T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA FOURİER SERİLERİNİN ALT TOPLAMLARI İLE YAKLAŞIM

AHMET HAMDİ AVŞAR

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Ramazan AKGÜN
Doç. Dr. Erbil ÇETİN
Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR
Dr. Öğr. Üyesi Aykut OR

BALIKESİR, ŞUBAT-2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Bazı Fonksiyon Uzaylarında Fourier Serilerinin Alt Toplamları İle Yaklaşım**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ahmet Hamdi AVŞAR

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2019-113 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

BAZI FONKSİYON UZAYLARINDA FOURİER SERİLERİNİN ALT TOPLAMLARI İLE YAKLAŞIM
DOKTORA TEZİ
AHMET HAMDİ AVŞAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)
BALIKESİR, ŞUBAT-2021

Bu tez çalışmasında bazı fonksiyon uzaylarında Fourier serilerinin kısmi toplamlarının bazı alt toplanabilme metotları ile yaklaşım sonuçları incelenmiştir. Ağırlıklı Lorentz, değişken üslü ağırlıklı Lebesgue, ağırlıklı Orlicz ve Morrey uzaylarında elde edilen bu yaklaşım sonuçları Fourier serilerinin kısmi toplamları kullanılarak elde edilen alt Nörlund, alt Riesz ve alt Matris toplanabilme metotları ile elde edilmiştir. Bu toplanabilme metotları ile verilen fonksiyonlara yaklaşım sonuçları grafikler ve nümerik sonuçlarla desteklenmiştir.

Bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, trigonometrik yaklaşımla ilgili literatür özetine değinilmiştir.

İkinci bölümde, Fourier serileri ve bu serilerin alt toplanabilme metotlarının tanımları ve bazı temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, çalışılan fonksiyon uzayları tanımları ve bu uzaylarla ilgili temel bilgiler aktarılmıştır.

Dördüncü bölümde, bazı trigonometrik yaklaşım teoremlerinin ifadelerine ve ispatlarına yer verilmiştir. Ayrıca, bu teoremlerin ispatlarında kullanılan yardımcı teoremler verilmiştir. Bu bölümde verilen yaklaşım sonuçlarında Nörlund, Riesz ve Matris alt toplamları ile yaklaşım hızı değerlendirilmiştir.

Beşinci bölümde, trigonometrik polinomların yaklaşımı ile ilgili yaklaşım hatası örnekleri verilmiştir. Yaklaşım hatası örnekleri grafikler ve nümerik sonuçlarla desteklenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lorentz uzayı, değişken üslü Lebesgue uzayı, Orlicz uzayı, Morrey uzayı, Nörlund alt metot, Riesz alt metot, Matris alt metot.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 84

ABSTRACT

APPROXIMATION BY SUB-METHODS OF FOURIER SERIES IN SOME FUNCTION SPACES
PH.D THESIS
AHMET HAMDİ AVŞAR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. YUNUS EMRE YILDIRIR)
BALIKESİR, FEBRUARY-2021

In this thesis the approximation results of the partial sums of the Fourier series in some function spaces with some sub-summability methods are examined. The results of these approximation obtained on weighted Lorentz, variable exponential weighted Lebesgue, weighted Orlicz and Morrey spaces are obtained by using the sub Nörlund, sub Riesz and sub-matrix summability methods obtained by using the partial sums of the Fourier series. The approximation results to functions given by these summability methods are supported by graphs and numerical results.

This thesis consists of five chapters.

In the first chapter, the literature summary about the trigonometric approach is mentioned.

In the second chapter, the definition and some basic properties of Fourier series and sub-summability methods of these series are given.

In the third chapter, the definitions of function spaces and basic information about these spaces are given.

In the fourth chapter, expressions and proofs of some trigonometric approximation theorems are given. Also, auxiliary results used in the proofs of these theorems are given. In these approximation results, the errors of approximation are evaluated by sub-Nörlund, sub-Riesz and sub-Matrix methods.

In the fifth chapter, examples of approximation errors related to the approximation of trigonometric polynomials are given. Approximation examples are supported by graphs and numerical results.

KEYWORDS: Lorentz spaces, variable exponent Lebesgue spaces, Orlicz spaces, Morrey spaces, sub-Nörlund method, sub-Riesz method, sub-Matrix method.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 84

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{T}$	: $[0, 2\pi]$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\boldsymbol{\omega}$	: Ağırlık fonksiyonu
$\boldsymbol{A_p}(\mathbb{T})$	: Muckenhoupt sınıfı
$\boldsymbol{E_n(f)}$	: En iyi yaklaşım sayıları dizisi
$\mathbf{M}$	: Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu
$\boldsymbol{L^p}(\mathbb{T})$	: Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L^{p,q}}(\mathbb{T})$	: Lorentz uzayı
$\boldsymbol{L^{p(x)}}(\mathbb{T})$	: Değişken üslü Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L_\Phi}(\mathbb{T})$	: Orlicz uzayı
$\boldsymbol{L^{p,\alpha}}(\mathbb{T})$	: Morrey uzayı
$\boldsymbol{W^{r,\alpha}_{(\cdot),\omega}}$	: Sobolev tipli uzay
$\boldsymbol{f^{(n)}}$	: f fonksiyonunun $n.$ türevi
$\boldsymbol{\Omega(f,\delta)}$	: Süreklilik Modülü
$\boldsymbol{Lip(\alpha,(\cdot))}$	: Lipschitz sınıfı
$\boldsymbol{A_h(f)}$	: Steklov operatörü
Ŧ	: Hilbert operatörü
$\boldsymbol{T_n}$	: Derecesi n yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesi
$\boldsymbol{S_n}$	: Kısmi toplamlar dizisi
$\boldsymbol{\sigma_n}$	: Klasik Cesàro metot
$\boldsymbol{C_n^\lambda(x,f)}$	: Cesàro alt metot
$\boldsymbol{N_n^\lambda(x,f)}$	: Nörlund alt metot
$\boldsymbol{R_n^\lambda(x,f)}$	: Riesz alt metot
$\boldsymbol{\tau_n^\lambda(x,f)}$	: Matris alt metot
$\boldsymbol{T_n^\lambda(x,f)}$	: Matris alt metot

ÖNSÖZ

Bu tez çalışmamda bana yol gösteren, her konuda yardımını hissettiğim, deneyim ve bilgisini esirgemeyen, saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR'a çok teşekkür ediyorum.

Ayrıca üzerimde emekleri olan, akademik anlamda yetişmemi sağlayan değerli hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

Bugünlere gelmemi sağlayan ve emeklerini ödeyemeyeceğim Anneme ve Babama ve Kardeşime teşekkürü borç bilirim.

Tez çalışmaları yaptığım süreçte desteğini her zaman hissettiğim sevgili eşim Merve'ye teşekkür ediyorum.

Son olarak, Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.

Balıkesir, 2021 **Ahmet Hamdi AVŞAR**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, fonksiyonlara daha basit ve daha kolay hesaplanabilen fonksiyonlarla yaklaşım durumlarını inceleyen bir matematiksel analiz alanıdır. Yaklaşım teorisinde incelenen problemler, nitelik ve nicelik problemleri olarak iki ana gruba ayrılmaktadır. Nitelik problemlerinin yapısını yoğun alt uzayın varlığı oluştururken, nicelik problemlerinin yapısını yaklaşımın tekliği, yaklaşım hızının değerlendirilmesi ve yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri oluşturmaktadır. En iyi yaklaşımın üstten sınırlandırıldığı teoremler yaklaşım teorisinin düz teoremleri, en iyi yaklaşım sayısının alttan sınırlandırıldığı teoremler yaklaşım teorisinin ters teoremleri olarak adlandırılır. Diğer birçok analiz alanı gibi, temel kökleri 19. yüzyıl matematiğine dayanan bir matematik alanıdır.

Reel değerli fonksiyonların yaklaşım teorisi tarihinin başlangıç noktası P. L. Chebyshev [1] ve Weierstrass [2] tarafından verilen çalışmalara dayanmaktadır.

Weierstrass tarafından 1885'te verilen sonuçlar yaklaşım teorisinin geliştirilmesinde büyük öneme sahiptir. Bu çalışmada kapalı aralıktaki sürekli bir f fonksiyonuna düzgün yakınsayan bir polinom dizisinin varlığı problemi çözülmüştür.

Bu çalışma neticesinde fonksiyonların önemli özelliklerinin derinlemesine incelenmesi için Weierstrass tarafından elde edilen sonuçların genelleştirilmesi ve iyileştirilmesi kaçınılmazdır. Bu bağlamda, P. L. Chebyshev tarafından verilen "en iyi yaklaşım" kavramı fonksiyonların modern konstrüktif teorisinin temelleri için de büyük bir öneme sahiptir.

En iyi yaklaşım sayısı ile ilgili diğer önemli çalışmalar, D. Jackson [3], N. I. Akhiezer [4], S. B. Stechkin [5], S. N. Bernstein tarafından [6-8] de verilen, en iyi yaklaşım dizisine sahip bir fonksiyonun varlığına ilişkin düz-ters teoremlerin ispatlandığı çalışmalardır.

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz ve ters teoremleri Gadjieva [9] tarafından ispatlanmıştır.

Orlicz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz teoremleri Ramazanov [10], Runovski [11] ve Wu [12] tarafından elde edilmiştir. Ağırlıklı Orlicz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz ve ters teoremleri Akgün ve İsrafilov [13] tarafından ispatlanmıştır.

Ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların türevleri için trigonometrik yaklaşımın ters ve eş zamanlı teoremleri Yıldırır ve İsrafilov [14] tarafından elde edilmiştir. Ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz teoremleri Akgün ve Yıldırır [15] tarafından ispatlanmıştır.

En iyi yaklaşım kavramıyla bağlantılı problemleri ele aldıktan sonra, bu yaklaşımı gerçekleştiren polinomları karakterize eden kriterleri bulma ve bu yaklaşımdaki en küçük farkı belirleme problemleri ortaya çıkmaktadır. Bu bağlamda ortaya çıkan problemlerin inşa edilmesi ve iyileştirilmesi için farklı toplanabilme yöntemleri kullanılmaktadır. Buna ek olarak, toplanabilme metotları Fourier serisi teorisindeki temel problemlerden biri olan yaklaşım hızının incelenmesi probleminde de kullanılmaktadır. Bu anlamda karşılaşılan en önemli sonuçlardan biri Quade [16] tarafından elde edilmiştir. Bu çalışmada Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının klasik Cesàro metodu ile yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Şimdi de doğal olarak, "Bu yaklaşım metodunu ve yaklaşım hızını nasıl genelleştirebiliriz ya da iyileştirebiliriz?" sorusu ortaya çıkmaktadır. Öncelikli olarak, farklı toplanabilme metotları kullanılabilir. Yani, Cesàro metot yerine, bu metodun daha genel versiyonları olan Nörlund, Riesz, Matris metotları ya da bu toplanabilme metotlarının alt toplamları kullanılarak daha genel sonuçlar elde edilebilir. İkincisi, verilen toplanabilme metodu üzerindeki monotonluk koşulu zayıflatılarak iyileştirme yapılabilir. Bir diğer genelleştirme ise yaklaşım özelliklerinin incelendiği fonksiyon uzayından daha geniş bir fonksiyon uzayı seçilerek sağlanabilmektedir. Bu tez çalışmasında, yukarıda verilen genelleştirme yöntemleri göz önünde bulundurularak çalışma problemleri inşa edilmiştir. Bu tezde elde edilen sonuçlara değinmeden önce alan yazında yer alan bazı yaklaşım teorisi sonuçları aşağıda verilmiştir.

Lebesgue uzaylarında, Quade [16] tarafından klasik Cesàro metot kullanılarak verilen sonuçların genellemeleri bir çok matematikçi tarafından elde edilmiştir [5-23].

Ayrıca klasik metotların yerine bunların alt metotları yardımıyla da genellemeler elde edilebilir. Bu genelleme çalışmalarının temelini [36] ve [37] nolu çalışmalarda elde edilen sonuçlar oluşturmaktadır. [36] nolu çalışmada Armitage ve Maddox tarafından alt Cesàro metot tanımı ve temel özellikleri ilk defa incelenmiştir. [37] nolu çalışmada Osikiewicz tarafından alt Cesàro metot ve klasik Cesàro metot arasındaki bazı bağıntılar verilmiştir.

[38] nolu çalışmada Değer ve arkadaşları tarafından alt Cesàro metot kullanılarak yaklaşım özellikleri Lebesgue uzaylarında incelenmiştir.

[39] nolu çalışmada Değer ve Kaya tarafından Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara yaklaşım hızı alt Nörlund metot ve alt Riesz metotları yardımıyla değerlendirilmiştir.

Değer ve arkadaşları tarafından [38] nolu çalışmada verilen sonuçların Lebesgue uzayındaki iyileştirmeleri Mittal ve Singh [40] tarafından matrisin satırları üzerindeki monotonluk koşulu kaldırılarak elde edilmiştir.

[41] nolu çalışmada Mittal ve Singh tarafından Lebesgue uzayından olan fonksiyonlara alt Matris metotları yardımıyla yaklaşım incelenmiş ve iki farklı nümerik dizi sınıfı için iki teorem ispatlanmıştır.

[39] nolu çalışmada verilen sonuçlar Sonker ve Munjal [42] tarafından daha genel toplanabilme metodu kullanılarak ve daha geniş nümerik dizi sınıfı üzerinde çalışılarak iyileştirilmiştir.

[24] nolu çalışmada klasik metotlar kullanılarak elde edilen sonuçlar, Krasniqi [43] tarafından üç farklı yönden iyileştirilmiştir. Bu yönler; daha geniş nümerik dizi sınıfları üzerinde çalışmak, daha keskin bir yaklaşım derecesi ile yaklaşımı üstten sınırlandırmak ve klasik metot yerine alt metot kullanmaktır.

[44] nolu çalışmada Değer tarafından değişken üslü Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara yaklaşım alt Nörlund ve alt Riesz metotları yardımıyla incelenmiştir. Bu çalışmada, [24] nolu çalışmada verilen sonuçlar hem yaklaşım metodu genelleştirilerek hem de yaklaşım metodundaki dizilerin üzerindeki monotonluk koşulu kaldırılarak iyileştirilmiştir.

[45] nolu çalışmada Avşar ve Yıldırır tarafından ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonlara, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının alt Matris metotları yardımıyla yaklaşım hızı incelenmiştir. Bu çalışmada, [41] de Lebesgue uzaylarında elde edilen sonuçlar ağırlıklı Lorentz uzaylarına taşınmıştır.

[46] nolu çalışmada Avşar ve Yıldırır tarafından ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların türevlerine, bu fonksiyonların alt Nörlund ve alt Riesz metotları kullanılarak yaklaşım incelenmiştir. Bu çalışmada, [34] nolu çalışmada verilen sonuçların daha keskin yaklaşım versiyonları daha az bağlayıcı koşullar altında elde edilmiştir.

[47] nolu çalışmada Avşar ve Yıldırır tarafından değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara, iki farklı alt Matris metodu ile yaklaşım incelenmiştir. Bu çalışmada, [35] de klasik metot kullanılarak verilen sonuçlar hem alt Riesz metodunun genellemesi olan alt Matris metodu hem de alt Nörlund metodunun genellemesi olan alt Matris metodu kullanılarak iyileştirilmiştir.

Bu çalışmalarda ispatlanan ana teoremlerde S_n ve M operatörlerinin sınırlılığı oldukça önemlidir.

Fourier serisinin kısmi toplamlarının sınırlılığı, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Hunt ve arkadaşları [48] tarafından, ağırlıklı Lorentz uzaylarında Kokilashvili ve Yıldırır [49] tarafından, değişken üslü Lebesgue uzaylarında Sharapudinov [50] tarafından, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında İsrafilov ve Testici [35] tarafından, Morrey uzaylarında İsrafilov ve Tozman [51] tarafından ve ağırlıklı Orlicz uzaylarında İsrafilov ve Güven [52] tarafından elde edilmiştir.

Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonunun sınırlılığı, ağırlıklı Lebesgue uzaylarında Muckenhoupt [53] tarafından, ağırlıklı Lorentz uzaylarında Chung ve arkadaşları [54] tarafından, değişken üslü Lebesgue uzaylarında birçok araştırmacı [55]–[58] tarafından, ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında Cruz-Uribe ve arkadaşları [59], [60] tarafından, Morrey uzaylarında Chiarenza ve Frasca [61] ve Jafarov [62] tarafından, ağırlıklı Orlicz uzaylarında Genebashvili ve arkadaşları [63] tarafından elde edilmiştir.

Ağırlıklı Orlicz uzaylarında öteleme operatörünün sınırlılığı İsrafilov ve Güven [52] tarafından elde edilmiştir.

Bu tez çalışmasında Lorentz, değişken üslü Lebesgue, Morrey ve Orlicz uzaylarında elde edilen bazı yaklaşım teoremlerinin ifadelerine ve ispatlarına yer verilmiştir. Çalışılan bu dört fonksiyon uzayı iyi bilinen Lebesgue uzayının farklı genellemeleridir. Başka bir ifadeyle, bu tezde elde edilen sonuçlar Lebesgue uzaylarında elde edilen yaklaşım sonuçlarının daha genel versiyonlarıdır.

4.1. bölümde, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların türevlerine, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının alt Nörlund ve alt Riesz metotları yardımıyla yaklaşım hızı incelendi.

4.2. bölümde, değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlara, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının iki farklı alt Matris metodu yardımıyla yaklaşım hızı incelendi.

4.3. bölümde, Morrey uzaylarından olan fonksiyonlara, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının iki farklı alt Matris metodu yardımıyla yaklaşım hızı incelendi. Buna ek olarak, Morrey uzaylarında eşlenik fonksiyonun sınırlılığı da ispatlandı.

4.4. bölümde, ağırlıklı Orlicz uzaylarından olan fonksiyonların türevlerine, bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının alt Nörlund ve alt Riesz metotları aracılığıyla yaklaşım hızı incelendi.

5. bölümde, bu tezde verilen yaklaşım sonuçlarının uygulamalarına yer verilmiştir. Fonksiyonlar ve bu fonksiyonların Fourier serisinden elde edilen toplanabilme metotları arasındaki yaklaşım hatası, fonksiyonun seçildiği uzayın normu dikkate alınarak grafiklerle ve nümerik sonuçlarla açıklanmıştır.

2. FOURİER SERİLERİ

2.1 Fourier Serisi

2.1.1 Tanım a_k ve b_k $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ sabitleri reel sayılar kümesinin elemanları olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{2.1}$$

serisine trigonometrik seri denir.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

serisine de (2.1) serisinin eşlenik serisi denir. $|a_n| + |b_n| > 0$ için

$$t_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k coskx + b_k sinkx), \qquad n = 0,1,2, \ldots.$$

biçiminde tanımlanan $t_n(x)$ ifadesine ise *n*. dereceden bir trigonometrik polinom denir.

2.1.2 Tanım $f \in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cosktdt\,, \qquad k = 0,1,2, \ldots$$

ve

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sinktdt\,, \qquad k = 1,2, \ldots$$

olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)coskx + b_k(f)sinkx)$$

serisine f fonksiyonunun Fourier serisi denir. f fonksiyonunun eşlenik Fourier serisi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)sinkx - b_k(f)coskx)$$

biçiminde tanımlanır.

2.1.3 Tanım $U_0(x, f) \coloneqq \frac{a_0}{2}$ ve $U_k(x, f) \coloneqq a_k(f)coskx + b_k(f)sinkx,\ k = 1,2, \ldots$

olmak üzere

$$S_n(x,f) = \sum_{k=0}^{n} U_k(x,f), \qquad n = 0,1,2,\ldots$$

biçiminde tanımlı $\left(S_n(f)\right)$ dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

2.2 Cesàro Alt Metot

2.2.1 Tanım $\lambda = (\lambda_n)$ pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olsun. (x_k) reel ya da kompleks sayı dizisi için C_λ^n Cesàro alt metodu

$$C_\lambda^n(x,f) = \frac{1}{\lambda_n}\sum_{k=0}^{\lambda_n} x_k\,, \qquad n = 1,2,\ldots$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $\lambda_n = n$ alırsak C_λ Cesàro alt metodu ve klasik Cesàro metodu çakışır. Cesàro alt metodu hakkında daha detaylı bilgiye [36] ve [37] nolu referanslardan ulaşılabilir.

2.2.2 Tanım $\left(p_{\lambda_n}\right)$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $p_{-1} = P_{-1} \coloneqq 0$ ve $P_{\lambda_n} = p_1 + p_2 + p_3 + \cdots + p_{\lambda_n}$ olmak üzere f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamının alt Nörlund ve alt Riesz metotları sırasıyla

$$N_n^\lambda(x,f) = \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m} S_m(x,f),$$

$$R_n^\lambda(x,f) = \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m S_m(x,f)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $\lambda_n = n$ seçersek, $N_n^\lambda(x,f)$ ve $R_n^\lambda(x,f)$ alt metotları sırasıyla klasik Nörlund ve klasik Riesz metotları ile çakışır.

2.2.3 Tanım $A \coloneqq \left(a_{n,m}\right)$ reel sayıların alt üçgensel regüler matrisi, m$\leq n$ için $a_{n,m} \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ ve satır toplamlarının 1 olması koşulunu sağlamak üzere $T_n^\lambda(x,f)$ alt matris metodu

$$T_n^\lambda(x,f) = \sum_{m=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,m} S_m(x,f)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $a_{\lambda_n,m} = \frac{p_m}{P_{\lambda_n}}$ seçersek, $T_n^{\lambda}(x,f)$ alt matris metodu ile $R_n^{\lambda}(x,f)$ alt Riesz metodu çakışır.

2.2.4 Tanım $A \coloneqq (a_{n,m})$ reel sayıların alt üçgensel regüler matrisi, m$\leq n$ için $a_{n,m} \geq 0$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ ve satır toplamlarının 1 olması koşulunu sağlamak üzere $\tau_n^{\lambda}(x,f)$ alt matris metodu

$$\tau_n^{\lambda}(x,f) = \sum_{m=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-m} S_m(x,f)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer $a_{\lambda_n,\lambda_n-m} = \frac{p_{\lambda_n-m}}{P_{\lambda_n}}$ alırsak $\tau_n^{\lambda}(x,f)$ alt matris metodu ile $N_n^{\lambda}(x,f)$ alt Nörlund metodu çakışır.

2.2.5 Tanım Eğer $u_n \leq K u_m$ $(u_m \leq K u_n)$ eşitsizliğini sağlayan u ya bağlı bir K sabiti varsa, negatif olmayan $u \coloneqq (u_n)$ dizisi hemen her yerde monoton artan (azalan) dizi olarak adlandırılır. Kısaca $u \in AMDS$ $(u \in AMIS)$ şeklinde gösterilir.

2.2.6 Tanım

$$A_{n,k} \coloneqq \frac{1}{k+1} \sum_{i=n-k}^{n} a_{n,i}$$

olsun. Eğer $\{A_{n,k}\} \in AMDS$ $(\{A_{n,k}\} \in AMIS)$ ise bu durumda $\{a_{n,k}\}$ dizisi hemen her yerde monoton azalan üst ortalama dizi olarak adlandırılır. Kısaca $\{a_{n,k}\} \in AMDUMS$ $(\{a_{n,k}\} \in AMIUMS)$ biçiminde gösterilir.

2.2.7 Tanım

$$A_{n,k}^{*} \coloneqq \frac{1}{k+1} \sum_{i=0}^{k} a_{n,i}$$

olsun. Eğer $\{A_{n,k}^{*}\} \in AMDS$ $(\{A_{n,k}^{*}\} \in AMIS)$ ise bu durumda $\{a_{n,k}\}$ dizisi hemen her yerde monoton azalan ortalama dizi olarak adlandırılır. Kısaca $\{a_{n,k}\} \in AMDMS$ $(\{a_{n,k}\} \in AMIMS)$ biçiminde gösterilir.

2.2.8 Tanım

Δ_k operatörü $\Delta_k a_{n,k} = a_{n,k} - a_{n,k+1}$ biçiminde tanımlanır.

2.2.9 Tanım

$\preccurlyeq$ bağıntısı aşağıdaki biçimde tanımlanmaktadır.

$A \preccurlyeq B \Leftrightarrow$ Temel parametreden bağımsız, pozitif bir C sabiti vardır öyle ki $A \leq CB$

2.2.10 Tanım

$[x] := max\{n \in \mathbb{Z}: n \leq x\}$.

2.2.11 Tanım

O notasyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$f(x) = O\big(g(x)\big) \Leftrightarrow f(x) \leq Kg(x)$.

Buradaki pozitif K sabiti temel parametreden bağımsızdır.

3. FONKSİYON UZAYLARI

Bu bölümde bazı fonksiyon uzaylarının tanımları ve bazı temel özellikleri verilmektedir.

3.1 Lebesgue Uzayları

3.1.1 Tanım $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$\|f\|_{\mathrm{p}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

şartını sağlayan bütün ölçülebilir 2π periyotlu $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının uzayı Lebesgue uzayı olarak adlandırılır ve $L^p(\mathbb{T})$ ile gösterilir. $L^p(\mathbb{T})$ Lebesgue uzayı, $\|f\|_{\mathrm{p}}$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

$L^p(\mathbb{T})$ Lebesgue uzaylarında integral süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.1.2 Tanım $p > 1$ için $f \in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonunun integral süreklilik modülü

$$\omega_p(\delta;\, f) = \sup_{|h| \leq \delta} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad \delta > 0$$

biçiminde tanımlanır [64, p. 45].

3.1.3 Tanım $\delta > 0$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $1 \leq p < \infty$ olsun. $f \in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının oluşturduğu Lipschitz sınıfı

$$Lip(\alpha, L^p) = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) \colon \omega_p(\delta;\, f) = O(\delta^\alpha) \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.2 Ağırlıklı Lorentz Uzayları

3.2.1 Tanım $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda μ_f fonksiyonu

$$\mu_f(\lambda) = \mu\{x \in \mathbb{T} \colon |f(x)| > \lambda\}, \qquad \lambda > 0$$

biçiminde tanımlanır ve f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu olarak adlandırılır. Burada, μ $\mathbb{R}$ üzerinde Lebesgue ölçümüdür [65, p. 37].

3.2.2 Tanım f fonksiyonu, 2π periyotlu ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonunun μ_f dağılım fonksiyonu negatif olmayan, azalan ve $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sağdan sürekli bir fonksiyondur [65, p. 37].

3.2.3 Tanım $f\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $f^*\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$f^*(t) = inf\{\lambda\colon \mu_f(\lambda) \leq t\}, \qquad t \in [0,\infty)$$

biçiminde tanımlanır ve f fonksiyonunun azalan rearrangement fonksiyonu olarak adlandırılır [66, p. 238].

3.2.4 Tanım f fonksiyonu hemen her yerde sonlu, ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda f^{**} fonksiyonu

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)du\,, t > 0$$

biçiminde tanımlanır. f^{**} fonksiyonu f^* fonksiyonunun ortalama fonksiyonu olarak adlandırılır [66, p. 249].

3.2.5 Tanım 1<p,q< ∞ olsun.

$$\|f\|_{pq,\omega} = \left(\int_{\mathbb{T}} \left[t^{\frac{1}{p}} f^{**}(t)\right]^q \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.1}$$

ve $\|f\|_{L^{p,q}}$ normunun sonlu olma koşulunu sağlayan $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bütün ölçülebilir f fonksiyonlarının uzayına Lorentz uzayı denir ve $L^{p,q}(\mathbb{T})$ ile gösterilir.

Lorentz uzayları (3.1) verilen norma göre Banach uzayıdır [65, pp. 216–219].

$1 < p, q < \infty$ için p ve q indislerini birbirine eşit seçersek $L^{p,p}(\mathbb{T})$ Lorentz uzayı ile $L^p(\mathbb{T})$ Lebesgue uzayı çakışır ve $f \in L^p(\mathbb{T})$ fonksiyonu için $\|f\|_{p,p} = \|f\|_p$ elde edilir [63, p. 20].

3.2.6 Tanım Eğer $\omega^{-1}(\{0,\infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise bu durumda 2π-periyotlu ve ölçülebilir ω: 𝕋 → [0,∞] fonksiyonuna ağırlık fonksiyonu denir.

3.2.7 Tanım ω bir ağırlık fonksiyonu, e ölçülebilir bir küme ve

$$\omega(e) := \int_e \omega(x)dx \tag{3.2}$$

olsun. Bu durumda $f_\omega^*(t)$ fonksiyonu (3.2) Borel ölçümüne göre

$$f_\omega^*(t) = inf\{\tau \geq 0 : \omega\{x \in \mathbb{T} : |f(x)| > \tau\} \leq t)\}$$

biçiminde tanımlanır ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun azalan rearrangement fonksiyonu olarak adlandırılır. Buna göre $f_\omega^{**}(t)$ integral ortalama fonksiyonu

$$f_\omega^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f_\omega^*(u)du$$

biçiminde tanımlanır.

3.2.8 Tanım $1 < p, q < \infty$ ve $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ 2π periyotlu ve ölçülebilir bir fonksiyon olsun.

$$\|f\|_{pq,\omega} = \left(\int_{\mathbb{T}} \left(f_\omega^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}} \frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}} < \infty$$

ve $\|f\|_{pq,\omega}$ normunun sonlu olma koşulunu sağlayan $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı bütün ölçülebilir 2π periyotlu f fonksiyonlarının sınıfına ağırlıklı Lorentz uzayı denir ve $L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ ile gösterilir [63, p. 21].

$L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ uzayı $\|f\|_{pq,\omega}$ normuna göre bir Banach uzayıdır [63, p. 21].

$L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ ağırlıklı Lorentz uzayları ile ilgili daha detaylı bilgiye [66]–[69] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

3.2.9 Tanım $L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan f fonksiyonuna, derecesi *n* yi geçmeyen trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşım sayıları dizisi $E_n(f)_{L_\omega^{p,q}}$ ile gösterilir ve

$$E_n(f)_{L_\omega^{p,q}} = \inf_{t_n \in T_n} \|f - t_n\|_{pq,\omega}$$

biçiminde tanımlanır. Burada T_n, derecesi *n* yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesidir.

$L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ ağırlıklı Lorentz uzaylarında süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.2.10 Tanım $\delta > 0$ olsun. $A_h(x, f)$ Steklov fonksiyonu

$$A_h(x,f) := \frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt$$

biçiminde tanımlı olmak üzere, $f \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ süreklilik modülü

$$\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}} = \sup_{|h|\le\delta} \|A_h(f)\|_{pq,\omega}$$

biçiminde tanımlanır.

3.2.11 Tanım $1 < p < \infty$ ve $p' = \frac{p}{p-1}$ olsun. $A_p(\mathbb{T})$ Muckenhoupt sınıfı

$$sup \frac{1}{|I|}\int_I \omega(x)dx \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{1-p'}(x)dx\right)^{p-1} < \infty$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. Burada supremum, $\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt aralığı üzerinden alınır ve $|I|$, I aralığının uzunluğunu gösterir [53].

3.2.12 Tanım f fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M(x,f) := \sup_{x\in I} \frac{1}{|I|}\int_I f(t)dt, \;\; x \in \mathbb{T} \tag{3.3}$$

biçiminde tanımlanır. Burada supremum $\mathbb{T}$ nin bütün açık alt aralıkları üzerinden alınır.

$\omega \in A_p(\mathbb{T})$ ve $1 < p,q < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu ağırlıklı Lorentz uzaylarında sınırlıdır [54]. Bu nedenle $A_h(f)$ Steklov operatörü $L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ ağırlıklı Lorentz uzayından olur. Böylece $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ süreklilik modülü $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ için iyi tanımlıdır.

Buna ek olarak $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$ süreklilik modülü azalmayan, negatif olmayan, sürekli bir fonksiyondur ve

$$\lim_{\delta\to 0} \Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}} = 0 \text{ ve } \Omega(f_1+f_2,\delta)_{L_\omega^{p,q}} \le \Omega(f_1,\delta)_{L_\omega^{p,q}} + \Omega(f_2,\delta)_{L_\omega^{p,q}}$$

özelliklerini sağlar.

3.2.13 Tanım $\delta > 0$ olsun. $0 < \alpha \le 1$, $1 < p,q < \infty$ için $f \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının oluşturduğu Lipschitz sınıfı

$$Lip\left(\alpha, L_\omega^{p,q}\right) = \left\{f \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T}) : \Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p,q}} = O(\delta^\alpha)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

$1 < p, q < \infty$ ve $\omega \in A_p(\mathbb{T})$ olduğunda $L_\omega^{p,q}(\mathbb{T}) \subset L^1(\mathbb{T})$ olur ve ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların Fourier seri açılımı yapılabilir [49].

3.2.14 Tanım $r = 1,2, \ldots$ için ağırlıklı Sobolev tipli uzaylar

$$W_{pq,\omega}^r = \left\{f \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T}) : f^{(r-1)} \text{ mutlak süreklidir ve } f^{(r)} \in L_\omega^{p,q}(\mathbb{T}) \right\}$$

$$W_{pq,\omega}^{r,\alpha} = \left\{f \in W_{pq,\omega}^r : f^{(r)} \in Lip\left(\alpha, L_\omega^{p,q}\right) \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.3 Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzayları

$p(\cdot) : \mathbb{T} \to [0, \infty)$ fonksiyonu Lebesgue ölçülebilir 2π periyotlu fonksiyon olsun.

$$\rho_{p(\cdot)}(f) := \int_{\mathbb{T}} f(x)^{p(x)} dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ve

$$\|f\|_{p(\cdot)} := \inf\left\{\xi > 0, \rho_{p(\cdot)}\left(\frac{f}{\xi}\right) \leq 1\right\}$$

biçiminde tanımlanan 2π periyotlu Lebesgue ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfı değişken üslü Lebesgue uzayı olarak adlandırılır ve $L^{p(x)}(\mathbb{T})$ ile gösterilir. $p(\cdot)$ fonksiyonu

$$1 < p_- := \underset{x\in\mathbb{T}}{ess\,inf}\, p(x) \leq \underset{x\in\mathbb{T}}{ess\,sup}\, p(x) := p^+ < \infty \tag{3.4}$$

ve

$$|p(x) - p(y)| \leq C \ln\left(\frac{1}{|x-y|}\right), \quad x, y \in \mathbb{T}, \qquad |x-y| \leq \frac{1}{2} \tag{3.5}$$

koşullarını sağlar. (3.4) ve (3.5) ile verilen koşulları sağlayan $p(\cdot)$ fonksiyonlarının sınıfını $\wp_0(\mathbb{T})$ ile gösterelim. Değişken üslü Lebesgue uzayları hakkında daha detaylı bilgiye [66], [67], [70], [71] nolu referanslardan ulaşılabilir.

$f\omega \in L^{p(x)}(\mathbb{T})$ ve $\|f\|_{p(\cdot),\omega} = \|\omega f\|_{p(\cdot)} < \infty$ koşullarını sağlayan bütün Lebesgue ölçülebilir 2π periyotlu fonksiyonların kümesi $L_\omega^{p(x)}(\mathbb{T})$ değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzayı olarak adlandırılır.

3.3.1 Tanım $\frac{1}{p(\cdot)}+\frac{1}{q(\cdot)}=1$ olsun. $A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ Muckenhoupt sınıfı

$$\sup_I |I|^{-1}\,\|\omega\chi_I\|_{p(\cdot)}\|\omega^{-1}\chi_I\|_{q(\cdot)}<\infty$$

koşulunu sağlayan ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. Burada supremum, $\mathbb{T}$ nin herhangi bir alt aralığı üzerinden alınır. $|I|$, I aralığının uzunluğunu ve χ_I karakteristik fonksiyonu gösterir.

3.3.2 Tanım $L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzaylarından olan f fonksiyonuna, derecesi n yi geçmeyen trigonometrik polinomlar vasıtasıyla en iyi yaklaşım $E_n(f)_{L_\omega^{p(\cdot)}}$ ile gösterilir ve

$$E_n(f)_{L_\omega^{p(\cdot)}}=\inf_{T_k}\|f-T_k\|_{p(\cdot),\omega}$$

biçiminde tanımlanır. Burada T_k, derecesi n yi geçmeyen trigonometrik polinomların kümesidir.

Eğer $p(\cdot)$ fonksiyonu (3.4) ve (3.5) koşullarını sağlıyorsa, bu durumda (3.3) ile verilen Hardy-Littlewood maksimal fonksiyon $L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ değişken üslü Lebesgue uzaylarında sınırlıdır [56]. $c(p)$ pozitif sabit olmak üzere, eğer $\omega\in A_{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ ise, bu durumda

$$\|M(f)\|_{p(\cdot),\omega}\le c(p)\|f\|_{p(\cdot),\omega} \tag{3.6}$$

eşitsizliği sağlanır [59].

$L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ uzaylarında süreklilik modülü aşağıdaki şekilde tanımlanır.

3.3.3 Tanım $\delta>0$ olsun. $A_h(x,f)$ Steklov fonksiyonu

$$A_h(x,f):=\frac{1}{h}\int_0^h |f(x+t)-f(x)|dt$$

biçiminde tanımlı olmak üzere, $f\in L_\omega^{p(\cdot)}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p(\cdot)}}$ süreklilik modülü

$$\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p(\cdot)}}=\sup_{|h|\le\delta}\|A_h(f)\|_{p(\cdot),\omega}\,, \qquad \delta>0$$

biçiminde tanımlanır.

Maksimal fonksiyonun sınırlılığından $\Omega(f,\delta)_{L_\omega^{p(\cdot)}}$ süreklilik modülü iyi tanımlıdır.

Buna ek olarak $\Omega(f,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}$ sürekllik modülü azalmayan, negatif olmayan, sürekli bir fonksiyondur ve

$$\lim_{\delta\to 0}\Omega(f,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}=0 \text{ ve } \Omega(f_1+f_2,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}\le \Omega(f_1,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}+\Omega(f_2,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}$$

özelliklerini sağlar.

3.3.4 Tanım $\delta>0$ olsun. $0<\alpha\le 1,\ 1<p,q<\infty$ için $f\in L^{p(\cdot)}_{\omega}(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının oluşturduğu Lipschitz sınıfı

$$Lip\left(\alpha,L^{p(\cdot)}_{\omega}\right)=\left\{f\in L^{p(\cdot)}_{\omega}(\mathbb{T}):\Omega(f,\delta)_{L^{p(\cdot)}_{\omega}}=O(\delta^{\alpha})\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.4 Morrey Uzayları

3.4.1 Tanım $0\le\alpha\le 2$ ve $1<p<\infty$ olsun. Bu durumda $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ Morrey uzayı $\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}<\infty$ koşulunu sağlayan $f\in L^{p}_{loc}(\mathbb{T})$ fonksiyonlarının bir kümesi olarak aşağıda verilen biçimde tanımlanır.

$$\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}:=\left\{\sup_{I}\left(\frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\right)\int_{I}|f(t)|^{p}|dt|\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Burada supremum bütün $I\subset\mathbb{T}$ aralıkları üzerinden alınmaktadır ve $|I|$, I aralığının uzunluğunu gösterir.

$\alpha=2$ olması durumunda, Morrey uzayı ve Lebesgue uzayı çakışır.

$0\le\alpha_1\le\alpha_2\le 2$ için $L^{p,\alpha_1}(\mathbb{T})\subset L^{p,\alpha_2}(\mathbb{T})$ olduğundan $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})\subset L^{1}(\mathbb{T})$ elde edilir [51].

Morrey uzayları hakkında daha detaylı bilgiye [72], [73] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

3.4.2 Tanım $f\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T}), 0\le\alpha\le 2$ ve $1<p<\infty$ olsun. Bu durumda $f\in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun $\omega_{p,\alpha}(f,\delta):[0,\infty)\to[0,\infty)$ süreklilik modülü

$$\omega_{p,\alpha}(f,\delta)=\sup_{h\le\delta}\|\Delta_h f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\ ,\qquad \delta\ge 0,$$

biçiminde tanımlanır, burada $\Delta_h(f;x)$ Steklov fonksiyonudur ve

$$\Delta_h(f;x)=\frac{1}{h}\int_0^h|f(x+t)-f(x)|dt$$

biçiminde tanımlanır.

3.4.3 Tanım $0 < \beta \le 1, 0 \le \alpha \le 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Bu durumda $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Lipschitz sınıfı

$Lip_{\alpha,p}(\beta) := \{f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T}) : \omega_{p,\alpha}(f,\delta) = O(\delta^{\beta}), \delta > 0\}$

biçiminde tanımlanır.

3.4.4 Tanım $0 \le \alpha \le 2, 1 < p < \infty$ ve $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda, $n = 1,2,3, \ldots$ için

$$E_n(f)_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\omega_{p,\alpha}\left(f, \frac{1}{n}\right)\right) \tag{3.7}$$

elde edilir [51].

(3.3) ile verilen Hardy Littlewood maksimal fonksiyonu $L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ Morrey uzaylarında sınırlıdır [61].

3.5 Ağırlıklı Orlicz Uzayları

3.5.1 Tanım $M(u)$ fonksiyonu u reel değişkenine bağlı reel değerli bir fonksiyon olsun. Bu durumda her u_1 ve u_2 için

$$M\left(\frac{u_1 + u_2}{2}\right) \le \frac{1}{2}[M(u_1) + M(u_2)]$$

eşitsizliği sağlanıyorsa $M(u)$ konveks fonksiyondur [74].

3.5.2 Tanım $\Phi: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $u > 0$ için $\Phi(0) = 0, \Phi(u) > 0$ koşulunu sağlayan konveks ve sürekli fonksiyon olsun. Eğer $\Phi(u)$ fonksiyonu çift fonksiyon ve

$$\lim_{u\to 0} \frac{\Phi(u)}{u} = 0 \text{ ve } \lim_{u\to\infty} \frac{\Phi(u)}{u} = \infty,$$

koşullarını sağlıyorsa, bu durumda $\Phi(u)$ fonksiyonu Young fonksiyonu olarak adlandırılır [74, p. 7].

3.5.3 Tanım Φ bir Young fonksiyonu olsun. $v \ge 0$ için Ψ fonksiyonu

$$\Psi(v) \coloneqq \max\{uv - \Phi(u) : u \ge 0\}$$

biçiminde tanımlanır ve tümleyen Young fonksiyonu olarak adlandırılır [74, p. 11].

3.5.4 Tanım

$$\int_0^{2\pi} \Phi(|f(x)|)dx < \infty$$

koşulunu sağlayan ölçülebilir $f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının sınıfını $L_\Phi(\mathbb{T})$ ile göstereceğiz. $L_\Phi(\mathbb{T})$ uzayı

$$\|f\|_{\Phi} := sup\left\{\int_{0}^{2\pi} |f(x)g(x)|dx: g \in L_{\Psi}(\mathbb{T}), \int_{0}^{2\pi} \Psi(|f(x)|)dx \leq 1\right\},$$

Orlicz normuna göre ya da

$$\|f\|_{\Phi}^{*} := inf\left\{k > 0: \int_{0}^{2\pi} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right)dx \leq 1\right\}$$

Luxemburg normuna göre bir Banach uzayıdır. Bu Banach uzayı, Φ tarafından üretilen Orlicz uzayı olarak adlandırılır [74, pp. 60–69].

$1 < p < \infty$ için $L_{\Phi}(\mathbb{T})$ Orlicz uzayı, $L^{p}(\mathbb{T})$ Lebesgue uzayının genellemelerinden biridir. $1 < p < \infty$ için, eğer $\Phi(u) := \frac{u^{p}}{u}$ alırsak, bu durumda $L_{\Phi}(\mathbb{T})$ uzayı $L^{p}(\mathbb{T})$ Lebesgue uzayı ile çakışır. $L_{\Phi}(\mathbb{T})$ uzayından olan her fonksiyon $\mathbb{T}$ üzerinde integrallenebilirdir [75, p. 50], yani, $L_{\Phi}(\mathbb{T}) \subset L^{1}(\mathbb{T})$.

Orlicz uzayları hakkında daha detaylı bilgiye [66], [68], [74], [75] nolu kaynaklardan ulaşılabilir.

Orlicz ve Luxemburg normları

$$\|f\|_{\Phi}^{*} \leq \|f\|_{\Phi} \leq 2\|f\|_{\Phi}^{*}, \qquad f \in L_{\Phi}(\mathbb{T}),$$

eşitliklerini sağlar ve böylece bu iki normun denk olduğu görülür. Buna ek olarak, Luxemburg normuna göre Orlicz normu [74, pp. 79–80]

$$\|f\|_{\Phi} := \sup\left\{\int_{0}^{2\pi} |f(x)g(x)|dx : \|g\|_{\Psi}^{*} \leq 1\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

3.5.5 Tanım $\Phi^{-1}: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu Φ Young fonksiyonunun ters fonksiyonu olsun ve

$$h(t) := \limsup_{x\to\infty} \frac{\Phi^{-1}(x)}{\Phi^{-1}(tx)},\ t > 0$$

koşulunu sağlasın. α_{Φ} ve β_{Φ}

$$\alpha_{\Phi} := \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-log\ h(t)}{log\ t}\right) \text{ ve } \beta_{\Phi} := \lim_{t\to\infty}\left(\frac{-log\ h(t)}{log\ t}\right)$$

biçiminde tanımlanır ve alt ve üst Boyd indisleri olarak adlandırılır [76]. Boyd indisleri $0 \leq \alpha_{\Phi} \leq \beta_{\Phi} \leq 1,\ \alpha_{\Phi} + \beta_{\Psi} = 1$ ve $\alpha_{\Psi} + \beta_{\Phi} = 1$ koşullarını sağlar. Bu indisler ilk defa Matuszewska ve Orlicz tarafından [77] nolu çalışmada incelenmiştir.

$L_{\Phi}(\mathbb{T}, \omega)$ Orlicz uzayının yansımalı olması için gerek ve yeter koşul $0 < \alpha_{\Phi} \leq \beta_{\Phi} < 1$.

Eğer $1 \leq q < \frac{1}{\beta_\Phi} \leq \frac{1}{\alpha_\Phi} < p \leq \infty$ ise, bu durumda $L_p(\mathbb{T}) \subset L_\Phi(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T})$ elde edilir. Bu kapsamaya devam edilirse $L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_\Phi(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$ elde edilir [78].

Boyd indisleri hakkında daha detaylı bilgiye [76], [79]–[81] nolu referanslardan ulaşılabilir.

$\omega f \in L_\Phi(\mathbb{T})$ koşulunu sağlayan $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfı

$\|f\|_{\Phi,\omega} := \|\omega f\|_\Phi$

normuna göre $L_\Phi(\mathbb{T}, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzayı olarak adlandırılır.

Her $f \in L_\Phi(\mathbb{T})$ ve $g \in L_\Psi(\mathbb{T})$ fonksiyonları için Hölder eşitsizlikleri

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_\Phi \|g\|_\Psi^*$$

ve

$$\int_0^{2\pi} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_\Phi^* \|g\|_\Psi$$

biçiminde tanımlanır [74, p. 80].

Eğer $\omega \in L_\Phi(\mathbb{T})$ ve $\frac{1}{\omega} \in L_\Psi(\mathbb{T})$ ise, bu durumda Hölder eşitsizliğinden $L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_\Phi(\mathbb{T}, \omega) \subset L^1(\mathbb{T})$ elde edilir.

3.5.6 Tanım $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. ω ağırlık fonksiyonlarının sınıfı olan $A_p(\mathbb{T})$ Muckenhoupt sınıfı

$$\left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{1}{|I|}\int_I \omega^{-q}(x)dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C$$

koşulunu sağlar. Burada, I dan bağımsız olan C sabiti sonludur. I, $\mathbb{T}$ de herhangi bir alt aralıktır ve $|I|$ ile I nın uzunluğu gösterilir.

Muckenhoupt sınıfı hakkında daha detaylı bilgiye [53], [78] nolu referanslardan ulaşılabilir.

3.5.7 Tanım $f \in L_\Phi(\mathbb{T}, \omega)$ fonksiyonlarına T_n polinomları tarafından en iyi yaklaşım

$$E_n(f)_{L_\Phi(\mathbb{T},\omega)} := \inf_{T_n} \|f - T_n\|_{\Phi,\omega}$$

biçiminde tanımlanır, burada T_n derecesi n den küçük olan trigonometrik polinomlar kümesidir.

3.5.8 Tanım $0 < \alpha_\Phi \leq \beta_\Phi < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ Boyd indislerine göre $L_\Phi(\mathbb{T}, \omega)$ ağırlıklı Orlicz uzayı olsun. $f \in L_\Phi(\mathbb{T}, \omega)$ fonksiyonlarının k- düzgünlük modülü

$$\Omega^k_{\Phi,\omega}(f;\delta) = \sup_{\substack{|h_i|\le\delta \\ 1\le i\le k}} \left\| \prod_{i=1}^{k} \left(I - \sigma_{h_i}\right) f \right\|_{\Phi,\omega}, \quad \delta > 0,$$

biçiminde tanımlanır ve burada I özdeşlik operatörüdür ve

$$(\sigma_h)(f;x) := \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} f(x+t)dt\,, 0 < h < \pi, x \in \mathbb{T}.$$

biçiminde tanımlanır. $\sigma_{h,}$ $L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ üzerinde tanımlı sınırlı operator olduğundan dolayı $\Omega^k_{\Phi,\omega}(f;\delta)$ düzgünlük modülü iyi tanımlıdır [21, Lemma 1]. $L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ uzayı ötelemede değişmez olduğundan düzgünlük modülü bu şekilde tanımlanmıştır.

$\Omega^k_{\Phi,\omega}(f;\cdot)$ düzgünlük modülü azalmayan, pozitif ve sürekli fonksiyondur ve $f,g \in L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ fonksiyonları için

$\Omega^k_{\Phi,\omega}(f+g,\delta) \le \Omega^k_{\Phi,\omega}(f;\delta) + \Omega^k_{\Phi,\omega}(g;\delta)$

koşullarını sağlar.

3.5.9 Tanım $\alpha > 0$ için, $k = \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1$ olsun. $Lip\left(\alpha, L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\right)$ genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı

$$Lip\left(\alpha, L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\right) = \left\{f \in L_\Phi(\mathbb{T},\omega) : \Omega^k_{\Phi,\omega}(f;\delta) = O(\delta^\alpha), \delta > 0\right\}$$

olarak tanımlanır.

3.5.10 Tanım $r = 1,2, \ldots$ için ağırlıklı Sobolev tipli uzaylar

$$W^r_{L_{\Phi,\omega}} = \left\{f \in L_\Phi(\mathbb{T},\omega) : f^{(r-1)} \text{ mutlak süreklidir ve } f^{(r)} \in L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\right\}$$

$$W^{r,\alpha}_{L_{\Phi,\omega}} = \left\{f \in W^r_{L_{\Phi,\omega}} : f^{(r)} \in Lip\left(\alpha, L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\right)\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

4. ANA TEOREMLER

4.1 Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Yaklaşım

Bu kısımda $L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{T})$ ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların türevlerine, bu fonksiyonların Fourier serisinin kısmi toplamlarının alt Nörlund ve alt Riesz metotları ile yaklaşım hızı incelenmiştir.

4.1.1 Yardımcı Sonuçlar

4.1.1.1 Önerme [82] $1 < p, q < \infty, \omega \in A_p(\mathbb{T})$ ve $r \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $f \in Lip\left(1, L_{\omega}^{pq}\right)$ ise bu durumda $f^{(r)}$ mutlak süreklidir ve $f^{(r+1)} \in L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{T})$.

4.1.1.2 Önerme [82] $1 < p, q < \infty, \omega \in A_p(\mathbb{T})$ ve $\mathrm{r} \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $f \in \mathrm{W}_{\mathrm{pq.\omega}}^{\mathrm{r},1}$ ve $f \in L_{\omega}^{p,q}(\mathbb{T})$ için

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right) - \sigma_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-1}), \qquad n=1,2,\ldots$$

olur.

4.1.1.3 Önerme [82] $1 < p, q < \infty, \omega \in A_p(\mathbb{T}), 0 < \alpha \leq 1$ ve $r \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $f \in W_{pq.\omega}^{r,\alpha}$ için

$$\left\|f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2, \ldots \tag{4.1}$$

olur.

4.1.1.4 Önerme [82] $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi pozitif sayıların artmayan bir dizisi olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} m^{-\alpha} p_{\lambda_{n-m}} = O\left(\lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right)$$

elde edilir.

4.1.2 Ana Teoremler

4.1.2.1 Teorem $\boldsymbol{1 < p, q < \infty, \omega \in A_p(\mathbb{T}), 0 < \alpha \leq 1, r \in \mathbb{N}}$ ve $\left(\boldsymbol{p_{\lambda_n}}\right)$ dizisi

$$(\lambda_n + 1)p_{\lambda_n} = O\left(P_{\lambda_n}\right) \tag{4.2}$$

koşulunu sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $f \in W_{pq,\omega}^{r,\alpha}$ ise, bu durumda

$$\left\|f^{(r)}-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O(\lambda_n^{-\alpha}),\qquad n=1,2,\ldots$$

olur.

İspat. 1. Durum

$0<\alpha<1$ olsun.

$$f^{(r)}(x)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n}p_{\lambda_n-m}\left(f^{(r)}\right)(x)$$

olduğundan

$$f^{(r)}(x)-N_n^{\lambda}\left(x,f^{(r)}\right)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n}p_{\lambda_n-m}\left[f^{(r)}(x)-S_m\left(x,f^{(r)}\right)\right]$$

elde edilir. 4.1.1.3 Önerme, 4.1.1.4 Önerme ve (4.2) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)}-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}\leq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n}p_{\lambda_n-m}\left\|f^{(r)}-S_m\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}p_{\lambda_n-m}O(m^{-\alpha})+\frac{p_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}}\left\|f^{(r)}-S_0\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda_n}}O\left(\lambda_n^{-\alpha}P_{\lambda_n}\right)+O\left(\frac{1}{\lambda_n+1}\right)$$

$$=O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha=1$ olsun.

$$N_n^{\lambda}\left(x,f^{(r)}\right)=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n}p_{\lambda_n-m}A_m\left(x,f^{(r)}\right)$$

olmak üzere Abel dönüşümü kullanılarak

$$S_n\big(f^{(r)}\big)(x) - N_n^{\lambda}\big(f^{(r)}\big)(x) = \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\big(P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}\big)A_m\big(x, f^{(r)}\big)$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left(\frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}}{m} - \frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m - 1}}{m+1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} kA_k\big(x, f^{(r)}\big)\right)$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lambda_n} kA_k\big(x, f^{(r)}\big)\right)$$

elde edilir ve böylece

$$\left\|S_n\big(f^{(r)}\big) - N_n^{\lambda}\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega} \leq \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}}{m} - \frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m - 1}}{m+1}\right|$$

$$\times \left\|\sum_{k=1}^{m} kA_k\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega} + \frac{1}{\lambda_n + 1}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n} kA_k\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega}$$

olur.

$$S_n\big(x, f^{(r)}\big) - \sigma_n\big(x, f^{(r)}\big) = \frac{1}{\lambda_n + 1}\sum_{k=1}^{\lambda_n} kA_k\left(x, f^{(r)}\right)$$

olmak üzere, 4.1.1.2 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n} kA_k\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega} = (\lambda_n + 1)\left\|S_n\big(f^{(r)}\big) - \sigma_n\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega} = O(1)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|S_n\big(f^{(r)}\big) - N_n^{\lambda}\big(f^{(r)}\big)\right\|_{pq,\omega}$$

$$\leq \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}}{m} - \frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m - 1}}{m+1}\right| \; O(1) + O\left(\lambda_n^{-1}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right)\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|+O\left(\lambda_n^{-1}\right) \tag{4.3}$$

elde edilir.

$$\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}=\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=\lambda_n-m+1}^{\lambda_n}p_k-mp_{\lambda_n-m}\right).$$

Bu eşitlik (p_{λ_n}) dizisi azalmayan olduğunda $\left(\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}\right)_{m=1}^{\lambda_n+1}$ dizisinin artmayan olmasını, (p_{λ_n}) dizisi artmayan olduğunda $\left(\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}\right)_{m=1}^{\lambda_n+1}$ dizisinin azalmayan olmasını gerektirir. Son eşitlik aynı zamanda

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|=\left|p_{\lambda_n}-\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1}\right|=\frac{1}{\lambda_n+1}O\left(P_{\lambda_n}\right)$$

eşitsizliğini gösterir. Bu eşitsizlik ve (4.3) kullanılarak

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O\left({\lambda_n}^{-1}\right) \tag{4.4}$$

elde edilir. (4.1) ve (4.4) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)}-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir. ■

4.1.2.2 Teorem $1<p,q<\infty, \omega\in A_p(\mathbb{T}), 0<\alpha\leq 1, r\in\mathbb{N}$ ve (p_{λ_n}) dizisi

$$\sum_{\lambda_m=0}^{\lambda_n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_{\lambda_m}}{\lambda_m+1}\right)\right|=O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1}\right) \tag{4.5}$$

koşulunu sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $f\in W_{pq,\omega}^{r,\alpha}$ ise, bu durumda

$$\left\|f^{(r)}-R_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega}=O\left(\lambda_n^{-\alpha}\right),\qquad n=1,2,\ldots$$

olur.

İspat. 1. Durum

$0<\alpha<1$ olsun.

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m f^{(r)}(x)$$

olmak üzere $R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right)$ tanımı da kullanılarak

$$f^{(r)}(x) - R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m \left[f^{(r)}(x) - S_m\left(x, f^{(r)}\right)\right]$$

elde edilir. 4.1.1.3 Önerme kullanılarak

$$\left\| f^{(r)} - R_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega} \leq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m \left\| f - S_m\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right) \sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} + \frac{p_0}{P_{\lambda_n}} \left\| f^{(r)} - S_0\left(f^{(r)}\right) \right\|_{pq,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right) \sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} \tag{4.6}$$

elde edilir ve Abel dönüşümü kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} P_m \left[m^{-\alpha} - (m+1)^{-\alpha}\right] + \lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} + \lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}$$

elde edilir ve (4.5) kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} \left(\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} k^{-\alpha}\right) + \frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n + 1} \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha}$$

$$= O\left({\lambda_n}^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right)$$

elde edilir. Bu durum

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} = O\left(\lambda_n{}^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right)$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik ve (4.6) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - R_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha = 1$ olsun. Abel dönüşümünü kullanarak

$$R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} \left[P_m \left(S_m\left(x, f^{(r)}\right) - S_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right) + P_{\lambda_n} S_n\left(x, f^{(r)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m \left(A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right) + S_n\left(x, f^{(r)}\right),$$

ve böylece

$$R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) - S_n\left(x, f^{(r)}\right) = -\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m \left(A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right)$$

olur. Abel dönüşümünü tekrar uygulayarak

$$\sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right) = \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} \frac{P_m}{m+1} (m+1) A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} \left(\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right) \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) A_{k+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right)$$

$$+ \frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n + 1} \sum_{k=0}^{\lambda_n - 1} (k+1) A_{k+1}\left(x, f^{(r)}\right)$$

elde edilir. (4.1) ve (4.5) kullanılarak

$$\left\|\sum_{m=0}^{\lambda_n-1} P_m\left(A_{m+1}(f^{(r)})\right)\right\|_{pq,\omega} \leq \sum_{m=0}^{\lambda_n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right|\left\|\sum_{k=0}^{m}(k+1)\left(A_{k+1}(f^{(r)})\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$+\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1}\left\|\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}(k+1)\left(A_{k+1}(f^{(r)})\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$=\sum_{m=0}^{\lambda_n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right|(m+2)\left\|S_{m+1}(f^{(r)})-\sigma_{m+1}(f^{(r)})\right\|_{pq,\omega}$$

$$+P_{\lambda_n}\left\|S_n(f^{(r)})-\sigma_n(f^{(r)})\right\|_{pq,\omega}$$

$$=O(1)\sum_{m=0}^{\lambda_n-1}\left|\frac{P_m}{m+1}-\frac{P_{m+1}}{m+2}\right|+O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\|R_n^{\lambda}(f^{(r)})-S_n(f^{(r)})\right\|_{pq,\omega}=\frac{1}{P_{\lambda_n}}\left\|\sum_{m=0}^{\lambda_n-1}P_m\left(A_{m+1}(f^{(r)})\right)\right\|_{pq,\omega}$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda_n}}O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)=O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

olur. Bu durum ve (4.1) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)}-R_n^{\lambda}(f^{(r)})\right\|_{pq,\omega}=O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. ■

Eğer $p_{\lambda_n}=A_{\lambda_n}^{\beta-1}(\beta>0)$ ise, $k\geq 1$ için $A_0^{\beta}=1$, $A_k^{\beta}=\frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)}{k!}$ olmak üzere

$$N_n^{\lambda}(x,f^{(r)})=\sigma_{\lambda_n}^{\beta}(x,f^{(r)})=\frac{1}{A_{\lambda_n}^{\beta}}\sum_{m=0}^{\lambda_n}A_{\lambda_n-m}^{\beta-1}S_m(x,f^{(r)})$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_{\lambda_n}^{\beta}\left(f^{(r)}\right)$ Cesàro alt toplamları ile $f \in L_{\omega}^{pq}(\mathbb{T})$ fonksiyonuna yaklaşım ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.1.2.3 Sonuç $1 < p, q < \infty,\ \omega \in A_p(\mathbb{T}), 0 < \alpha \leq 1, r \in N$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $f \in W_{pq,\omega}^{r,\alpha}$ ise, bu durumda

$$\left\|f^{(r)} - \sigma_{\lambda_n}^{\beta}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,\omega} = O({\lambda_n}^{-\alpha}), \qquad n = 1,2, \dots$$

olur.

4.2 Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım

4.2.1 Yardımcı Sonuçlar

4.2.1.1 Önerme [35] $p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T}), \omega(\cdot) \in A_p(\mathbb{T})$ ve $0 < \alpha < 1$ olsun. Eğer $f \in Lip\left(\alpha, L_{\omega}^{p(\cdot)}\right)$ ise, bu durumda

$$\|f - S_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad n=1,2,\dots$$

olur.

4.2.1.2 Önerme [35] $p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T}), \omega(\cdot) \in A_p(\mathbb{T})$ olsun. Eğer $f \in Lip\left(1, L_{\omega}^{p(\cdot)}\right)$ ise, bu durumda

$$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_{p(\cdot),\omega} = O(n^{-1}), \qquad n=1,2,\dots$$

olur.

4.2.1.3 Önerme [41] $T = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi negatif olmayan tamsayıların alt üçgensel regüler matrisi ve satır toplamı 1 olsun. Eğer

(i) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMIMS$

(ii) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMDMS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,0} = O(1)$

koşullarından biri sağlanıyorsa $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}(k+1)^{-\alpha} = O((\lambda_n + 1)^{-\alpha})$$

elde edilir.

4.2.1.4 Önerme [47] $T = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi negatif olmayan tamsayıların alt üçgensel regüler matrisi ve satır toplamı 1 olsun. Eğer $r = [\frac{\lambda_n}{2}]$ için

(i) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMDS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,0} = O(1)$

(ii) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMIS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,r} = O(1)$

koşullarından biri sağlanıyorsa $0 < \alpha < 1$ için

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}(k+1)^{-\alpha} = O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

4.2.1.5 Önerme [47] $k = 1,2,\dots,n$ için

$$\left|\sum_{m=0}^{k} a_{\lambda_n,m} - (k+1)a_{\lambda_n,k}\right| \le \sum_{m=1}^{k} m\left|a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m}\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

4.2.2 Ana Teoremler

4.2.2.1 Teorem $f \in Lip\left(\alpha, L_\omega^{p(\cdot)}\right), \omega(\cdot) \in A_p(\mathbb{T}),\ p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n^{-\alpha})$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regüler matris olsun. Eğer

(i) $0 < \alpha < 1$, $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMIS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,r} = O(1)$,

(ii) $0 < \alpha < 1$, $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMDS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,0} = O(1)$,

(iii) $\alpha = 1$ $\displaystyle\sum_{k=1}^{\lambda_n - 1} (\lambda_n - k)\left|a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k}\right| = O(1)$

koşullarından biri sağlanıyorsa ve $r = [\frac{\lambda_n}{2}]$ ise, bu durumda

$\left\|f - \tau_n^{\lambda}\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$

elde edilir.

İspat. 1. ve 2. Durum

$f \in Lip\left(\alpha, L_{\omega}^{p(\cdot)}\right), \omega(\cdot) \in A_p(\mathbb{T}), \quad 0 < \alpha < 1,\ p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n^{-\alpha})$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regüler matrisi olsun. Varsayalım ki (i) ve (ii) koşulları sağlansın. Bu durumda $\tau_n^{\lambda}(x,f)$ ve $S_{\lambda_n}^{(A)}$ tanımlarını kullanarak

$$T_n^{\lambda}(x,f) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\big(S_k(x,f) - f(x)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\big(S_k(x,f) - f(x)\big) + S_{\lambda_n}^{(A)}(x,f) - S_{\lambda_n}^{(A)}(x,f)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\big(S_k(x,f) - f(x)\big) + \left(S_{\lambda_n}^{(A)} - 1\right) f(x)$$

elde edilir. $\left|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1\right| = (\lambda_n^{-\alpha})$ olduğundan, 4.2.1.1 Önerme ve 4.2.1.4 Önerme kullanılarak

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f) - f\right\|_{p(\cdot),\omega} \leq a_{\lambda_n,0}\|S_0(f) - f\|_{p(\cdot),\omega} + \sum_{k=1}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\|S_k(f) - f\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$+ \left|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1\right|\|f\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-1}) + O(1)\sum_{k=1}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k} k^{-\alpha} + O(\lambda_n^{-\alpha})$$

$$= O(\lambda_n^{-\alpha}).$$

3. Durum

4.2.1.1 Önerme kullanılarak

$$\left\|f - \tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} \leq \left\|S_n^{\lambda}(f) - \tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} + \left\|f - S_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= \left\|S_n^{\lambda}(f) - \tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} + O(\lambda_n^{-1})$$

elde edilir. Bu durumda ispatı tamamlamak için

$$\left\|S_n^{\lambda}(f) - \tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-1})$$

eşitsizliğinin doğruluğu gösterilmelidir. $A_{\lambda_n,k} \coloneqq \sum_{m=k}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,m}$ olsun. Böylece

$$\tau_n^{\lambda}(x,f) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k} S_k(x,f) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\left(\sum_{m=0}^{k} U_m(x,f)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n}\left(\sum_{m=k}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,m}\right) U_k(x,f) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} A_{\lambda_n,k} U_k(x,f)$$

olur. Ayrıca

$$S_n^{\lambda}(x,f)=\sum_{k=0}^{\lambda_n}U_k(x,f)=A_{\lambda_n,0}\sum_{k=0}^{\lambda_n}U_k(x,f)+\left(1-A_{\lambda_n,0}\right)\sum_{k=0}^{\lambda_n}U_k(x,f)$$

$$=\sum_{k=0}^{\lambda_n}A_{\lambda_n,0}U_k(x,f)+\left(1-S_{\lambda_n}^{(A)}\right)S_n^{\lambda}(x,f).$$

Böylece

$$T_n^{\lambda}(x,f)-f(x)=\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(x,f)+\left(S_{\lambda_n}^{(A)}-1\right)S_n^{\lambda}(x,f).$$

Kısmi toplamların sınırlılığından

$$\left\|S_n^{\lambda}(f)-\tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}\leq\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\left|S_{\lambda_n}^{(A)}-1\right|\|f\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}+O(\lambda_n^{-1}) \tag{4.7}$$

elde edilir. Şimdi ise

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}=O(\lambda_n^{-1}) \tag{4.8}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu gösterelim.

$$b_{\lambda_n,k}=\frac{A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}}{k},\qquad k=1,2,\dots,n$$

olsun. Abel dönüşümü uygulanarak

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(x,f)=\sum_{k=1}^{\lambda_n}b_{\lambda_n,k}kU_k(x,f)$$

$$=b_{\lambda_n,\lambda_n}\sum_{m=1}^{\lambda_n}mU_m(x,f)+\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left(b_{\lambda_n,k}-b_{\lambda_n,k+1}\right)\left(\sum_{m=1}^{k}mU_m(x,f)\right)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,0}\right)U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$\leq\left|b_{\lambda_n,\lambda_n}\right|\left\|\sum_{m=1}^{\lambda_n}mU_m(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left|b_{\lambda_n,k}-b_{\lambda_n,k+1}\right|\left\|\sum_{m=1}^{k}mU_m(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} \tag{4.9}$$

olur. 4.2.1.2 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{m=1}^{\lambda_n} mU_m(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} = (\lambda_n+1)\left\|\sigma_n^{\lambda}(f) - S_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$= (\lambda_n+1)O(\lambda_n^{-1}) = O(1) \tag{4.10}$$

elde edilir. (4.9) ve (4.10) kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}\left(A_{\lambda_n,k} - A_{\lambda_n,0}\right)U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(1)\left|b_{\lambda_n,\lambda_n}\right| + O(1)\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left|b_{\lambda_n,k} - b_{\lambda_n,k+1}\right| \tag{4.11}$$

elde edilir. $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n^{-\alpha})$ olduğundan

$$\left|b_{\lambda_n,\lambda_n}\right| = \frac{\left|A_{\lambda_n,k} - A_{\lambda_n,0}\right|}{\lambda_n} = \frac{\left|a_{\lambda_n,\lambda_n} - S_{\lambda_n}^{(A)}\right|}{\lambda_n}$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}\left(S_{\lambda_n}^{(A)} - a_{\lambda_n,\lambda_n}\right) \le \frac{1}{\lambda_n}S_{\lambda_n}^{(A)}$$

$$= \frac{1}{\lambda_n}O(1) = O(\lambda_n^{-1}). \tag{4.12}$$

Son olarak

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left|b_{\lambda_n,k} - b_{\lambda_n,k+1}\right| = O(\lambda_n^{-1}) \tag{4.13}$$

eşitsizliğinin doğruluğunu göstermeliyiz.

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}(\lambda_n - k)\left|a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k}\right| = O(1)$$

ve $r := [\frac{\lambda_n}{2}]$ olmak üzere 4.2.1.5 Önerme kullanılarak

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left|b_{\lambda_n,k} - b_{\lambda_n,k+1}\right| \le \sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}\left|a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}\left|a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m}\right| + \sum_{k=r}^{\lambda_n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}m\left|a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m}\right| \tag{4.14}$$

elde edilir. (4.14) ile verilen toplamın ilk terimine Abel dönüşümü ve (iii) koşulu uygulanırsa

$$\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k}\left|a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m}\right| \le \sum_{k=1}^{r}\left|a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(\lambda_n - k)} (\lambda_n - k) \left| a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(\lambda_n - r)} \sum_{k=1}^{r} (\lambda_n - k) \left| a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k} \right|$$

$$\leq \frac{1}{(\lambda_n - r)} O(1) = O(\lambda_n^{-1}) \tag{4.15}$$

elde edilir. (4.14) ile verilen toplamın ikinci terimi için

$$\sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{k} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right|$$

$$\leq \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k(k+1)} \left\{ \sum_{m=1}^{r} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right| + \sum_{m=r}^{k} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right| \right\}$$

$$= \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=1}^{r} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right| + \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=r}^{k} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right|$$

$$\coloneqq I_1 + I_2$$

elde edilir. $\sum_{k=1}^{r} \left| a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k} \right| = O(\lambda_n^{-1})$ olduğundan I_1 ve I_2 için

$$I_1 \leq \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{r} \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right|$$

$$\leq \frac{1}{r+1} \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \left(\sum_{m=r}^{k} \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right| \right)$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n} \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \left(\sum_{m=r}^{k} \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right| \right)$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n} \sum_{k=1}^{\lambda_n - 1} (\lambda_n - k) \left| a_{\lambda_n,k-1} - a_{\lambda_n,k} \right| = \frac{2}{\lambda_n} O(1) = O(\lambda_n^{-1})$$

ve

$$I_2 = \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k(k+1)} \sum_{m=r}^{k} m \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right|$$

$$\leq \sum_{k=r}^{\lambda_n - 1} \frac{1}{k+1} \sum_{m=r}^{k} \left| a_{\lambda_n,m-1} - a_{\lambda_n,m} \right|$$

$$\leq \frac{1}{r+1}\sum_{k=r}^{\lambda_n-1}\left(\sum_{m=r}^{k}\left|a_{\lambda_n,m-1}-a_{\lambda_n,m}\right|\right)$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k=r}^{\lambda_n-1}\left(\sum_{m=r}^{k}\left|a_{\lambda_n,m-1}-a_{\lambda_n,m}\right|\right)$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k=\lambda_n-r}^{\lambda_n-1}(\lambda_n-k)\left|a_{\lambda_n,k-1}-a_{\lambda_n,k}\right|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_n}\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}(\lambda_n-k)\left|a_{\lambda_n,k-1}-a_{\lambda_n,k}\right| = \frac{2}{\lambda_n}O(1) = O(\lambda_n^{-1})$$

elde edilir. Böylece

$$\sum_{k=r}^{\lambda_n-1}\frac{1}{k(k+1)}\sum_{m=1}^{k} m\left|a_{\lambda_n,m-1}-a_{\lambda_n,m}\right| = O(\lambda_n^{-1})$$

olur ve dolayısıyla

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n-1}\left|b_{\lambda_n,k}-b_{\lambda_n,k+1}\right| = O(\lambda_n^{-1})$$

elde edilir. Böylece (4.13) nin doğruluğu elde edilmektedir. Bu da ispatı tamamlamaktadır.■

4.2.2.1 Sonuç $f \in Lip\left(\alpha, L_\omega^{p(\cdot)}\right), \omega(\cdot) \in A_p, p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ ve $\left(p_{\lambda_n}\right)$ pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olsun. Eğer

(i) $0 < \alpha < 1$ $\left(p_{\lambda_n}\right) \in AMDS$,

(ii) $0 < \alpha < 1$ $\left(p_{\lambda_n}\right) \in AMIS$ ve $(\lambda_n+1)p_{\lambda_n} = O\left(P_{\lambda_n}\right)$,

(iii) $\alpha = 1,\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}|\Delta_k p_k| = O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$

koşullarından biri sağlanıyorsa, bu durumda

$$\left\|f-N_n^\lambda\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

4.2.2.2 Teorem $f \in Lip\left(\alpha, L_\omega^{p(\cdot)}\right), \omega(\cdot) \in A_{p(\cdot)}\mathbb{T},\ p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ satır toplamı 1 olan alt üçgensel regüler matris olsun. Eğer

(i) $0 < \alpha < 1$ $\{a_{\lambda_n,k}\} \in AMDMS$ ve $(\lambda_n+1)a_{\lambda_n,0} = O(1)$,

(ii) $0 < \alpha < 1$ $\{a_{\lambda_n,k}\} \in AMIMS,$

(iii) $\alpha = 1$ $\sum_{k=0}^{\lambda_n - 1} \left|\Delta_k A_{\lambda_n,k}\right| = O(\lambda_n^{-1})$

koşullarından biri sağlanıyorsa, bu durumda

$\left\|f - T_n^{\lambda}\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$

elde edilir.

İspat.

1. ve 2. Durum

$f \in Lip\left(\alpha, L_{\omega}^{p(\cdot)}\right), 0 < \alpha < 1, p(\cdot) \in \wp_0(\mathbb{T})$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n^{-\alpha})$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regüler olsun. 4.2.1.1 Önerme ve 4.2.1.3 Önerme birlikte kullanılarak

$$T_n^{\lambda}(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\big(S_k(x,f) - f(x)\big)$$

ve böylece

$$\left\|T_n^{\lambda}(f) - f\right\|_{p(\cdot),\omega} \le \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\|S_k(f) - f\|_{p(\cdot),\omega} \preccurlyeq \sum_{k=0}^{\lambda_n} (k+1)^{-\alpha} a_{\lambda_n,k} = O({\lambda_n}^{-\alpha})$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) nin ispatlarını tamamlamaktadır.

3. Durum

$|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O({\lambda_n}^{-\alpha})$ ve Abel dönüşümü iki kez uygulanarak

$$T_n^{\lambda}(x,f) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\big(S_k(x,f) - f(x)\big)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n - 1} \left(S_k(x,f) - S_{k+1}(x,f)\right) \sum_{i=0}^{k} a_{\lambda_n,i} + S_n^{\lambda}(x,f) - f(x)$$

$$= S_n^{\lambda}(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n - 1} (k+1) U_{k+1}(x,f) A_{\lambda_n,k}$$

$$= S_n^{\lambda}(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n - 2} \left(A_{\lambda_n,k} - A_{\lambda_n,k+1}\right) \sum_{i=0}^{k} (i+1)\, U_{i+1}(x,f)$$

$$-A_{\lambda_n,\lambda_n-1}\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}(k+1)\,U_{k+1}(x,f)$$

$$=S_n^{\lambda}(x,f)-f(x)-\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right)\sum_{i=0}^{k}(i+1)\,U_{i+1}(x,f)$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=0}^{\lambda_n-1}a_{\lambda_n,i}\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}(k+1)\,U_{k+1}(x,f)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|T_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{p(\cdot),\omega}\leq\left\|S_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{p(\cdot),\omega}$$

$$+\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|\left\|\sum_{i=1}^{k+1}i\,U_i(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}+\frac{1}{\lambda_n}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}k\,U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}\tag{4.16}$$

elde edilir.

$$\sigma_n^{\lambda}(f;x)-S_n^{\lambda}(f;x)=\frac{1}{\lambda_n+1}\sum_{k=1}^{\lambda_n}kU_k(x,f),$$

olduğundan, 4.2.1.2 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}k\,U_k(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}=(\lambda_n+1)\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-\ S_n^{\lambda}(f)\right\|_{p(\cdot),\omega}=O(1)\tag{4.17}$$

elde edilir. (4.16) ve (4.17) ve 4.2.1.1 Önerme kullanılarak

$$\left\|T_n^{\lambda}(f)-f(\cdot)\right\|_{p(\cdot),\omega}\preccurlyeq\frac{1}{\lambda_n}+\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|$$

elde edilir. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|=O\left({\lambda_n}^{-1}\right),$$

ise , bu durumda

$$\left\|T_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{p(\cdot),\omega}=O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

4.2.2.2 Sonuç $f\in Lip\left(\alpha,L_{\omega}^{p(\cdot)}\right),\omega(\cdot)\in A_{p(\cdot)}\mathbb{T},\ p(\cdot)\in\wp_0(\mathbb{T})$ ve $\left(p_{\lambda_n}\right)$ pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olsun. Eğer

$(\boldsymbol{i})$ $0<\alpha<1$ $\left(p_{\lambda_n}\right)\in AMIMS$

(ii) $0 < \alpha < 1$ $\left(p_{\lambda_n}\right) \in AMDMS$ ve $(\lambda_n + 1)p_{\lambda_n} = O\left(P_{\lambda_n}\right)$,

(iii) $\alpha = 1$ $\sum_{k=0}^{\lambda_n - 1} \left|\Delta_k \frac{P_k}{k+1}\right| = O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$

koşullarından biri sağlanıyorsa, bu durumda

$\left\|f - R_n^{\lambda}\right\|_{p(\cdot),\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$

elde edilir.

4.3 Morrey Uzaylarında Yaklaşım

4.3.1 Yardımcı Sonuçlar

Morrey uzaylarında ekstrapolasyon teoremi Duoandikoetxea ve Rosenthal [19, Corollary 4.4] tarafından elde edilmişitir. Hilbert operatörü

$$H(x,f) := \int_{\mathbb{R}} \frac{f(t)}{t-x} dt := \lim_{\varepsilon \to 0} H_\varepsilon(f;x) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|t-x| \geq \varepsilon} \frac{f(t)}{t-x} dt.$$

biçiminde tanımlanabilir. Hilbert operatörünü $Ŧ := H(f;x)$ biçiminde gösterelim. [20, Theorem 9] den

$\|H(f)\|_{\{L^p(\mathbb{R})\}} \leq c(p)\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}$

elde edilir. $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ için [19, Corollary 4.4] te verilen extrapolasyon teoreminden

$$\|H(f)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{R})} \leq c(p)\|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{R})} \tag{4.18}$$

elde edilir. Herhangi bir $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ için , $H_\gamma(x,f)$ operatörü

$$H_\gamma(x,f) := \int_{-\pi+\gamma}^{\pi+\gamma} \frac{f(t)}{t-x} dt, \ -\pi + \gamma \leq x \leq \pi + \gamma.$$

biçiminde tanımlı olsun, bu durumda $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ için

$$\left\|H_\beta(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \tag{4.19}$$

eşitsizliği [85] te verilen ispat metoduna benzer şekilde ispatlanır.

4.3.1.1 Önerme $0 \leq \alpha \leq 2, 1 < p < \infty$ ve $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda

$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

$i = 1,2,3$ için $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı 2π periyotlu f_i fonksiyonu

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$$f_2(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \\ 0, & x \in \left(-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \end{cases}$$

$$f_3(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \\ 0, & x \in \left(-\pi, \frac{\pi}{2}\right) \end{cases}$$

biçiminde tanımlı olsun. Varsayalım ki $f = f_1 + f_2 + f_3$ ve $\tilde{f}$ fonksiyonu

$$\tilde{f}(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{2tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt, \tag{4.20}$$

olsun. Bu durumda (4.20) ile verilen fonksiyon kullanılarak

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}_1(\mathrm{x}) + \tilde{f}_2(x) + \tilde{f}_3(x) \tag{4.21}$$

elde edilir. Sırasıyla $\tilde{f}_2$, $\tilde{f}_1$ve $\tilde{f}_3$ fonksiyonlarını inceyeceğiz. İlk olarak $\tilde{f}_2$ fonksiyonunun sınırlılığını inceleyelim. $x \in [-\pi, \pi]$ için

$$\varphi_2(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(t) \left[\frac{1}{2tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} - \frac{1}{t-x}\right] dt. \tag{4.22}$$

(4.20) ile verilen fonksiyonu kullanarak

$$\tilde{f}_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{t-x} dt + \varphi_2(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{f_2(t)}{t-x} dt + \varphi_2(x) = \frac{1}{\pi} H_0(f_2)(x) + \varphi_2(x), \tag{4.23}$$

elde edilir ve böylece (4.19) kullanılarak

$$\left\|\tilde{f}_2\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})} \leq \frac{1}{\pi} \|\mathrm{H}_0(f_2)\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})} + \|\varphi_2\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})}$$

$$\preccurlyeq \|f_2\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})} + \|\varphi_2\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})}$$

$$\preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})} + \|\varphi_2\|_{L^{p,\alpha}(\mathrm{T})} \tag{4.24}$$

elde edilir.

[85, pp. 86–87] te verilen eşitsizlik kullanılarak $-\pi \leq x \leq \pi$ ve $-\pi/2 \leq t \leq \pi/2$ için

$$\left|\frac{1}{2tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}-\frac{1}{t-x}\right| \leq 1, x \neq t,$$

olur ve (4.22) dikkate alınarak

$$|\varphi_2(\mathrm{x})| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |f(t)|\,\mathrm{dt} \tag{4.25}$$

elde edilir ve böylece,

$$\|\varphi_2\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{1,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}}. \tag{4.26}$$

(4.24) ve (4.26) birlikte düşünülerek

$$\|\tilde{f}_2\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}}. \tag{4.27}$$

Şimdi $\tilde{f}_1$ fonksiyonu için hesaplama yapılabilir. $-\pi \leq x \leq \pi/2$ için konjuge fonksiyonu

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt \tag{4.28}$$

biçiminde tanımlanabilir, bu durumda

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{-\frac{\pi}{2}} \frac{f(t)}{t-x}dt + \varphi_1(x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_1(t)}{t-x}dt + \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi}H_0(f_1)(x) + \varphi_1(x), \tag{4.29}$$

elde edilir.

$$|\varphi_1(\mathrm{x})| \leq \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{dt}.$$

Eğer $\pi/2 \leq x \leq \pi$ ise, bu durumda

$$\tilde{f}_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{f(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}dt = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{f(t)}{t-x}dt + \varphi_1(x)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} \frac{f_1(t)}{t-x}dt + \varphi_1(x) = \frac{1}{\pi}H_{\pi}(f_1)(x) + \varphi_1(x), \tag{4.30}$$

elde edilir, burada

$$|\varphi_1(\mathrm{x})| \leq \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{\frac{3\pi}{2}} |f(t)|\,\mathrm{dt} \leq \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{3\pi} |f(t)|\,\mathrm{dt} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\mathrm{dt}.$$

(4.29) ve (4.30) birlikte düşünülürse

$$\tilde{f}_1(x) \;=\; \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} H_0(f_1)(x) + \varphi_1(x), & x \in \left[-\pi, \dfrac{\pi}{2}\right] \\ \dfrac{1}{\pi} H_\pi(f_1)(x) + \varphi_1(x), & x \in \left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right] \end{cases}$$

elde edilir, (4.19) eşitsizliğinden

$$\left\|\tilde{f}_1\right\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\right) \;\leq\; \frac{1}{\pi}\|\mathrm{H}_0(f_1)\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\right) + \|\varphi_1\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\preccurlyeq\; \frac{1}{\pi}\|\mathrm{H}_0(f_1)\|_{L^{p,\alpha}} + \|f_1\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\preccurlyeq\; \|f_1\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq\; \|f\|_{L^{p,\alpha}} \tag{4.31}$$

ve

$$\left\|\tilde{f}_1\right\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right) \;\leq\; \frac{1}{\pi}\|\mathrm{H}_\pi(f_1)\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right) + \|\varphi_1\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right)$$

$$\preccurlyeq\; \frac{1}{\pi}\|\mathrm{H}_\pi(f_1)\|_{L^{p,\alpha}} + \|f\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\preccurlyeq\; \|f_1\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq\; \|f\|_{L^{p,\alpha}} \tag{4.32}$$

elde edilir.

(4.31) ve (4.32) birlikte düşünülürse

$$\left\|\tilde{f}_1\right\|_{L^{p,\alpha}} \leq \left\|\tilde{f}_1\right\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[-\pi,\frac{\pi}{2}\right]\right) + \left\|\tilde{f}_1\right\|_{L^{p,\alpha}}\left(\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]\right) \preccurlyeq\; \|f\|_{L^{p,\alpha}} \tag{4.33}$$

elde edilir. Şimdi

$$\tilde{f}_3(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_3(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}\,dt$$

biçiminde tanımlı $\tilde{f}_3(x)$ fonksiyonu düşünülebilir. Eğer $-\pi/2 \leq x \leq \pi$ ise, bu durumda

$$\varphi_3(x) := \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(t)\left[\frac{1}{2tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} - \frac{1}{t-x}\right]dt$$

ve böylece

$$\tilde{f}_3(x) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)}\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{f(t)}{t-x}\,dt + \varphi_3(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f_3(t)}{t-x} dt + \varphi_3(x) = \frac{1}{\pi} H_0(f_3)(x) + \varphi_3(x).$$

elde edilir. Eğer $-\pi \le x \le -\pi/2$ ise bu durumda

$$\varphi_3(x) := \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} f(t) \left[\frac{1}{2tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} - \frac{1}{t-x} \right] dt$$

ve böylece

$$\tilde{f}_3(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} \frac{f_3(t)}{2\,tan\left(\frac{t-x}{2}\right)} dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{3\pi}{2}}^{-\pi} \frac{f(t)}{t-x} dt + \varphi_3(x)$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-3\pi}^{-\pi} \frac{f_3(t)}{t-x} dt + \varphi_3(x) = \frac{1}{\pi} H_{-2\pi}(f_3)(x) + \varphi_3(x).$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\tilde{f}_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} H_0(f_3)(x) + \varphi_3(x), & x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ \frac{1}{\pi} H_{-2\pi}(f_3)(x) + \varphi_3(x), & x \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\left\|\tilde{f}_3\right\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) \le \frac{1}{\pi} \|\mathrm{H}_0(f_3)\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) + \|\varphi_3\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$$

$$\preccurlyeq \frac{1}{\pi} \|\mathrm{H}_0(f_3)\|_{L^{p,\alpha}} + \|f_3\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\preccurlyeq \|f_3\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}}, \tag{4.34}$$

ve

$$\left\|\tilde{f}_3\right\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right) \le \frac{1}{\pi} \|\mathrm{H}_{-\pi}(f_3)\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right) + \|\varphi_3\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right)$$

$$\preccurlyeq \frac{1}{\pi} \|\mathrm{H}_{-\pi}(f_3)\|_{L^{p,\alpha}} + \|f_3\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\preccurlyeq \|f_3\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}} \tag{4.35}$$

olur. (4.34) ve (4.35) birlikte düşünülürse

$$\left\|\tilde{f}_3\right\|_{L^{p,\alpha}} \le \left\|\tilde{f}_3\right\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) + \left\|\tilde{f}_3\right\|_{L^{p,\alpha}} \left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right) \preccurlyeq c(p) \|f\|_{L^{p,\alpha}} \tag{4.36}$$

elde edilir. Son olarak (4.27),(4.33), (4.36) ve (4.21) birlikte düşünülürse

$$\left\|\tilde{f}\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

elde edilir. ■

4.3.1.2 Önerme $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ olsun. Eğer $f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ ise bu durumda f mutlak süreklidir ve $f' \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$.

İspat. Eğer $f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ ise, bu durumda $\omega_{p,\alpha}(\delta, f) \preccurlyeq \delta$.

$L^{p,\alpha}(\mathbb{T}) \subset L^p(\mathbb{T})$ olduğundan $\|f\|_{L^p} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}}$. Bu son eşitsizlikten

$sup\|\Delta_h f\|_{L^p} \preccurlyeq sup\|\Delta_h f\|_{L^{p,\alpha}}$

ve

$\omega_p(\delta, f) \preccurlyeq \omega_{p,\alpha}(\delta, f)$

elde edilir. Böylece

$$\omega_p(\delta, f) \preccurlyeq \delta \tag{4.37}$$

elde edilir. Buradan f mutlak süreklidir ve $f' \in L^p(\mathbb{T})$. f fonksiyonu $[0,2\pi]$ üzerinde mutlak sürekli olduğundan ve hemen her x için

$$\left(\frac{f(x+t) - f(x)}{t}\right) \to f'(x), \qquad (t \to 0)$$

ve

$$\left(\frac{|f(x+t) - f(x)|^p}{t^p}\right) \to |f'(x)|^p, \qquad (t \to 0) \tag{4.38}$$

elde edilir. (4.38) kullanılarak hemen her x için

$$\left(\frac{2}{\delta}\right)\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|^p}{t^p}dt \to |f'(x)|^p, \qquad (\delta \to 0^+).$$

elde edilir. Fatou lemması kullanılarak

$$\frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_I |f'(x)|^p dx = \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_I \left[\lim_{\delta\to 0^+} \frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{|f(x+t) - f(x)|^p}{t^p}dt\right]dx$$

$$\leq \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_I \left[\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{|\Delta_t f(x)|^p}{t^p}dt\right]dx$$

$$\leq \liminf_{\delta\to 0^+} \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_I \frac{2}{\delta}\left(\frac{2}{\delta}\right)^p \left[\int_0^{\delta} |\Delta_t f(x)|^p\, dt\right]dx$$

$$= \liminf_{\delta\to 0^+} \left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1} \int_0^{\delta}\left[\frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_0^{\delta} |\Delta_t f(x)|^p\, dx\right]dt$$

$$\leq \liminf_{\delta\to 0^+}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_0^{\delta}\|\Delta_t f(x)\|_{L^{p,\alpha}}^p\,dt\right]$$

$$\leq \liminf_{\delta\to 0^+}\left[\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_0^{\delta}\left(\omega_{p,\alpha}(\delta,f)\right)^p\,dt\right]$$

$$\leq \liminf_{\delta\to 0^+}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}\int_0^{\delta}(\delta)^p\,dt$$

$$\preccurlyeq \liminf_{\delta\to 0^+}\left(\frac{2}{\delta}\right)^{p+1}(\delta)^p\delta \preccurlyeq \delta.$$

Böylece

$$\sup_I \frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}}\int_I |f'(x)|^p dx < \infty$$

elde edilir. Dolayısıyla $f' \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$. Bu da ispatı tamamlar. ■

4.3.1.3 Önerme [51] $0 \leq \alpha \leq 2, 1 < p < \infty$ ve $f \in L^{p,\alpha}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda

$\|S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}} \preccurlyeq \|f\|_{L^{p,\alpha}}$

elde edilir.

4.3.1.4 Önerme $0 \leq \alpha \leq 2, 1 < p < \infty$ ve $f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ olsun. Bu durumda $n = 1,2,\ldots$ için

$\|S_n(f) - \sigma_n(f)\|_{L^{p,\alpha}} = O(n^{-1})$

elde edilir.

İspat. Eğer f fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} U_k(f;x),$$

ise, bu durumda f' fonksiyonunun konjuge Fourier serisi

$$\widetilde{f}'(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} kU_k(f;x).$$

olur. Ayrıca,

$$S_n(f;x) - \sigma_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n+1}U_k(f;x) = \frac{1}{n+1}S_n\left(\widetilde{f}';x\right)$$

dır. 4.3.1.1 Önerme ve 4.3.1.3 Önerme kullanılarak $n = 1,2,\ldots$ için

$$\|S_n(f)-\sigma_n(f)\|_{L^{p,\alpha}}=\frac{1}{n+1}\left\|S_n(\widetilde{f'})\right\|_{L^{p,\alpha}}\preccurlyeq\frac{1}{n+1}\left\|\widetilde{f'}\right\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$\preccurlyeq\frac{1}{n+1}\|f'\|_{L^{p,\alpha}}=O(n^{-1})$$

elde edilir. ■

4.3.1.5 Önerme $0<\beta\le 1, 1<p<\infty$ ve $f\in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ olsun. Bu durumda $n=1,2,\ldots$ için

$$\|f-S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}}=O(n^{-\beta})$$

elde edilir.

İspat. Varsayalım ki t_n^* $(n=0,1,\ldots)$, $f\in Lip_{\alpha,p}(\beta)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olsun. Bu durumda

$$\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}}=inf\|f-t_n\|_{L^{p,\alpha}}.$$

(3.7) eşitsizliği kullanılarak

$$\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}}=O\left(\omega_{p,\alpha}\left(f,\frac{1}{n}\right)\right)$$

elde edilir ve böylece

$$\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}}=O\left(n^{-\beta}\right).$$

4.3.1.3 Önerme kullanılarak

$$\|f-S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}}\le\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}}+\|t_n^*-S_n(f)\|_{L^{p,\alpha}}$$

$$=\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}}+\|S_n(t_n^*-f)\|_{L^{p,\alpha}}=O(\|f-t_n^*\|_{L^{p,\alpha}})=O\left(n^{-\beta}\right)$$

elde edilir. ■

4.3.1.6 Önerme [27] $0<\beta<1$ ve $A=\left(a_{n,k}\right)$ matrisi $\left|S_n^{(A)}-1\right|=O\left(n^{-\beta}\right)$ koşulunu sağlasın. Eğer $\left(a_{n,k}\right)\in AMIMS$ yada $\left(a_{n,k}\right)\in AMDMS$ ve $(n+1)a_{n,0}=O(1)$ koşullarından biri sağlanırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\beta}a_{n,k}=O\left((n+1)^{-\beta}\right)$$

elde edilir.

4.3.1.7 Önerme [86] $0 < \beta < 1$ ve $A = \left(a_{n,k}\right)$ matrisi $\left|S_n^{(A)} - 1\right| = O\left(n^{-\beta}\right)$koşulunu sağlayan alt üçgensel regular matris olsun. Eğer $\left(a_{n,k}\right) \in AMDUMS$ yada $\left(a_{n,k}\right) \in AMIUMS$ ve $(n+1)a_{n,n} = O(1)$ koşullarından biri sağlanırsa,

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{-\beta}a_{n,n-k} = O\left((n+1)^{-\beta}\right)$$

elde edilir.

4.3.2 Ana Teoremler

4.3.2.1 Teorem $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta), 0 < \beta < 1$ ve $A = (a_{\lambda_n,k})$ matrisi $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O({\lambda_n}^{-\beta})$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regular matris olsun. Eğer

(i) $(a_{\lambda_n,k}) \in AMDUMS$,

(ii) $(a_{\lambda_n,k}) \in AMIUMS$ ve $(\lambda_n + 1)(a_{\lambda_n,\lambda_n}) = O(1)$,

koşullarından biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - \tau_n^{\lambda}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right)$$

elde edilir.

İspat.

$f \in Lip\left(\alpha, L^{p,\alpha}(\mathbb{T})\right), 0 < \beta < 1$ ve $A = (a_{\lambda_n,k})$ matrisi $\left|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1\right| = O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right)$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regular matris olsun. (i) ve (ii) durumlarını birlikte ispatlamak için 4.3.1.5 Önerme ve 4.3.1.7 Önerme birlikte düşünülürse

$$\tau_n^{\lambda}(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}\left(S_k(f;x) - f(x)\right)$$

olduğundan

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f) - f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}\|S_k(f) - f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \preccurlyeq \sum_{k=0}^{\lambda_n}(k+1)^{-\beta}a_{\lambda_n,\lambda_n-k}$$

$$= O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right)$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) nin ispatını tamamlar. ■

Not. Eğer $a_{\lambda_n,\lambda_n-k} = \frac{p_{\lambda_n,k}}{P_k}$ seçilirse, bu durumda τ_n^{λ} alt matris metodu

$$N_n^{\lambda}(f;x) := \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n,k}S_k(f;x)$$

biçiminde tanımlanan Nörlund alt metoduna dönüşür. Burada
$P_{\lambda_n} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{\lambda_n} \neq 0 \quad (n \geq 0)$ ve $p_{-1} = P_{-1} = 0.$

4.3.2.1 Sonuç $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta), 0 < \beta < 1$ ve $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi pozitif terimli bir dizi olsun. Eğer

(i) $(p_{\lambda_n}) \in AMDUMS,$
(ii) $(p_{\lambda_n}) \in AMIUMS$ ve $(\lambda_n + 1)p_{\lambda_n} = O(P_{\lambda_n}),$
koşullarından biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - N_n^\lambda(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\lambda_n{}^{-\beta}\right)$$

elde edilir.

4.3.2.2 Teorem $f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ ve $A = (a_{\lambda_n,k})$ matrisi $|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n{}^{-\beta})$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regular matris olsun. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-2} \left|\Delta_k A_{\lambda_n,k}\right| = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - \tau_n^\lambda(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

elde edilir.

İspat.
$|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1| = O(\lambda_n{}^{-\beta})$ ve iki kez Abel dönüşümü uygulanırsa

$$\tau_n^\lambda(x,f) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}\left(S_k(x,f) - f(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} \left(S_k(x,f) - S_{k+1}(x,f)\right) \sum_{i=0}^{k} a_{\lambda_n,\lambda_n-i} + S_n^\lambda(x,f) - f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (S_k(x,f) - S_{k+1}(x,f)) \sum_{i=\lambda_n-k}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,i} + S_n^\lambda(x,f) - f(x)$$

$$= S_n^\lambda(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1) U_{k+1}(x,f) A_{\lambda_n,k}$$

$$= S_n^\lambda(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n-2} \left(A_{\lambda_n,k} - A_{\lambda_n,k+1}\right) \sum_{i=0}^{k} (i+1)\, U_{i+1}(x,f)$$

$$-A_{\lambda_n,\lambda_n-1}\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}(k+1)\,U_{k+1}(x,f)$$

$$= S_n^{\lambda}(x,f)-f(x)-\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left(A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right)\sum_{i=0}^{k}(i+1)\,U_{i+1}(x,f)$$

$$-\frac{1}{\lambda_n}\sum_{i=1}^{\lambda_n}a_{\lambda_n,i}\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}(k+1)\,U_{k+1}(x,f)$$

olur ve böylece

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\leq\left\|S_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$+\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|\left\|\sum_{i=1}^{k+1}i\,U_i(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$+\frac{1}{\lambda_n}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}k\,U_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \tag{4.39}$$

elde edilir.

$$\sigma_n^{\lambda}(x,f)-S_n^{\lambda}(x,f)=-\frac{1}{\lambda_n+1}\sum_{k=1}^{\lambda_n}kU_k(x,f)$$

olduğundan, 4.3.1.4 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}k\,U_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=(\lambda_n+1)\left\|S_n^{\lambda}(f)-\sigma_n^{\lambda}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O(1) \tag{4.40}$$

elde edilir. (4.39),(4.40) ve 4.3.1.5 Önerme kullanılarak

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\preccurlyeq\frac{1}{\lambda_n}+\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|$$

elde edilir. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|A_{\lambda_n,k}-A_{\lambda_n,k+1}\right|=O\left({\lambda_n}^{-1}\right),$$

ise, bu durumda

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

4.3.2.2 Sonuç $f\in Lip_{\alpha,p}(1)$ ve (p_{λ_n}) dizisi pozitif terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|\Delta_k P_{\lambda_n,k}\right| = O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - N_n^{\lambda}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir.

4.3.2.3 Teorem $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta), 0 < \beta < 1$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi satır toplamları 1 olan alt üçgensel regular matris olsun. Eğer

(i) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMIMS,$

(ii) $\left(a_{\lambda_n,k}\right) \in AMDMS$ ve $(\lambda_n + 1)a_{\lambda_n,0} = O(1)$

koşullarından biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - T_n^{\lambda}(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right) \tag{4.41}$$

elde edilir.

İspat.

$f \in Lip\left(\alpha, L^{p,\alpha}(\mathbb{T})\right), 0 < \beta < 1$ ve $A = (a_{\lambda_n,k})$ matrisi $\left|S_{\lambda_n}^{(A)} - 1\right| = O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right)$ koşulunu sağlayan alt üçgensel regular matris olsun. (i) ve (ii) durumlarını birlikte ispatlamak için 4.3.1.5 Önerme ve 4.3.1.6 Önerme birlikte düşünülürse

$$\tau_n^{\lambda}(f;x) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}\left(S_k(f;x) - f(x)\right)$$

olduğundan

$$\left\|\tau_n^{\lambda}(f) - f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,\lambda_n-k}\|S_k(f) - f\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \preccurlyeq \sum_{k=0}^{\lambda_n}(k+1)^{-\beta}a_{\lambda_n,\lambda_n-k}$$

$$= O\left({\lambda_n}^{-\beta}\right)$$

elde edilir. Bu da (i) ve (ii) nin ispatını tamamlar. ■

Not: Eğer $a_{\lambda_n,k} = \frac{p_{\lambda_n,k}}{P_k}$ seçilirse, bu durumda T_n^{λ} alt matris metodu

$$R_n^{\lambda}(f;x) := \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{k=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n,k}S_k(f;x).$$

biçiminde tanımlanan Riesz alt metoduna dönüşür. Burada

$P_{\lambda_n} = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_{\lambda_n} \neq 0 \quad (n \geq 0)$ ve $p_{-1} = P_{-1} = 0.$

4.3.2.3 Sonuç $f \in Lip_{\alpha,p}(\beta), 0 < \beta < 1$ ve (p_{λ_n}) dizisi pozitif terimli bir dizi olsun. Eğer

$(i)(p_{\lambda_n}) \in AMIMS,$

$(ii)\ (p_{\lambda_n}) \in AMDMS\ and\ (\lambda_n + 1)p_{\lambda_n} = O(P_{\lambda_n})$

koşullarından biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - R_n^\lambda(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\lambda_n{}^{-\beta}\right)$$

elde edilir.

4.3.2.4 Teorem $f \in Lip_{\alpha,p}(1)$ ve $A = \left(a_{\lambda_n,k}\right)$ matrisi satır toplamları 1 olan alt üçgensel regular matris olsun. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-1} \left|\Delta_k A^*_{\lambda_n,k}\right| = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f - T_n^\lambda(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

elde edilir.

İspat. $|S^{(A)}_{\lambda_n} - 1| = O(\lambda_n{}^{-\beta})$ ve iki kez Abel dönüşümü uygulanırsa

$$T_n^\lambda(x,f) - f(x) = \sum_{k=0}^{\lambda_n} a_{\lambda_n,k}\left(S_k(x,f) - f(x)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (S_k(x,f) - S_{k+1}(x,f)\,) \sum_{i=0}^{k} a_{\lambda_n,i} + S_n^\lambda(x,f) - f(x)$$

$$= S_n^\lambda(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1) U_{k+1}(x,f) A^*_{\lambda_n,k}$$

$$= S_n^\lambda(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n-2} \left(A^*_{\lambda_n,k} - A^*_{\lambda_n,k+1}\right) \sum_{i=0}^{k} (i+1)\, U_{i+1}(x,f)$$

$$-A^*_{\lambda_n,\lambda_n-1} \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1)\, U_{k+1}(x,f)$$

$$= S_n^\lambda(x,f) - f(x) - \sum_{k=0}^{\lambda_n-2} \left(A^*_{\lambda_n,k} - A^*_{\lambda_n,k+1}\right) \sum_{i=0}^{k} (i+1)\, U_{i+1}(x,f)$$

$$-\frac{1}{\lambda_n} \sum_{i=0}^{\lambda_n-1} a_{\lambda_n,i} \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1)\, U_{k+1}(x,f)$$

olur ve böylece

$$\left\|T_n^\lambda(f) - f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \leq \left\|S_n^\lambda(f) - f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$$

$$+\sum_{k=0}^{\lambda_n-2}\left|A^*_{\lambda_n,k}-A^*_{\lambda_n,k+1}\right|\left\|\sum_{i=1}^{k+1} i\,U_i(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}+\frac{1}{\lambda_n}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n} k\,U_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} \tag{4.42}$$

elde edilir.

$$\sigma_n^\lambda(x,f)-S_n^\lambda(x,f)=\frac{1}{\lambda_n+1}\sum_{k=1}^{\lambda_n} kU_k(x,f),$$

olduğundan, 4.3.1.4 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n} k\,U_k(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=(\lambda_n+1)\left\|\sigma_n^\lambda(f)-\ S_n^\lambda(f)\right\|_{\Phi,\omega}=O(1). \tag{4.43}$$

elde edilir. (4.42),(4.43) ve 4.3.1.5 Önerme kullanılarak

$$\left\|T_n^\lambda(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}\preccurlyeq\frac{1}{\lambda_n}+\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}\left|A^*_{\lambda_n,k}-A^*_{\lambda_n,k+1}\right|.$$

elde edilir. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}\left|A^*_{\lambda_n,k}-A^*_{\lambda_n,k+1}\right|=O\left(\lambda_n{}^{-1}\right),$$

ise, bu durumda

$$\left\|T_n^\lambda(f)-f\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

4.3.2.4 Sonuç $f\in Lip_{\alpha,p}(1)$ ve $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi pozitif terimli bir dizi olsun. Eğer

$$\sum_{k=0}^{\lambda_n-1}\left|\Delta_k\frac{P_k}{k+1}\right|=O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$$

koşulu sağlanırsa, bu durumda

$$\left\|f-R_n^\lambda(f)\right\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}=O(\lambda_n^{-1})$$

elde edilir.

4.4 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Yaklaşım

4.4.1 Yardımcı Sonuçlar

4.4.1.1 Önerme $0<\alpha_\Phi\le\beta_\Phi<1$, $\omega\in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T})\cap\ A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ ve $r\in\mathbb{N}$ olsun. Eğer $f\in Lip\left(1,L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\right)$ ise, bu durumda $f^{(r)}$ mutlak süreklidir ve $f^{(r+1)}\in\ L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ olur.

İspat.

Orlicz uzayı $L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ yansımalı olduğundan, Boyd indisleri $0 < \alpha_\Phi \leq \beta_\Phi < 1$ şartını sağlar. $1 < p \leq \beta_\Phi$ olması durumunda $L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ Orlicz uzayı, $L^p(\mathbb{T})$ uzayına sürekli gömülüdür [87]. Böylece $\delta > 0$ ve $\delta \geq t > 0$ için

$$\|f(\cdot+t) - f(\cdot)\|_{L^p} \preccurlyeq \|f(\cdot+t) - f(\cdot)\|_{\Phi,\omega}$$

olur ve bu eşitsizlikten

$$\omega\big(f^{(r)},t\big)_{L^p} \preccurlyeq \Omega\big(f^{(r)},t\big)_{L_\Phi(\mathbb{T},\omega)}$$

elde edilir. $\Omega\big(f^{(r)},t\big)_{L_\Phi(\mathbb{T},\omega)} = O(\delta)$ olduğundan, aynı değerlendirme $\omega\big(f^{(r)},t\big)_{L^p}$ için de geçerlidir. Böylece $f^{(r)}$ fonksiyonunun $\mathbb{T}$ üzerinde mutlak sürekliliği ve hemen her x için

$$\frac{f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x)}{t} \to f^{(r+1)}(x), \quad t \to 0,$$

elde edilir ve bundan hareketle

$$\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\left|f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x)\right|}{t}\,dt \to \left|f^{(r+1)}(x)\right|, \quad \delta \to 0^+$$

elde edilir. Fatou önermesi kullanılarak

$$\left\|f^{(r+1)}\right\|_{\Phi,\omega} \leq \liminf_{\delta\to 0^+} \left\|\frac{2}{\delta}\int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \frac{\left|f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x)\right|}{t}\,dt\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$\leq \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta}\left\|\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta} \left|f^{(r)}(x+t) - f^{(r)}(x)\right|dt\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$\leq \limsup_{\delta\to 0^+} \frac{4}{\delta}\,\Omega\big(f^{(r)},\delta\big)_{L_\Phi(\mathbb{T},\omega)} < \infty$$

elde edilir. ■

4.4.1.2 Önerme $0 < \alpha_\Phi \leq \beta_\Phi < 1$, $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda her $f \in W_{\Phi,\omega}^{r,\alpha}$ için

$$\left\|f^{(r)} - S_n\big(f^{(r)}\big)\right\|_{\Phi,\omega} = O(n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.44}$$

olur.

İspat t_n^*, $f^{(r)} \in L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan trigonometrik polinom olsun. Bu durumda derecesi n yi aşmayan bütün t_n trigonometrik polinomları üzerinden infimum alındığında

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega} = inf\left\|f^{(r)} - t_n\right\|_{\Phi,\omega}$$

elde edilir. [12, Teorem 2] kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega} = O\left(\Omega\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{L_\Phi(\mathbb{T},\omega)}\right)$$

olur ve böylece

$$\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega} = O(n^{-\alpha}).$$

$L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında $S_n(f)$ kısmi toplamlar düzgün sınırlı [52] olduğundan

$$\left\|f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} \le \left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega} + \left\|t_n^* - S_n(f^{(r)})\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= \left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega} + \left\|S_n\left(t_n^* - f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= O\left(\left\|f^{(r)} - t_n^*\right\|_{\Phi,\omega}\right) = O(n^{-\alpha})$$

elde edilir. ■

4.4.1.3 Önerme $0 < \alpha_\Phi \le \beta_\Phi < 1$ ve $\omega \in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ olsun. Bu durumda her $f \in W_{\Phi,\omega}^{r,1}$ için

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right) - \sigma_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} = O(n^{-1}), \qquad n = 1,2,\ldots \tag{4.45}$$

olur.

İspat.

Eğer $f^{(r)}$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f^{(r)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} A_k\left(f^{(r)}\right)(x)$$

ise, bu durumda $\tilde{f}^{(r+1)}(x)$ eşlenik fonksiyonun Fourier serisi

$$\tilde{f}^{(r+1)}(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} k A_k\big(f^{(r)}\big)(x)$$

olur. Diğer yandan

$$S_n\big(f^{(r)}\big)(x) - \sigma_n\big(f^{(r)}\big)(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n+1} A_k\big(f^{(r)}\big)(x)$$

$$= \frac{1}{n+1} S_n\big(\tilde{f}^{(r+1)}\big)(x)$$

olur. $L_\Phi(\mathbb{T},\omega)$ ağırlıklı Orlicz uzaylarında $S_n(f)$ kısmi toplamların ve eşlenik fonksiyonun sınırlılığından [52]

$$\big\|S_n\big(f^{(r)}\big) - \sigma_n\big(f^{(r)}\big)\big\|_{\Phi,\omega} = \frac{1}{n+1}\big\|S_n\big(\tilde{f}^{(r+1)}\big)\big\|_{\Phi,\omega} \le C\frac{1}{n+1}\big\|\tilde{f}^{(r+1)}\big\|_{\Phi,\omega}$$

$$\le C\frac{1}{n+1}\big\|f^{(r+1)}\big\|_{\Phi,\omega} = O(n^{-1}), \qquad n = 1,2,\ldots$$

elde edilir. ■

4.4.1.4 Önerme [82] $\big(p_{\lambda_n}\big)$ dizisi pozitif sayıların artmayan bir dizisi olsun. Bu durumda $0<\alpha<1$ için

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} m^{-\alpha} p_{\lambda_{n-m}} = O\big(\lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}\big)$$

olur.

4.4.2 Ana Teoremler

4.4.2.1 Teorem $0 \le \alpha_\Phi \le \beta_\Phi \le 1,\ \omega \in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ ve $f \in Lip\big(\alpha, L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\big), r \in \mathbb{N}$ ve $\big(p_{\lambda_n}\big)$ dizisi

$$(\lambda_n + 1)p_{\lambda_n} = O\big(P_{\lambda_n}\big) \tag{4.46}$$

koşulunu sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $f \in W^{r,\alpha}_{L_{\Phi,\omega}}$ ise, bu durumda

$$\big\|f^{(r)} - N_n^\lambda\big(f^{(r)}\big)\big\|_{\Phi,\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2,\ldots.$$

İspat. 1. Durum

$0<\alpha<1$ olsun.

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m}\left(f^{(r)}\right)(x)$$

olduğundan

$$f^{(r)}(x) - N_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m}\left[f^{(r)}(x) - S_m\left(x, f^{(r)}\right)\right]$$

elde edilir. 4.4.1.2 Önerme, 4.4.1.4 Önerme ve (4.46) kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} \leq \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m}\left\|f^{(r)} - S_m\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=1}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m} O(m^{-\alpha}) + \frac{p_{\lambda_n}}{P_{\lambda_n}}\left\|f^{(r)} - S_0\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda_n}} O\left(\lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right) + O\left(\frac{1}{\lambda_n + 1}\right)$$

$$= O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha = 1$ olsun.

$$N_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} p_{\lambda_n - m} A_m\left(x, f^{(r)}\right)$$

olmak üzere Abel dönüşümü kullanılarak

$$S_n\left(f^{(r)}\right)(x) - N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)(x) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=1}^{\lambda_n} \left(P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}\right) A_m\left(x, f^{(r)}\right)$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=1}^{\lambda_n} \left(\frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m}}{m} - \frac{P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - m - 1}}{m + 1}\right)\left(\sum_{k=1}^{m} k A_k\left(x, f^{(r)}\right)\right)$$

$$+ \frac{1}{\lambda_n + 1}\left(\sum_{k=1}^{\lambda_n} k A_k\left(x, f^{(r)}\right)\right)$$

elde edilir ve böylece

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}\leq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|$$

$$\times\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}+\frac{1}{\lambda_n+1}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}kA_k\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

olur.

$$S_n\left(x,f^{(r)}\right)-\sigma_n\left(x,f^{(r)}\right)=\frac{1}{\lambda_n+1}\sum_{k=1}^{\lambda_n}kA_k\left(x,f^{(r)}\right)$$

olmak üzere, 4.4.1.3 Önerme kullanılarak

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda_n}kA_k\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}=(\lambda_n+1)\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-\sigma_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}=O(1)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right)-N_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$\leq\frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|\,O(1)+O\left(\lambda_n^{-1}\right)$$

$$=O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right)\sum_{m=1}^{\lambda_n}\left|\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|+O\left(\lambda_n^{-1}\right)\tag{4.47}$$

elde edilir.

$$\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}=\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=\lambda_n-m+1}^{\lambda_n}p_k-mp_{\lambda_n-m}\right).$$

Bu eşitlik $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi azalmayan olduğunda $\left(\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}\right)_{m=1}^{\lambda_n+1}$ dizisinin artmayan olmasını, $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi artmayan olduğunda $\left(\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m}}{m}\right)_{m=1}^{\lambda_n+1}$ dizisinin azalmayan olmasını gerektirir. Son eşitlik aynı zamanda

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\frac{P_n-P_{n-m}}{m}-\frac{P_{\lambda_n}-P_{\lambda_n-m-1}}{m+1}\right|=\left|p_{\lambda_n}-\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1}\right|=\frac{1}{\lambda_n+1}O\left(P_{\lambda_n}\right)$$

eşitsizliğini gösterir. Bu eşitsizlik ve (4.47) kullanılarak

$$\left\|S_n\left(f^{(r)}\right) - N_n^\lambda\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right) \tag{4.48}$$

elde edilir. (4.48) ve (4.44) birlikte düşünülerek

$$\left\|f^{(r)} - N_n^\lambda\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} = O\left(\lambda_n{}^{-1}\right)$$

elde edilir. ■

4.4.2.2 Teorem $0 \le \alpha_\Phi \le \beta_\Phi \le 1,\ \omega \in A_{\frac{1}{\alpha_\Phi}}(\mathbb{T}) \cap A_{\frac{1}{\beta_\Phi}}(\mathbb{T})$ ve $f \in Lip\big(\alpha, L_\Phi(\mathbb{T},\omega)\big), r \in \mathbb{N}$ ve $\left(p_{\lambda_n}\right)$ dizisi

$$\sum_{\lambda_m=0}^{\lambda_n-1}\left|\Delta\left(\frac{P_{\lambda_m}}{\lambda_m+1}\right)\right| = O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1}\right) \tag{4.49}$$

koşulunu sağlayan pozitif sayıların bir dizisi olsun. Eğer $f \in W^{r,\alpha}_{L_{\Phi,\omega}}$ ise, bu durumda

$$\left\|f^{(r)} - R_n^\lambda\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha}), \qquad n = 1,2,\dots$$

olur.

İspat. 1. Durum

$0 < \alpha < 1$ olsun.

$$f^{(r)}(x) = \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m f^{(r)}(x)$$

olmak üzere $R_n^\lambda\left(x, f^{(r)}\right)$ tanımı da kullanılarak

$$f^{(r)}(x) - R_n^\lambda\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m\left[f^{(r)}(x) - S_m\left(x, f^{(r)}\right)\right]$$

elde edilir. 4.4.1.2 Önerme kullanılarak

$$\left\|f^{(r)} - R_n^\lambda\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega} \le \frac{1}{P_{\lambda_n}}\sum_{m=0}^{\lambda_n} p_m\left\|f - S_m\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right)\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} + \frac{p_0}{P_{\lambda_n}}\left\|f^{(r)} - S_0\left(f^{(r)}\right)\right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda_n}}\right)\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} \tag{4.50}$$

elde edilir ve Abel dönüşümü kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} = \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} P_m[m^{-\alpha} - (m+1)^{-\alpha}] + \lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} + \lambda_n^{-\alpha} P_{\lambda_n}$$

elde edilir ve (4.49) kullanılarak

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha} \frac{P_m}{m+1} = \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} \left(\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right) + \left(\sum_{k=1}^{m} k^{-\alpha}\right) + \frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n + 1} \sum_{m=1}^{\lambda_n - 1} m^{-\alpha}$$

$$= O\left({\lambda_n}^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right)$$

elde edilir. Bu durum

$$\sum_{m=1}^{\lambda_n} p_m m^{-\alpha} = O\left({\lambda_n}^{-\alpha} P_{\lambda_n}\right)$$

olmasını gerektirir. Bu eşitsizlik ve (4.50) kullanılarak

$$\left\| f^{(r)} - R_n^{\lambda}\left(f^{(r)}\right) \right\|_{\Phi,\omega} = O(\lambda_n^{-\alpha})$$

elde edilir.

2. Durum

$\alpha = 1$ olsun. Abel dönüşümünü kullanarak

$$R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} \left[P_m \left(S_m\left(x, f^{(r)}\right) - S_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right) + P_{\lambda_n} S_n\left(x, f^{(r)}\right)\right]$$

$$= -\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m \left(A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right) + S_n\left(x, f^{(r)}\right),$$

ve böylece

$$R_n^{\lambda}\left(x, f^{(r)}\right) - S_n\left(x, f^{(r)}\right) = -\frac{1}{P_{\lambda_n}} \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m \left(A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)\right)$$

olur. Abel dönüşümünü tekrar uygulayarak

$$\sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} P_m A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right) = \sum_{m=0}^{\lambda_n - 1} \frac{P_m}{m+1} (m+1) A_{m+1}\left(x, f^{(r)}\right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} \left(\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right) \left(\sum_{k=0}^{m} (k+1) A_{k+1}(x, f^{(r)})\right)$$

$$+ \frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1} \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1) A_{k+1}(x, f^{(r)})$$

elde edilir. (4.49) ve (4.1) kullanılarak

$$\left\| \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} P_m \left(A_{m+1}(f^{(r)})\right) \right\|_{\Phi,\omega} \leq \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} \left|\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right| \left\| \sum_{k=0}^{m} (k+1) \left(A_{k+1}(f^{(r)})\right) \right\|_{\Phi,\omega}$$

$$+ \frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n+1} \left\| \sum_{k=0}^{\lambda_n-1} (k+1) \left(A_{k+1}(f^{(r)})\right) \right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} \left|\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right| (m+2) \left\| S_{m+1}(f^{(r)}) - \sigma_{m+1}(f^{(r)}) \right\|_{\Phi,\omega}$$

$$+ P_{\lambda_n} \left\| S_n(f^{(r)}) - \sigma_n(f^{(r)}) \right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= O(1) \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} \left|\frac{P_m}{m+1} - \frac{P_{m+1}}{m+2}\right| + O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right)$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left\| R_n^{\lambda}(f^{(r)}) - S_n(f^{(r)}) \right\|_{\Phi,\omega} = \frac{1}{P_{\lambda_n}} \left\| \sum_{m=0}^{\lambda_n-1} P_m \left(A_{m+1}(f^{(r)})\right) \right\|_{\Phi,\omega}$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda_n}} O\left(\frac{P_{\lambda_n}}{\lambda_n}\right) = O\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)$$

olur. Bu durum ve (4.49) kullanılarak

$$\left\| f^{(r)} - R_n^{\lambda}(f^{(r)}) \right\|_{\Phi,\omega} = O\left({\lambda_n}^{-1}\right)$$

elde edilir. Bu ispatı tamamlar.■

Eğer $p_{\lambda_n} = A_{\lambda_n}^{\beta-1} (\beta > 0)$ ise, $k \geq 1$ için $A_0^{\beta} = 1$, $A_k^{\beta} = \frac{\beta(\beta+1)\ldots(\beta+k)}{k!}$ olmak üzere

$$N_n^{\lambda}(x, f^{(r)}) = \sigma_{\lambda_n}^{\beta}(x, f^{(r)}) = \frac{1}{A_{\lambda_n}^{\beta}} \sum_{m=0}^{\lambda_n} A_{\lambda_n-m}^{\beta-1} S_m(x, f^{(r)})$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sigma_{\lambda_n}^{\beta}\left(f^{(r)}\right)$ Cesàro alt toplamları ile $f \epsilon L_{\omega}^{pq}(\mathbb{T})$ fonksiyonuna yaklaşım ile ilgili aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.2.3 Sonuç $1 < p, q < \infty,\ \omega \in A_p(\mathbb{T}), 0 < \alpha \leq 1, r \in N$ ve $\beta > 0$ olsun. Eğer $f \in W_{\Phi,\omega}^{r,\alpha}$ ise, bu durumda

$$\left\| f^{(r)} - \sigma_{\lambda_n}^{\beta}\left(f^{(r)}\right) \right\|_{\Phi,\omega} = O({\lambda_n}^{-\alpha}), \qquad n = 1,2, \ldots$$

olur.

5. UYGULAMA

Bu bölümde, kullanılan trigonometrik polinomların verilen fonskiyonlara yaklaşım hatası ile ilgili grafiklere ve nümerik sonuçlara yer verilmiştir. Ayrıca belirtmek gerekir ki elde edilen yaklaşım hatası sonuçları uzay normu tanımlarına göre hesaplanmaktadır.

Örnek. f fonksiyonunu aşağıdaki biçimde seçelim.

$$f(t) = \begin{cases} 1, & -\pi \leq t \leq 0, \\ -1, & 0 < t < -\pi. \end{cases} \tag{5.1}$$

t nin bütün reel değerleri için, f fonksiyonu aşağıdaki koşulu sağlar.

$f(t + 2\pi) = f(t)$.

Verilen fonksiyon tek fonksiyon olduğundan dolayı, Fourier serisi

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nt,$$

biçiminde tanımlanabilir ve burada

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin nt dt = \frac{2}{\pi} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right).$$

Bundan dolayı, $f(t)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - (-1)^n}{n} \right) \sin nt \tag{5.2}$$

biçiminde verilebilir.

(5.2) ile verilen serinin kısmi toplamı aşağıdaki şekildedir.

$$S_{\lambda_n}(t) = \frac{4}{\pi} \left(\sin t + \left(\frac{1}{3} \right) \sin 3t + \ldots + \left(\frac{1}{n} \right) \sin(\lambda_n t) \right).$$

(5.2) ile verilen serinin Cesàro ortalaması aşağıdaki şekildedir.

$$C_n^{\lambda}(f) = \sum_{k=1}^{\lambda_n} \left(\frac{\lambda_n - k}{\lambda_n} \right) \left(\frac{-2}{\pi} \right) \left(\frac{-1 + (-1)^k}{k} \right) \sin(kt).$$

$P_{\lambda_n} = \lambda_n + 1$ olsun, bu durumda (5.2) ile verilen serinin Nörlund ortalaması

$$N_n^{\lambda}(f;t) = \frac{2}{(\lambda_n + 1)(\lambda_n + 2)} \sum_{k=0}^{\lambda_n} (\lambda_n - k + 1) S_k(f;t)$$

biçiminde olur.

$P_{\lambda_n} = \lambda_n + 1$ olsun, bu durumda (5.2) ile verilen serinin Riesz ortalaması

$$R_n^{\lambda}(f;t)=\frac{2}{(\lambda_n+1)(\lambda_n+2)}\sum_{k=0}^{\lambda_n}(\lambda_n+1)S_k(f;t)$$

biçiminde olur.

(5.2) ile verilen serinin matris ortalamasını hesaplamak için $(a_{\lambda_n,k})$ matrisini

$$(a_{\lambda_n,k})=\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ 1/2 & 1/2 & & & & & & \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & & & 0 & & \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & & & & \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & & & \\ 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & 1/6 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{1}{\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+1} & \cdots & \frac{1}{\lambda_n+1} & \frac{1}{\lambda_n+1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}_{\lambda_n \mathrm{x} k}$$

biçiminde seçelim. $(a_{\lambda_n,k})$ matrisinin $n.$ satırında $\left(\frac{1}{\lambda_n+1}\right)$ terimi (λ_n+1) defa tekrar etmektedir. Bu durumda $\tau_n^{\lambda}(f;t)$ matrisi

$$\tau_n^{\lambda}(f;t):=\sum_{k=0}^{\lambda_n}\left(\frac{1}{\lambda_n+1}\right)S_k(f;t)\,, \qquad n=0,1,2,\ldots.$$

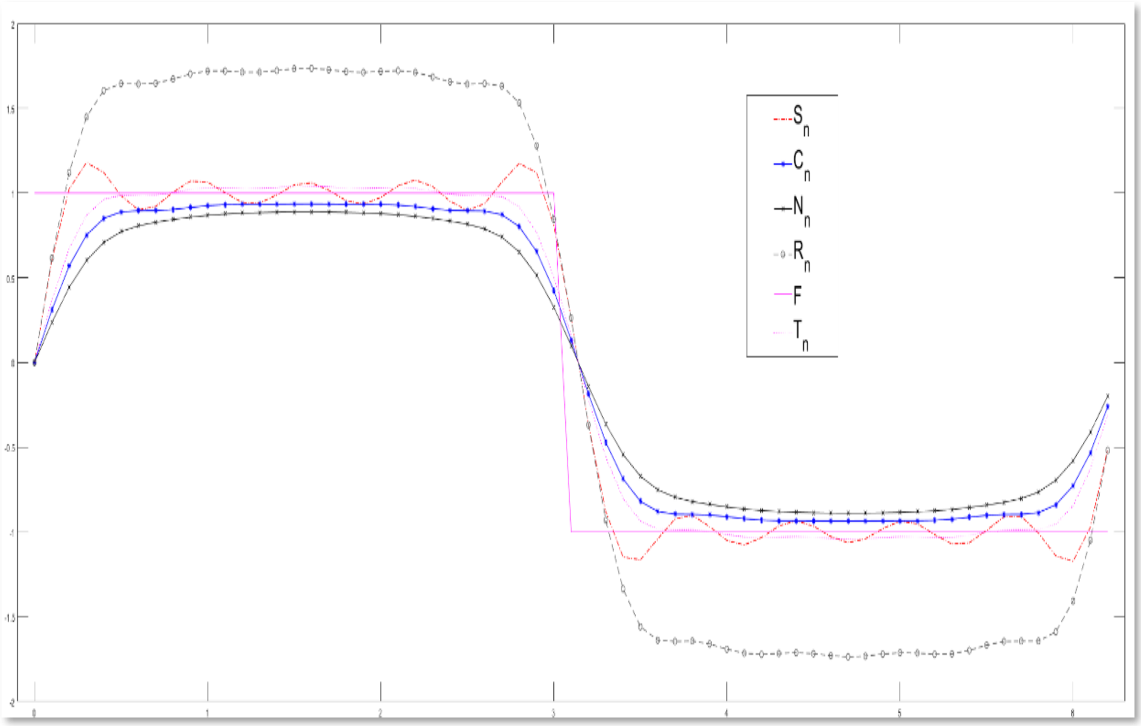
biçiminde tanımlanır.

$\lambda_n=10$ ve 20 değerleri için, $f(t), S_{\lambda_n}(t), C_n^{\lambda}(f;t), N_n^{\lambda}(f;t), R_n^{\lambda}(f;t)$ ve $\tau_n^{\lambda}(f;t)$ tanımları kullanılarak Şekil 5.1 ve Şekil 5.2 de verilen grafikler çizilebilir.

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2, Fourier serisinin sonlu toplamları tarafından sıçrama süreksizliğine sahip bir periyodik fonksiyona yaklaştığımız zaman meydana gelen dalgalanma ve salınımları vermektedir.

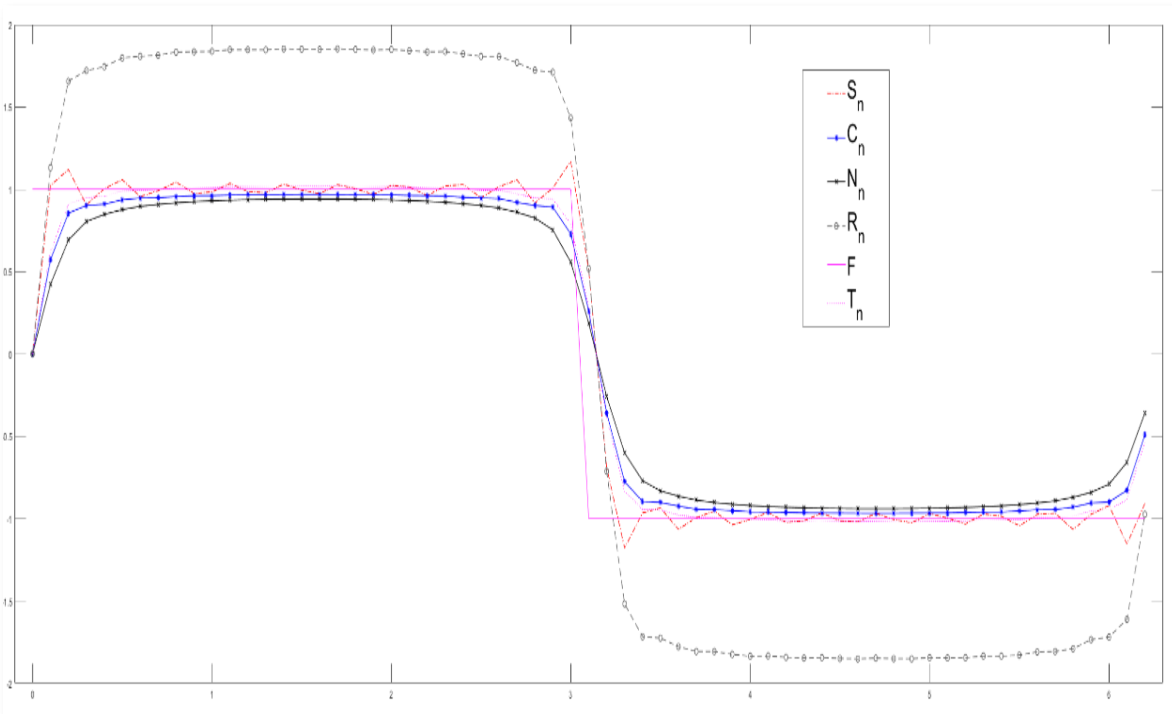
Ayrıca vurgulamayız ki; $S_{\lambda_n}(f;t)$ kısmi toplamlar dizisi süreksizlik noktaları komşuluğunda piklere sahiptir ve bu piklerin salınımları $(-\pi,0,-\pi)$ süreksizlik noktalarına doğru hareket etmektedir.

$C_n^{\lambda}(f;t)$ Cesàro ortalaması, $\tau_n^{\lambda}(f;t)$ matris ortalaması ve $N_n^{\lambda}(f;t)$ matris ortalaması, kısmi toplamın salınımı üzerinde düzleştirici etkiye sahiptir ve pikleri f fonksiyonuna yaklaştırmaktadır.



Şekil 5.1: 10 terim için dalgalanma ve salınımlar.

Daha büyük λ_n değeri seçildiğinde de pikler f fonksiyonuna yaklaşmaktadır. Bu durum Şekil 5.2 de görülmektedir.



Şekil 5.2: 20 terim için dalgalanma ve salınımlar.

5.1 Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Yaklaşım Hatası Örnekleri

Bu kısımda, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının bazı alt toplanabilme metotları arasındaki yaklaşım farkı nümerik sonuçlarla açıklanmıştır. Toplanabilme metotlarının f fonksiyonundan farkı (3.1) ile verilen norma göre $p = q$ durumunda

$$\|f - K(f)\|_{\mathrm{p}} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - K(x, f)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

biçiminde hesaplanabilir. Burada $K(f)$ fonksiyonunun yerine $S_{\lambda_n}(x), C_n^{\lambda}(f; x), N_n^{\lambda}(f; x)$ ve $R_n^{\lambda}(f; x)$ toplanabilme metotları yazılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 5.1 de $\lambda_n = 10$ ve 40 için ağırlıklı Lorentz uzayı normuna göre $p = q$ durumunda yaklaşım hatası değerleri verilmiştir.

Tablo 5.1: Ağırlıklı Lorentz uzaylarında yaklaşım hatası değerleri.

	$\lambda_n = 10$	$\lambda_n = 40$
$\left\|f - S_{\lambda_n}(x)\right\|_{\mathrm{p}}$	0.9437	0.9718
$\left\|f - C_n^{\lambda}(f; x)\right\|_{\mathrm{p}}$	0.9453	0.9604
$\left\|f - N_n^{\lambda}(f; x)\right\|_{\mathrm{p}}$	0.9453	0.9584
$\left\|f - R_n^{\lambda}(f; x)\right\|_{\mathrm{p}}$	0.9431	0.9714

5.2 Ağırlıklı Değişken Üslü Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım Hatası Örnekleri

Bu kısımda, değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzaylarından olan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının bazı alt toplanabilme metotları arasındaki yaklaşım farkı nümerik sonuçlarla açıklanmıştır. Toplanabilme metotlarının f fonksiyonundan farkı, $p(x) = \frac{9|x|+1}{2|x|+1}$ $(x \in \mathbb{T})$ kuvvet fonksiyonu ve $\omega(x) = |x|^{\alpha}$ $(-1 < \alpha < p - 1, p > 1)$ ağırlık fonksiyonuna göre

$$\|f - K(f)\|_{p(\cdot),\omega} \coloneqq \inf\left\{ \xi > 0; \int_0^{2\pi} \left| \frac{\omega(x)\big(f(x) - K(f; x)\big)}{\xi} \right|^{p(x)} dx \ \leq 1 \right\}$$

biçiminde hesaplanabilir. Buradaki $K(f)$ fonksiyonunun yerine $S_{\lambda_n}(x), C_n^{\lambda}(f;x)$ ve $T_n^{\lambda}(f;x)$ toplanabilme metotları koyularak hem ağırlıksız durumda hem de farklı ağırlık fonksiyonları kullanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 5.2 de $\lambda_n = 9$ ve 19 için değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzayı normuna göre yaklaşım hatası değerleri (pozitif ξ değerlerinin infimumu) verilmiştir.

Tablo 5.2: Değişken üslü ağırlıklı Lebesgue uzaylarında yaklaşım hatası değerleri.

	$\lambda_n = 9$		$\lambda_n = 19$	
	$\omega(x) = 1$	$\omega(x) = \lvert x\rvert^{\frac{1}{200}}$	$\omega(x) = 1$	$\omega(x) = \lvert x\rvert^{\frac{1}{200}}$
$\left\lVert f - S_{\lambda_n}(f;x)\right\rVert_{p(\cdot),\omega}$	0.5982	0.5982	0.5075	0.5054
$\left\lVert f - C_n^{\lambda}(f;x)\right\rVert_{p(\cdot),\omega}$	0.7171	0.7166	0.6020	0.6008
$\left\lVert f - T_n^{\lambda}(f;x)\right\rVert_{p(\cdot),\omega}$	0.6819	0.6812	0.5868	0.5855

Özetleyecek olursak, $T_n^{\lambda}(f;x)$ alt matris metodu ile elde edilen yaklaşım hatası hem ağırlıklı durumda hem de ağırlıksız durumda $C_n^{\lambda}(f;x)$ Cesàro alt metoduna göre daha iyi sonuçlar vermektedir.

5.3 Morrey Uzaylarında Yaklaşım Hatası Örnekleri

Bu kısımda, Morrey uzaylarından olan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının bazı alt toplanabilme metotları arasındaki yaklaşım farkı nümerik sonuçlarla ve grafiklerle açıklanmıştır. Toplanabilme metotlarının f fonksiyonundan farkı, $0 \leq \alpha \leq 2$ ve $1 < p < \infty$ için

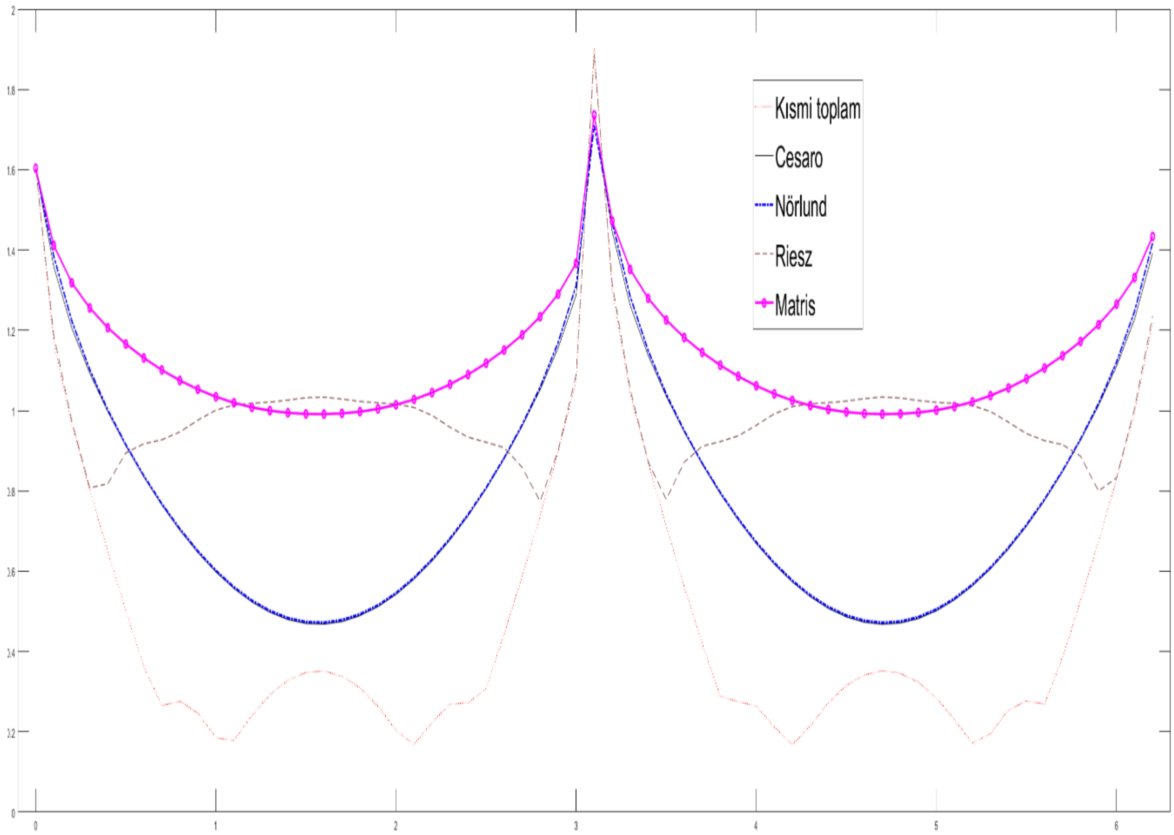
$$\|f - K(f)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})} := \left\{ \sup_{I} \left(\frac{1}{|I|^{1-\frac{\alpha}{2}}} \right) \int_{I} |f(x) - K(f;x)|^{p} |dx| \right\}^{\frac{1}{p}}, \qquad x \in \mathbb{T}$$

normu dikkate alınarak hesaplanabilir. Buradaki $K(f)$ fonksiyonunun yerine $C_n^{\lambda}(f;x)$, $S_{\lambda_n}(x), N_n^{\lambda}(f;x), R_n^{\lambda}(f;x)$ ve $T_n^{\lambda}(f;x)$ toplanabilme metotları koyularak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

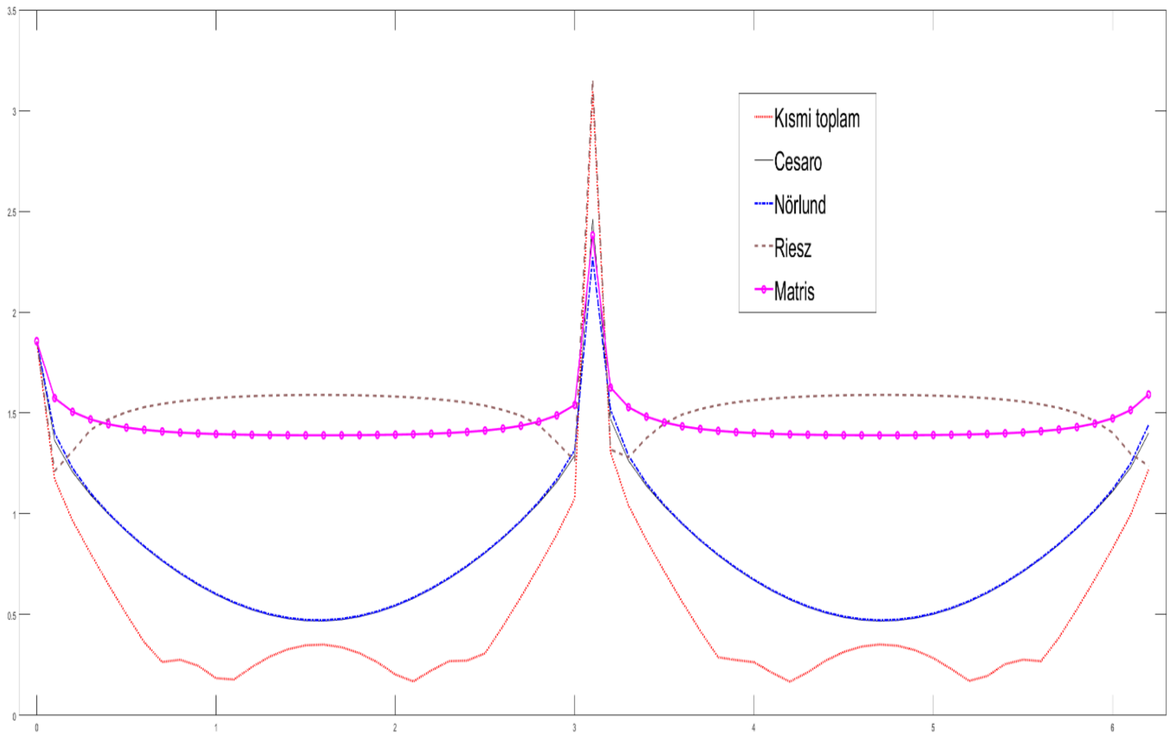
Tablo 5.3 de $0 \leq \alpha \leq 2$, $1 < p < \infty$ ve $\lambda_n = 10,\ 40$ değerleri için Morrey uzayı normuna göre yaklaşım hatası değerleri verilmiştir.

Tablo 5.3: Morrey uzaylarında yaklaşım hatası değerleri.

	$\lambda_n = 10$	$\lambda_n = 40$
$\|f - S_{\lambda_n}(f;x)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$	0.1332	0.1276
$\|f - C_n^{\lambda}(f;x)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$	0.3871	0.3871
$\|f - N_n^{\lambda}(f;x)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$	0.3871	0.3871
$\|f - R_n^{\lambda}(f;x)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$	0.6027	0.8624
$\|f - T_n^{\lambda}(f;x)\|_{L^{p,\alpha}(\mathbb{T})}$	0.7941	1.0095



Şekil 5.3: İlk 10 terim için yaklaşım hatası değerleri.



Şekil 5.4: İlk 40 terim için yaklaşım hatası değerleri.

5.4 Ağırlıklı Orlicz Uzaylarında Yaklaşım Hatası Örnekleri

Bu kısımda, Orlicz uzaylarından olan fonksiyonlar ile bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının bazı alt toplanabilme metotları arasındaki yaklaşım farkı nümerik sonuçlarla ve grafiklerle açıklanmıştır. Toplanabilme metotlarının *f* fonksiyonundan farkı

$$\|f\|_{\Phi}^{*} := inf\left\{k > 0: \int_{0}^{2\pi} \Phi\left(\frac{|f(x)|}{k}\right) dx \leq 1\right\}$$

Orlicz uzayı normu dikkate alınarak hesaplanmıştır. Young fonksiyonu olarak $\Phi(x) = e^{x} - x - 1$ fonksiyonunu seçelim. Bu durumda, verilen toplanabilme metotlarının f fonksiyonundan farkı

$$\|f - K(f)\|_{\Phi}^{*} := inf\left\{k > 0: \int_{0}^{2\pi} \left(e^{\left(\frac{|f(x)-K(x,f)|}{k}\right)} - \left(\frac{|f(x) - K(x,f)|}{k}\right) - 1\right) dx \leq 1\right\}$$

biçiminde hesaplanabilir. Buradaki $K(f)$ fonksiyonunun yerine $C_n^{\lambda}(f;x)$, $S_{\lambda_n}(x)$, $N_n^{\lambda}(f;x)$, $R_n^{\lambda}(f;x)$ ve $T_n^{\lambda}(f;x)$ toplanabilme metotları koyularak aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Aşağıdaki grafik p=10 için ilk on terimin toplamı durumunda k değeri değişimine göre Orlicz normu değerini göstermektedir.

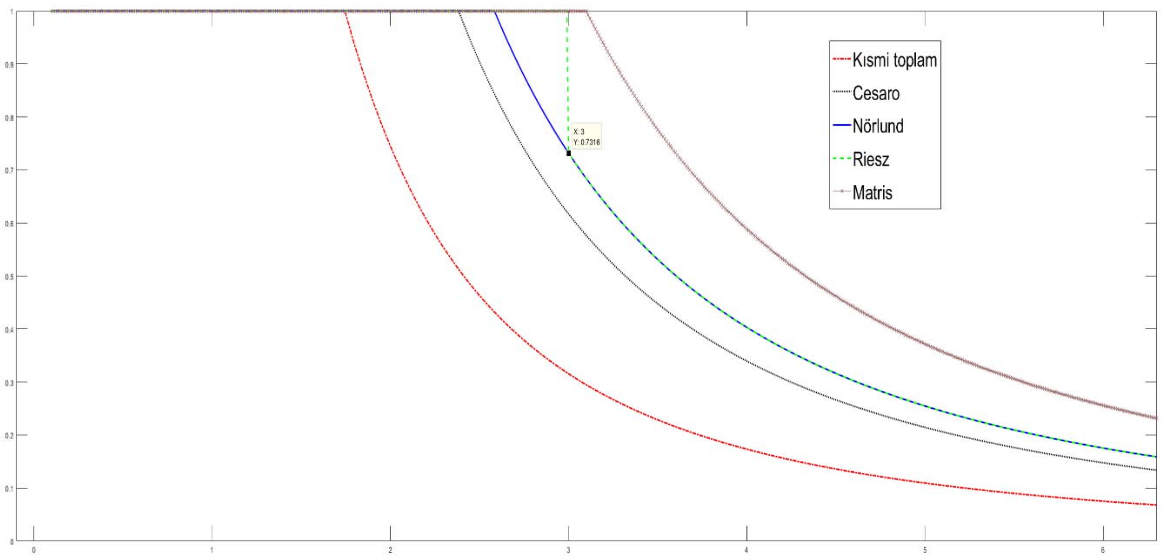
Tablo 5.4 te $\lambda_n = 10$ ve 40 için Orlicz normuna göre yaklaşım hatası değerleri (pozitif k değerlerinin infimumu) verilmiştir.

Tablo 5.4: Orlicz normunda yaklaşım hatası değerleri.

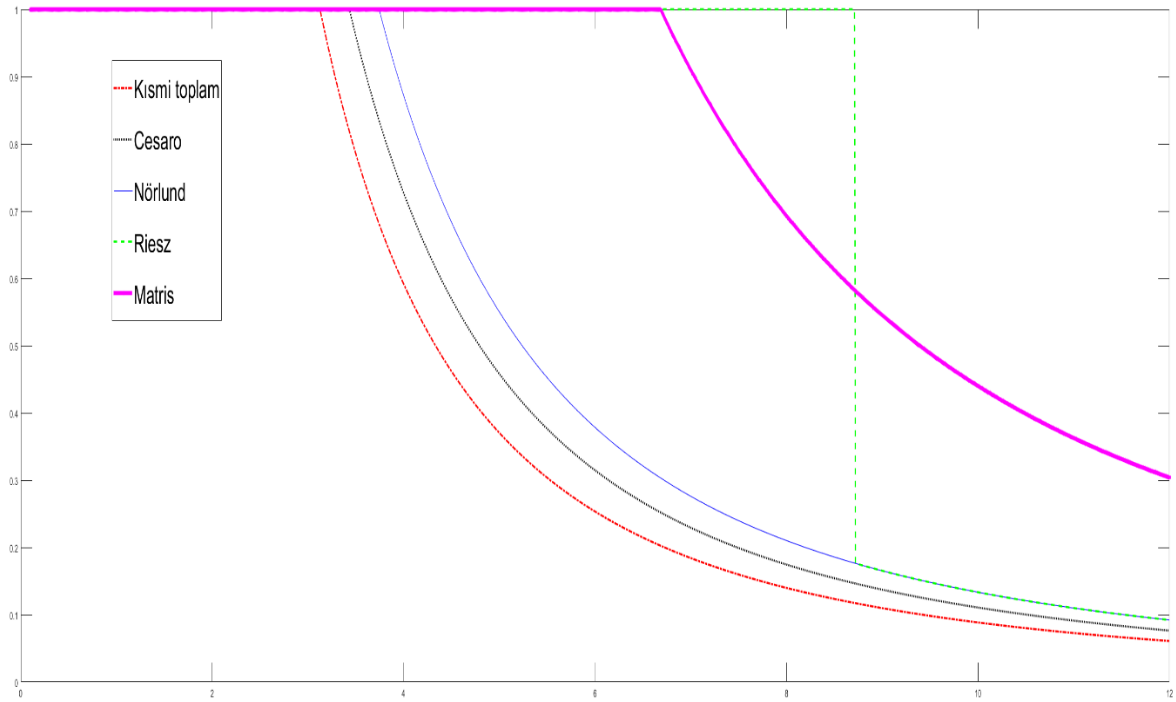
	$\lambda_n = 10$	$\lambda_n = 40$
$\left\|f - S_{\lambda_n}(f;x)\right\|_{\Phi}^{*}$	0.0183	0.0610
$\left\|f - C_n^{\lambda}(f;x)\right\|_{\Phi}^{*}$	0.0360	0.0764
$\left\|f - N_n^{\lambda}(f;x)\right\|_{\Phi^*}$	0.0428	0.0921
$\left\|f - R_n^{\lambda}(f;x)\right\|_{\Phi}^{*}$	0.0428	0.0921
$\left\|f - T_n^{\lambda}(f;x)\right\|_{\Phi}^{*}$	0.0624	0.3039

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 da Y ekseni Orlicz normunun içindeki integral değerini X ekseni ise integral değerini 1 den küçük yapan pozitif k değerini, yani Orlicz normundaki yaklaşım hatası değerini vermektedir. Şekil 5.5 te görülmektedir ki, integralin değerini 0.7316 yapan $k = 3$ değerinden sonra $N_n^{\lambda}(f;x)$ Nörlund alt metodu ve $R_n^{\lambda}(f;x)$ Riesz alt metodu aynı davranışı göstermektedir. Yani, aynı yaklaşım hatasını vermektedir.

Şekil 5.5 ve Şekil 5.6 da $\lambda_n = 10$ ve 40 için $C_n^{\lambda}(f;x)$, $S_{\lambda_n}(x)$, $N_n^{\lambda}(f;x)$, $R_n^{\lambda}(f;x)$ ve $T_n^{\lambda}(f;x)$ toplanabilme metotları ile f fonksiyonu farkının yaklaşım hatasının norm değerleri X ekseni üzerinde verilmiştir. Burada Y ekseni normun içindeki integral değerini göstermektedir.



Şekil 5.5: İlk 10 terim için yaklaşım hatası değerleri.



Şekil 5.6: İlk 40 terim için yaklaşım hatası değerleri.

6. KAYNAKLAR

[1] P. L. Chebyshev, “Problems on the least values connected with the approximate representation of functions”, *Sochineniya*, pp. 151-235, 1859.

[2] K. Weierstrsass, “Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen reeller Argumente”, *J. Math. Pures Appl*, vol. 2, pp. 105–138, 1885.

[3] D. Jackson, *The theory of approximation*, American Mathematical Soc., 1930.

[4] N. I. Akhiezer, “Theory of Approximation”, Frederic Ungar Publ. *Co., New York*, pp. 231–232, 1956.

[5] S. B. Stechkin, “On the order of approximation of continuous function”, *Izv. Math.*, vol. 15, pp. 219–242, 1951.

[6] S. N. Bernstein, “On the best approximation of continuous functions by polynomials of a given degree”,*Comm. Soc. Math. Kharkow, Ser*, vol. 2, no. 13, pp. 49–194, 1912.

[7] S. N. Bernstein, “Collected works”, *Akad. Nauk SSSR, Moscow*, vol. I, 1952.

[8] S. N. Bernstein, “Collected Works”, *Akad. Nauk SSSR, Moscow*, vol. II, 1954.

[9] E. A. Gadjieva, “Investigation of the properties of functions with quasimonotone Fourier coefficients in generalized Nikolskii-Besov spaces”, Ph. D. dissertation, Tbilisi, 1986.

[10] A. R. Ramazanov, “On approximation by polynomials and rational functions in Orlicz spaces”, *Anal. Math.*, vol. 10, no. 2, pp. 117–132, 1984.

[11] K. Runovski, “On Jackson type inequality in Orlicz classes”, *Rev. Matemática Complut.*, vol. 14, no. 2, pp. 395–404, 2001.

[12] G. Wu, “On approximation by polynomials in Orlicz spaces”, *Approx Theory Appl.*, vol. 7, pp. 97–110, 1991.

[13] R. Akgün ve D. M. Israfilov, “Approximation in weighted Orlicz spaces”, *Math. Slovaca*, vol. 61, no. 4, pp. 601-618, 2011.

[14] D. M. İsrafilov ve Y. E. Yıldırır, “Approximation theorems in weighted Lorentz spaces”, *Carpathian J. Math.*, vol. 26, no. 1, pp. 108–119, 2010.

[15] L. Ephremidze, V. Kokilashvili, ve Y. E. Yıldırır, “On the inverse inequalities for

trigonometric polynomial approximations in weighted Lorentz spaces", *in Proc. A. Razmadze Math. Inst*, vol. 144, pp. 132–136, 2007.

[16] Quade E S, "Trigonometric approximation in the mean", *Duke Math. J.*, vol. 3, no. 3, pp. 529–543, 1937.

[17] P. Chandra, "Functions of classes L^p and $Lip(\alpha, p)$ and their Riesz means", *Riv. Mat. Univ. Parma*, vol. 4, no. 12, pp. 275–282, 1986.

[18] P. Chandra, "A Note On The Degree Of Approximatıon Of Continuous Functions", *Acta Math. Hung.*, vol. 62, no. 1–2, pp. 21–23, 1993.

[19] P. Chandra, "Trigonometric approximation of functions in Lp-norm", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 275, no. 1, pp. 13–26, 2002, doi: 10.1016/S0022-247(02)00211-1.

[20] L. Leindler, "Trigonometric approximation in Lp-norm", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 302, no. 1, pp. 129–136, 2005, doi: 10.1016/j.jmaa.2004.07.049.

[21] M. L. Mittal, B. E. Rhoades, V. N. Mishra, ve U. Singh, "Using infinite matrices to approximate functions of class $Lip(\alpha, p)$ using trigonometric polynomials", *J. Math. Anal. Appl.*, vol. 326, no. 1, pp. 667–676, 2007, doi: 10.1016/j.jmaa.2006.03.053.

[22] M. L. Mittal, B. E. Rhoades, ve V. N. Mishra, "Approximation of signals (functions) belonging to the weighted $W(L^p, \xi(t))$ -class by linear operators", *Int. J. Math. Sci.*, vol. 2006, no. May, pp. 1–10, 2006, doi: 10.1155/IJMMS/2006/53538.

[23] A. Güven, "Trigonometric approximation of functions in weighted L^p spaces", *Sarajev. J. Math.*, vol. 5, no. 17, pp. 99–108, 2009.

[24] A. Güven ve D. M. İsrafilov, "Trigonometric approximation in generalized Lebesgue spaces $L^{p(x)}$", *J. Math. Inequalities*, vol. 4, no. 2, pp. 285–299, 2010, doi: 10.7153/jmi-04-25.

[25] A. Güven, "Trigonometric approximation in reflexive Orlicz spaces", *Anal. Theory Appl.*, vol. 27, no. 2, pp. 125–137, 2011, doi: 10.1007/s10496-011-0125-4.

[26] M. L. Mittal, B. E. Rhoades, S. Sonker, ve U. Singh, "Approximation of signals of class $Lip(\alpha, p)$ by linear operators", *Appl. Math. Comput.*, vol. 217, no. 9, pp. 4483–4489, 2011.

[27] R. N. Mohapatra ve B. Szal, "On trigonometric approximation of functions in the Lp

norm", arXiv Prepr. arXiv1205.5869, 2012.

[28] A. Güven, "Trigonometric approximation by matrix transforms in $L^{p(x)}$ spaces", *Anal. Appl.*, vol. 10, no. 01, pp. 47–65, 2012.

[29] X. Z. Krasniqi, "On some results on approximation of functions in weighted L^p spaces", *Adv. Pure Appl. Math.*, vol. 4, no. 4, pp. 389–397, 2013, doi: 10.1515/apam-2013-0021.

[30] X. Z. Krasniqi, "On trigonometric approximation in the space", *TWMS J. App. Eng. Math.*, vol. 4, no. 2, pp. 147–154, 2014.

[31] R. N. Mohapatra ve B. Szal, "On trigonometric approximation of functions in the L^q norm", *Demonstr. Math.*, vol. 51, no. 1, pp. 17–26, 2018, doi: 10.1515/dema-2018-0004.

[32] A. Testici, "Approximation by Nörlund and Riesz means in weighted Lebesgue space with variable exponent", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1 Math. Stat.*, vol. 68, no. 2, pp. 2014–2025, 2019.

[33] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, "On The Trigonometric Approximation In Weighted Lorentz spaces", *Aligarh Bull. Math.*, vol. 35, no. 1–2, pp. 81–97, 2016.

[34] Y. E. Yıldırır ve A. H. Avşar, "Approximation Of Priodic Functions In Weighted Lorentz Spaces", *Sarajev. J. Math.*, vol. 13, no. 25, pp. 1–12, 2017, doi: 10.3336/gm.47.2.13.

[35] D. M. İsrafilov ve A. Testici, "Approximation by matrix transforms in weighted Lebesgue spaces with variable exponent", *Results Math.*, vol. 73, no. 1, pp. 1-25, 2018.

[36] D. H. Armitage ve I. J. Maddox, "A New Type of Cesáro Mean", *Analysis*, vol. 9, no. 1–2, pp. 195–204, 1989.

[37] J. A. Osikiewicz, "Equivalence Results for Cesáro Submethods", *Analysis*, vol. 3, no. 20, pp. 35–43, 2000.

[38] U. Değer, İ. Dağadur, ve M. Küçükaslan, "Approximation by trigonometric polynomials to functions in L^p norm", *Proc. Jangjeon Math. Soc.*, vol. 15, no. 2, pp. 203–213, 2012.

[39] U. Değer ve M. Kaya, “On the approximation by Cesáro submethod”, *Palest. J. Math.*, vol. 4, no. 1, pp. 44–56, 2015.

[40] M. L. Mittal ve M. V. Singh, “Approximation of signals (functions) by trigonometric polynomials in L^p norm”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, vol. 2014, no. 3, 2014, doi: 10.1155/2014/267383.

[41] M. L. Mittal ve M. V. Singh, “Applications of Cesàro Submethod to Trigonometric Approximation of Signals (Functions) Belonging to Class in-Norm”, *J. Math.*, vol. 2016, 7 pages, 2016.

[42] S. Sonker ve A. Munjal, “Approximation of the function $f \in Lip(\alpha, p)$ using infinite matrices of Cesáro submethod”, *Nonlinear Stud.*, vol. 24, no. 1, pp. 113–125, 2017.

[43] X. Z. Krasniqi, “Trigonometric approximation of (signals) functions by Nörlund type means in the variable space $L^{p(x)}$”, *Palest. J. Math.*, vol. 6, no. 1, pp. 84–93, 2017.

[44] U. Değer, “On approximation by Nörlund and Riesz submethods in variable exponent Lebesgue spaces”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ankara Ser. A1Mathematics Stat.*, vol. 67, no. 1, pp. 46–59, 2018, doi: 10.1501/commua1_0000000829.

[45] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “On The Trigonometric Approximation Of Functions In Weighted Lorentz Spaces Using Cesáro Submethod”, *Novi Sad J. Math.*, vol. 48, no. 2, pp. 41–54, 2018, doi: 10.30755/NSJOM.06335.

[46] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “On Trigonomeric Approximation in Weighted Lorentz Spaces Using Nörlund and Riesz Submethods”, *J. Math. Anal.*, vol. 9, no. 6, pp. 17–27, 2018.

[47] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “Trigonometric Approximation in Variable Exponent Weighted Lebesgue Spaces using Sub-Matrix method”, *J. Math. Anal.*, vol. 11, no. 6, pp. 1–16, 2020.

[48] R. Hunt, B. Muckenhoupt, ve R. Wheeden, “Weighted norm inequalities for the conjugate function and Hilbert transform”, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 176, pp. 227–251, 1973.

[49] V. Kokilashvili ve Y. E. Yildirir, “On the approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces”, *J. Funct. Spaces Appl.*, vol. 8, no. 1, pp. 67–86, 2010.

[50] I. I. Sharapudinov, “Some problems in approximation theory in the spaces $L^{p(x)}$”, *Anal. Math*, vol. 33, no. 2, pp. 135–153, 2007.

[51] D. M. İsrafilov ve N. P. Tozman, “Approximation by polynomials in Morrey-Smirnov classes”, *East J. Approx.*, vol. 14, no. 3, pp. 255–269, 2008.

[52] D. M. İsrafilov ve A. Güven, “Approximation by trigonometric polynomials in weighted Orlicz spaces”, *Stud. Math.*, vol. 174, no. 2, pp. 147–168, 2006.

[53] B. Muckenhoupt, “Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function”, *Trans. Am. Math. Soc.*, pp. 207–226, 1972.

[54] H. M. Chung, R. A. Hunt, ve D. S. Kurtz, “The Hardy-Littlewood maximal function on $L^{(p,q)}$ spaces with weights”, *Indiana Univ. Math. J.*, vol. 31, no. 1, pp. 109–120, 1982.

[55] D. Cruz-Uribe, A. Fiorenza, ve C. J. Neugebauer, “The maximal function on variable L^p spaces”, *Prepr. Intituto per le Appl. del Calc. Mauro Picone, Sez. di Napoli*, vol. 249, 2002.

[56] L. Diening, “Maximal Function On Generalized Lebesgue Spaces”, *Math. Inequalities Approx.*, vol. 7, no. 2, pp. 245–253, 2004.

[57] A. Nekvinda, “Hardy-Littlewood maximal operator on $L^{P(x)}(R^n)$”, *Math. Inequalities Appl.*, vol. 7, pp. 255–266, 2004.

[58] L. Pick ve M. Ruzicka, “An example of a space $L^{p(x)}$ on which the Hardy-Littlewood maximal operator is not bounded”, *Expo. Math.*, vol. 19, no. 4, pp. 369–371, 2001.

[59] D. Cruz-Uribe, L. Diening, ve P. Hästö, “The maximal operator on weighted variable Lebesgue spaces”, *Fract. Calc. Appl. Anal.*, vol. 14, no. 3, pp. 361–374, 2011, doi: 10.2478/s13540-011-0023-7.

[60] D. Cruz-Uribe, L. A. Wang, ve others, “Extrapolation and weighted norm inequalities in the variable Lebesgue spaces”, *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 369, no. 2, pp. 1205–1235, 2017.

[61] M. Chiarenza ve F. Frasca, “Morrey spaces and Hardy-Littlewood maximal function”, *Rend. Mat.*, vol. 7, pp. 273–279, 1987.

[62] S. Z. Jafarov, “Direct And Converse Theorems Of The Theory Of Approximation In

Morrey Spaces”, *Proc. IAM*, vol. 9, no. 1, pp. 83–94, 2020.

[63] I. Genebashvili, A. Gogatishvili, V. Kokilashvil, ve M. Krbec, *Weight theory for integral transforms on spaces of homogeneous type*, vol. 92. CRC Press, 1997.

[64] A. Zygmund, *Trigonometric Series*, vol. I. 1959.

[65] C. Bennet ve R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Boston, MA, 1988.

[66] A. Kufner, O. John, ve S. Fucik, *Function spaces*, vol. 3. Springer Science & Business Media, 1977.

[67] R. E. Castillo ve H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*, Springer, 2016.

[68] V. Kokilashvili ve M. Krbec, *Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces*, World Scientific, 1991.

[69] J. S. Maria Carro ve Jose Rapaso, *Recent Development in the Theory of Lorentz Spaces and Weighted Inequalities*, American Mathematical Soc., 2007.

[70] L. Diening, P. Harjulehto, P. Hästö, ve M. Ruzicka, “Lebesgue and Sobolev spaces with variable exponents”, *Lect. Notes Math.*, vol. 2017, pp. 1–518, 2011, doi: 10.1007/978-3-642-18363-8_1.

[71] D. V Cruz-Uribe ve A. Fiorenza, *Variable Lebesgue spaces: Foundations and harmonic analysis*, Springer Science & Business Media, 2013.

[72] D. R. Adams, *Morrey spaces*, Birkhauser Basel, 2015.

[73] V. Kokilashvili, A. Meskhi, H. Rafeiro, ve S. Samko, *Integral Operators in Non-Standard Function Spaces*: Volume 2: Variable Exponent Hölder, Morrey--Campanato and Grand Spaces, vol. 249. Birkhäuser, 2016.

[74] M. A. Krasnosel’skii ve Y. B. Rutickii, “Convex Functions and Orlicz Spaces”, Math. Gaz., vol. 47, no. 361, p. 266, 1963, doi: 10.2307/3613435.

[75] M. M. Rao ve Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, M. Dekker New York, 1991.

[76] D. Boyd, “Indices for the Orlicz spaces”, *Pacific J. Math.*, vol. 38, no. 2, pp. 315–323, 1971.

[77] W. Matuszewska, “On certain properties of ψ-functions”, *Bull. Acad. Pol. Sci.*, vol.

8, pp. 439–443, 1960.

[78] A. Böttcher, Y. I. Karlovich, J. I. Karlovics, ve Y. I. Karlovich, *Carleson curves, Muckenhoupt weights, and Toeplitz operators*, vol. 154. Springer Science & Business Media, 1997.

[79] C. Bennett ve R. Sharpley, *Interpolation of Operators*, Academic press, 1988.

[80] A. Y. Karlovich, "Algebras of singular integral operators with piecewise continuous coefficients on reflexive Orlicz spaces", *Math. Nachrichten*, vol. 179, no. 1, pp. 187–222, 1996.

[81] L. Maligranda, *Indices and interpolation*, Dissertationes Math. (Rozprawy Mat.) 234 1985.

[82] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, "On Trigonometric Approximation In Weighted Lorentz Spaces Using Norlund And Riesz Submethods", *J. Math. Anal.*, vol. 9, no. 6, pp. 17–27, 2020.

[83] J. Duoandikoetxea ve M. Rosenthal, "Extension and boundedness of operators on Morrey spaces from extrapolation techniques and embeddings", *J. Geom. Anal.*, vol. 28, no. 4, pp. 3081–3108, 2018.

[84] B. Muckenhoupt ve R. W. Richard Hunt, "Weighted Norm Inequalities for the Conjugate Function and Hilbert Transform", *Soc. Am. Math.*, vol. 176, pp. 227–251, 1973.

[85] I.I. Sharapudinov, "Some questions in approximation theory for Lebesgue spaces with variable exponent", *South. Math. Inst. Vladikavkaz Sci. Cent. Russ. Acad. Sci. Repub.*, North Ossetia-Alania, vol. 5, 2012.

[86] B. Szal, "Trigonometric approximation by Nörlund type means in L^p norm", *Comment. Math. Univ. Carolinae*, vol. 50, no. 4, pp. 575–589, 2009.

[87] A. A. Masta, Ifronika, ve M. Taqiyuddin, "A note on inclusion properties of weighted Orlicz spaces", *J. Indones. Math. Soc*, vol. 26, no. 01, pp. 128–136, 2020.

Yayın Listesi

[1] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “On The Trigonometric Approximation In Weighted Lorentz spaces,” *Aligarh Bull. Math.*, vol. 35, no. 1–2, pp. 81–97, 2016.

[2] Y. E. Yıldırır ve A. H. Avşar, “Approximation Of Periodic Functions In Weighted Lorentz Spaces,” *Sarajev. J. Math.*, vol. 13, no. 25, pp. 1–12, 2017, doi: 10.3336/gm.47.2.13.

[3] A. Doğu, A. H. Avşar, ve Y.E. Yıldırır, “Some Inequalities About Convolution And Trigonometric Approximation İn Weighted Orlicz Spaces,” *Proc. Inst. Math. Mech. Nat. Ac. Sci. Azerbaijan*, 44, no. 1, 107-115, 2018.

[4] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “On The Trigonometric Approximation Of Functions In Weighted Lorentz Spaces Using Cesaro Submethod,” *Novi Sad J. Math.*, vol. 48, no. 2, pp. 41–54, 2018, doi: 10.30755/NSJOM.06335 **[Tezden türetilmiştir]**.

[5] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “On Trigonomeric Approximation in Weighted Lorentz Spaces Using Nörlund and Riesz Submethods,” *J. Math. Anal.*, vol. 9, no. 6, pp. 17–27, 2018 **[Tezden türetilmiştir]**.

[6] A. H. Avşar ve H. Koç, “Jackson and Stechkin type inequalities of trigonometric approximation in $A_{w,\vartheta}^{p,q(\cdot)}$,” *Turkish Journal of Mathematics*, *42*(6), 2979-2993, 2018.

[7] A. H. Avşar ve Y. E. Yıldırır, “Trigonometric Approximation in Variable Exponent Weighted Lebesgue Spaces using Sub-Matrix method,” *J. Math. Anal.*, vol. 11, no. 6, pp. 1–16, 2020 **[Tezden türetilmiştir]**.