaylarında sınırlı olur [29]. Böylece $\sigma_h f$ operatörü $L_\omega^{p,q}(T)$ uzayında sınırlı bir lineer operatördür.

Ağırlıklı Lorentz uzayları $f(x-tu)$ alışılmış ötelemede değişmez olmadığından konvolüsyon tipli dönüşümleri $(\sigma_h f)(x,u)$ ortalama değer fonksiyonu yardımıyla tanımlıyoruz.

2.1.9 Tanım[16] $f\in L_\omega^{p,q}(T)$ için konvolüsyon tipli dönüşümleri

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(\cdot,u)d\mu(u)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\mu(u)$ reel eksen üzerinde sınırlı değişimli bir fonksiyondur. Bu dönüşüm-ün normunu ise

$$D(f,\mu,h,pq) := \left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(\cdot,u)d\mu(u)\right\|_{pq,\omega}$$

biçiminde gösteriyoruz.

2.1.10 Tanım[30, Sayfa 356] $\alpha>0$ olsun. $f\in L_1(T)$ fonksiyonunun kesirli türevini aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$f^{(\alpha)}(x) := \frac{a_0(f)}{2}+\sum_{v=1}^{\infty}v^\alpha A_v\left(f,x+\frac{\alpha\pi}{2v}\right) =: \sum_{v=0}^{\infty}A_v\left(f^{(\alpha)},x\right).$$

2.1.11 Tanım[30, Sayfa 356] $\alpha>0$ için $W_{pq,\omega}^{\alpha}$ ile $f^{(\alpha)}\in L_\omega^{pq}(T)$ özelliğindeki $f\in L_\omega^{pq}(T)$ fonksiyonlarının uzayını gösterilir. $W_{pq,\omega}^{\alpha}$ uzayı

$$\|f\|_{W_{pq,\omega}^{\alpha}} := \|f\|_{pq,\omega}+\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega}$$

biçiminde tanımlanan norm ile bir Banach uzayı olur.

2.2 Ağırlıklı Orlicz Uzayları

2.2.1 Tanım[14] f fonksiyonu (a,b) aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu her $0 < t < 1$ ve her $x, y \in (a,b)$ için

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna (a,b) aralığında konveks fonksiyon denir.

2.2.2 Tanım[15] Φ ile $\varphi(\infty) = \infty$ özelliğindeki kesin artan $\varphi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonlarının sınıfını gösterilir.

2.2.3 Tanım [15] $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli ve konveks fonksiyonu $\Phi(0) = 0,\ x > 0$ için $\Phi(x) > 0,\ \lim\limits_{x\to 0} \frac{\Phi(x)}{x} = 0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\Phi(x)}{x} = \infty$ koşullarını sağlıyorsa Φ fonksiyonuna Young fonksiyonu denir. $y \geq 0$ için

$$\psi(y) := max\{xy - \Phi(x) : x \geq 0\}$$

biçiminde tanımlanan ψ fonksiyonuna Φ'nin tamamlayıcı Young fonksiyonu denir.

2.2.4 Tanım[15] $N[p,q]$ ile aşağıdaki şartları sağlayan $M \in \Phi$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilir.

(i) $|x|,\ (0,\infty)$ da artarken, $M(x).x^{-p}$ azalmayan,

(ii)$|x|,\ (0,\infty)$ da artarken, $M(x).x^{-q}$ artmayandır.

$p < q$ ise yeterince küçük $\varepsilon, \delta > 0$ için $M \in N[p+\varepsilon, q-\delta]$ fonksiyonlarının sınıfı $N < p, q >$ ile gösterilir.

Φ_p ile $1 < p \leq q < \infty$ için $N < p, q >$ sınıfındaki M fonksiyonlarının sınıfı gösterilir.

2.2.5 Tanım[15] Eğer, her $u \geq u_0$ için $M(2u) \leq cM(u)$ olacak biçimde bir $u_0 > 0$ ve $c > 0$ sabitleri varsa M fonksiyonu Δ_2 *koşulunu sağlıyor* denir ve $M \in \Delta_2$ biçiminde gösterilir.

Φ_p sınıfındaki her M fonksiyonu süreklidir ve $M(0) = 0$ ve $M \in \Delta_2$ koşullarını sağlar.

Φ_p sınıfındaki fonksiyonlar konveks olmak zorunda değildir [14].

Örneğin,

$$M(x) = \begin{cases} x^{5/2}, & 0 \leq x \leq 1 \\ x^{9/4}, & x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonu konveks olmadığı halde Φ_p sınıfındandır.

2.2.6 Tanım[15] $M \in \Phi_p,\ \ p > 1$ ve $\omega,\ T$ üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$\varphi_M(t) \coloneqq M(t)/t$

fonksiyonunu tanımlayalım. $1 < p < q < \infty$ için $t \to \infty$ olduğunda $\varphi_M(t) \to \infty$ olur.

$\psi_M(t)$ ile pozitif, azalmayan, sürekli $\varphi_M(t)$ fonksiyonun ters fonksiyonunu gösterillir. Φ_M ve Ψ_M fonksiyonlarını

$$\Phi_M(x) = \int_0^x \varphi_M(t)dt$$

ve

$$\Psi_M(x) = \int_0^x \psi_M(t)dt$$

biçiminde tanımlanır.

2.2.7 Tanım[15] Bir $c > 0$ sabiti için

$$\int_T \Phi_M(c|f(x)|)\omega(x)dx < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f\colon T \to R$ fonksiyonlarının uzayına *ağırlıklı Orlicz uzayı* denir.

Bu uzaylarda Orlicz normunu ve Luxemburg normunu sırasıyla

$$\|f\|_{M,\omega} := \sup_g \left\{ \int_T (|f(x)g(x)|)\omega(x)dx : \int_T \Psi_M(|g(x)|)\omega(x)dx \leq 1 \right\}$$

$$\|f\|_{(M),\omega} \coloneqq inf \left\{ k > 0 \ : \ \int_T \Phi_M(k^{-1}|f(x)|)\omega(x)dx \leq 1 \right\}$$

biçiminde tanımlıyoruz. Yukarıda verilen normlarla ilgili

$\|f\|_{(M),\omega} \sim \|f\|_{M,\omega}$

denkliği geçerlidir. Ayrıca, Orlicz normu Luxemburg normunun yardımıyla aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$\|f\|_{M,\omega} := \sup_{g} \left\{ \int_T (|f(x)g(x)|)\omega(x)dx : \|g\|_{(\Psi_M),\omega} \le 1 \right\}.$

$L_{M,\omega}(T)$ yukarıda verilen normlara göre bir Banach uzayıdır. Bu Banach uzayına ağırlıklı Orlicz uzayı denir. Eğer $1 < p < \infty$ için

$M(x,p) := x^p$

alırsak $L_{M,\omega}(T)$ uzayı $L^p(T,\omega)$ ağırlıklı Lebesgue uzayına dönüşür.

2.2.8 Tanım[28, sayfa 492] $\tau_n$deki polinomlar ile $f \in L_{M,\omega}(T)$ nin en iyi yaklaşım sayıları dizisi

$$E_n(f)_{M,\omega} := \inf_{T_n \in \tau_n} \|f - T_n\|_{M,\omega}$$

ile gösterilir. Burada τ_n derecesi n yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesidir.

2.2.9 Tanım[17] $f \in L_{M,\omega}(T)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx}$$

olur. Burada

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_T f(x)e^{-ikx}dx$$

dir. x noktasında serinin n. kısmı toplamı

$$S_n(x,f) := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

olur.

$M \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(T)$ için $S_n : L_{M,\omega}(T) \to L_{M,\omega}(T)$ operatörünün sınırlılığı [11] ispatlandı. Böylece

$$\|S_n(f)\|_{(M),\omega} \le C\|f\|_{(M),\omega} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

ve

$$\|f - S_n(f)\|_{(M),\omega} \le C.E_n(f)_{(M),\omega} \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

olur. $M \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$ için [31, Lemma 3] deki koşullar sağlandığından, trigonometrik polinomların kümesi $L_{M,\omega}(T)$ de yoğundur. Böylece $n \to \infty$ için $E_n(f)_{M,\omega} \to 0$ olur ve *f* in Fourier serisi *f* fonksiyonuna $L_{M,\omega}(T)$ normunda yakınsaktır, yani

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)e^{ikx}.$$

2.2.10 Tanım[17] $p>1,\ f\in L_{M,\omega}(T)$ ve $\omega\in A_p(T)$ için σ_h operatörü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$(\sigma_h f)(x,u):=\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}f(x+tu)dt,\ 0<h<\pi,x\in T,-\infty<u<\infty.$$

$M\in\Phi_p\ ,p>1\ ,\omega\in A_p$ için Hardy-Littlewood Maximal operatörü $L_{M,\omega}(T)$ uzayında sınırlıdır[15]. Böylece $\sigma_h f$ operatörü $L_{M,\omega}(T)$ uzayında sınırlı olur.

$L_{M,\omega}(T)$ uzayları klasik öteleme dönüşümü $f(x-tu)$ ya göre invaryant değildir. Bu yüzden konvolüsyon dönüşümünü $(\sigma_h f)(x,u)$ fonksiyonu yardımı ile tanımlıyoruz.

2.2.11 Tanım[17] $f\in L_{M,\omega}(T)$ için konvolüsyon tipli dönüşüm aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(x,u)d\mu(u)$$

Bu dönüşümün normu ise

$$D(f,\mu,h,M)=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f)(x,u)d\mu(u)\right\|_{M,\omega}$$

şeklinde tanımlanır ve burada $\mu(u)$ reel eksen üzerinde sınırlı değişimli bir fonksiyondur.

2.2.12 Tanım $\alpha>0$ için $W^{\alpha}_{M,\omega}$ ile $f^{(\alpha)}\in L_{M,\omega}(T)$ özelliğindeki $f\in L_{M,\omega}(T)$ fonksiyonlarının uzayını gösteriyoruz. $W^{\alpha}_{pq,\omega}$ uzayı

$$\|f\|_{W^{\alpha}_{M,\omega}}:=\|f\|_{M,\omega}+\left\|f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega}$$

biçiminde tanımlanan norm ile bir Banach uzayı olur.

3. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM

Bu bölümde, Ağırlıklı Lorentz uzaylarındaki fonksiyonların kesirli mertebeden türevleri için konvolüsyon tipli dönüşüm tanımını verdik ve bu dönüşümün en iyi yaklaşım sayıları yardımıyla iyileştirilmiş değerlendirmesini elde ettik

3.1 Yardımcı Teoremler

3.1.1 Lemma ([32]) $1 < p, q < \infty$ ve $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ olsun. Bu durumda

$$c^{-1}\|f\|_{L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})} \leq sup\left|\int_0^{2\pi} f(x)g(x)\omega(x)dx\right| \leq c\|f\|_{L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})}$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde bir $c > 0$ vardır. Burada supremum $\|g\|_{L_\omega^{p',q'}(\boldsymbol{T})} \leq 1$ koşulunu sağlayan bütün g ler için alınır ve $p' = p/(p-1)$ dir.

3.1.2 Lemma (Çarpanlar Teoremi): $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ reel sayıların her $\vartheta, l \in N$ için

$$|\lambda_l| \leq M, \sum_{\vartheta=2^{l-1}}^{2^l-1} |\lambda_\vartheta - \lambda_{\vartheta+1}| \leq M$$

koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. $1 < p, q < \infty$, $\omega \in A_p(T)$ için $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ nin Fourier serisi

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}(a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

ise Fourier serisi

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}\lambda_\vartheta(a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

olan ve

$$\|h\|_{pq,\omega} \leq C\|f\|_{pq,\omega}$$

koşulunu sağlayan bir $h \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonu vardır. Burada C, f den bağımsız bir sabittir.

İspat

$$Tf(x) := \sum_{\vartheta=0}^{\infty}(a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

biçiminde tanımlanan Tf operatörü $L_\omega^p(T)$ de sınırlı lineer bir operatördür [33, Teorem 4.4]. Böylece ağırlıklı Lorentz uzayları için interpolasyon teoremi bu operatöre uygulanabilir [2, Teorem 4.13]. Bu teoremi uyguladığımızda

$$\|h\|_{pq,\omega} \leq C\|f\|_{pq,\omega}$$

sonucunu elde ederiz. ■

3.1.3 Lemma (Littlewood-Paley teoremi): $1 < p, q < \infty$, $\omega \in A_p(T)$ için $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty}(a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

olsun. Bu durumda, f den bağımsız c_1, c_2 sabitleri için

$$c_1\left\|\left(\sum_{\mu=\vartheta}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{pq,\omega} \leq \|f\|_{pq,\omega} \leq \quad c_2\left\|\left(\sum_{\mu=\vartheta}^{\infty}\left|\Delta_\mu\right|^2\right)^{1/2}\right\|_{pq,\omega}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\Delta_\mu := \Delta_\mu(x,f) := \sum_{\vartheta=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1}(a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

dir.

İspat Kuasilineer bir $T\,f$ operatörünü

$$Tf(x) := \left(\sum_{\mu=\vartheta}^{\infty}|\Delta(x,f)|^2\right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu operatör $p > 1$ için $L_\omega^p(T)$ uzayında sınırlıdır [28, teorem 4.5]. Dolayısıyla istenen eşitsizliğin sol tarafı Lorentz uzayları için interpolasyon teoremi yardımı ile elde edilir [34, teorem 4.13].

$f \in L_\omega^{p,q}(T) \cap L_\omega^2(T)$, $g \in L_\omega^{p',q'}(T) \cap L_\omega^2(T)$ için Hölder eşitsizliğini ve eşitsizliğin sol tarafını kullanarak

$$\int_T |f(x)g(x)|\omega(x)dx = \int_T \left|\sum_{\mu=1}^{\infty}\Delta_\mu(x,f)\Delta_\mu(x,g)\right|\omega(x)dx$$

$$\leq \int_T \sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\Delta_\mu(x,g)\right| \omega(x)dx$$

$$\leq \int_T \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2} \left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,g)\right|^2\right]^{1/2} \omega(x)dx$$

$$\leq \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{pq,\omega} \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,g)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{p'q',\omega}$$

$$\leq C \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu(x,f)\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{pq,\omega} \|g\|_{p'q',\omega}$$

elde edilir. Burada $p' = p/(p-1)$, $q' = q/(q-1)$, dir. $\|g\|_{p',q',\omega} \leq 1$ şartını sağlayan tüm $g \in L_\omega^{p'q'}$ ler için son eşitsizliğin supremumunu aldığımızda, 3.1.1 Lemmadan aşağıdaki eşitsizliği buluruz.

$$\|f\|_{pq,\omega} \leq C \left\|\left[\sum_{\mu=1}^{\infty} \left|\Delta_\mu\right|^2\right]^{1/2}\right\|_{pq,\omega}.$$

$L_\omega^{p,q}(T) \cap L_\omega^2(T)$ nin $L_\omega^{p,q}(T)$ de yoğunluğu herhangi bir $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ için istenen eşitsizliğin sağ tarafını verir.■

3.1.4 Lemma $1 < p,q < \infty$ ve φ iki değişkenli ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left\|\int_T \varphi(x,.)dx\right\|_{pq,\omega} \leq \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,\omega}dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat 3.1.1 Lemma, Fubini Teoremi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left\|\int_T \varphi(.,u)du\right\|_{pq,\omega} \leq c \sup_{\|g\|_{p'q',\omega}\leq 1} \int_T \left(\int_T |\varphi(x,y)|dx\right)|g(y)|\omega(y)dy$$

$$= c \sup_{\|g\|_{p'q',\omega}\leq 1} \int_T \left(\int_T |\varphi(x,y)||g(y)|\omega(y)dy \right) dx$$

$$\leq c \sup_{\|g\|_{p'q',\omega}\leq 1} \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,\omega} \|g\|_{p'q',\omega} dx$$

$$\leq c \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,\omega} dx.$$

■

3.1.5 Lemma $1 < p,q < \infty$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. Bu durumda her $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ ve $n \geq 1$ için

$$\|f - S_n(f)\|_{f\in L_\omega^{p,q}(T)} \leq c.E_n(f)_{f\in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $c > 0$ pozitif sabiti vardır.

İspat

$$\|S_n(f)\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega}$$

eşitsizliği $\omega \in A_p(T)$ koşulu altında $L_\omega^{p,q}(T)$ de eşlenik fonksiyonun sınırlılığının bir sonucu olarak standart bir şeklilde elde edilir [35, bölüm 6]. T_n en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olmak üzere

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,\omega} \leq \|f - T_n\|_{pq,\omega} + \|T_n - S_n(f)\|_{pq,\omega}$$
$$= \|f - T_n\|_{pq,\omega} + \|S_n(T_n - f)\|_{pq,\omega}$$
$$\leq c.E_n(f)_{L_\omega^{p,q}}$$

elde edilir. ■

3.1.6 Lemma $1 < \mathrm{p} < \infty$ ve $1 < q \leq 2$ olsun. Keyfi bir $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^m$, $\varphi_j \in L_\omega^{p,q}$ fonksiyonlar sistemi için

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{1/2} \right\|_{pq,\omega} \leq \boldsymbol{c} \left(\sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{pq,\omega}^{q} \right)^{1/q}$$

eşitsizliği sağlanır, burada c, φ_j fonksiyonlarından *m* den bağımsızdır.

İspat [34, sayfa 41, 54 ve 129] de ispatları verilen, iyi tanımlı $(f^*)^\alpha = (f^\alpha)^*$ ve $(f+g)^{**} \leq (f^{**}+g^{**})$ bağıntılarını ve Hardy eşitsizliğini kullanarak

$$I := \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{1/2} \right\|_{pq,\omega} \leq c \left(\int_T \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{1/2} \right)^* \right)^q (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$= c \left(\int_T \left(\left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{q/2} \right)^* (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^q \right)^* (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

elde ederiz ve böylece

$$I \leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^q \right)^{**} (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} \left({\varphi_j}^q \right)^{**} (t) \right) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$= c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^q \right)^{**} \left((t) \right) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

olur. Hardy eşitsizliğini tekrar uyguladığımızda

$$I \leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^q \right)^{*} \left((t) \right) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^* \right)^{q} (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\le c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{T}\left(\varphi_j{}^{**}\right)^q(t)t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

$$= \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\left\|\varphi_j\right\|_{pq,\omega}^{\boldsymbol{q}}\right)^{\boldsymbol{1/q}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

3.1.7 Lemma $2 < \mathrm{p} < \infty$ ve $2 \le q$ olsun. Keyfi bir $\left\{\varphi_j(x)\right\}_{j=1}^{m}$, $\varphi_j \in L_{\omega}^{p,q}$ fonksiyonlar sistemi için

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\varphi_j{}^2\right)^{\boldsymbol{1/2}}\right\|_{pq,\omega} \le \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\left\|\varphi_j\right\|_{pq,\omega}^{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{1/2}}$$

eşitsizliğini sağlayan m ve φ_j den bağımsız bir c sabiti vardır.

İspat Ağırlıklı Lorentz uzayı normunun tanımına göre

$$I:=\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\varphi_j{}^2\right)^{\boldsymbol{1/2}}\right\|_{pq,\omega} \le c\left(\int_{T}\left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j{}^2\right)^{1/2}\right)^{**}(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

yazılabilir. $L_{\omega}^{\frac{p}{2},\frac{q}{2}}$ bir normlu uzay olduğundan, Hardy eşitsizliğine göre

$$I \le c\left(\int_{T}\left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j{}^2\right)^{1/2}\right)^{*}(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

$$= c\left(\int_{T}\left(\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j{}^2\right)^{*}(t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

$$= c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{T}\left(\left(\varphi_j{}^2\right)^{**}(t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Hardy eşitsizliğini toplamın içine tekrar uygularsak

$$I \leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{T}\left({\varphi_j}^2\right)^*\left((t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{21}{q2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_{T}\left((\varphi_j^{**})(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{21}{q2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{T}\left((\varphi_j^{**})(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\|\varphi_j\|_{pq,\omega}^{\boldsymbol{2}}\right)^{\boldsymbol{1/2}}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

■

3.1.8 Lemma $1 < \mathrm{p}_0 < \mathrm{p} < 2 < \mathrm{q} < \infty$ olsun. Keyfi bir $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{m}$ $\varphi_j \in L_\omega^{p,q}$ ve, φ_j ve m den bağımsız bir c sabiti için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}{\varphi_j}^2\right)^{\boldsymbol{1/2}}\right\|_{L_\omega^{p,q}} \leq \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\|\varphi_j\|_{\boldsymbol{L_\omega^{pq}}}^{\mathrm{p}_0}\right)^{\boldsymbol{1}/\mathrm{p}_0}.$$

İspat Lemma 3.1.6 ve Lemma 3.1.7 nin ispatındaki yöntemleri kullanarak

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}{\varphi_j}^2\right)^{\boldsymbol{1/2}}\right\|_{L_\omega^{p,q}} = \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}{\varphi_j}^2\right)^{\frac{\mathrm{p}_0\,\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}\,\mathrm{p}_0}}\right\|_{L_\omega^{p,q}}$$

$$\leq \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}|\varphi_j|^{\mathrm{p}_0}\right)^{\frac{\boldsymbol{1}}{\mathrm{p}_0}}\right\|_{L_\omega^{p,q}}$$

$$\leq \boldsymbol{c}\left\|\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}|\varphi_j|^{\mathrm{p_0}}\right\|^{\frac{\mathbf{1}}{\mathrm{p_0}}}_{L_\omega^{p,q}}$$

$$\leq \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\left\||\varphi_j|\right\|^{\mathrm{p_0}}_{L_\omega^{\frac{p}{\mathrm{p_0}},\frac{q}{\mathrm{p_0}}}}\right)^{\frac{\mathbf{1}}{\mathrm{p_0}}}$$

$$\leq \boldsymbol{c}\left(\sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}}\|\varphi_j\|^{\mathrm{p_0}}_{\boldsymbol{L_\omega^{pq}}}\right)^{\mathbf{1}/\mathrm{p_0}}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. ■

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında Bernstein teoremi şöyle ifade edilir:

3.1.9 Lemma $1 < p, q < \infty$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. Eğer $T_n \in \tau_n$ ve $\alpha > 0$ ise,

$$\left\|T_n^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq cn^\alpha \|T_n\|_{pq,\omega}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde sadece p, q ve α ya bağlı bir $c > 0$ sabiti vardır.

İspat $1 < p, q < \infty$ ve $\omega \in A_p(T)$ için

$$\|S_n(f)\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega}$$

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega}$$

eşitsizlikleri [29, Bölüm 6] da ispatlanmıştır. Bu eşitsizlikleri kullanıp [36] daki ispat yöntemini takip ederek istenen eşitsizlik elde edilir. ■

3.1.10 Lemma $f \in \mathcal{W}_{pq,\omega}^\alpha(T), \alpha \in \mathbb{R}_0^+ := [0,\infty], 1 < p, q < \infty$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. $T_n \in \tau_n$, f fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom olsun. Bu durumda

$$\left\|f^{(\alpha)} - {T_n}^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{L_\omega^{pq}}, \quad n = 0,1,2,...$$

olur. Burada $c > 0$ sabiti f ve n den bağımsızdır.

İspat

$$W_n(x,f) := \frac{1}{n+1}\sum_{v=n}^{2n} S_v(x,f), \quad n = 0,1,2,...$$

$$W_n\left(.,f^{(\alpha)}\right) := W_n^{(\alpha)}(.,f)$$

olduğundan

$$\left\|f^{(\alpha)}(.) - {T_n}^{(\alpha)}(.,f)\right\|_{pq,\omega} \leq \left\|f^{(\alpha)}(.) - W_n\left(.,f^{(\alpha)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$+\left\|T_n{}^{(\alpha)}(.,W_n(f))-T_n{}^{(\alpha)}(.,f)\right\|_{pq,\omega}+\left\|W_n^{(\alpha)}(.,f)-T_n{}^{(\alpha)}(.,W_n(f))\right\|_{pq,\omega}$$

olur ve
$I:=I_1+I_2+I_3$
yazılabilir.

$T_n(x,f)$, ağırlıklı Lorentz uzaylarında f fonksiyonuna derecesi n yi geçmeyen en iyi yaklaşan polinom olsun. Bu uzaylarda W_n in sınırlılığını kullanarak

$$I_1\le\left\|f^{(\alpha)}(.)-T_n\left(.,f^{(\alpha)}\right)\right\|_{pq,\omega}+\left\|T_n\left(.,f^{(\alpha)}\right)-W_n\left(.,f^{(\alpha)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\le cE_n(f^{(\alpha)})_{L^{p,q}_\omega}+\left\|W_n^{(\alpha)}\left(.,T_n(f^{(\alpha)})-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega}\le cE_n(f^{(\alpha)})_{L^{p,q}_\omega(\boldsymbol{T})}$$

elde edilir ve 3.1.7 Lemma'dan

$$I_2\le cn^\alpha\|T_n(.,W_n(f))-T_n(.,f)\|_{pq,\omega}$$

ve

$$I_3\le\ c(2n)^\alpha\left\|W_n\left(.,f^{(\alpha)}\right)-T_n(.,W_n(f)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\le\ c(2n)^\alpha E_n(W_n(f))_{L^{pq}_\omega}$$

olur.

$$\|T_n(.,W_n(f))-T_n(.,f)\|_{pq,\omega}$$

$$\le\|T_n(.,W_n(f))-W_n(.,f)\|_{pq,\omega}+\|W_n(.,f)-f(.)\|_{pq,\omega}+\|f(.)-T_n(.,f)\|_{pq,\omega}$$

$$\le\ cE_n(W_n(f))_{L^{pq}_\omega}+cE_n(f)_{L^{p,q}_\omega(\boldsymbol{T})}+cE_n(f)_{L^{p,q}_\omega}$$

ve

$$E_n((W_n(f))_{L^{pq}_\omega}\le cE_n(f^{(\alpha)})_{L^{p,q}_\omega}$$

eşitsizliğini göz önüne alarak

$$\left\|f^{(\alpha)}(.)-T_n{}^{(\alpha)}(.,f)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\le cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{L^{p,q}_\omega}+cn^\alpha\ E_n(W_n(f))_{L^{pq}_\omega}+cn^\alpha E_n(f)_{L^{p,q}_\omega(\boldsymbol{T})}+\ c(2n)^\alpha E_n(W_n(f))_{L^{pq}_\omega}$$

$$\le cE_n\left(f^{(\alpha)}\right)_{L^{p,q}_\omega}+cn^\alpha\ E_n(f)_{L^{pq}_\omega}$$

elde edilir.

$$E_n(f)_{L^{pq}_\omega} \le \frac{c}{(n+1)^\alpha} E_n(f)_{L^{pq}_\omega}$$

olduğundan ve [3] dan

$$\left\|f^{(\alpha)} - T_n{}^{(\alpha)}\right\|_{L^{pq}_\omega} \le cE_n(f^{(\alpha)})_{L^{pq}_\omega},$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

■

3.2 Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Trigonometrik Yaklaşım Teoremleri

3.2.1 Teorem $1 < p, q < \infty,\ \omega \in A_p(T),\ f \in \mathcal{W}^{(\alpha)}_{pq,\omega}(T)$ ve $\alpha \ge 0$ olsun. Bu durumda her m doğal sayısı için

$$D\big(f^{(\alpha)}, \mu, h, pq\big) \le \left(\sum_{r=0}^{m} E^{\gamma}{}_{2^{r-1}}\big(f^{(\alpha)}\big)_{pq,\omega} . \delta^{\gamma}{}_{2^r,h}\right)^{1/\gamma} + E_{2^{m+1}}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

olur. Burada

$$\gamma \coloneqq \min(2, q)$$

$$\delta_{2^r,h} \coloneqq \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1} \left|\hat{\mu}(lh) - \hat{\mu}\big((l+1)h\big)\right| + |\hat{\mu}(2^r h)|,$$

$$\hat{\mu}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinux}{ux} d\mu(u), \quad 0 < h \le \pi.$$

İspat $h \le 2^{-m-1}$, $f \in \mathcal{W}^{(\alpha)}_{pq,\omega}(T)$ ve

$$S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)} := \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r\big(f^{(\alpha)}\big)e^{irx}$$

$f^{(\alpha)} \in L^{p,q}_\omega(T)$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. $D\big(f^{(\alpha)}, \mu, h, pq\big)$ ifadesinin tanımı ve normun özelliğinden

$$D\big(f^{(\alpha)}, \mu, h, pq\big) = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x, u) d\mu(u) \right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) - (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu(u) \right\|_{pq,\omega}$$

$$+ \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu(u) \right\|_{pq,\omega}$$

yazılabilir. 3.1.10 Lemma, 3.1.4 Lemma ve σ_h operatörünün sınırlılığı kullanılarak

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) d\mu(u) - (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) \right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left\| (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) - \left(\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)}\right)(x,u) \right\|_{pq,\omega} d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\| \left(\sigma_h\left(f^{(\alpha)} - S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)}\right)\right)(x,u) \right\|_{pq,\omega} d\mu(u)$$

$$\leq c \int_{-\infty}^{\infty} \left\| f^{(\alpha)} - S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)} \right\|_{pq,\omega} d\mu(u)$$

$$\leq c E_{2^{m+1}}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)}(x + \mathrm{t}u) dt) \right) d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r\left(f^{(\alpha)}\right) e^{ir(x+\mathrm{tu})}\, dt \right) d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2h} \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r\left(f^{(\alpha)}\right) e^{ir\mathrm{x}} \int_{-h}^{h} e^{ir\mathrm{tu}} dt \right) d\mu(u)$$

$$= \sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r\left(f^{(\alpha)}, x\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{irhu} - e^{-irhu}}{2irhu}\, d\mu(u)$$

$= \sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(f^{(\alpha)}, x)\hat{\mu}(rh)$ (*)

yazılabilir. Böylece

$$D\left(f^{(\alpha)}, \mu, h, pq\right) \leq \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(x)\hat{\mu}(rh) \right\|_{pq,\omega} + cE_{2^{m+1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}.$$

bulunur. 3.1.3 Lemma 3.1.7 Lemma ve 3.1.8 Lemma kullanılarak

$$\left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(x)\hat{\mu}(rh) \right\|_{pq,\omega} \leq c \left\| \left(\sum_{r=0}^{m} \left| \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}} A_l(x)\hat{\mu}(lh) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{pq,\omega}$$

$$:= \ c \left\| \left(\sum_{r=0}^{m} \Delta_{r,\mu}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{pq,\omega} \leq c \sum_{r=0}^{m} \left(\left\| \Delta_{\boldsymbol{r,\mu}} \right\|^{\gamma} \right)_{pq,\omega}^{1/\gamma}$$

elde edilir. $\Delta_{\boldsymbol{r,\mu}}$ ifadesine Abel dönüşümünü uygularsak

$$\Delta_{\boldsymbol{r,\mu}} = \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}} \left[S_l f^{(\alpha)}(x) - S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x)\right](\hat{\mu}(lh) - \hat{\mu}((l+1)h)$$
$$+ \left[S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x) - S_{2^r} f^{(\alpha)}(x)\right]\hat{\mu}(2^r h).$$

olur ve 3.1.10 Lemma'dan

$$\left\|\Delta_{\boldsymbol{r,\mu}}\right\|_{\boldsymbol{pq,\omega}} = \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}-1} \left\|S_l f^{(\alpha)}(x) - S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x)\right\|_{pq,\omega}(\hat{\mu}(lh) - \hat{\mu}((l+1)h)$$
$$+ \left\|S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x) - S_{2^r} f^{(\alpha)}(x)\right\|_{pq,\omega}\hat{\mu}(2^r h).$$

$$\leq E_{2^{r-1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega} . \delta_{2^r,h}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Bu bizi

$$\left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}-1} A_r(x)\hat{\mu}(rh) \right\|_{pq,\omega} \leq c \left(\sum_{r=0}^{m} E^{\gamma}{}_{2^{r-1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega} . \delta^{\gamma}{}_{2^r,h} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

sonucuna ulaştırır ve bu ispatı tamamlar. ■

3.2.2 Teorem : $1 < p,q < \infty$, $\omega \in A_p(T)$, $f \in \mathcal{W}^{\alpha}_{pq,\omega}(T)$ olsun. $F(x)$ fonksiyonu, c_1, c_2 sabitleri ile

$$\|F(x)\| \leq c_1 \ , \ \sum_{l=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} \left|F(kh) - F\big((k+1)h\big)\right| \leq c_2$$

koşullarını sağlasın. Eğer μ_1 ve μ_2 fonksiyonları aşağıdaki koşulu sağlıyorsa

$$\hat{\mu}_1(x) = \hat{\mu}_2(x)F(x), \qquad |x| < 1$$

bu durumda

$$D\big(f^{(\alpha)}, \mu_1, h, pq\big) \leq D\big(f^{(\alpha)}, \mu_2, h, pq\big) + E_{2^{m+1}}\big(f^{(\alpha)}\big)_{pq,\omega}$$

olur.

İspat $f \in \mathcal{W}^{(\alpha)}_{pq,\omega}(\boldsymbol{T})$ için 3.2.1 Teorem'in ispatındaki gibi

$$D\big(f^{(\alpha)}, \mu_1, h, pq\big) \leq \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_1(u) \right\|_{pq,\omega} + cE_{2^{m+1}}\big(f^{(\alpha)}\big)_{pq,\omega}$$

yazabiliriz. (*) ve 3.1.2 Lemma'dan

$$\left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_1(u) \right\|_{pq,\omega} = \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)}) e^{irx} \hat{\mu}_1(rh) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)}) e^{irx} \hat{\mu}_2(rh) F(rh) \right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq c \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)}) e^{irx} \hat{\mu}_2(rh) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= \boldsymbol{c} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_2(u) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= \boldsymbol{c} \left\| S_{2^{m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_2(u) \right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq \boldsymbol{c}\left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u)d\mu_2(u) \right\|_{pq,\omega}$$

olur ve ispat tamamlanır.■

4. AĞIRLIKLI ORLİCZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIM

4.1 Yardımcı Teoremler

4.1.1 Lemma φ iki değişkenli ölçülebilir bir fonksiyon ve $\varphi(.,u) \in L_{M,\omega}(T)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left\| \int_T \varphi(.,u)du \right\|_{M,\omega} \leq \int_T \|\varphi(.,u)\|_{M,\omega} du.$$

İspat Fubini Teoremi ve Hölder eşitsizliğinden

$$\left\| \int_T \varphi(.,u)du \right\|_{M,\omega} \leq \sup_g \left\{ \int_T \left(\int_T |\varphi(x,u)|du \right) |g(x)|\omega(x)dx : \|g\|_{(\Psi_M),\omega} \leq 1 \right\}$$

$$= \sup_g \left\{ \int_T \left(\int_T |\varphi(x,u)||g(x)|\omega(x)dx \right) du : \|g\|_{(\Psi_M),\omega} \leq 1 \right\}$$

$$= \sup_g \left\{ \int_T \|\varphi(.,u)\|_{M,\omega} \|g\|_{(\Psi_M),\omega} du : \|g\|_{(\Psi_M),\omega} \leq 1 \right\}$$

$$\leq \int_T \|\varphi(.,u)du\|_{M,\omega} du.$$

■

4.1.2 Lemma (Multiplier Teoremi) ([15]) (λ_n) reel sayıların bir dizisi ve $A > 0$ olmak üzere

$$|\lambda_l| \leq A, \qquad \sum_{\vartheta=2^{l-1}}^{2^l-1} |\lambda_\vartheta - \lambda_{\vartheta-1}| \leq A$$

olsun. $M \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(T)$ ise öyle bir $h \in L_{M,\omega}(T)$ fonksiyonu vardır ki bu fonksiyonun Fourier serisi

$$\sum_{\vartheta=0}^{\infty} \lambda_\vartheta (a_\vartheta(f) \cos \vartheta x + b_\vartheta(f) \sin \vartheta x)$$

biçimindedir ve $\|h\|_{M,\omega} \leq C\|f\|_{M,\omega}$ olur, burada C, f den bağımsız bir sabittir.

4.1.3 Lemma (Littlewood-Paley teoremi) ([15]**)** $M \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$, $f \in L_{M,\omega}(T)$ olsun. Bu durumda

$$c_1\|f\|_{M,\omega} \leq \left\| \left(\sum_{\mu=\vartheta}^{\infty} |\Delta_\mu|^2 \right)^{1/2} \right\|_{M,\omega} \leq c_2\|f\|_{M,\omega}$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde f den bağımsız c_1 ve c_2 katsayıları vardır. Burada

$$\Delta_\mu := \Delta_\mu(x, f) := \sum_{\vartheta=2^{\mu-1}}^{2^\mu-1} (a_\vartheta(f)\cos\vartheta x + b_\vartheta(f)\sin\vartheta x)$$

dir.

4.1.4 Lemma ([15]**)** $M \in \Phi_p$, $p > 1$, $\omega \in A_p$ ve $f \in L_{M,\omega}(T)$ ise

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^{m} |\varphi_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_{M,\omega} \leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \|\varphi_j\|_{M,\omega}^{\gamma} \right)^{1/\gamma}$$

eşitsizliğini sağlayan m ve φ_j den bağımsız bir c sabiti vardır. Burada $\gamma := \min(2, p + \varepsilon)$ ve ε küçük bir pozitif sayıdır.

4.1.5 Lemma $L_M(T) \subset L^1(T)$ dir.

İspat $f \in L_M(T)$ aldığımızda

$$\int_0^{2\pi} M(k|f(x)|dx < \infty$$

olur. M konveks bir fonksiyon olduğundan $ax + b \leq M(x)$ olacak şekilde $a, b \in R$ vardır [37]. Buradan

$$a|f(x)| + b \leq Mk|f(x)|$$

olur ve

$$\int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)\, dx \leq \int_0^{2\pi} M(k|f(x)|)\, dx$$

yazılabilir. M fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $M|f(x)| = Mf(x)$ olur. Öyleyse $f \in L_M(T)$ kullanılarak

$$\int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)\, dx \le \int_0^{2\pi} M(k|f(x)|)\, dx < \infty$$

ve

$$\int_0^{2\pi} (a|f(x)| + b)\, dx < \infty$$

elde edilir. Buradan da

$$\left(a\int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx + b\int_0^{2\pi} dx \right) < \infty \implies \int_0^{2\pi} |f(x)|\, dx < \infty \implies f \in L_1$$

olur.

■

4.2 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Trigonometrik Yaklaşım Teoremleri

4.2.1 Teorem $M \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p,\ f \in \mathcal{W}_{M,\omega}^{(\alpha)}(T)\ \ \alpha \ge 0$ olsun. Bu durumda her m doğal sayısı için

$$D\big(f^{(\alpha)}, \mu, h, M\big) \le \left(\sum_{r=0}^{m} E^{\gamma}{}_{2^r}\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega} . \delta^{\gamma}{}_{2^r,h} \right)^{1/\gamma} + E_{2^{m+1}}(f^{(\alpha)})_{M,\omega}$$

olur. Burada $\gamma := \min(2, p + \varepsilon)$, ε küçük bir pozitif sayı ve

$$\delta_{2^r,h} := \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}} \big|\hat{\mu}(lh) - \hat{\mu}\big((l+1)h\big)\big| + |\hat{\mu}(2^r h)|,$$

$$\hat{\mu}(x) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{sinux}{ux} d\mu(u), \quad 0 < h \le \pi$$

dir.

İspat $h \le 2^{-m-1}$, $f \in \mathcal{W}_{M,\omega}^{(\alpha)}(\boldsymbol{T})$ ve

$$S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)} := \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx}$$

$f^{(\alpha)} \in L_{M,\omega}(\boldsymbol{T})$ fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Normun özelliğinden

$$D\left(f^{(\alpha)},\mu,h,M\right)=\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u)d\mu(u)\right\|_{M,\omega}$$

$$\leq\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left[(\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u)-\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)}\right)(x,u)\right]d\mu\,(u)\right\|_{M,\omega}$$

$$+\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)})(x,u)d\mu(u)\right\|_{M,\omega}$$

elde edilir. 4.1.1 Lemma, [15, teorem 1.5] ve σ_h operatörünün sınırlılığı kullanılarak

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}\left[(\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u)-\left(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)}\right)(x,u)\right]d\mu\,(u)\right\|_{M,\omega}$$

$$\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\left\|(\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u)-(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)})(x,u)\right\|_{M,\omega}d\mu(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\|\left(\sigma_h\left(f^{(\alpha)}-\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)}\right)(x,u)\right)\right\|_{M,\omega}d\mu(u)$$

$$\leq c\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f^{(\alpha)}-S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega}d\mu(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f^{(\alpha)}-S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega}d\mu(u)$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left\|f^{(\alpha)}-S_{2^{m+1}}^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega}d\mu(u)$$

$$\leq cE_{2^{m+1}}(f^{(\alpha)})_{M,\omega}$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilmiş olur.

$$D\left(f^{(\alpha)},\mu,h,M\right)\leq\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)})(x,u)d\mu(u)\right\|_{M,\omega}+cE_{2^{m+1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}.$$

Diğer yandan

$$\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u)d\mu(u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)}(x+\mathrm{tu})dt\right)d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r\big(f^{(\alpha)}\big)e^{ir(x+\mathrm{tu})}\,dt\right)d\mu(u)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2h}\sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r\big(f^{(\alpha)}\big)e^{ir\mathrm{x}}\int_{-h}^{h} e^{ir\mathrm{tu}}dt\right)d\mu(u)$$

$$= \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)})e^{ir\mathrm{x}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ir\mathrm{hu}}-e^{-ir\mathrm{hu}}}{2irhu}\,d\mu(u)$$

$$= \sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(f^{(\alpha)},x)\hat{\mu}(rh)$$

olduğundan

$$D\big(f^{(\alpha)},\mu,h,M\big) \preccurlyeq \left\|\sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(f^{(\alpha)},x)\hat{\mu}(rh)\right\|_{M,\omega} + E_{2^{m+1}}\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega}.$$

elde edilir. Lemma 4.1.3 ve Lemma 4.1.4’ten

$$\left\|\sum_{r=1}^{2^{m+1}} A_r(f^{(\alpha)},x)\hat{\mu}(rh)\right\|_{M,\omega} \preccurlyeq \left\|\left(\sum_{r=0}^{m}\left|\sum_{l=2^r}^{2^{r+1}} A_l(x)\hat{\mu}(lh)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{M,\omega}$$

$$:= c\left\|\left(\sum_{r=0}^{m}\Delta_{r,\mu}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{M,\omega} \preccurlyeq c\left\|\sum_{r=0}^{m}\big(\Delta_{r,\mu}^2\big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{M,\omega}$$

$$\left\|\left(\sum_{r=0}^{m}\Delta_{r,\mu}^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{M,\omega} \le c\sum_{r=0}^{m}\big(\|\Delta_{r,\mu}^{\gamma}\|\big)_{M,\omega}^{1/\gamma}.$$

olur. $\boldsymbol{\Delta_{r,\mu}}$ ifadesine Abel dönüşümünü uygularsak

$$\Delta_{\boldsymbol{r,\mu}} = \sum_{l=2^r}^{2^{r+1}}\big[S_l f^{(\alpha)}(x) - S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x)\big](\hat{\mu}(lh) - \hat{\mu}((l+1)h)$$

$$+ \big[S_{2^{r+1}} f^{(\alpha)}(x) - S_{2^r} f^{(\alpha)}(x)\big]\hat{\mu}(2^r h).$$

olur ve

$$\|\Delta_{r,\mu}\|_{M,\omega}=\sum_{l=2^r}^{2^{r+1}}\left\|S_l f^{(\alpha)}(x)-S_{2^{r+1}}f^{(\alpha)}(x)\right\|_{M,\omega}(\hat{\mu}(lh)-\hat{\mu}((l+1)h)$$
$$+\left\|S_{2^{r+1}}f^{(\alpha)}(x)-S_{2^r}f^{(\alpha)}(x)\right\|_{M,\omega}\hat{\mu}(2^r h).$$

$$\leq E^{\gamma}{}_{2^r}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}.\delta^{\gamma}{}_{2^r,h}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\|\sum_{r=1}^{2^{m+1}-1}A_r(f^{(\alpha)})e^{irx}\hat{\mu}(rh)\right\|_{M,\omega}\leq c\left(\sum_{r=0}^{m}E^{\gamma}{}_{2^{r-1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}.\delta^{\gamma}{}_{2^r,h}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

olur ve istenilen değerlendirme sağlanmış olur:

$$D\left(f^{(\alpha)},\mu,h,M\right)\leq c\left(\sum_{r=0}^{m}E^{\gamma}{}_{2^{r-1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}.\delta^{\gamma}{}_{2^r,h}\right)^{\frac{1}{\gamma}}+\ \mathrm{c}E_{2^{m+1}}(f^{(\alpha)})_{M,\omega}.$$

■

4.2.2 Teorem $M\in\Phi_p,\ p>1,\omega\in A_p,\ f\in\mathcal{W}^{(\alpha)}_{M,\omega}(\boldsymbol{T})$ olsun. $F(x)$ fonksiyonunun, c_1 ve c_2 katsayıları ile aşağıdaki şartları sağladığını kabul edelim.

$\|F(x)\|\leq c_1\ ,\sum_{l=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left|F(kh)-F\left((k+1)h\right)\right|\leq c_2.$

Eğer μ_1 $ve\ \mu_2$ fonksiyonları

$\mu_1\ (x)=\mu_2(x)F(x)\,,\qquad |x|<1$

koşulunu sağlıyorsa
$D\left(f^{(\alpha)},\mu_1,h,M\right)\leq D\left(f^{(\alpha)},\mu_2,h,M\right)+E_{2^{m+1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}$

olur.

İspat $f\in\mathcal{W}^{(\alpha)}_{M,\omega}(T)$ için normun özelliğinden, 4.2.1 Teoremin ispatındaki gibi

$$D\left(f^{(\alpha)},\mu_1,h,M\right)\leq\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)})(x,u)d\mu(u)\right\|_{M,\omega}+E_{2^{m+1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{M,\omega}$$

elde edilir. İlgili yardımcı sonuçlar kullanılarak,

$$\left\|\int_{-\infty}^{\infty}(\sigma_h S_{2^{m+1}}f^{(\alpha)})(x,u)\mathrm{d}\mu_1(u)\right\|_{M,\omega}=\left\|\sum_{r=1}^{2^{m+1}}c_r(f^{(\alpha)})e^{irx}\mu_1(rh)\right\|_{M,\omega}$$

$$= \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)}) e^{irx} \mu_2(rh) F(rh) \right\|_{M,\omega}$$

$$\leq c \left\| \sum_{r=1}^{2^{m+1}} c_r(f^{(\alpha)}) e^{irx} \mu_2(rh) \right\|_{M,\omega} = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h S_{2^{m+1}} f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_2(u) \right\|_{M,\omega}$$

$$= \left\| S_{2^{m+1}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_2(u) \right\|_{M,\omega} \leq \boldsymbol{c} \left\| \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_h f^{(\alpha)})(x,u) d\mu_2(u) \right\|_{M,\omega}$$

olur ve böylece ispat tamamlanır.■

5. FOURİER SERİLERİNİN BAZI LİNEER TOPLAM METOTLARI İLE YAKLAŞIM

5.1 Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Yaklaşım

$\left\{\lambda_\nu^{(n)}\right\}, n = 0,1,\dots,\ \ k = 0,1,\dots n$ için keyfi sonsuz üçgen matris olsun. $\left\{\lambda_\nu^{(n)}\right\}$ yardımıyla $f \in L^1(T)$ fonksiyonunu bir

$$R_n(f,\lambda) := \frac{a_0}{2}\lambda_0^{(n)} + \sum_{\nu=1}^{n} \lambda_\nu^{(n)} A_\nu(f,x)$$

trigonometrik polinomu ile eşleştiriyoruz, burada $A_\nu(f,x) = a_\nu(f)cos\nu x + b_\nu(f)sin\nu x$ ve $a_\nu(f),\ b_\nu(f),\ \nu = 0,1,2,\dots\ f$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. Böylece $\left\{\lambda_\nu^{(n)}\right\}$, $R_n(f,\lambda)$ polinomlarının oluşturulması için bir metot belirler. $L^1(T)$ de tanımlanan $R_n(f,\lambda)$ operatörü özel bir polinom dizisidir. $R_n(f,\lambda)$ operatörünün lineer olduğu açıktır. Bu yüzden bu metot, Fourier serisinin lineer toplam metodu olarak adlandırılır [31].

Bu tez çalışmasında, ağırlıklı Lorentz ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında bu lineer metotlar ile fonksiyonların türevlerine yaklaşım problemlerini inceledik. $R_n\left(f^{(\alpha)},\lambda\right) - f^{(\alpha)}$ farkının sıfıra gitme hızını kesirli düzgünlük modülü ve en iyi yaklaşım sayısı yardımıyla uzayların normunda değerlendirdik.

5.1.1 Tanım : $1 < p,q < \infty$, $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ ve $\omega \in A_p(T)$ için σ_t operatörü

$$(\sigma_t f) := \frac{1}{2t}\int_{-t}^{t} f(x+u)du, \quad 0 < t < \pi, \quad x \in T.$$

biçiminde tanımlanır ve $L_\omega^{p,q}(T)$ de sınırlıdır [2]. $x,t \in T,\ r > 0$, $f \in L_\omega^{p,q}(\boldsymbol{T})$ için $\sigma_t^r f(x)$aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\sigma_t^r f(x) := (I - \sigma_t)^r f(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k [C_k^r] \frac{1}{(2t)^k}\int_{-t}^{t}\dots\int_{-t}^{t} f(x+u_1+\dots+u_k)du_1\dots du_k,$$

Burada $[C_k^r] := \frac{r(r-1)\dots(r-k+1)}{k!}$, $k > 1$, $[C_1^r] := r$ ve $[C_0^r] := 1$ binom katsayılarıdır ve

$$\sum_{k=0}^{\infty} |[C_k^r]| < \infty$$

olur [30, Sayfa 14].

Böylece eğer $\omega \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ise aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir.

$$\|\sigma_t^r f(x)\|_{pq,\omega} \leq c\|f\|_{pq,\omega} < \infty \tag{5.1}$$

5.1.2 Tanım $\omega \in A_p(T),\ 1 < p, q < \infty$ ve $r > 0$ olsun. $f \in L_\omega^{p,q}(T)$ fonksiyonunun kesirli düzgünlük modülü aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\Omega_{pq,\omega}^r(f, \delta) := \sup_{0<h_i,t\leq\delta} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} (\mathrm{I} - \sigma_{h_i})(\mathrm{I} - \sigma_t)^{r-[r]} f \right\|_{pq,\omega}.$$

Burada $[r]$, r sayısının tam kısmını gösterir.

σ_t operatörü $L_\omega^{p,q}(T)$ de $1 < p, q < \infty$ ve $\omega \in A_p$ için sınırlı olduğundan, (5.1) gereğince

$$\Omega_{pq,\omega}^r(f, \delta) \leq c\|f\|_{pq,\omega}.$$

eşitsizliği geçerlidir.

5.1.3 Teorem $1 < p, q < \infty,\ \omega \in A_p(T),\ \alpha > 0$ ve $f \in \mathcal{W}_{pq,\omega}^\alpha(T)$ olsun. Bu durumda keyfi bir $\left\{\lambda_v^{(n)}\right\}$ $(\lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_v^{(n)} = 0, v > n,\ n = 0,1,2, \ldots)$ sayı dizisi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)}, \lambda) - f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq \Omega_{pq,\omega}^r(f^{(\alpha)}, \frac{1}{n}).$$

İspat $2^m \leq n \leq 2^{m+1}$, $f \in \mathcal{W}_{pq,\omega}^{(\alpha)}(\boldsymbol{T})$ ve

$$S_n(f^{(\alpha)}, x) := \sum_{v=1}^{n} A_v\big(f^{(\alpha)}, x\big)$$

$f^{(\alpha)} \in L_\omega^{pq}(T)$ fonksiyonunun kısmi toplamlar dizisi olsun. Normun özelliğinden

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)}, \lambda) - f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} = \left\|\sum_{v=0}^{n} \lambda_v^{(n)} A_v\big(f^{(\alpha)}, x\big) - (f^{(\alpha)}, x)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq \left\|\sum_{v=0}^{n} (1 - \lambda_v^{(n)}) A_v\big(f^{(\alpha)}, x\big)\right\|_{pq,\omega} + \left\|\sum_{v=n+1}^{\infty} A_v\big(f^{(\alpha)}, x\big)\right\|_{pq,\omega} =: I_1 + I_2$$

elde edilir. [1, Teorem 1.2], [2, Lemma 3.2], [3, Teorem 1.3] den I_2 normu

$$I_2 = \left\|\sum_{v=n+1}^{\infty} A_v\big(f^{(\alpha)}, x\big)\right\|_{pq,\omega} \preccurlyeq E_n(f^{(\alpha)})_{pq,\omega} \preccurlyeq \Omega_{pq,\omega}^r(f^{(\alpha)}, \frac{1}{n})$$

biçiminde değerlendirilebilir.

Şimdi

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \frac{1-\lambda_v^{(n)}}{\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r} A_v\left(f^{(\alpha)},x\right)\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{pq,\omega}$$

normunu değerlendirelim.

$$\mu_{v,r}^{(n)} := \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{(1-\lambda_v^{(n)})}{\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r}, & v \le n \\ 0 & v > n \end{array} \right\}$$

olsun. $\left\{\mu_{v,r}^{(n)}\right\}$ dizisi için 3.1.2 Lemmanın koşulları sağlanır [38]. 3.1.2 Lemmayı uygulayarak ve [38] de Teorem 1'in ispatını takip ederek

$$I_1 = \left\| \sum_{v=0}^{n} \mu_{v,r}^{(n)} A_v\left(f^{(\alpha)},x\right)\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{pq,\omega} \preccurlyeq \left\| \sum_{v=0}^{n} A_v\left(f^{(\alpha)},x\right)\left(1-\frac{\sin\frac{v}{n}}{\frac{v}{n}}\right)^r \right\|_{pq,\omega}$$

$$\le \left\|\left(I-\sigma_{1/n}\right)^r f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} = \left\| \sum_{v=0}^{n} \left(I-\sigma_{1/n}\right)^{[r]}\left(I-\sigma_{1/n}\right)^{r-[r]} f^{(\alpha)} \right\|_{pq,\omega}$$

$$\preccurlyeq \sup_{0<h_i,t\le\frac{1}{n}} \left\| \prod_{i=1}^{[r]} \left(I-\sigma_{h_i}\right)(I-\sigma_t)^{r-[r]} f^{(\alpha)} \right\|_{pq,\omega} \preccurlyeq \Omega_{pq,\omega}^r\,(f^{(\alpha)},\frac{1}{n})$$

elde edilir ve teorem ispatlanmış olur. ■

5.1.4 Teorem $1<p<\infty, 1<q\le 2$ veya $p>2$ ve $q\ge 2$, $\omega\in A_p(T)$, $f\in \mathcal{W}_{pq,\omega}^{(\alpha)}(T)$ olsun. Keyfi bir $\left\{\lambda_v^{(n)}\right\}$ $(\lambda_0^{(n)}=1,\ \lambda_v^{(n)}=0, v>n, n=0,1,2,\dots)$ sayı dizisi için

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \le \left(\sum_{\mu=0}^{m} E^{\gamma}{}_{2^{\mu-1}}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}.\,\delta^{\gamma}{}_{2^{\mu},n}\right)^{1/\gamma} + E_n(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

olur. Burada

$\gamma := \min(2,q)$

$$\delta_{2^{\mu},n} := \sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1} \left|\lambda_{v+1}^{(n)}-\lambda_v^{(n)}\right| + \left|1-\lambda_{2^{\mu+1}}^{(n)}\right|,$$

$2^m \le n < 2^{m+1}$.

İspat $2^m \le n < 2^{m+1}$ olsun. Önceki teoremin ispatındaki gibi

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)},\lambda) - f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} = \left\|\sum_{v=0}^{n}\lambda_v^{(n)}A_v\big(f^{(\alpha)},x\big) - (f^{(\alpha)},x)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\le \left\|\sum_{v=0}^{n}(1-\lambda_v^{(n)})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega} + \left\|\sum_{v=n+1}^{\infty}A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\preccurlyeq \left\|\sum_{v=1}^{n}(1-\lambda_v^{(n)})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega} + E_n(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

yazılabilir. 3.1.3 Lemmadan

$$\left\|\sum_{v=1}^{n}(1-\lambda_v^{(n)})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega} \le c\left\|\left(\sum_{\mu=0}^{m}\left|\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}(1-\lambda_v^{(n)})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{pq,\omega}$$

elde edilir. Abel dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned}\sigma_{n,\mu}(x) := &\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}(1-\lambda_v^{(n)})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\\ &= \sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\big(S_v(f,x) - S_{2^{\mu}-1}(f,x)\big)\Big(\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\Big)\\ &+ \big(S_{2^{\mu+1}-1}(f,x) - S_{2^{\mu}-1}(f,x)\big)\Big(1-\lambda_{2^{\mu+1}}^{(n)}\Big).\end{aligned}$$

olur. Minkowski eşitsizliğinden ve en iyi yaklaşım dizisinin monotonluğundan

$$\begin{aligned}\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|_{pq,\omega} \le &\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\|S_v(f,x) - S_{2^{\mu}-1}(f,x)\|_{pq,\omega}\left|\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\right|\\ &+ \|S_{2^{\mu+1}-1}(f,x) - S_{2^{\mu}-1}(f,x)\|_{pq,\omega}\left|1-\lambda_{2^{\mu+1}}^{(n)}\right|\end{aligned}$$

$$\le cE_{2^{\mu}-1}(f)_{pq,\omega}\left(\sum_{v=2^{\mu}}^{2^{\mu+1}-1}\left|\lambda_{v+1}^{(n)} - \lambda_v^{(n)}\right| + \left|1-\lambda_{2^{\mu+1}}^{(n)}\right|\right)$$

$$\le cE_{2^{\mu}-1}(f)_{pq,\omega}\delta_{2^{\mu},n}.$$

elde edilir. Diğer yandan [2] de ispatlanan

$$\left\|\left(\sum_{\mu=0}^{m}\left|\sigma_{n,\mu}(x)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{pq,\omega} \le c\left(\sum_{\mu=0}^{m}\left\|\sigma_{n,\mu}(x)\right\|^{\gamma}\right)^{1/\gamma},\ \gamma = \min\,(q,2)$$

eşitsizliği kullanılarak

$$\left\|\sum_{\nu=0}^{n}(1-\lambda_\nu^{(n)})A_\nu(f^{(\alpha)},x)\right\|_{pq,\omega} \leq c\left(\sum_{\mu=0}^{m} E^{\gamma}{}_{2^{\mu-1}}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}.\delta^{\gamma}{}_{2^{\mu},n}\right)^{1/\gamma}.$$

sonucuna ulaşılır. ■

5.1.6 Sonuç $0 \leq \nu \leq n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 1-\frac{\nu}{n+1}$ ve $\nu > n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 0$, $\nu > n, n =$ 0,1,2, ...olsun. Bu durumda ***Fejer*** ortalaması için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq \frac{c}{n+1}\left(\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)^{\gamma-1}E_\mu^{\gamma}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}.$$

5.1.7 Sonuç $0 \leq \nu \leq n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 1-\frac{\nu^k}{(n+1)^k}$ ve $\nu > n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 0,\ n =$ 0,1,2, ...olsun. Bu durumda ***Zygmund*** ortalaması için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\left\|R_n(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq \frac{c}{(n+1)^k}\left(\sum_{\mu=0}^{m}(\mu+1)^{\gamma k-1}E_\mu^{\gamma}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}.$$

$\lambda_\nu(r) = r^\nu$ ($0 \leq r < 1, \nu = 0,1,2,$) için $R_r(f,\lambda)$ toplamını

$$R_r(f,\lambda) := \sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda_\nu(r)A_\nu(f,x)$$

biçiminde tanımlıyoruz.

5.1.8 Teorem $1 < p < \infty, 1 < q \leq 2$ veya $p > 2$ ve $q \geq 2$, $\omega \in A_p(T)$, $f \in \mathcal{W}_{pq,\omega}^{(\alpha)}(T)$ olsun. Bu durumda, Abel-Poisson ortalaması için

$$\left\|R_r(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega} \leq c\left((1-r)\sum_{\mu=0}^{\infty}r^{\mu}(\mu+1)^{\gamma-1}E_\mu^{\gamma}(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat $2^m \leq n = \left[\frac{1}{1-r}\right] < 2^{m+1}$, $f \in L_\omega^{pq}(T)$ ve $\lambda_\nu(r) = r^\nu$, $0 \leq r < 1$, $\nu =$ 0,1,2, ... olsun.

$$\left\|R_r(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega}=\left\|\sum_{v=0}^{\infty}(1-r^{\nu})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\left\|\sum_{v=0}^{2^{m+1}-1}(1-r^{\nu})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}+\left\|\sum_{v=2^{m+1}-1}^{\infty}(1-r^{\nu})A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}=:I_1+I_2$$

yazılabilir.

3.1.2 Lemmanın koşulları $\{1-r^{\nu}\}$ dizisi için sağlandığından, 3.1.2 Lemma, [2, Lemma 3.2] ve [3, Teorem 1.3] kullanılarak

$$I_2\leq c\left\|\sum_{v=2^{m+1}}^{\infty}A_v\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}\leq cE_n(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

elde ederiz. 3.1.3 Lemma'dan ve [2] den

$$I_1\leq\left\|\left(\sum_{v=0}^{m}\left|\sum_{\mu=2^v}^{2^{v+1}-1}(1-r^{\mu})A_\mu\big(f^{(\alpha)},x\big)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq\left(\sum_{v=0}^{m}\left\|\sum_{\mu=2^v}^{2^{v+1}-1}(1-r^{\mu})A_\mu\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}^{\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

elde ederiz. [3, Teorem 1.3] ve Abel dönüşümünü uyguladığımızda

$$\left\|\sum_{\mu=2^v}^{2^{v+1}-1}(1-r^{\mu})A_\mu\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq\sum_{\mu=2^v}^{2^{v+1}-1}\left\|S_\mu\big(f^{(\alpha)},x\big)-S_{2^v-1}\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}|r^{\mu+1}-r^{\mu}|$$

$$+\left\|S_{2^{v+1}-1}\big(f^{(\alpha)},x\big)-S_{2^v-1}\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}\left|1-r^{2^{v+1}}\right|$$

$$\leq cE_{2^v-1}\big(f^{(\alpha)}\big)_{pq,\omega}2^{v+1}(1-r).$$

olur ve $E_n(f)'$in monotonluğundan

$$\left\|\sum_{\mu=2^v}^{2^{v+1}-1}(1-r^{\mu})A_\mu\big(f^{(\alpha)},x\big)\right\|_{pq,\omega}^{\gamma}\leq cE_{2^v-1}^{\gamma}\big(f^{(\alpha)}\big)_{pq,\omega}2^{\gamma(v+1)}(1-r)^{\gamma}$$

$$\leq c(1-r)^{\gamma}\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}E_{2^{\nu}-1}^{\gamma}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$I_1\leq c\left((1-r)^{\gamma}\left\|A_1\left(f^{(\alpha)},x\right)\right\|_{pq,\omega}^{\gamma}(1-r)^{\gamma}\sum_{\mu=2^{\nu-1}}^{2^{\nu}-1}\mu^{\gamma-1}E_{\mu}^{\gamma}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$\leq c\left((1-r)\sum_{\mu=0}^{n}(\mu+1)^{\gamma-1}E_{\mu}^{\gamma}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}$$

olur. Böylece aşağıdaki eşitsizlik elde edilir ve ispat tamamlanır.

$$\left\|R_r(f^{(\alpha)},\lambda)-f^{(\alpha)}\right\|_{pq,\omega}\leq c(1-r)\left(\sum_{\mu=0}^{n}(\mu+1)^{\gamma-1}E_{\mu}^{\gamma}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}+E_n(f^{(\alpha)})_{pq,\omega}$$

$$\leq c(1-r)\left(\sum_{\mu=0}^{n}r^{\mu}(\mu+1)^{\gamma-1}E_{\mu}^{\gamma}\left(f^{(\alpha)}\right)_{pq,\omega}\right)^{1/\gamma}.$$

■

5.2 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Yaklaşım

Aşağıda verilen teoremler, 5.1 bölümünde ağırlıklı Lorentz uzayları için ifade edilen teoremlerin ağırlıklı Orlicz uzayı versiyonlarıdır. İspat yöntemleri benzer olduğundan ispatsız olarak verilmiştir.

5.2.1 Teorem $M\in\Phi_p,\ p>1, \omega\in A_p(T)$, ve $f\in L_{M,\omega}(T)$ olsun. Bir $\alpha\in(0,\infty)$ için

$$\sum_{v=1}^{\infty}v^{\alpha-1}E_v(f)_{M,\omega}<\infty$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda keyfi bir $\left\{\lambda_v^{(n)}\right\}\left(\lambda_0^{(n)}=1,\lambda_v^{(n)}=0,v>n\,,n=0,1,2,...\right)$ sayı dizisi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\left\|R_n\left(f^{(\alpha)},\lambda\right)-f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega}\leq c\Omega_{M,\omega}^{r}(f^{(\alpha)},\frac{1}{n}).$$

5.2.2 Teorem $M\in\Phi_p,\ p>1,\ \omega\in A_p(T)$, ve $f\in L_{M,\omega}(T)$ olsun. Bir $\alpha\in(0,\infty)$ için

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-1} E_\nu(f)_{M,\omega} < \infty$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda keyfi bir $\left\{\lambda_\nu^{(n)}\right\}$ $\left(\lambda_0^{(n)} = 1, \lambda_\nu^{(n)} = 0, \nu > n\ , n = 0,1,2,...\right)$ sayı dizisi için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\| R_n\big(f^{(\alpha)}, \lambda\big) - f^{(\alpha)}\|_{M,\omega} \leq c\left(E_{2^\mu-1}^\gamma\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega} \delta_{2^\mu,n}^\gamma\right)^{\frac{1}{\gamma}} + E_n\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega}$$

Burada, bir $\varepsilon > 0$ için $\gamma := (2, p+\varepsilon)$, $2^m \leq n < 2^{m+1}$ ve

$$\delta_{2^\mu,n}^\gamma := \sum_{\nu=2^\mu}^{2^{\mu+1}-1} \left|\lambda_{\nu+1}^{(n)} - \lambda_\nu^{(n)}\right| + \left|1 - \lambda_{2^{\mu+1}}^{(n)}\right|$$

dir.

5.2.3 Sonuç $0 \leq \nu \leq n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 1 - \frac{\nu}{n+1}$ ve $\nu > n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 0\ , \nu > n, n = 0,1,2,...$olsun. Bu durumda ***Fejer*** ortalaması için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\left\|R_n\big(f^{(\alpha)}, \lambda\big) - f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega} \preccurlyeq \frac{1}{n+1}\left(\sum_{\mu=0}^m (\mu+1)^{\gamma-1} E_\mu^\gamma\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega}\right)^{1/\gamma}.$$

5.2.4 Sonuç $0 \leq \nu \leq n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 1 - \frac{\nu^k}{(n+1)^k}$ ve $\nu > n$ için $\lambda_\nu^{(n)} = 0, \nu > n,\ n = 0,1,2,...$olsun. Bu durumda ***Zygmund*** ortalaması için aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$\left\|R_n\big(f^{(\alpha)}, \lambda\big) - f^{(\alpha)}\right\|_{M,\omega} \leq \frac{1}{(n+1)^k}\left(\sum_{\mu=0}^m (\mu+1)^{\gamma k-1} E^\gamma{}_\mu\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega}\right)^{1/\gamma}.$$

$\lambda_\nu(r) = r^\nu$ ($0 \leq r < 1, \nu = 0,1,2,$) için $R_r(f,\lambda)$ toplamı

$$R_r(f,\lambda) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda_\nu(r) A_\nu(f,x)$$

biçiminde tanımlanır.

5.2.5 Teorem $M \in \Phi_p,\ p > 1,\ \omega \in A_p(T)$, ve $f \in L_{M,\omega}(\boldsymbol{T})$ olsun. Bir $\alpha \in (0,\infty)$ için

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^{\alpha-1} E_\nu(f)_{M,\omega} < \infty$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda Abel-poission ortalaması için

$$\| R_r\big(f^{(\alpha)},\lambda\big) - f^{(\alpha)}\|_{M,\omega} \preccurlyeq \left((1-r)\sum_{v=0}^{\infty} r^{v}(v+1)^{\gamma-1} E_{2^{v}-1}^{\gamma}\big(f^{(\alpha)}\big)_{M,\omega}\right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

olur. Burada bir $\varepsilon > 0$ için $\gamma := (2, p+\varepsilon)$ dir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında ve konveks olması gerekmeyen Young fonksiyonları ile üretilen ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik yaklaşım teorisinin bazı önemli problemlerini incelediğimiz bu tez çalışmasında elde edilen orijinal sonuçlar 3. 4. ve 5. bölümde verilmiştir.

Bu uzaylardaki fonksiyonların kesirli türevleri için konvolüsyon tipli dönüşümler tanımlanmış ve bu dönüşümler en iyi yaklaşım sayıları yardımıyla değerlendirilmiştir. Ayrıca kesirli türev fonksiyonlarının Fourier serileri yardımıyla elde edilen trigonometrik polinomların bu fonksiyonlara yaklaşım hatası kesirli düzgünlük modülü ve en iyi yaklaşım sayıları ile değerlendirilmiştir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar, trigonometrik yaklaşımın düz teoremi, birlikte yaklaşım teoremi, çarpanlar teoremi ve Littlewood-Paley teoremi ispatlandıktan sonra farklı fonksiyon uzaylarında da elde edilebilir.

7. KAYNAKLAR

[1] R. Akgun and Y.E. Yıldırır, “Improved direct and converse theorems in weight Lorentz spaces ”, *Bull. Belg. Math. Soc. Stevin* 23, 247-262, (2016).

[2] V. Kokoilashvili and Y.E Yıldırır, “ On the approximation by trigonometric polynomials in weight Lorentz spaces”, *J. Funct. Space. Appl.*, 8, 67-86, (2010).

[3] Y.E Yıldırır and D. M. Israfilov, “Approximation theorems in weighted Lorentz spaces”, *Carpathian J. Math*. 26 1, 108-119, (2010).

[4] A.R. K. Ramazanov,“On Approximation by polynomials and functions in Orlicz spaces”, *Anal. Math*., 10, 117-132, (1984).

[5] K. Runovski, “On Jackson type inequality in Orlicz classes”, *Rev. Mat. Complut*. 14, 395-404, (2001).

[6] G. Wu, “On approximation by polynomials in Orlicz Spaces”, *Appox. Theory Appl.* 7, no. , 97-110, (1991).

[7] M. A. Krasnosel’skii and YA. B. Rutickii , “Convex Functions ve Orlicz Spaces”, *Noordhoff,* (1961).

[8] W. Matuszewska and W. Orlicz, “On certain properties of φ-functions”, Bull Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. *Math. Astronom. Phys*. 8, 439-443, (1960).

[9] V.G. Ponomarenko and M.F. Timan, “The properties of convolution type transforms in the Orlicz spaces, Theory of approximation of functions”, *Proceedings of the Institute Math. And Mech.* 3, Donetsk ,(1988).

[10] Y.E Yıldırır and D. M. Israfilov, “The properties of convolution type transforms in weighted Orlicz spaces”, *Glasnik Matematicki*,Vol. 65, 461-474, (2010).

[11] M. Khabazi, “The mean convergence of trigonometric Fourier series in Weighted Orlicz classes”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst*., 129, 65-75, (2002).

[12] Akgun, R. and Israfilov, D.M., “Approximation of weighted of Orlicz Spaces”, *Math. Slovace*, 61, No. 4, 601-618, (2011).

[13] R. Akgun, and D. M. Israfilov, “Approximation and moduli of fractional order in Smirnov-Orlicz classes”, *Glasnik Matematicki,* 43, 121-136, (2008).

[14] Y.M. Chen, “On two-functional spaces”, *Studia Math*.24 ,61-88, (1964).

[15] R. Akgun, “Some in equalities of trigonometric approximation in weighted Orlicz spaces”, *Math. Slovaca* 66, No. 1, 217-234., (2016).

[16] Y.E. Yıldırır and A. Dogu "Convolution and approximation in weighted Lorentz spaces", *J. Math. Anal*. 7, no. 5, 54-60, (2016).

[17] A.Dogu, A. H. Avşar and Y.E. Yıldırır,"Some inequalities about convolution and trigonometric approximation in weighted Orlicz spaces", *Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Ac. Sci. Azerbaijan*, 44, no. 1, 107-115, (2018).

[18] Y.E. Yıldırır and A. Dogu, "Approximation in weighted Lorentz spaces", *J. Math. Sci. Adv.Appl.* 54, 1-9, (2018).

[19] V.G. Gavriljuk,"Linear summation methods for the Fourier series and the best approximation", *Ukr. Mat.Zh.*, 15 No.4, 412-418, (1963).

[20] S.Z. Jafarov, "Linear methods of summing Fourier series and approximation in weighted Orlicz spaces", *Turkish J. Math*. 42, No 6, 2916-2925, (2018).

[21] S.Z. Jafarov, "Approximation by linear means of Fourier series and in weighted Orlicz spaces", *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb*. 43, No.2,175-187, (2017).

[22] S.Z. Jafarov, "Linear methods of summing Fourier series and approximation in weighted Lebesque spaces with variable exponents", *Ukranian Math.J*.66, no.10,1509-1518, (2015).

[23] S.B. Stechkin,"Approximation of periodic functions by Fejer Sums", *Trudy Math. Inst. Steklov*, 2, , 48-60, (1961).

[24] M.F.Timan,"Best Approximation of a function and linear methods for the summation of Fourier series", *Izv . Akad. Nauk. SSSR Ser. Math*., 29, 587- 604, (1965).

[25] M.F.Timan,"Approximation of continuous periodic functions by linear operators constructed on the basis of their Fourier series", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 181, 1339-1342, (1968).

[26] M.F.Timan, " Some linear summation processes for the Fourier Series and the best approximation", *Dokl. Akad .Nauk. SSSR*, 145, 741-743, (1962).

[27] B. Muckenhoupt, "weighted Norm ınequalities for the Hardy Maximal Function", *Trans. Amer. Math. Soc*. 165, 207-226, (1972).

[28] A.I. Stepanetz, *Methods of Approximation Theory*, Brill Academic Publishers, Netherlands, (2005).

[29] H.M. Chang, R.A. Hunt and D.S. Kurtz, "The Hardy-Little wood maximal functions on $L(p,q)$ spaces with weights", *Indiana Univ. Math. J*. 31, 109-120, (1982).

[30] S.G. Samko, A.A. Kilbas and O.I. Marichev, "Fractional derivates and integrals, theory and applications," *Gordon and Breach Science Publishers*. (1993).

[31] E. Berkson and T. Gillespie, “On Restrictions of Multiplier in Weighted settings”, *Indiana Univ. Math. J.* 52, 627-962, (2003).

[32] M. Khabazi, “The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst*., 129, 65-75, (2002).

[33] V. Kokoilashvili and M. Krbec, “Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces”. Singapore, New Jersey, *London, Honkong: World Scientific* (1991).

[34] A. Zygmund, *Trigonometric Series,* Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1968).

[35] C. Bennet and R. Sharpley “Interpolation of operators”, *Acedemic Press*, Inc., Boston, M. A, (1986).

[36] M. Khabazi, “The mean convergence of trigonometric Fourier series in weighted Orlicz classes”, *Proc. A. Razmadze Math. Inst*., 129, 65-75, (2002).

[37] M. M Rao and Z.D. Ren, “Theory of Orlicz spaces”, New York: *Marcel Dekker,* (1991).

[38] R. Akgün, “Sharp Jackson and converse theorems of trigonometric approximation in weihgted Lebesque spaces”, *Proc. A. Razmadze Math.Inst*., 152, 1-18, (2010).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Ali DOĞU

Doğum tarihi ve yeri : **27/12/1983**

e-posta : dogualii19831227@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik ABD	20/07/2011
Lisans	Kahraman Maraş Sütçü İmam Üniversitesi/Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü	25/06/2008
Lise	Adana Seyhan 19 Mayıs Lisesi	2004

Yayın Listesi

[1] Y.E. Yıldırır and A. Dogu “Convolution and approximation in weighted Lorentz spaces”, *J. Math. Anal*. 7, no. 5, 54-60, (2016).

[2] A.Dogu, A. H. Avşar and Y.E. Yıldırır,“Some inequalities about convolution and trigonometric approximation in weighted Orlicz spaces”, *Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Ac. Sci. Azerbaijan*, 44, no. 1, 107-115, (2018).

[3] Y.E. Yıldırır and A. Dogu, “Approximation in weighted Lorentz spaces”, *J. Math. Sci. Adv.Appl.* 54, 1-9, (2018).