T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

FONKSİYONLARIN SIFIRLARI VE SABİT NOKTALARI

RABİA NUR EVŞAN GÜNAYDI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR (Tez Danışmanı)**
Doç. Dr. Derya AVCI
Dr. Öğr. Üyesi Setenay AKDUMAN

BALIKESİR, TEMMUZ 2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Fonksiyonların Sıfırları ve Sabit Noktaları**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Rabia Nur Evşan GÜNAYDI

ÖZET

FONKSİYONLARIN SIFIRLARI VE SABİT NOKTALARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
RABİA NUR EVŞAN GÜNAYDI
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL ÖZGÜR)
BALIKESİR, TEMMUZ - 2021

Bu çalışma metrik uzaylarda (F,φ)-daralma dönüşümleri için φ-sabit noktaların varlığını ve tekliğini içeren güncel çalışmaların derlemesidir. Öncelikle daralma dönüşümünün özelleştirilmesi ve Banach Daralma Prensibinin'nin genelleştirilmesi ile elde edilen (F,φ)-daralma dönüşümü ile bu dönüşümün sağladığı φ-sabit nokta teoremlerinin araştırıldığı makaleler incelenmiştir. Bu teorik sonuçlar için orijinal örnekler elde edilmiştir. Elde edilen teorik sonuçların bazı uygulamaları incelenmiştir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş kısmında tezin konusu tanıtılmaktadır.

İkinci bölümde bu tezde kullanılacak temel bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölüm tezin ana bölümüdür. φ-sabit nokta, φ-Picard operatörü, zayıf φ-Picard operatörü, (F,φ)-daralma dönüşümü, (F,φ)-zayıf daralma dönüşümü, (F,φ)-grafik daralma dönüşümü, (F,φ,θ)-daralma dönüşümü, (F,φ,θ)-zayıf daralma dönüşümü, α-geçişli (admissible) dönüşüm, $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-daralma dönüşümü, $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-zayıf daralma dönüşümü kavramları tanıtılmıştır. (F,φ,θ)-daralma dönüşümü kavramı için süreksiz fonksiyonlar ile φ-sabit nokta sonuçlarının varlığı çalışılmış ve bu kavramlar için örnekler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde metrik uzaylarda (φ-ψ)-sabit nokta kavramı, $\mathcal{M}$ fonksiyon ailesi ile birlikte $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü ve $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-grafik daralma dönüşümü tanıtılarak bu tür daralmalar için (φ-ψ)-sabit nokta sonuçları incelenmiştir.

Beşinci bölümde bu çalışmada verilen sabit nokta teoremlerinden bazılarının uygulamaları verilmiştir.

Altıncı bölümde bu tez çalışmasının sonuçları ve üzerine çalışılabilecek konular tartışılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, φ-sabit nokta, daralma dönüşümü, φ-Picard operatörü, zayıf φ-Picard operatörü.

Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 77

ABSTRACT

ZEROS AND FIXED POINTS OF FUNCTIONS
MSC THESIS
RABİA NUR EVŞAN GÜNAYDI
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. NİHAL ÖZGÜR)
BALIKESİR, JULY - 2021

This study is a review of current studies involving the existence and uniqueness of φ-fixed points for (F, φ)-contraction mappings in metric spaces. First of all, the articles investigating the (F, φ)-contraction mapping and the φ-fixed point theorems provided by this mapping, obtained by the specialization of the contraction mappings and the generalization of the Banach Contraction Principle, are examined. Some original examples are provided for the obtained theoretical results.

This thesis consists of six chapters.

In the introduction part, which is the first chapter, the subject of the thesis is introduced.

In the second chapter, basic information to be used in this thesis is given.

The third chapter is the main part of the thesis. φ-fixed point, φ-Picard operator, weak φ-Picard operator, (F, φ)-contraction mapping, (F, φ)-weak contraction mapping, graphic (F, φ)-contraction mapping, (F, φ, θ)-contraction mapping, (F, φ, θ)-weak contraction mapping, α-admissible mapping, $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-contraction mapping, $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-weak contraction mapping concepts are introduced. For the concept of (F, φ, θ)-contraction mapping, the existence of discontinuous functions and φ-fixed point results have been studied and examples for these concepts have been examined.

In the fourth chapter, the concept of (φ-ψ)-fixed point in metric spaces, $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-contraction mapping and graphic $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-contraction mapping along with family of functions $\mathcal{M}$ are introduced and (φ-ψ)-fixed point results for such contractions are examined.

In the fifth chapter, some applications of fixed point theorems presented in this study are given.

In the sixth chapter, the results presented in this thesis and the future directions of the study are discussed.

KEYWORDS: Fixed point, φ-fixed point, contraction mapping, φ-Picard operator, weak φ-Picard operator.

Science Code / Codes : 20404 Page Number : 77

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET ..... **i**
ABSTRACT ..... **ii**
İÇİNDEKİLER ..... **iii**
TABLO LİSTESİ ..... **iv**
SEMBOL LİSTESİ ..... **v**
ÖNSÖZ ..... **vi**
1. GİRİŞ **1**
2. ÖN BİLGİLER **4**
2.1 Metrik Uzaylar Üzerinde Bazı Temel Kavramlar 4
2.2 Fonksiyonların Sıfır Yerleri 9
3. φ-SABİT NOKTA KAVRAMI VE (F,φ)-DARALMA DÖNÜŞÜMÜ İLE BU DÖNÜŞÜMÜN GELİŞTİRİLMESİ **12**
3.1 φ-Sabit Nokta Kavramı 12
3.2 (F,φ)-Daralma Dönüşümü 16
3.3 (F,φ,θ)-Daralma Dönüşümü 26
3.4 Süreksiz Fonksiyonlar ile (F,φ,θ)-Daralma Dönüşümü 39
3.5 (F,φ,α-ψ)-Daralma Dönüşümü 46
4. (α-ψ)-SABİT NOKTALAR İLE $M_{(\varphi,\psi)}$- DARALMA DÖNÜŞÜMÜ **60**
5. UYGULAMALAR **69**
5.1 Doğrusal Olmayan İntegral Denlemler İçin Bir Uygulama 69
5.2 Doğrusal Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlere Bir Uygulama 70
6. SONUÇ VE ÖNERİLER **74**
7. KAYNAKLAR **75**
ÖZGEÇMİŞ **77**

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1: Örnek 3.3.8 de tanımlı olan $T(x)$ Picard operatörü için değerler 36
Tablo 3.2: Örnek 3.3.8 de tanımlı olan $T(x)$ Picard operatörü için değerler 36
Tablo 3.3: Örnek 3.3.9 da tanımlı olan $T(x)$ Picard operatörü için değerler 37

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks Sayılar Kümesi
$\in$	: Ait
(X, d)	: Metrik Uzay
$\{x_n\}$	: Dizi
$A \subseteq B$	: B kümesi A kümesine eşittir veya A kümesini kapsar
$A \cup B$	: A birleşim B kümesi
$A \cap B$	: A kesişim B kümesi
Z_{φ}	: φ fonksiyonunun tüm sıfır yerlerinin kümesi
$Fix(T)$	: T operatörünün tüm sabit noktalarının kümesi
$T^n(x)$	: T operatörünün n. kez tekrarlanması
$Z_{(\varphi,\psi)}$	: φ ve ψ fonksiyonlarının tüm sıfır yerlerinin kesişim kümesi
$\|\,,\|$	: Normlu Uzay
$[\,x\,]$	: x reel sayısının tam değeri

ÖNSÖZ

Öncelikle her zaman yanımda olan ve beni bütün çalışma sürecimde motive eden sevgili eşim Aziz Doğru'ya, beni bugünlere getiren, hala desteğini esirgemeyen sevgili anneme ve babama sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2021 **Rabia Nur Evşan GÜNAYDI**

1. GİRİŞ

Sabit nokta çalışmaları hem matematikçiler hem de uygulamalı bilimler üzerine çalışanlar için çok önemli olmuştur. Yani, sadece matematik alanında değil fizik, biyoloji, bilgisayar bilimleri, mühendislik gibi birçok alanda da sabit nokta teorisi kullanılır. X boş olmayan bir küme olmak üzere $T: X \to X$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $T(x) = x$ koşulunu sağlayan $x \in X$ noktasına T dönüşümünün bir sabit noktası denir. Matematiğin farklı dallarında, farklı uzaylar üzerinde sabit noktaların varlığı ve tekliği ile ilgili çalışmalar önem kazanmıştır. Örneğin, doğrusal olmayan bir integral denklemin çözümünün varlığı ve tekliği bu çalışmanın uygulamalar kısmında da görülebileceği üzere sabit nokta teorisi ile elde edilebilir.

Tam metrik uzaylarda sabit nokta teoremi ilk kez 1922 yılında Stefan Banach tarafından daralma dönüşümü kavramı ile çalışılmıştır. Banach Daralma Prensibi adını alan teorem bir dönüşümün sabit noktasının varlığını garanti eder. Üstelik bu sabit noktanın tekliğini ve nasıl bulunabileceğini gösterir. Bu teoremin ifadesi ise şöyledir: (X, d) bir tam metrik uzay ve $T: X \to X$ bir daralma dönüşümü olmak üzere her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y)$ olacak şekilde bir $k \in [0,1)$ varsa T dönüşümünün X'de bir tek sabit noktası vardır [1]. Sabit noktanın bulunması ise Picard'ın çalışması yardımıyla sağlanmaktadır. X'deki herhangi bir başlangıç noktasından başlayan Picard tekrarlama dizisi T'nin sabit noktasına yakınsar. Buradan Picard operatörü kavramı ortaya çıkmıştır.

Bunlarla beraber Khan, Swaleh ve Sessa uzaklığı değiştiren fonksiyonları şu şekilde tanımlamıştır: $\psi: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\psi(0) = 0$ koşulu ile birlikte sürekli ve monoton azalmayan ise bu fonksiyona mesafeyi değiştiren fonksiyon denir [2]. Bu fonksiyonlar yardımı ile, Banach Daralma Prensibi genelleştirilerek zayıf daralma koşulu tanımlanmıştır. Zayıf daralma koşulunu sağlayan dönüşümün sabit noktasının varlığı ve tekliği ispat edilmiştir. Daha sonra bu prensip farklı bir çok bilim insanı tarafından çalışılıp geliştirilmiştir [3-7].

Bu çalışmada Mohamed Jleli, Bessem Samet ve Calogero Vetro'nun geliştirdiği φ-sabit nokta kavramı incelenmiştir. φ-sabit nokta çalışmaları, belirli bir fonksiyonun sıfır kümesine ait olan sabit noktaların varlığı ile ilgili çalışmalardır. φ-sabit noktanın tanımı aşağıdaki şekilde verilmektedir.

$T: X \rightarrow X,\ d$ metriğine göre bir operatör olmak üzere, $Fix(T) = \{x \in X\ : T(x) = x\}$, T operatörünün tüm sabit noktalarının kümesi ve $Z_{\varphi} = \{x \in X : \varphi(\mathrm{x}) = 0\}$, φ fonksiyonunun tüm sıfır yerlerinin kümesi olsun. $z\ \in\ X$ elemanının T operatörünün bir φ-sabit noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $z \in Fix(T)\ \cap\ Z_{\varphi}$ olmasıdır.

Bu çalışmada φ-sabit nokta kavramının tanımı verildikten sonra (F, φ)-daralma dönüşümü, (F, φ)-zayıf daralma dönüşümü kavramları tanıtılarak bu kavramlar ile birlikte sabit noktanın varlığı araştırılmıştır.

Tez toplam beş ana bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. Sabit nokta teorisinin geliştirilmesinin kısa bir özeti ve bu çalışmanın amacı anlatılmaktadır.

Çalışmanın ikinci bölümünde, bu çalışmada kullanılacak temel kavramlar verilmiştir ve iki alt başlıktan oluşmaktadır. Birinci alt başlıkta metrik uzay tanımı ile başlanarak temel tanım ve teoremler verilmiş, örnekler incelenmiştir. İkinci alt başlıkta fonksiyonların sıfırlarının önemi tartışılmış ve sıfırların önemini kavramak adına matematiğin farklı dallarından teoremler verilmiş, örnekler incelenmiştir.

Çalışmanın üçüncü bölümü, beş alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde φ-sabit nokta, φ-Picard operatörü ve zayıf φ-Picard operatörü kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramların tamamı orijinal örneklerle desteklenmiştir. İkinci alt bölümde (F, φ)- daralma dönüşümü, (F, φ)-zayıf daralma dönüşümü, (F, φ)-grafik daralma dönüşümü kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramlarla elde edilebilen teoremler verilmiş ve ilk teorem orijinal bir örnek ile desteklenmiştir. Üçüncü alt bölümde $(F, \mathrm{\varphi}, \theta)$-daralma dönüşümü ve $(F, \mathrm{\varphi}, \theta)$-zayıf daralma dönüşümü tanıtılmış ve yine bu kavramlarla elde edilebilen teoremler verilmiştir. Bu kavramlar incelenen makalelerdeki örneklerle ve en son kendi orijinal örneğimizle desteklenmiştir. Dördüncü alt bölümde (F, φ, θ)-daralma dönüşümü kavramının süreksiz fonksiyonlar ile çalışılması incelenmiştir. Beşinci alt bölümde ise Bessem Samet, Calogero Vetro ve Pasquale Vetro'nun tanımladığı α-geçişli dönüşüm incelenerek, $(F, \mathrm{\varphi}, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü ve $(F, \mathrm{\varphi}, \alpha - \psi)$- zayıf daralma dönüşümü kavramları tanıtılmıştır. Bu kavramlarla ilgili teoremler ve çalışılan makalelerdeki örnekler incelenerek üçüncü ana bölüm tamamlanmıştır.

Çalışmanın dördüncü bölümünde (φ-ψ)-sabit nokta, $M_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü ve $M_{(\varphi,\psi)}$-grafik daralma dönüşümü kavramları tanıtılarak ilgili teoremler ve örnekler incelenmiştir.

Çalışmanın beşinci bölümünde bu çalışmadaki kavramlardan iki tanesinin uygulaması ele alınmıştır. Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemin bir tek çözümü olduğu, (F,φ,θ)-daralma dönüşümü yardımıyla gösterilmiştir. İkinci alt bölümde ise $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-daralma dönüşümü yardımıyla adi bir diferansiyel denklemin çözümünün varlığı elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde bu tez çalışmasında kullanılan temel kavramlar verilmektedir. Bu kavramların bazıları örneklerle desteklendi.

2.1 Metrik Uzaylar Üzerinde Bazı Temel Kavramlar

1906 yılında Fréchet, boş olmayan bir X kümesinin her (x, y) eleman çiftine negatif olmayan bir $d(x, y)$ (x ve y arasındaki mesafe) reel (gerçel) sayısını atayan bir d fonksiyonu tanımlayarak mesafenin biçimsel tanımını oluşturdu [8].

2.1.1 Tanım (Metrik Uzay)

$X \neq \emptyset$ bir küme olsun. X üzerinde tanımlı bir metrik her $x, y \in X$ için;

d_1) $d(x, y) \geq 0$,

d_2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

d_3) $d(x, y) = d(y, x)$ (simetri),

d_4) Tüm $x, y, z \in X$ için $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (üçgen eşitsizliği)

özelliklerini sağlayan bir

$d: X \times X \to \mathbb{R}$

fonksiyonudur. Eğer d, X üzerinde bir metrik ise o zaman (X, d) çiftine bir metrik uzay denir [1,9].

2.1.2 Örnek

$X = \mathbb{R}$ (veya $X = \mathbb{C}$) olacak şekilde her $x, y \in X$ için; $d_{|.|}(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı $d_{|.|}$(mutlak değer) metriği ile X kümesi bir metrik uzaydır. Bu metriğe X için doğal (alışılmış, standart) metrik adı verilir [9].

2.1.3 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$ X'de bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ şeklindeki her bir $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n, x) = |x_n - x| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine yakınsaktır ve x noktasına da bu dizinin limitidir denir [10].

2.1.4 Tanım

$\{x_n\}$ sınırlı bir dizi olsun. O halde $\{x_n\}$ dizisinin üst limiti;

$$\lim_{n\to\infty} sup\,\{x_n\} := \inf_{k\in\mathbb{N}} \sup_{n\geq k}\{x_n\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\lim\limits_{n\to\infty} sup\,\{x_n\}$ ile gösterilir. Benzer şekilde $\{x_n\}$ dizisinin alt limiti;

$$\lim_{n\to\infty} inf\,\{x_n\} := \sup_{k\in\mathbb{N}} \inf_{n\geq k}\{x_n\}$$

şeklinde tanımlanır ve $\lim\limits_{n\to\infty} inf\,\{x_n\}$ ile gösterilir [11].

2.1.5 Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $x \in X$ ve $\{x_n\}$ X'de bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n,m \geq n_0$ şeklindeki her bir $n \in \mathbb{N}$ için;

$$d(x_n,x_m) = |x_n - x_m| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ varsa $\{x_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisidir denir [10].

2.1.6 Tanım

(X,d) bir metrik uzay ve X uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (X,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [10].

2.1.7 Tanım

(X,d_X) ve (Y,d_Y) metrik uzaylar, $f: X \to Y$ bir fonksiyon ve $a \in X$ olsun.

(a) Eğer verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d_X(x,a) < \delta$ olduğunda $d_Y\big(f(x),f(a)\big) < \varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir.

(b) Eğer f fonksiyonu X uzayının her noktasında sürekli ise f fonksiyonuna X üzerinde süreklidir denir [12].

2.1.8 Teorem

(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $A \subseteq X$ olsun. Bir $f: A \to Y$ bir fonksiyonu $a \in A$ noktasında sürekli olması için gerekli ve yeterli koşul A kümesi içinde a'ya yakınsayan her bir $\{x_n\}$ dizisi için, $\{f(x_n)\}$ dizisinin $f(a)$'ya yakınsamasıdır. Yani;

$$f, a \text{ noktasında süreklidir} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = a \; \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$$

olur [9].

2.1.9 Tanım

(X, d_X) ve (Y, d_Y) metrik uzaylar ve $f: X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık her $x, y \in X$ için;

$$d_X(x, y) < \delta \Rightarrow d_Y\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa f'ye (X üzerinde) düzgün süreklidir denir [9].

2.1.10 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $f: X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $\{x_n\}$, $x_n \to x_0$ olacak şekilde X'de herhangi bir dizi olsun.

$$f(x_0) \leq \lim_{n\to\infty} \inf f(x_n)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonuna x_0 noktasında alt yarı süreklidir denir [13].

Alt yarı süreklilik kavramının süreklilik kavramından zayıf olduğu yukarıda verilen Teorem 2.1.8 ve Tanım 2.1.10 ile birlikte görülebilir. Süreklilik şartı sağlandığında alt yarı süreklilik şartının sağlandığı da açıktır. Tersi doğru değildir.

2.1.11 Örnek

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$$f(x) = \begin{cases} -1, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0. \end{cases}$$

Bu durumda f fonksiyonu 0 noktasında alt yarı süreklidir ancak bu noktada sürekli değildir [15].

2.1.12 Teorem

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir daralma dönüşümü ise T, X üzerinde düzgün süreklidir [9].

2.1.13 Tanım

X boş olmayan bir küme, $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve $x \in X$ olsun.

$$T(x) = x$$

eşitliği sağlanıyorsa x noktasına T'nin bir sabit noktası denir [10].

2.1.14 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $T: X \rightarrow X$ bir fonksiyon ve her $x, y \in X$ için;

$$d\big(T(x), T(y)\big) \leq kd(x, y) \tag{2.1}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $0 < k < 1$ sayısı varsa T bir daralma dönüşümüdür [1,16].

Bu tez çalışmasının konusu daralma dönüşümünün geliştirilmesine dayandığı için daralma dönüşümü kavramı bir örnekle incelendi.

2.1.15 Örnek

$X = \mathbb{R}$ ve $d(x,y) = |x-y|$ ile (X,d) bir metrik uzay olsun. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $a > 1$ için;

$$f(x) = \frac{x}{a} + b$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda f bir daralma dönüşümüdür. Gerçekten;

$$d\big(f(x), f(y)\big) = \left|\left(\frac{x}{a} + b\right) - \left(\frac{y}{a} + b\right)\right| = \left|\frac{x}{a} - \frac{y}{a}\right| = \frac{1}{a}|x-y| \leq k|x-y|.$$

$k = \frac{1}{a}$ seçilirse f'nin bir daralma dönüşümü olduğu görülür. Şimdi $f(x)$ fonksiyonunun bir tek sabit noktası olduğu gösterilecektir:

$$\begin{aligned} f(x) = x \;\Rightarrow\; & \frac{x}{a} + b = x \\ \Rightarrow\; & \frac{ab}{a-1} = x \end{aligned}$$

olur. Bu sabit noktanın tekliğini göstermek için iki tane sabit nokta olduğunu varsayılsın. Bu sabit noktalara x_1 ve x_2 denirse:

$$\begin{aligned} f(x_1) = x_1 \;\Rightarrow\; & \frac{x_1}{a} + b = x_1 \\ \Rightarrow\; & \frac{ab}{a-1} = x_1 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f(x_2) = x_2 \;\Rightarrow\; & \frac{x_2}{a} + b = x_2 \\ \Rightarrow\; & \frac{ab}{a-1} = x_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $x_1 = x_2$ olduğu için f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [17].

Şimdi literatürde iyi bilinen Banach Sabit Nokta Teoremi verilecektir. Tanım 2.1.13'de sabit noktanın matematiksel tanımı verilmişti. Sabit noktalar bu çalışmanın devamında verilecek olan sıfır yerleri için ayrıca önem taşımaktadır. Sıfırların önemine sonraki bölümde ayrıca değinilecektir. Bir f fonksiyonunun sabit noktası, $g(x) = f(x) - x$ ile tanmlanan bir g fonksiyonunun sıfırlarının bulunmasını da sağlayacaktır. Banach Sabit Nokta Teoremi bir tam metrik uzayda belli koşulları sağlayan fonksiyonların sabit noktasının varlığını garanti etmekle birlikte tekliğini ve nasıl bulunabileceğini de ifade eder.

2.1.16 Teorem (Banach Sabit Nokta Teoremi)

(X, d) bir tam metrik uzay, $f: X \rightarrow X$ bir fonksiyon, $0 < k < 1$ ve her $x, y \in X$ için (2.1) eşitsizliği sağlanıyorsa f fonksiyonunun bir tek sabit noktası vardır [18].

2.1.17 Tanım

(X, d) bir metrik uzay ve $T: X \rightarrow X$ bir dönüşüm olsun. $x_0 \in X$ ve $n \geq 1$ için $x_n = T^{n-1}(x)$ ile tanımlanan $\{x_n\}$ dizisine x_0 başlangıç noktasıyla Picard tekrarlama dizisi adı verilir. O halde eğer T dönüşümü tek bir sabit noktaya sahip ve X'deki her Picard tekrarlama dizisi bu sabit noktaya yakınsıyorsa T bir Picard operatörüdür. Benzer şekilde, T dönüşümünün en az bir sabit noktası var ve X'deki her Picard tekrarlama dizisi bu sabit noktalardan birine yakınsıyorsa T bir zayıf Picard operatörüdür [14].

2.1.18 Örnek

$X = \mathbb{R}$, d alışılmış metriği ile (X, d) bir metrik uzay olsun. ve $T: X \rightarrow X$ dönüşümü

$$T(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 1, \\ -2, & x < 1, \end{cases}$$

ile tanımlansın. Bu durumda T bir zayıf Picard operatörüdür ancak Picard operatörü değildir.

2.2 Fonksiyonların Sıfır Yerleri

Bir fonksiyonun sıfırını bulmak, daha bilinen bir deyişle kökünü bulmak matematiksel olarak çok önemli bir problemdir. Özellikle polinom fonksiyonlarının sıfırları matematikçiler arasında popüler bir konudur. Babilliler, ikinci derece denklemleri kendi dillerindeki çivi yazılarıyla ve bazı sözel komutlarıyla, bugün bizim kullandığımız tam kareye tamamlama yöntemine eşdeğer bir yolla çözmüş ve uygulamalar yapmışlardır [19]. Bir f fonksiyonun sıfırları $f(x) = 0$ denklemini sağlayan x değerleridir. Aslında bir fonksiyonun sıfırını bulmak bir denklemi çözmek ile eşdeğerdir. Bu konuda ikinci derece denklemler gibi üçüncü derece ve daha fazlası ile ilgili polinomların sıfırları başlığı altında birçok çalışma bulunmaktadır. Mühendislik, mimarlık, tıp gibi hatta günlük hayattaki tüm alanlarda karşılaşılan çoğu problemin çözümü bulunurken fonksiyonların sıfırlarından faydalanıldığı için bu konu tarihte çok eski bir geçmişe sahiptir. Daha önceleri sadece pozitif sıfırlar ile ilgilenilirken daha sonrasında negatif sıfırlar ve kompleks sıfırlar da dikkat çeker hale gelmiştir. Bu bölümde ilk olarak fonksiyonların sıfırının en basit şekildeki tanımı verilip, konuyu desteklemek adına bir örnek incelenmiştir. Daha sonra fonksiyonların sıfırlarını bulmak amacıyla matematiğin farklı alanlarında çalışılmış iki tane teorem verilmiştir.

2.2.1 Tanım

$f(x) = 0$ denkleminin çözümüne f fonksiyonunun bir kökü veya sıfırı denir [20].

2.2.2 Örnek

Saatte 90 km/sa hızla giden bir araç 630 km olan bir yolu kaç saatte gider? Problemini çözmek için, $630 = 90x$ denkleminin çözümünden $7 = x$ bulunur.

Problemi çözmek için kullandığımız bu denklem fonksiyon biçiminde tanımlandığında kaç saatte varıldığını bulabilmek için bu fonksiyonun sıfırına ihtiyaç duyulur.
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f(x) = 630 - 90x$ olarak tanımladığımız fonksiyonun sıfırı istenilen cevabı verir.

Bu örnek bize aklımıza gelebilecek her durumda matematik kullanıldığını ve sıfırların hayatımızda düşünmeden çözülen soruların dahi içerisinde olduğunu göstermektedir.

Aşağıda verilecek olan teorem özellikle nümerik analizde yapılan çözümlerde faydalı olan, belli bir aralıkta fonksiyonun sıfırının varlığını garanti eden bir teoremdir.

2.2.3 Teorem (Bolzano Teoremi)

$f: [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. $f(a)f(b) < 0$ olduğunu kabul edelim. O halde $f(x) = 0$ olacak şekilde en az bir $x \in (a, b)$ vardır [21].

2.2.4 Örnek

$f: [-5, 5] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olacak şekilde $f(x) = -x + 4$ ile tanımlansın. Yukarıdaki teoremin şartlarının sağlandığını kolayca görülebilir;

$f(-5)f(5) = 9.(-1) = -9 < 0$ ve f fonksiyonu tanım aralığında süreklidir. O halde $f(x) = 0$ olacak şekilde en az bir $x \in (a, b)$ vardır.

$f(x) = -x + 4 = 0 \Rightarrow x = 4$ ve $4 \in (-5, 5)$ olur.

Aşağıda verilen Cebirin Temel Teoremi, polinom fonksiyonlarının sıfırları ile ilgili iyi bilinen bir teoremdir. Bu teorem katsayıları kompleks sayılar olan ve sabit olmayan tek değişkenli bütün polinomların en az bir kompleks sıfır yeri olduğunu ifade eder. Bu anlamda, kompleks değişkenli polinomların sıfırlarının varlığı için temel bir teoremdir.

2.2.5 Teorem (Cebirin Temel Teoremi)

Tüm sabit olmayan polinomlar için;

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + + a_0$$

kompleks katsayılı olmak üzere $f(z) = 0$ denkleminin bir çözümü vardır [22].

3. φ-SABİT NOKTA KAVRAMI, (F, φ)-DARALMA DÖNÜŞÜMÜ VE BU DÖNÜŞÜMÜN GENELLEŞTİRİLMESİ

3.1 φ-Sabit Nokta Kavramı

Bu bölümde φ-Sabit Nokta ile φ-Picard operatörü tanımları verilecektir. Konunun temelini kavrayabilmek adına bu kavramlar ile ilgili bazı örnekler incelenecektir.

3.1.1 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $T: X \rightarrow X$, d metriğine göre bir operatör olmak üzere, T'nin tekrarlama operatörleri

$$T^0 = 1_x \qquad T^1 = T \qquad T^{n+1} = T \circ T^n \qquad n \in \mathbb{N}$$

şeklinde gösterilecektir [23].

T operatörünün tüm sabit noktalarının kümesi,

$Fix(T) = \{x \in X : T(x) = x\}$ ile tanımlanır.

φ fonksiyonunun tüm sıfır yerlerinin kümesi,

$Z_\varphi = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ ile tanımlanır.

φ-sabit nokta tanımı aşağıda verilmektedir.

3.1.2 Tanım

$z \in X$ elemanının T operatörünün bir φ-sabit noktası olması için gerekli ve yeterli koşul $z \in Fix(T) \cap Z_\varphi$ olmasıdır [23].

3.1.3 Örnekler

1) $X = \mathbb{R}$, d alışılmış metriği ile (X, d) bir metrik uzay olsun. Bu durumda $T: X \rightarrow X$, $x \rightarrow T(x) = x^3 - x$ bir operatördür. T'nin sabit noktalarını bulalım.

$T(x) = x$ denkleminin çözümünden:

$$T(x) = x \quad \Rightarrow \quad x^3 - x = x$$
$$\Rightarrow \quad x^3 - 2x = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x^2 - 2) = 0$$

$x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = 0$, $x_3 = +\sqrt{2}$ ve $Fix(T) = \{-\sqrt{2},\ 0, +\sqrt{2}\}$ elde edilir.
φ: X → $[0, \infty)$, $\varphi(x) = |x(x - \sqrt{2}\,)|$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyon için $Z_\varphi = \{0, \sqrt{2}\}$'dır. $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{0, +\sqrt{2}\}$ olduğu açıkça görülür. Dolayısıyla 0 ve $\sqrt{2}$ T'nin φ-sabit noktalarıdır.

2) $X = \mathbb{C}$, d alışılmış metriği ile (X, d) bir metrik uzay olsun.
$T: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $x \to T(x) = x^3 + 2x$ bir operatördür. T'nin sabit noktalarını bulalım.
$T(x) = x$ denkleminin çözümünden:

$$T(x) = x \quad \Rightarrow \quad x^3 + 2x = x$$
$$\Rightarrow \quad x^3 + x = 0$$
$$\Rightarrow \quad x(x^2 + 1) = 0$$

$x_1 = -i$, $x_2 = 0$, $x_3 = +i$ ve Fix(T) = $\{-i,\ 0,\ +i\}$ elde edilir.
$\varphi: \mathbb{C} \to [0, \infty)$, $\varphi(x) = |x|$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyon için $Z_\varphi = \{0\}$ olur. Fix(T) ∩ $Z_\varphi = \{0\}$ açıkça görülür. Dolayısıyla 0, T'nin φ-sabit noktasıdır.

Aşağıda φ-sabit nokta kavramı kullanılarak φ-Picard operatörü kavramı tanımlanacaktır.

3.1.4 Tanım

T operatörünün φ-Picard operatörü olması için gerekli ve yeterli koşullar
i. $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{z\}$,
ii. Her $x \in X$ için $n \to \infty$ iken $T^n(x) \to z$ olmasıdır [23].

3.1.5 Tanım

T operatörünün zayıf φ-Picard operatörü olması için gerekli ve yeterli koşullar

i. $Fix(T) \cap Z_{\varphi} \neq \emptyset$,

ii. Her $x \in X$ için $\{T^n(x)\}$ dizisinin yakınsak ve limitinin T'nin φ-sabit noktası olmasıdır [23].

3.1.6 Örnek

1) $X = \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda

$T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \to T(x) = \frac{x}{a}$ bir operatördür ($a \geq 2$ sabit bir doğal sayıdır). T'nin sabit noktalarını bulalım.

$T(x) = x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} T(x) = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{a} = x \\ &\Rightarrow \quad x = ax \\ &\Rightarrow \quad x(a-1) = 0 \end{aligned}$$

$x = 0$ ve $Fix(T) = \{0\}$ elde edilir.

$\varphi: \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\varphi(x) = |x|$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyon için $Z_{\varphi} = \{0\}$'dır. Fix(T) $\cap$ $Z_{\varphi} = \{0\}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla 0, T'nin φ-sabit noktasıdır.

$$T(x) = \frac{x}{a} \Rightarrow T^2(x) = \frac{x}{a^2} \Rightarrow T^n(x) = \frac{x}{a^n}$$

ve her $x \in \mathbb{R}$ için;

$$\lim_{n \to \infty} T^n(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{x}{a^n} = 0$$

elde edilir.

i. $Fix(T) \cap Z_{\varphi} = \{0\}$,

ii. $\lim_{n \to \infty} T^n(x) = 0$ olduğundan T operatörü bir φ-Picard operatörüdür.

2) $X = [0, 2]$ olsun. Bu durumda

$T: [0, 2] \to [0, 2]$, $x \to T(x) = \frac{x^2}{2}$ bir operatördür. T'nin sabit noktalarını bulalım.

$T(x) = x$ denkleminin çözümünden;

$$\begin{aligned} T(x) = x \quad &\Rightarrow \frac{x^2}{2} = x \\ &\Rightarrow x^2 = 2x \\ &\Rightarrow x^2 - 2x = 0 \\ &\Rightarrow x(x-2) = 0 \end{aligned}$$

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ ve $Fix(T) = \{0, 2\}$ elde edilir.

$\varphi: [0, 2] \to [0, \infty)$, $\varphi(x) = x(x-2)$ fonksiyonunu dikkate alalım. Bu fonksiyon için $Z_\varphi = \{0, 2\}$'dir. Fix(T) $\cap$ $Z_\varphi = \{0, 2\}$ olduğu açıktır. Dolayısıyla $\{0, 2\}$, T'nin φ-sabit noktalarıdır.

$$T(x) = \frac{x^2}{2} \Rightarrow T^2(x) = \frac{x^4}{2^3} \Rightarrow T^3(x) = \frac{x^8}{2^7} \Rightarrow T^n(x) = \frac{x^{(2^n)}}{2^{(2^n-1)}}$$

ve her $x \in [0, 2]$ için iki durum söz konusudur;

1.Durum

$x \in [0, 2)$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(2^n)}}{2^{(2^n-1)}} = 0$$

elde edilir.

2.Durum

$x = 2$ olsun.

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{(2^n)}}{2^{(2^n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2^n)}}{2^{(2^n-1)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{(2^n)}}{\frac{2^{(2^n)}}{2}} = \lim_{n\to\infty} 2^{(2^n)} . \frac{2}{2^{(2^n)}} = \lim_{n\to\infty} 2 = 2$$

elde edilir.

i. $Fix(T) \cap Z_{\varphi} \neq \emptyset$ olduğu açıktır.

ii. Her $x \in X$ için $\{T^n(x)\}$ dizisinin yakınsak ve limitinin T'nin φ-sabit noktası olmasıdır şartı göz önüne alındığında ise yukarıdaki iki duruma göre, bu limitin T'nin φ-sabit noktalarından birine yakınsadığı görülmektedir. Bu durumda T bir zayıf φ-Picard operatörüdür.

Şimdi bu tez çalışmasında sıklıkla kullanılacak bir fonksiyon ailesinin tanımı verilecektir.

3.1.7 Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonlarının kümesi Ƒ ile gösterilecektir [23]:

Ƒ1) Tüm $a, b, c \in [0,\infty)$ için $\max\{a, b\} \leq F(a,b,c)$ 'dir.

Ƒ2) $F(0, 0, 0) = 0$'dır.

Ƒ3) F süreklidir.

3.1.8 Örnekler

i. $F(a,b,c) = a + b + c$ [23].

ii. $F(a,b,c) = max\{a,b\} + c$ [23].

iii. $F(a,b,c) = a + a^2 + b + c$ [23].

3.2 (F,φ)-Daralma Dönüşümü

Bu bölümde (F,φ)- daralma dönüşümü kavramı, (F,φ)-zayıf daralma dönüşümü kavramı, (F,φ)-grafik daralma dönüşümü kavramı tanıtılacaktır. Bu kavramları kullanarak operatörlerin çeşitli sınıfları için φ-sabit noktaların varlığı ve tekliği çalışılacaktır.

3.2.1 Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in$ Ƒ olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre bir (F,φ)-daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul bir $k \in (0,1)$ sabiti ve her $(x,y) \in X^2$ için:

$$F\Big(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\Big) \leq k.F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big) \quad (3.1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [23].

3.2.2 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in \mathcal{F}$ olsun.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

H1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.

H2) $T: X \to X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ) daralma dönüşümüdür.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$,

ii. T bir φ-Picard operatörüdür,

iii. Her $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k} F\left(d(T(x), x), \varphi\big(T(x)\big), \varphi(x)\right)$$

eşitsizliği $\{z\} = Fix(T) \cap Z_\varphi = Fix(T)$ iken sağlanır [23].

İspat

$\xi \in X$ noktasının T'nin bir sabit noktası olduğunu varsayalım.

x = y = ξ alarak (3.1) uygulanırsa

$$F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \leq k.F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi))$$

elde edilir ve dolayısıyla $k \in (0,1)$ olduğundan

$$F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) = 0 \tag{3.2}$$

bulunur. Diğer yandan ($\mathcal{F}_1$) kullanılarak

$$\varphi(\xi) \leq F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \tag{3.3}$$

elde edilir. Buradan (3.2) ve (3.3) kullanılarak $\varphi(\xi) = 0$ bulunur.

Bu ise $\xi \in Z_\varphi$ ve dolayısıyla $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$ olduğunu gösterir. Böylece (i) koşulunun ispatı tamamlanmış olur.

$x \in X$ herhangi bir nokta ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.1) kullanılarak

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right)\right) \leq$$
$$k.F\left(d\left(T^{n}(x), T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right) \tag{3.4}$$

elde edilir. Buradan,

$$F\left(d\left(T^{n}(x), T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right)$$
$$\leq k.F\left(d\left(T^{n-1}(x), T^{n-2}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n-2}(x)\right)\right)$$

dir. Bu eşitsizliği (3.4) te yerine yazarak

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right)\right) \leq$$
$$k^{2}.F\left(d\left(T^{n-1}(x), T^{n-2}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n-2}(x)\right)\right)$$

elde edilir. Bu şekilde n. adımda,

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right)\right) \leq$$
$$k^{n}.F\left(d(T(x), x), \varphi\left(\mathrm{T(x)}\right), \varphi(\mathrm{x})\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{3.5}$$

elde edilir. ($\mathcal{F}_1$) şartı uygulanarak

$$max\left\{d\left(T^{n+1}(x), T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right)\right\}$$
$$\leq F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^{n}(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^{n}(x)\right)\right) \tag{3.6}$$

elde edilir. (3.5) ve (3.6) göz önünde bulundurularak

$$max\{d(T^{n+1}(x),T^n(x)),\varphi(T^{n+1}(x))\}$$
$$\leq k^n.F\left(d(T(x),x),\varphi(\mathrm{T(x)}),\varphi(\mathrm{x})\right),\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\} \tag{3.7}$$

olduğu görülür.

Buradan basit bir yorum ile $d(T^{n+1}(x),T^n(x))$ veya $\varphi(T^{n+1}(x))$ sayılarından hangisi maximum olursa olsun eşitsizliğin sağ tarafından iki sayının da küçük kalacağı aşikardır. O halde (3.7)'den;

$$d(T^{n+1}(x),T^n(x))\ \leq\ k^n.F\left(d(T(x),x),\varphi(\mathrm{T(x)}),\varphi(\mathrm{x})\right) \tag{3.8}$$

olur. Bu eşitsizlikten $k\in(0,1)$ olduğundan $\{T^n(\mathrm{x})\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu görülür. (X,d) bir tam metrik uzay olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} d(\,T^n(x),z)=0 \tag{3.9}$$

olacak şekilde bir $z\in X$ noktası vardır. Şimdi bu z noktasının T'nin bir φ-sabit noktası olduğu gösterilmelidir. (3.7)'den

$$\lim_{n\to\infty}\varphi(T^{n+1}(x))=0 \tag{3.10}$$

olduğu görülür. Buradan (3.9) ve (3.10) ile φ'nin alt yarı sürekli bir fonksiyon olduğu göz önüne alınarak

$$\varphi(z)=0 \tag{3.11}$$

olur. (3.1) kullanılarak aşağıdaki eşitsizlik yazılabilir:

$$F\left(d(T^{n+1}(x),T(z)),\varphi(T^{n+1}(x)),\varphi(T(z))\right)$$
$$\leq k.F\left(d(T^n(x),z),\varphi(T^n(x)),\varphi(z)\right),\qquad n\in\mathbb{N}\cup\{0\}.$$

Yukarıdaki eşitsizlikte $n\to\infty$ iken (3.9), (3.10), (3.11), ($\mathcal{F}_2$) ve ($\mathcal{F}_3$) kullanılarak

$$\lim_{n\to\infty} F\left(d\left(T^{n+1}(x), T(z)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T(z)\right)\right)$$
$$\leq k. \lim_{n\to\infty} F\left(d(T^n(x), z), \varphi\left(T^n(x)\right), \varphi(z)\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(Ƒ₃) şartı kullanılarak

$$F\left(\lim_{n\to\infty} d\left(T^{n+1}(x), T(z)\right), \lim_{n\to\infty} \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \lim_{n\to\infty} \varphi\left(T(z)\right)\right)$$
$$\leq k. F\left(\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), z), \lim_{n\to\infty} \varphi\left(T^n(x)\right), \lim_{n\to\infty} \varphi(z)\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

(3.9), (3.10), (3.11) kullanılarak

$$F\left(d\left(z, T(z)\right), 0, \varphi\left(T(z)\right)\right) \leq k. F(0,0,0)$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte ise (Ƒ₂) koşulu kullanılarak

$$F\left(d\left(z, T(z)\right), 0, \varphi\left(T(z)\right)\right) \leq 0$$

olduğunu görürüz. (Ƒ₁) koşulunu kullandığımızda

$$d\left(z, T(z)\right) = 0 \tag{3.12}$$

olur. Buradan (3.11) ve (3.12) göz önüne alındığında z noktası T'nin bir φ-sabit noktası olur.

Şimdi $z' \in X$ noktası T'nin başka bir φ-sabit noktası olsun. $x = z$ ve $y = z'$ alarak (3.1) eşitsizliğine uygulayalım:

$$F(d(T(z), T(z')), \varphi(T(z)), \varphi(T(z'))) \leq k. F(d(z, z'), \varphi(z), \varphi(z'))$$

$$F(d(z, z'), \varphi(z), \varphi(z')) \leq k. F(d(z, z'), 0, 0)$$

$$F(d(z, z'), 0, 0) \leq k. F(d(z, z'), 0, 0)$$

olur. Buradan $d(z, z') = 0$’dır. O halde $z = z'$ olduğundan φ-sabit noktanın tekliği ispat edilmiş olur. Bu durumda $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{z\}$ olur ve (ii)’nin ispatı tamamlanır.

Son olarak (3.7) kullanılarak

$$max\{d(T^n(x), T^{n+m}(x)), \varphi(T^n(x))\}$$
$$\leq k^{n-1}.F\left(d(T^{n-1}(x), T^{n+m-1}(x)), \varphi(T^{n-1}(x)), \varphi(T^{n+m-1}(x))\right), \qquad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

bulunur. Üçgen eşitsizliği kullanılarak,

$$d(T^n(x), T^{n+m}(x)) \leq \frac{k^n(1-k^m)}{1-k}.F\left(d(T(x), x), \varphi(T(x)), \varphi(x)\right), \qquad n, m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

olur. Bu eşitsizlikte $m \to \infty$ iken ve (3.9) kullanılarak

$$d(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k}.F\left(d(T(x), x), \varphi(T(x)), \varphi(x)\right), \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

elde edilir ve böylece (iii)’nin ispatı tamamlanır.

3.2.3 Örnek

$X = [0, \infty)$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlansın. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörünü aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$T(x) = \frac{x}{4}$$

$\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ve $F: [0, \infty)^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonunu $F(a, b, c) = a + b + c$ ile tanımlayalım.

Burada $F \in \mathcal{F}$ ve φ’nin alt yarı sürekli olduğu açıkça görülür. T’nin bir (F, φ)-daralma dönüşümü olduğunu göstereceğiz.

$x, y \in X$ ve $k \in (0,1)$ olsun.

$$
\begin{aligned}
F\left(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\right) &= F\left(\left|\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right|,\frac{x}{4},\frac{y}{4}\right)\\
&= \left|\frac{x}{4}-\frac{y}{4}\right| + \frac{x}{4} + \frac{y}{4}\\
&= \frac{1}{4}\left(|x-y| + x + y\right)\\
&= \frac{1}{4}\big(d(x,y) + \varphi(x) + \varphi(y)\big)\\
&= \frac{1}{4}F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\\
&\leq kF\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)
\end{aligned}
$$

$k = \frac{1}{4}$ ile birlikte T operatörü bir (F, φ)-daralma dönüşümüdür. Bu durumda Teorem 3.2.2’nin tüm koşulları sağlanmıştır. Koşullar sağlandığında ifadelerin gerçeklendiğini inceleyelim.

$$
\begin{aligned}
T(x) = x \quad &\Rightarrow \quad \frac{x}{4} = x\\
&\Rightarrow \quad x = 4x\\
&\Rightarrow \quad 3x = 0
\end{aligned}
$$

$x_1 = 0$ ve $Fix(T) = \{0\}$’dır. Aynı zamanda $\varphi(x) = x$ fonksiyonu için $Z_\varphi = \{0\}$’dır. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$ elde edilir. Böylece (i) koşulunun sağlandığı görülür.

$$T(x) = \frac{x}{4} \Rightarrow T^2(x) = \frac{x}{4^2} \Rightarrow T^n(x) = \frac{x}{4^n}$$

$$\lim_{n\to\infty} T^n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{4^n} = 0$$

1. Fix(T) ∩ Z_φ = {0}
2. $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(x) = 0$ olduğundan T operatörü bir φ-Picard operatörüdür. Böylece (ii) koşulunun sağlandığı görülür.

iii. Tüm $x \in X$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k} F\left(d(T(x), x), \varphi(T(x)), \varphi(x)\right)$$

eşitsizliği $\{z\} = Fix(T) \cap Z_\varphi = Fix(T)$ iken sağlanır ifadesi gerçeklendi;

$\{0\} = Fix(T) \cap Z_\varphi = Fix(T)$ olduğunu yukarıdaki ifadelerde gözlemlemiştik.

$$d(T^n(x), z) = d\left(\frac{x}{4^n}, 0\right) = \left|\frac{x}{4^n}\right| = \frac{x}{4^n}$$

ve

$$\frac{k^n}{1-k} F\left(d(T(x), x), \varphi(T(x)), \varphi(x)\right) = \frac{k^n}{1-k} F\left(\left|\frac{x}{4} - x\right|, \frac{x}{4}, x\right) = \frac{k^n}{1-k}\left(\left|\frac{x}{4} - x\right| + \frac{x}{4} + x\right)$$
$$= \frac{k^n}{1-k} . 2x$$

elde ederiz.

Problemin çözümünde $k = \frac{1}{4}$ seçerek T'nin bir (F, φ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilmişti. Bu durumda $k = \frac{1}{4}$ için yukarıdaki eşitsizliğin sağlandığını iki durumda inceleyelim.

1.Durum

$x = 0$ olsun. Öyleyse eşitsizliğin sağlandığı açıktır.

2.Durum

$x \neq 0$ olsun.

$$\frac{1}{4^n} \leq \frac{k^n}{1-k} . 2$$
$$\frac{1}{4^n} \leq \frac{2}{3.4^{n-1}}$$

olur. Eşitsizliğin sağlandığı açıktır. Buradan,

$$d(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k} F\left(d(T(x), x), \varphi(T(x)), \varphi(x)\right)$$

$$\frac{x}{4^n} \leq \frac{k^n}{1-k} . 2x$$

bulunur. Bu durumda (iii) koşulu da sağlandı.

Şimdi Tanım 3.2.1'i biraz daha özel hale getirerek zayıf daralma dönüşümü elde edilecek ve devamında bu tanım ile Teorem 3.2.2'ye benzer bir teorem zayıf φ-Picard operatörü yardımıyla elde edilecektir.

3.2.4 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in \digamma$ olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre bir (F, φ)-zayıf daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul her $(x, y) \in X^2$, bir $k \in (0,1)$ sabiti ve bir $L \geq 0$ sayısı için;

$$F\left(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\right) \leq k. F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big) + L. \left(F\left(d\big(y, T(x)\big), \varphi(y), \varphi\big(T(x)\big) - F\left(0, \varphi(y), \varphi\big(T(x)\big)\right)\right)\right) \quad (3.13)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [23].

Bu sınıftaki operatörler için aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2.5 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in \digamma$ olsun.
Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:
H_1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.
H_2) $T: X \to X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ)-zayıf daralma dönüşümüdür.
Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:
i. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$,
ii. T bir zayıf φ-Picard operatörüdür.
iii. Her $x \in X$ için eğer $n \to \infty$ iken $T^n(x) \to z$ ise

$$\mathrm{d}(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k} F\left(d\big(x, T(x)\big), \varphi(\mathrm{x}), \varphi\big(\mathrm{T}(\mathrm{x})\big)\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

İspatı Teorem (3.2.2) ispatı ile benzerdir.

Çalışmaya (F, φ)-grafik daralma dönüşümü kavramı ve bu kavram yardımı ile uygulanacak bir teorem ile devam edilecektir.

3.2.6 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in Ƒ$ olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre bir (F, φ)-grafik daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul bir $k \in (0,1)$ sabiti, her $x \in X$ için

$$F\left(d\big(T^2(x), T(x)\big), \varphi\big(T^2(x)\big), \varphi\big(T(x)\big)\right) \leq k. F\left(d(T(x), x), \varphi\big(T(x)\big), \varphi(x)\right) \qquad (3.14)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [23].

3.2.7 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in Ƒ$ olsun.
Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:
H_1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.
H_2) $T: X \to X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ)-grafik daralma dönüşümüdür.
H_3) T süreklidir.
Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:
i. $Fix(T) \subseteq Z_{\varphi}$,
ii. T bir zayıf φ-Picard operatörüdür.
iii. Her $x \in X$ için eğer $n \to \infty$ iken $T^n(x) \to z$ ise

$$\mathrm{d}(T^n(x), z) \leq \frac{k^n}{1-k} F\left(d(T(x), x), \varphi\big(\mathrm{T}(\mathrm{x})\big), \varphi(\mathrm{x})\right), \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

İspatı Teorem (3.2.2) ispatı ile benzerdir.

3.3 $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\theta})$-Daralma Dönüşümü

Bu bölümde metrik uzaylarda (F, φ, θ)-daralma dönüşümü ve (F, φ, θ)- zayıf daralma dönüşümü tanıtılarak, bu tür daralmalar için φ-sabit nokta sonuçları incelenecektir. Bu sonuçlar Jleli ve arkadaşlarının φ-sabit nokta sonuçlarını genişletir ve genelleştirir [24]. Sonuçların hipotezlerinin geçerliliği için örnekler verilecek ve bu örneklerde φ-sabit noktaya yaklaşmak için sayısal değerler incelenecektir.

İlk olarak sıklıkla kullanılacak farklı bir fonksiyon ailesinin tanımı verilecektir.

3.3.1 Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\theta: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonların kümesini J ile göstereceğiz [23].

j_1) θ azalmayan bir fonksiyondur.

Yani $t_1 < t_2$ iken $\theta(t_1) \leq \theta(t_2)$ ’dir.

j_2) θ sürekli bir fonksiyondur.

j_3) Her $t \in (0,\infty)$ için $\lim_{n\to\infty} \theta^n(t) = 0$ ’dır.

j_4) Her $t > 0$ için $\sum_{n=0}^{\infty} \theta^n(t) < \infty$ ’dur.

3.3.2 Yardımcı Teorem

Her $t > 0$ için; eğer $\theta \in J$ ise $\theta(t) < t$’dir [24].

İspat

Tersine bir $t > 0$ için $\theta(t) \geq t$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (j_1)’den $\theta^n(t) \geq t$ olur. $n \to \infty$ için limit alarak

$$\lim_{n\to\infty} t \leq \lim_{n\to\infty} \theta^n(t) \tag{3.15}$$

elde edilir. (3.15)’de (j_3) dikkate alınırsa, $t \leq 0$ olur. Bu sonuç $t > 0$ kabulü ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır.

3.3.3 Uyarı

(j_1) ve (3.3.2) Yardımcı Teorem'den $\theta(0) = 0$ elde edilir [24].

Gerçekten, her $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $t_n = \frac{1}{n}$ alırsak 3.3.2 Yardımcı Teorem'den

$$0 \leq \theta(t_n) < \frac{1}{n}$$

ve $n \to \infty$ için limit alarak,

$$\lim_{n\to\infty} 0 \leq \mathit{lim}_{n\to\infty}\, \theta(t_n) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$$

elde edilir. (j_2) kullanılarak

$$0 \leq \theta\left(\lim_{n\to\infty} t_n\right) \leq 0$$

ve

$$0 \leq \theta(0) \leq 0$$

olduğu görülür. Buradan $\theta(0) = 0$ elde edilir.

3.3.4 Örnek

θ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu $k \in [0,1)$ olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1, \\ k \ln t, & t \geq 1. \end{cases}$$

θ fonksiyonu J sınıfında bulunur [24].

3.3.5 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon, $F \in \mathcal{F}$ ve $\theta \in J$ olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için

$$F\left(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\right) \leq \theta\left(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\right) \tag{3.16}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [24].

Şimdi (F, φ, θ)-daralma dönüşümü için φ-sabit nokta sonuçlarının varlığı ispatlanacaktır.

3.3.6 Teorem

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon, $F \in \mathcal{F}$ ve $\theta \in J$ olsun.
Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:
H_1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.
H_2) $T: X \to X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümüdür.
Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:
i. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$,
ii. T bir φ-Picard operatörüdür [24].

İspat

$\xi \in X$ noktasının T'nin bir sabit noktası olduğunu varsayalım.
x = y = ξ alarak (3.16) uygulanırsa

$$F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \leq \theta\left(F\big(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)\big)\right)$$

elde edilir ve Yardımcı Teorem (3.3.2)'den

$$\theta\left(F\big(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)\big)\right) < F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi))$$

ve

$$F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) = 0 \tag{3.17}$$

bulunur. Diğer yandan ($\digamma_1$) kullanılarak

$$\varphi(\xi) \leq F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \tag{3.18}$$

elde edilir. Buradan (3.17) ve (3.18) kullanılarak $\varphi(\xi) = 0$ bulunur.
Bu ise $\xi \in Z_\varphi$ ve dolayısıyla $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$ olduğunu gösterir. Böylece (i) koşulu ispatlanmış olur.

$x \in X$ herhangi bir nokta ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere (3.16) kullanılarak

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^n(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^n(x)\right)\right) \leq$$
$$\theta\left(F\left(d\left(T^n(x), T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^n(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right)\right) \tag{3.19}$$

elde edilir. Buradan

$$F\left(d\left(T^n(x), T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^n(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right)$$
$$\leq \theta\left(F\left(d\left(T^{n-1}(x), T^{n-2}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n-2}(x)\right)\right)\right)$$

olur. Bu eşitsizliği (3.19) te yerine yazarak

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x), T^n(x)\right), \varphi\left(T^{n+1}(x)\right), \varphi\left(T^n(x)\right)\right) \leq$$
$$\theta^2\left(F\left(d\left(T^{n-1}(x), T^{n-2}(x)\right), \varphi\left(T^{n-1}(x)\right), \varphi\left(T^{n-2}(x)\right)\right)\right)$$

elde edilir. Bu şekilde her $n \in \mathbb{N}$ için n. adımda,

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x),T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right)\right)\leq$$
$$\theta^{n}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right), \tag{3.20}$$

elde edilir. ($\digamma_1$) şartı uygulanarak

$$max\left\{d\left(T^{n+1}(x),T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right)\right\}\leq F\left(d\left(T^{n+1}(x),T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right)\right)$$
$$\leq\theta^{n}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right)\ ,n\in\mathbb{N} \tag{3.21}$$

bulunur. Şimdi $\{T^{n}(x)\}$'in bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. $m>n$ olacak şekilde $m,n\in\mathbb{N}$ olsun. Üçgen eşitsizliği kullanılarak

$$\begin{aligned}d\left(T^{n}(x),T^{m}(x)\right)&\leq d\left(T^{n}(x),T^{n+1}(x)\right)+d\left(T^{n+1}(x),T^{n+2}(x)\right)+\cdots+d\left(T^{m-1}(x),T^{m}(x)\right)\\&=\theta^{n}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right)\\&+\theta^{n+1}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right)+\cdots\\&+\theta^{m-1}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right)\end{aligned}$$
$$=\sum_{i=1}^{m-1}\theta^{i}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right)-\sum_{k=1}^{n-1}\theta^{k}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(\mathrm{T}(\mathrm{x})\right),\varphi(\mathrm{x})\right)\right) \tag{3.22}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikten ve (j_4)'ten,

$$\lim_{m,n\to\infty}d\left(T^{n}(x),T^{m}(x)\right)=0$$

elde edilir. Bu da $\{T^{n}(x)\}$'in bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X,d) tam metrik uzay olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}d(T^{n}(x),z)=0 \tag{3.23}$$

olacak şekilde bir $z\in X$ vardır. Şimdi z'nin T için bir φ-sabit nokta olduğu gösterilecektir. (3.21)'den

$$\varphi(T^{n+1}(x)) \leq \theta^n \left(F\left(d(T(x),x),\varphi(\mathrm{T}(\mathrm{x})),\varphi(\mathrm{x})\right)\right) , \qquad n \in \mathbb{N}$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ alarak ve (j_3)'ten

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(T^{n+1}(x)) = 0 \tag{3.24}$$

elde edilir. Hipotezin (H_1) koşulundan ve (3.23) ile (3.24) göz önüne alınarak

$$\varphi(z) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(T^{n+1}(x)) = 0 \tag{3.25}$$

elde edilir. (3.16)'dan

$$F\left(d(T^{n+1}(x),T(z)),\varphi(T^{n+1}(x)),\varphi(T(z))\right) \leq \theta\left(F\left(d(T^n(x),z),\varphi(T^n(x)),\varphi(z)\right)\right)$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ alarak, (3.23), (3.24), (3.25) ve F fonksiyonunun sürekli olması ile $(\digamma_2)$ şartı kullanılarak,

$$F\left(d(z,T(z)),0,\varphi(T(z))\right) \leq \theta(F(0,0,0)) = 0$$

bulunur. Bu da $(\digamma_1)$ şartından

$$d(z,T(z)) = 0 \tag{3.26}$$

olduğunu gösterir. (3.25) ve (3.26) dikkate alındığında z, T'nin φ-sabit noktasıdır.

Şimdi $z' \in X$ noktası T'nin başka bir φ-sabit noktası olsun. $x = z$ ve $y = z'$ alarak (3.16) eşitsizliğine uygulayalım:

$$F(d(T(z),T(z')),\varphi(T(z)),\varphi(T(z'))) \leq \theta\left(F\left(d(z,z'),\varphi(z),\varphi(z')\right)\right)$$

$$F(d(z,z'),\varphi(z),\varphi(z')) \leq \theta\big(F(d(z,z'),0,0)\big)$$

$$F(d(z,z'),0,0) \leq \theta\big(F(d(z,z'),0,0)\big)$$

elde edilir. Yardımcı Teorem 3.3.2'den $d(z,z') = 0$'dır. O halde $z = z'$ olduğundan φ-sabit noktanın tekliği ispat edilmiş olur. Bu durumda $Fix(T) \cap Z_{\varphi} = \{z\}$ olur ve (ii)'nin ispatı tamamlanır.

Şimdi 3.3.6 Teorem ile ilgili birkaç örnek verilecektir.

3.3.7 Örnek

$X = [0,3]$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ ile tanımlansın. (X,d)'nin bir tam metrik uzay olduğu bilinen bir durumdur. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq 2.5 \\ k\ln\left(\frac{x}{2}\right), & 2.5 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

$\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ile tanımlansın. $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonunu $F(a,b,c) = a + b + c$ ve $\theta: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t \leq 1 \\ k\ln t, & t \geq 1. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $F \in \digamma$, $\theta \in J$ ve φ'nin alt yarı sürekli olduğunu görmek kolaydır. T'nin bir (F,φ,θ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir. $x, y \in X$ olsun. İspat üç durumda incelenecektir.

1. Durum

$x, y \in [0, 2.5)$ olsun. (3.16) eşitsizliğinin sağlandığı açıkça görülür. Gerçekten,

$$\begin{aligned} F\Big(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\Big) &= F\big(d(0,0),\varphi(0),\varphi(0)\big) \\ &= F(0,0,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. $\theta(t)$ fonksiyonu tanımı gereği $0 \leq \theta(t)$ olduğu için (3.16) eşitsizliği sağlanır.

2. Durum

$x, y \in [2.5, 3]$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x \geq y$ olduğu kabul edilsin.

$$\begin{aligned} F\Big(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\Big) &= d\big(T(x),T(y)\big)+\varphi\big(T(x)\big)+\varphi\big(T(y)\big) \\ &= \left|kln\tfrac{x}{2}-kln\tfrac{y}{2}\right|+kln\left(\tfrac{x}{2}\right)+kln\left(\tfrac{y}{2}\right) \\ &= kln\left(\frac{x}{2}.\frac{2}{y}.\frac{x}{2}.\frac{y}{2}\right) \\ &= kln\left(\frac{x}{2}\right)^2 \\ &= 2kln\left(\frac{x}{2}\right) \\ &\leq 2kln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\leq kln(5) \\ &= kln\Big(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big) \\ &= \theta\Big(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big) \end{aligned}$$

olduğundan (3.16) eşitsizliği sağlanır.

3. Durum

$x, y \in [0, 2.5) \times [2.5,\ 3] \cup [2.5,\ 3] \times [0, 2.5)$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x \in [2.5, 3]$, $y \in [0, 2.5)$ olduğu varsayılsın.

$$
\begin{aligned}
F\left(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\right) &= d\big(T(x),T(y)\big)+\varphi\big(T(x)\big)+\varphi\big(T(y)\big)\\
&= \left|kln\frac{x}{2}-0\right| + kln\left(\frac{x}{2}\right)+0\\
&= kln\left(\frac{x}{2}\right)^2\\
&= 2kln\left(\frac{x}{2}\right)\\
&\le 2kln\left(\frac{3}{2}\right)\\
&\le kln(2.5)\\
&= kln\big(d(x,y)+\varphi(x)+\varphi(y)\big)\\
&= kln\left(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\right)\\
&= \theta\left(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan (3.16) eşitsizliği sağlanır.

Bu, 3.3.6 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir [24]. Bu durumda T'nin bir tek φ-sabit noktası vardır ve 0'dır.

3.3.8 Örnek

$X = [0,1]$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlansın. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörün $k \in [0,1)$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \frac{kx^2}{2}$$

Tablo 3.1: $k = 0.25$ için Picard operatörünün tekrarlamaları

$k = 0{,}25$	$x_0 = 0{,}2$	$x_0 = 0{,}4$	$x_0 = 0{,}6$	$x_0 = 0{,}8$
x_1	0,00500	0,02000	0,04500	0,08000
x_2	0,00000	0,00005	0,00025	0,00080
x_3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x_4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
...	...	...	...	...

Tablo 3.2: $k = 0.5$ için Picard operatörünün tekrarlamaları

$k = 0{,}5$	$x_0 = 0{,}2$	$x_0 = 0{,}4$	$x_0 = 0{,}6$	$x_0 = 0{,}8$
x_1	0,01000	0,04000	0,09000	0,16000
x_2	0,00002	0,00040	0,00202	0,00640
x_3	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
x_4	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
...	...	...	...	...

$\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ile tanımlansın. $F: [0, \infty)^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonu $F(a, b, c) = a + b + c$ olsun ve $\theta: [0, \infty) \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $t \in [0, \infty)$ için $\theta(t) = kt$ ile tanımlansın.

Burada $F \in \mathfrak{F}$, $\theta \in J$ ve φ'nin alt yarı sürekli olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun.

$$
\begin{aligned}
F\Big(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= d\big(T(x), T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \varphi\big(T(y)\big) \\
&= \left|\frac{kx^2}{2} - \frac{ky^2}{2}\right| + \frac{kx^2}{2} + \frac{ky^2}{2} \\
&= \frac{k}{2}|x^2 - y^2| + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \\
&= \frac{k}{2}|(x + y)(x - y)| + \frac{k}{2}(x^2 + y^2) \\
&= k\left[\frac{|(x+y)(x-y)|}{2} + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right] \\
&\leq k(|x - y| + x + y) \\
&= k[d(x, y) + \varphi(x) + \varphi(y)] \\
&= k\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big) \\
&= \theta\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu, 3.3.6 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Gerçekten, T'nin bir tek φ-sabit noktası vardır ve 0'dır [24].

3.3.9 Örnek

$X = [0,1]$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ ile tanımlansın. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$T(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

Tablo 3.3: Picard operatörünün tekrarlamaları

$x_0 = 0$	$x_0 = 0{,}2$	$x_0 = 0{,}8$	$x_0 = 0{,}9$	$x_0 = 1$
0,5	0,6	0,9	0,95	1
0,75	0,8	0,95	0,975	1
0,875	0,9	0,975	0,9875	1
0,9375	0,95	0,9875	0,99375	1
…	…	…	…	…

$\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = 1 - x$ ile tanımlansın.
$F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu $F(a,b,c) = a + b + c$ ve $\theta: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ için

$$\theta(t) = \frac{t}{2}$$

ile tanımlansın.

Burada $F \in Ƒ$, $\theta \in J$ ve φ'nin alt yarı sürekli olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olduğunu göstereceğiz.

$x, y \in X$ olsun.

$$F\left(d(T(x),T(y)),\varphi(T(x)),\varphi(T(y))\right) = d(T(x),T(y)) + \varphi(T(x)) + \varphi(T(y))$$

$$= \left|\left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right)-\left(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\right)\right| + 1 - \left(\tfrac{1}{2}x+\tfrac{1}{2}\right) + 1 - \left(\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{2}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(|(x+1)-(y+1)| + 1 - x + 1 - y)$$

$$\leq \tfrac{1}{2}[|x-y| + (1-x) + (1-y)]$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(d(x,y) + \varphi(x) + \varphi(y)\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}\left(F\left(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\right)\right)$$

$$= \theta\left(F\left(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\right)\right)$$

elde edilir. Bu, 3.3.6 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Bu durumda T'nin bir tek φ-sabit noktası vardır ve 1'dir.

Şimdi Tanım 3.3.5'de verilen daralma dönüşümü biraz daha geliştirilecektir.

3.3.10 Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ verilen bir fonksiyon, $F \in \digamma$ ve $\theta \in J$ olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre bir (F,φ,θ)-zayıf daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$, bir $L \geq 0$ sayısı ve $N(x,y) := min\{d(x,T(x)), d(y,T(y)), d(y,T(x))\}$ için

$$F\left(d(T(x),T(y)),\varphi(T(x)),\varphi(T(y))\right) \leq \theta\left(F\left(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\right)\right) + L\left[F\left(N(x,y),\varphi(y),\varphi(T(x))\right) - F\left(0,\varphi(y),\varphi(T(x))\right)\right] \tag{3.27}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [24].

3.3.11 Teorem

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon, $F \in Ƒ$ ve $\theta \in J$ olsun. Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

H₁) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.

H₂) $T: X \rightarrow X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ, θ)-zayıf daralma dönüşümüdür.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. $Fix(T) \subseteq Z_{\varphi}$,

ii. T bir zayıf φ-Picard operatörüdür [24].

İspat

$\xi \in X$ noktasının T'nin bir sabit noktası olduğu varsayılsın.

$x = y = \xi$ alarak (3.27) uygulanırsa

$$\begin{aligned} F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) &\leq \theta\left(F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi))\right) + L[F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) - F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi))] \\ &= \theta\left(F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi))\right) \end{aligned}$$

elde edilir. 3.3.2 Yardımcı Teorem'den

$$F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) = 0 \tag{3.28}$$

ve $(Ƒ_1)$'den,

$$\varphi(\xi) \leq F(0, \varphi(\xi), \varphi(\xi)) \tag{3.29}$$

bulunur. (3.28) ve (3.29) kullanılarak $\varphi(\xi) = 0$ elde edilir. O halde $Fix(T) \subseteq Z_{\varphi}$ 'dir. (i) koşulunun ispatı tamamlanır.

$x \in X$ herhangi bir nokta olmak üzere (3.27) kullanılarak $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x),T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right)\right)\leq$$
$$\theta\left(F\left(d\left(T^{n}(x),T^{n-1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right)\right)+$$
$$L\left[F\left(0,\varphi\left(T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right)\right)-F\left(0,\varphi\left(T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right)\right)\right]$$
$$=\theta\left(F\left(d\left(T^{n}(x),T^{n-1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n-1}(x)\right)\right)\right)$$

elde edilir. Bu adımlar tekrarlanarak n. adımda

$$F\left(d\left(T^{n+1}(x),T^{n}(x)\right),\varphi\left(T^{n+1}(x)\right),\varphi\left(T^{n}(x)\right)\right)\leq\theta^{n}\left(F\left(d(T(x),x),\varphi\left(T(x)\right),\varphi(x)\right)\right)$$

bulunur.

İspatın kalan kısmı Teorem 3.2.2 ile benzer şekilde devam eder.

3.3.12 Uyarı

Her $t\in[0,\infty)$ için $k\in[0,1)$ olmak üzere $\theta(t):=kt$ aldığımızda Teorem 3.3.6 ve 3.3.11 sırasıyla Teorem 3.2.2 ve 3.2.5'e indirgenir [24].

3.4 Süreksiz Fonksiyonlar ile $(\boldsymbol{F},\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\theta})$-Daralma Dönüşümü

Bu bölümde bu çalışmada verilen (F,φ,θ)-daralma dönüşümleri için süreksiz fonksiyonlar ile φ-sabit nokta sonuçlarının varlığı verilecektir. Öncelikle yeni bir fonksiyon ailesinin tanımı verilecektir.

3.4.1 Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan F: $[0,\infty)^3\rightarrow[0,\infty)$ fonksiyonların kümesi $\digamma_M$ ile gösterilecektir [25].

$\digamma_M$1) Her $a,b,c\in[0,\infty)$ için $max\{a,b\}\leq F(a,b,c)$

$\digamma_M$2) $F(0,0,0)=0$

$\digamma_M$3) $x_n\rightarrow x$, $y_n\rightarrow y$ ve $n\rightarrow\infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty}\sup F(x_n,y_n,0)\leq F(x,y,0)$$

eşitsizliği sağlanır.

Şimdi (F, φ, θ)-daralma dönüşümü kavramının bu fonksiyon ailesi yardımıyla uygulandığı teorem verilecektir.

3.4.2 Teorem

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ verilen bir fonksiyon ve $F \in \mathfrak{F}_M$ olsun.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım [25]:

H_1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.

H_2) $T: X \rightarrow X$ operatörü d metriğine göre bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümüdür.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$,

ii. T bir φ-Picard operatörüdür.

İspat

Teorem 3.3.6'nın ispat mantığı ile aynıdır. Bu nedenle herhangi bir $x \in X$ için $\{T^n(x)\}$ Cauchy dizisidir, $\lim_{n\to\infty} d(T^n(x), z) = \lim_{n\to\infty} \varphi\big(T^n(x)\big) = 0$ ve bir $z \in X$ için $\varphi(z) = 0$'dır.

$$\begin{aligned} d\big(T^{n+1}(x), T(z)\big) &\leq max\big\{d\big(T^{n+1}(x), T(z)\big), \varphi\big(T^{n+1}(x)\big)\big\} \\ &\leq F\Big(d\big(T^{n+1}(x), T(z)\big), \varphi\big(T^{n+1}(x)\big), \varphi\big(T(z)\big)\Big) \\ &\leq \theta\Big(F\Big(d(T^n(x), z), \varphi\big(T^n(x)\big), \varphi(z)\Big)\Big) \\ &< F\Big(d(T^n(x), z), \varphi\big(T^n(x)\big), \varphi(z)\Big) \\ &= F\big(d(T^n(x), z), \varphi\big(T^n(x)\big), 0\big) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} sup\, d\big(T^{n+1}(x), T(z)\big) &\leq \lim_{n\to\infty} supF\big(d(T^n(x), z), \varphi\big(T^n(x)\big), 0\big) \\ &\leq F(0,0,0) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty} d\big(T^n(x), T(z)\big) = \lim_{n\to\infty} d(T^n(x), z) = 0$$

elde edilir. Yani, $z = T(z)$ ve z T'nin bir tek sabit noktasıdır.

Şimdi 3.4.2 Teorem'i açıklamak için bazı örnekler vereceğiz. Süreksiz F fonksiyonları ile birlikte φ fonksiyonunu değiştirmeden koşullarımızı sağlayacak farklı $T(x)$ operatörlerini inceleyeceğiz.

3.4.3 Örnek

$X = [0,1]$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlansın. O halde (X,d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit bir doğal sayı olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın;

$$T(x) = \frac{kx^n}{n}$$

$\varphi: X \to [\,0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ile tanımlansın. $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu $F(a,b,c) = a + b + [c]$ şeklinde tanımlanmış olsun. Burada $[c]$ tam değer fonksiyonudur. θ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$ ve $k \in [0,1)$ için $\theta(t) = kt$ ile tanımlansın.

Burada $F \in \digamma_M$, $\theta \in J$, φ'nin alt yarı sürekli ve F'nin süreksiz bir fonksiyon olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F,φ,θ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun.

$$\begin{aligned}
F\Big(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\Big) &= d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \big[\varphi\big(T(y)\big)\big] \\
&= \left|\frac{kx^n}{n} - \frac{ky^n}{n}\right| + \frac{kx^n}{n} + 0 \\
&\leq k\left(\frac{|x-y||x^{n-1} + \cdots + y^{n-1}|}{n} + \frac{x^n}{n}\right) \\
&\leq k(|x-y| + x + 0) \\
&\leq k(|x-y| + x + [y]) \\
&= k\Big(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big) \\
&= \theta\Big(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, 3.4.2 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir [25]. Dikkat edilirse T'nin φ-sabit noktası 0'dır. Ayrıca T dönüşümünün birden fazla sabit noktası olabilir ancak φ-sabit noktası bir tanedir.

3.4.4 Örnek

$X = [0,1]$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ ile tanımlansın. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ ve $n \in \mathbb{N}$ sabit bir doğal sayı olmak üzere aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \frac{kx^n}{n}.$$

$\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ve $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu $F(a,b,c) = max\{a,b\} + [c]$ ve θ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu her
$t \in [0,\infty)$, $k \in [0,1)$ için $\theta(t) = kt$ olsun.

Burada $F \in \digamma_M$, $\theta \in J$, φ'nin alt yarı sürekli ve F'nin süreksiz bir fonksiyon olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun.

$$\begin{aligned}
F\Big(d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= max\{d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big)\} + \big[\varphi\big(T(y)\big)\big] \\
&= max\left\{\left|\frac{kx^n}{n} - \frac{ky^n}{n}\right|, \frac{kx^n}{n}\right\} + 0 \\
&\leq k(max\{|x-y|, x\} + [y]) \\
&= k(max\{d(x,y), x\} + [y]) \\
&= k\Big(F\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big) \\
&= \theta\Big(F\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, 3.4.2 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir [25].

3.4.5 Örnek

$X = [0,1]$ ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ olsun. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = k \sin x.$$

$\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ olmak üzere, $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu $F(a,b,c) = a + b + [c]$ ve θ: $[0,\infty) \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $t \in [0,\infty)$, $k \in [0,1)$ için $\theta(t) = kt$ olsun.

Burada $F \in \mathfrak{F}_M$, $\theta \in J$, φ'nin alt yarı sürekli ve F'nin süreksiz bir fonksiyon olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun.

$$\begin{aligned}
F\Big(d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \big[\varphi\big(T(y)\big)\big] \\
&= |k\sin x - k\sin y| + k \sin x + [k \sin y] \\
&\leq k|x - y| + kx + 0 \\
&= k(|x - y| + x + [y]) \\
&= k(d(x,y) + x + [y]) \\
&= k\Big(F\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big) \\
&= \theta\Big(F\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu, 3.4.2 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir [25].

3.4.6 Örnek

$X = [0,3]$ ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x - y|$ olsun. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü $k \in [0,1)$ için aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2.5 \\ kln\left(\frac{x}{2}\right), & 2.5 \le x \le 3. \end{cases}$$

$\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$, $F: [0, \infty)^3 \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu $F(a, b, c) = a + b + [c]$ ve $\theta: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ fonksiyonu her $t \in [0, \infty)$, $k \in [0,1)$ için

$$\theta(t) = \begin{cases} 0, & 0 \le t \le 1 \\ klnt, & t \ge 1. \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $F \in \mathfrak{F}_M$, $\theta \in J$, φ'nin alt yarı sürekli ve F'nin süreksiz bir fonksiyon olduğu açıkça görülür. T'nin bir (F, φ, θ)-daralma dönüşümü olduğunu göstermek için bu örnek iki durumda incelenecektir.

1. Durum

$x, y \in [2.5, 3]$ olsun. Genelliği bozmaksızın $x \ge y$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned} F\Big(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= d\big(T(x), T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \big[\varphi\big(T(y)\big)\big] \\ &= \left|kln\tfrac{x}{2} - kln\tfrac{y}{2}\right| + kln\left(\tfrac{x}{2}\right) + \left[kln\left(\tfrac{y}{2}\right)\right] \\ &\le \left|kln\frac{x}{2} - kln\frac{y}{2}\right| + kln\left(\frac{x}{2}\right) + kln\left(\frac{y}{2}\right) \\ &\le 2kln\left(\frac{3}{2}\right) \\ &\le kln(2.25) \\ &= kln(d(x, y) + x + [y]) \\ &= kln\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big) \\ &= \theta\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big) \end{aligned}$$

olduğundan (3.16) eşitsizliği sağlanır.

2. Durum

$x \in [2.5, 3]$ ve $y \in [0, 2.25]$ olsun.

$$
\begin{aligned}
F\left(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\right) &= d\big(T(x),T(y)\big)+\varphi\big(T(x)\big)+\big[\varphi\big(T(y)\big)\big]\\
&= \left|kln\tfrac{x}{2}-0\right|+kln\left(\tfrac{x}{2}\right)+[0]\\
&\le 2kln\left(\frac{3}{2}\right)\\
&\le\ kln(2.25)\\
&= kln(d(x,y)+x+[y])\\
&= kln\left(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\right)\\
&= \theta\left(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan (3.16) eşitsizliği sağlanır. Diğer durumlar açıktır. Bu, 3.4.2 Teorem'in tüm koşullarının sağlandığını ve dolayısıyla T'nin X'te bir φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir [25].

Şimdi (F,φ,θ)-zayıf daralma dönüşümü kavramının $\digamma_M$ fonksiyon ailesi yardımıyla uygulandığı teorem verilecektir.

3.4.7 Teorem

(X,d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ verilen bir fonksiyon $F \in \digamma_M$ ve $\theta \in J$ olsun.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

H_1) φ alt yarı sürekli bir fonksiyondur.

H_2) $T: X \to X$ operatörü d metriğine göre bir (F,φ,θ)-zayıf daralma dönüşümüdür.

Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir:

i. $Fix(T) \subseteq Z_\varphi$,

ii. T bir zayıf φ-Picard operatörüdür [25].

İspatı 3.3.11 Teorem'in ispat mantığı ile aynıdır.

3.4.8 Uyarı

Tüm $t \in [0,\infty)$ için $k \in [0,1)$ olmak üzere $\theta(t) := kt$ seçildiğinde 3.4.2 Teorem ve 3.4.7 Teorem sırasıyla 3.2.2 Teorem ve 3.2.5 Teorem'e indirgenir [25].

3.5 $(F, \varphi, \alpha - \psi)$- Daralma Dönüşümü

Bu bölümde metrik uzaylarda α- geçişli dönüşüm, ψ-fonksiyon ailesi, $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü ve $(F, \varphi, \alpha - \psi)$- zayıf daralma dönüşümü tanıtılarak, bu tür daralmalar için φ-sabit nokta sonuçları incelenecektir. Sonuçların hipotezlerinin geçerliliği için örnekler verilecektir.

Şimdi, ψ: $[0, \infty) \to [0, \infty)$ olmak üzere tüm $t > 0$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ koşulunu sağlayan azalmayan ψ fonksiyonların kümesini Ψ ile gösterelim. Burada ψ^n, ψ'nin n. tekrarıdır [26].

Literatürde bu tür fonksiyonlar (c)-karşılaştırma fonksiyonları veya Bianchini–Grandolfi Gauge fonksiyonları olarak bilinir [26].

3.5.1 Uyarı

Dikkat edilirse her $t \in (0, \infty)$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \psi^n(t) < \infty$ olması $\lim_{n\to\infty} \psi^n(t) = 0$ eşitliğini gerektirir.

Şimdi verilecek yardımcı teorem literatürde iyi bilinmektedir ve her Bianchini–Grandolfi Gauge fonksiyonu için geçerlidir.

3.5.2 Yardımcı Teorem

Her $t > 0$ için $\psi \in \Psi$ ise $\psi(0) = 0$ ve $\psi(t) < t$ 'dir [26].

Samet ve arkadaşları α- geçişli dönüşümü ve $(\alpha - \psi)$-daralma dönüşümünü aşağıdaki şekilde tanımlamıştır.

3.5.3 Tanım

$X \neq \emptyset$ ve $T: X \to X$, $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ olmak üzere; $x, y \in X$ olsun. Eğer $\alpha(x, y) \geq 1$ olduğunda $\alpha\big(T(x), T(y)\big) \geq 1$ eşitsizliği sağlanıyorsa T bir α- geçişli dönüşümdür [27].

3.5.4 Tanım

(X, d) bir metrik uzay olsun. $T: X \to X$ operatörünün d metriğine göre $(\alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olabilmesi için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ için ψ∈ Ψ ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ olacak şekilde iki fonksiyon vardır öyle ki

$$\alpha(x,y)d\big(T(x),T(y)\big) \leq \psi\big(d(x,y)\big)$$

eşitsizliği sağlanır [26, 27].

3.5.5 Tanım

(X,d) bir metrik uzay, $F \in Ƒ_M$ ve $T: X \to X$ olsun. T'nin bir $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul, her $x,y \in X$ için

$$\alpha(x,y)F\left(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\right) \leq \psi\left(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\right)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$, $\varphi: X \to [0,\infty)$ ve $\psi \in \Psi$ fonksiyonlarının bulunabilmesidir [26].

3.5.6 Uyarı

Tanım 3.5.5'te uygun α, F ve ψ temel fonksiyonları seçerek $(F,\varphi,\alpha-\psi)$ - daralmasının literatürde var olan çeşitli türdeki daralmaları birleştirdiği görülebilir.

a) Tüm $a,b,c \in [0,\infty)$ için $F(a,b,c) = a+b+c$ ve her $x \in X$ için $\varphi(x) = 0$ seçerek $\alpha-\psi$-daralması elde edilir [27].

b) Tüm $x,y \in X$ için $\alpha(x,y) = 1$, $F \in Ƒ$ ve her $t \geq 0$, $k \in [0,1)$ için $\psi(t) = kt$ seçerek (F,φ)-daralması elde edilir [23].

c) Tüm $x,y \in X$ için $F \in Ƒ$, $\alpha(x,y) = 1$, $T(x) = y$ ve her $t \geq 0$, $k \in [0,1)$ için $\psi(t) = kt$ seçerek (F,φ)- grafik daralması elde edilir [23].

d) Tüm $x,y \in X$ için $F \in Ƒ$, $\alpha(x,y) = 1$ seçerek (F,φ,ψ)-daralması elde edilir [24].

e) Tüm $x,y \in X$ için $F \in Ƒ_M$, $\alpha(x,y) = 1$ seçerek (F,φ,ψ)-daralması elde edilir [25].

3.5.7 Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ verilen bir alt yarı sürekli fonksiyon, $\psi \in \Psi$, $F \in Ƒ_M$, $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ ve $T: X \to X$ bir $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-daralma dönüşümü olsun.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

i) T bir α- geçişli dönüşümdür.

ii) $\alpha\big(x_0,T(x_0)\big) \geq 1$ olmak üzere $x_0 \in X$ vardır.

iii) T süreklidir veya

iii)$'$ Tüm n'ler için eğer $\{x_n\}$ X'de bir dizi ise $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ ve $x \in X$ için $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ ise $\alpha(x_n, x) \geq 1$' dir.

Bu durumda T'nin bir φ-sabit noktası vardır [26].

İspat

(ii) koşulu göz önüne alındığında $\alpha\big(x_0, T(x_0)\big) \geq 1$ olmak üzere $x_0 \in X$ vardır. X'de bir $\{x_n\}$ dizisini her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $x_{n+1} = T(x_n)$ kuralı ile tanımlayalım. T α- geçişli bir dönüşüm olduğu için

$$\alpha(x_0, x_1) = \alpha\big(x_0, T(x_0)\big) \geq 1 \text{ olduğunda } \alpha\big(T(x_0), T(x_1)\big) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$$

olur. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{3.30}$$

elde edilir. (3.30) ve T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olmasını kullanarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) \\ &\leq \psi\Big(F\big(d(x_{n-1}, x_n), \varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)\big)\Big) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarımla $n \in \mathbb{N}$ için

$$F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) \leq \psi^n\Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big)$$

elde edilir. Bu son eşitsizliği $(\mathcal{F}_1)$ ile birlikte dikkate alarak,

$$max\{d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n)\} \leq \psi^n\Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) \tag{3.31}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.31)'den

$$d(x_n, x_{n+1}) \leq \psi^n \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) \tag{3.32}$$

eşitsizliği elde edilir. Şimdi $\{x_n\}$'nin bir Cauchy dizisi olduğu gösterilecektir. Bunun için $m > n$ olmak üzere $m, n \in \mathbb{N}$ alınırsa, (3.32) ve üçgen eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\
&\leq \psi^n \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) + \psi^{n+1} \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) + \\
&\quad \cdots + \psi^{m-1} \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{m-1} \psi^i \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big) - \\
&\quad \sum_{j=1}^{n-1} \psi^j \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big)
\end{aligned} \tag{3.33}$$

elde edilir. Uyarı 3.5.1 ve (3.33)'ten $\lim_{n,m\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ elde edilir. Buradan $\{x_n\}$ X'te bir Cauchy dizisidir.

(X, d) bir tam metrik uzay olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x^*) = 0 \tag{3.34}$$

olacak şekilde bir $x^* \in X$ vardır. Şimdi $\varphi(x^*) = 0$ olduğu gösterilecektir. (3.31)'i kullanarak

$$\varphi(x_n) \leq \psi^n \Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big)$$

elde edilir. Uyarı 3.5.1'i kullanarak, $n \to \infty$ iken,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0 \tag{3.35}$$

elde edilir. φ alt yarı sürekli olduğundan (3.34) ve (3.35)'i kullanarak,

$$0 \leq \varphi(x^*) \leq \liminf_{n\to\infty} \varphi(x_n) = 0$$

olur. Buradan

$$\varphi(x^*) = 0 \tag{3.36}$$

olur. Şimdi (iii) koşulunun sağlandığını ve T'nin sürekli bir dönüşüm olduğunu varsayarak

$$\lim_{n\to\infty} d\big(T(x_n), T(x^*)\big) = \lim_{n\to\infty} d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big) = 0$$

bulunur. Limitin tekliğinden $T(x^*) = x^*$ elde edilir. Bu nedenle x^* T'nin bir φ-sabit noktasıdır.

Alternatif olarak $(\text{iii})'$ koşulunun sağlandığı varsayılsın. Her $n \in \mathbb{N}$ için (3.30) ve (3.34)'ten $\alpha(x_n, x^*) \geq 1$ elde edilir. T bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olduğu için $(\digamma_1)$ ve Yardımcı Teorem 3.5.2'yi kullanarak

$$\begin{aligned}
d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big) &\leq max\big\{d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big), \varphi(x_{n+1})\big\} \\
&\leq F\Big(d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big), \varphi(x_{n+1}), \varphi\big(T(x^*)\big)\Big) \\
&\leq \alpha(x_n, x^*) F\Big(d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big), \varphi(x_{n+1}), \varphi\big(T(x^*)\big)\Big) \\
&\leq \psi\Big(F\big(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*)\big)\Big) \\
&< F\big(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), \varphi(x^*)\big) \\
&= F(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), 0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafına $\lim_{n\to\infty} sup$ uygulayarak, $(\digamma_2)$ ve $(\digamma_3)$'ten,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} sup\ d\big(x_{n+1}, T(x^*)\big) &\leq \lim_{n\to\infty} sup\, F(d(x_n, x^*), \varphi(x_n), 0) \\
&\leq F(0,0,0) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Ki bu da (3.34) göz önüne alındığında,

$$d\big(x^*, T(x^*)\big) = 0 \tag{3.37}$$

eşitliğini verir. Bu nedenle (3.36) ve (3.37)'den x^*'ın T'nin bir φ-sabit noktası olduğu sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

3.5.8 Uyarı

Uyarı 3.5.6 göz önüne alındığında ((a) ve (c) şıkları) [27]'de Teorem 2.1 ve 2.2 ile Teorem 3.2.2'nin (ii) şıkkı Teorem 3.5.7'den çıkarılabilir [26].

Bu sonuçları desteklemek için üç tane açıklayıcı örnek verilecektir. Teorem 3.5.7'nin bu örneklerde kullanılabileceği ancak Jleli [23], Kumrod [24] ve Asadi [25] sonuçlarının uygulanamayacağı gösterilecektir.

İlk olarak bu teorem T dönüşümünün sürekli olduğu 3.5.9 nolu örnekle desteklenecektir.

3.5.9 Örnek

$X = [0, \infty)$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlansın. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} 2x - \frac{7}{4}, & x > 1, \\ \frac{x}{2(x+1)}, & 0 \le x \le 1. \end{cases}$$

$\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ve $F: [0, \infty)^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonu her $a, b, c \in [0, \infty)$ için $F(a, b, c) = a + b + c$ ve $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ olmak üzere

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in [0,1] \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $F \in \mathfrak{F}_M$, F sürekli, φ'nin alt yarı sürekli ve T'nin sürekli bir dönüşüm olduğu açıkça görülür.

$x, y \in X$ olmak üzere $\alpha(x, y) \geq 1$ olsun. Bu da $x, y \in [0,1]$, T ve α tanımından,

$$T(x) = \frac{x}{2(x+1)} \in [0,1]\ ,\ T(y) = \frac{y}{2(y+1)} \in [0,1] \quad \text{ve} \quad \alpha(T(x), T(y)) = 1$$

elde edilir. Buradan T bir α- geçişli dönüşümdür. Ayrıca $1 \in X$ ve $\alpha(1, T(1)) = \alpha(1, \frac{1}{4}) = 1$ olur.

Son olarak T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun. Eğer $x, y \in [0,1]$ ise o halde $(\alpha(x, y) = 1)$:

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\Big(d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= \left|\frac{x}{2(x+1)} - \frac{y}{2(y+1)}\right| + \frac{x}{2(x+1)} + \frac{y}{2(y+1)} \\ &\leq \frac{1}{2}|x-y| + \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \\ &= \frac{1}{2}\big(d(x,y) + \varphi(x) + \varphi(y)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer durumlar açıktır (yani $\alpha(x, y) = 0$). Dolayısıyla her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile birlikte T bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümüdür. Bu da Teorem 3.5.7'nin tüm koşullarının sağlandığını gösterir. Yani T'nin bir φ-sabit noktası vardır ve $x = 0$'dır [26].

Gerçekten; $Fix(T) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{7}{4}\right\}$, $Z_\varphi = \{0\}$ ve $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{0\}$ olduğu kolayca görülür.

3.5.10 Örnek

$X = [0, \infty)$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlansın. O halde (X, d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} 3x - \frac{8}{3} & x > 1, \\ \frac{x}{4}, & 0 \leq x \leq 1. \end{cases}$$

$\varphi: X \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için $\varphi(x) = x$ ve $F: [0,\infty)^3 \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu her $a,b,c \in [0,\infty)$ için $F(a,b,c) = a + b + c$ ve $\alpha: X \times X \rightarrow [0,\infty)$ olmak üzere;

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \in [0,1] \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $F \in \mathfrak{F}_M$, F sürekli, φ'nin alt yarı sürekli ve T'nin $x = 1$'de sürekli olmayan bir dönüşüm olduğu açıkça görülür.

$x,y \in X$ olmak üzere $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. Bu da $x,y \in [0,1]$, T ve α tanımından;

$$T(x) = \frac{x}{4} \in [0,1]\ , \quad T(y) = \frac{y}{4} \in [0,1] \quad \text{ve} \quad \alpha(T(x),T(y)) = 1$$

elde edilir. Buradan T bir α- geçişli dönüşümdür. Ayrıca $1 \in X$ ve $\alpha(1,T(1)) = 1$ olur. T sürekli bir dönüşüm olmadığı için (iii) koşulu yerine (iii)$'$ koşulunun sağlanması gerekir. X'de tüm n'ler için $x \in X$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi olsun.

Son olarak T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x,y \in X$ olsun. Eğer $x,y \in [0,1]$ ise o halde $(\alpha(x,y) = 1)$;

$$\begin{aligned} \alpha(x,y)\Big(d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \varphi\big(T(y)\big)\Big) &= \left|\frac{x}{4} - \frac{y}{4}\right| + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} \\ &\leq \frac{1}{4}|x-y| + \frac{x}{4} + \frac{y}{4} \\ &= \frac{1}{4}\big(d(x,y) + \varphi(x) + \varphi(y)\big) \\ &\leq \frac{1}{3}\big(d(x,y) + \varphi(x) + \varphi(y)\big) \end{aligned}$$

elde edilir. Diğer durumlar açıktır (yani $\alpha(x,y)=0$). Dolayısıyla her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{3}$ ile birlikte T bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümüdür. Bu da Teorem 3.5.7'nin tüm koşullarının sağlandığını gösterir. Yani T'nin bir φ-sabit noktası vardır ve $x = 0$'dır [26].

Gerçekten; $Fix(T) = \left\{0, \frac{8}{6}\right\}$, $Z_\varphi = \{0\}$ ve $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{0\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Jleli ve arkadaşları [23], Kumrod ve arkadaşları [24] ile Asadi [25] sonuçlarının daha önce tanımlanan F için Örnek 3.5.10 bağlamında uygulanamadığı gözlemlenebilir. Aslında herhangi bir $\psi \in \Psi$ için (Yardımcı Teorem 3.5.2'ye göre);

$$d\big(T(1),T(2)\big) + \varphi\big(T(1)\big) + \varphi\big(T(2)\big) = \frac{20}{3} > 4$$

$$d(1,2) + \varphi(1) + \varphi(2) > \psi\big(d(1,2) + \varphi(1) + \varphi(2)\big)$$

ifadesi elde edilir [26].

3.5.11 Örnek

$X = [1,\infty)$ ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ olsun. O halde (X,d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ operatörü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$T(x) = \begin{cases} 3x - 5 & x > 2, \\ \frac{x+2}{2}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

$\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $x \in X$ için

$$\varphi(x) = \begin{cases} x - 2, & x > 2, \\ 0, & 1 \leq x \leq 2, \end{cases}$$

ve $F: [0,\infty)^3 \to [0,\infty)$ fonksiyonu her $a, b, c \in [0,\infty)$ için $F(a,b,c) = max\{a,b\} + [c]$, burada $[c]$ tam değer fonksiyonudur ve $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ olmak üzere

$$\alpha(x,y) = \begin{cases} 1, & x,y \in [1,2] \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Burada $F \in \mathfrak{F}_M$, F süreksiz, φ'nin alt yarı sürekli ve T'nin $x = 2$'de sürekli olmayan bir dönüşüm olduğu açıkça görülür.

$x, y \in X$ olmak üzere $\alpha(x,y) \geq 1$ olsun. Bu da $x, y \in [1,2]$, T ve α tanımından;

$$T(x) = \frac{x+2}{2} \in [1,2]\ , \quad T(y) = \frac{y+2}{2} \in [1,2] \quad \text{ve} \quad \alpha(T(x),T(y)) = 1 \geq 1$$

elde edilir. Buradan T bir α- geçişli dönüşümdür. Ayrıca $2 \in X$ ve $\alpha(2, T(2)) = 1$ olur. T sürekli bir dönüşüm olmadığı için (iii) koşulu yerine (iii)$'$ koşulunun sağlanması gerekir. X'de tüm n'ler için $x \in X$ ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde $\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1$ şartını sağlayan bir $\{x_n\}$ dizisi olsun. Tüm n ve $x \in [1,2]$ için α'nın tanımından $x_n \in [1,2]$ elde edilir. Bu nedenle tüm n'ler için $\alpha(x_n, x) = 1$'dir.

Son olarak T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

$x, y \in X$ olsun. Eğer $x, y \in [1,2]$ ise o halde $(\alpha(x,y) = 1)$

$$\alpha(x,y)\big(max\{d(T(x),T(y)), \varphi(T(x))\} + [\varphi(T(y))]\big) = max\left\{\left|\frac{x+2}{2} - \frac{y+2}{2}\right|, 0\right\} + 0$$
$$\leq \frac{1}{2}\big(max\{d(x,y), \varphi(x)\} + [\varphi(T(y))]\big]$$

elde edilir. Diğer durumlar açıktır (yani $\alpha(x,y) = 0$). Dolayısıyla her $t \geq 0$ için $\psi(t) = \frac{t}{2}$ ile birlikte T bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümüdür. Bu da Teorem 3.5.7'nin tüm koşullarının sağlandığını gösterir. Yani T'nin bir φ-sabit noktası vardır ve $x = 2$'dir [26].

Gerçekten; $Fix(T) = \left\{2, \frac{5}{2}\right\}$, $Z_\varphi = \{0,2\}$ ve $Fix(T) \cap Z_\varphi = \{2\}$ olduğu kolayca görülür.

Jleli ve arkadaşları [23], Kumrod ve arkadaşları [24] ile Asadi [25] sonuçlarının daha önce tanımlanan F için Örnek 3.5.11 bağlamında uygulanamadığı gözlemlenebilir. Aslında herhangi bir $\psi \in \Psi$ için (Yardımcı Teorem 3.5.2'ye göre)

$$max\{d(T(1),T(3)),\varphi(T(1))\}+[\varphi(T(3))]=\frac{9}{2}>3$$
$$max\{d(1,3),\varphi(1)\}+[\varphi(3)]>\psi(\,max\{d(1,3),\varphi(1)\}+[\varphi(3)])$$

ifadesi elde edilir [26].

Aşağıdaki teorem φ-sabit noktanın tekliğini sağlar.

3.5.12 Teorem

Teorem 3.5.7'nin hipotezlerine ek olarak aşağıdaki koşulun sağlandığını varsayalım:

iv) Her $x,y\in X$ için $\alpha(x,z)\geq 1$ ve $\alpha(y,z)\geq 1$ olacak şekilde bir $z\in X$ vardır.

Bu durumda T'nin φ-sabit noktası tektir [26].

İspat

Teorem 3.5.7'ye göre T'nin bir φ-sabit noktası vardır. x_1^* ve x_2^* noktalarının T'nin iki φ-sabit noktası olduğu varsayılsın. Buradan,

$T(x_1^*)=x_1^*$, $T(x_2^*)=x_2^*$ ve $\varphi(x_1^*)=\varphi(x_2^*)=0$ olur.

(iv) şartından

$$\alpha(x_1^*,z)\geq 1 \;\text{ ve }\; \alpha(x_2^*,z)\geq 1 \tag{3.38}$$

eşitsizliklerini sağlayan bir $z\in X$ vardır. T'nin α- geçişli olması ve (3.38)'i kullanarak, her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_1^*,T^n(z))\geq 1 \;\text{ ve }\; \alpha(x_2^*,T^n(z))\geq 1 \tag{3.39}$$

elde edilir. $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-daralma dönüşümü tanımı ve (3.39)'u kullanılarak

$$F\left(d(x_1^*,T^n(z)),0,\varphi(T^n(z))\right)=F\left(d\left(T(x_1^*),T\left((T^{n-1}(z)\right)\right),\varphi(T(x_1^*)),\varphi\left(T\left((T^{n-1}(z)\right)\right)\right)$$
$$\leq\alpha(x_1^*,T^{n-1}(z))F\left(d\left(T(x_1^*),T\left((T^{n-1}(z)\right)\right),\varphi(T(x_1^*)),\varphi\left(T\left((T^{n-1}(z)\right)\right)\right)$$

$$\leq \psi\left(F\left(d\left(x_1^*, T^{n-1}(z)\right), 0, \varphi\left(T^{n-1}(z)\right)\right)\right)$$

elde edilir. Buradan tümevarım ile her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$F\left(d\left(x_1^*, T^n(z)\right), 0, \varphi\left(T^n(z)\right)\right) \leq \psi^n\left(F\left(d(x_1^*, z), 0, \varphi(z)\right)\right)$$

olduğunu gösterir. ($\digamma_1$) koşulu ile birlikte her $n \in \mathbb{N}$ için

$$max\{d\left(x_1^*, T^n(z)\right), 0\} \leq \psi^n\left(F\left(d(x_1^*, z), 0, \varphi(z)\right)\right) \text{ veya}$$

$$d\left(x_1^*, T^n(z)\right) \leq \psi^n\left(F\left(d(x_1^*, z), 0, \varphi(z)\right)\right)$$

olduğu görülür. Eşitsizliğe limit uygulayarak $n \to \infty$ iken $\lim_{n\to\infty} d\left(x_1^*, T^n(z)\right) = 0$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\lim_{n\to\infty} d\left(x_2^*, T^n(z)\right) = 0$ olduğu görülür. Bu nedenle T'nin φ-sabit noktası tektir. Böylece ispat tamamlanır.

3.5.13 Uyarı

Uyarı 3.5.6 göz önüne alındığında ((a), (b), (c) ve (d)) bir kaç ilgili sonuç olan ([27] nolu kaynak Teorem 2.3), Teorem 3.2.2 (ii) şıkkı, Teorem 3.3.6 (ii) şıkkı ve Teorem 3.4.7 (ii) şıkkı, Teorem 3.5.12'den çıkarılabilir [26].

Bu çalışmanın devamında Tanım 3.5.5'deki daralma koşulunun genelleştirilmesi ve bir diğer sonucun ispatı verilecektir.

3.5.14 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $F \in \digamma_M$ ve $T: X \to X$ olsun. T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$- zayıf daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in X$ ve bir $L \geq 0$ sayısı için

$$\alpha(x,y)F\Big(d\big(T(x),T(y)\big),\varphi\big(T(x)\big),\varphi\big(T(y)\big)\Big) \le \psi\Big(F\big(d(x,y),\varphi(x),\varphi(y)\big)\Big) +$$
$$L\Big[F\Big(M(x,y),\varphi(y),\varphi\big(T(x)\big)\Big) - F\big(0,\varphi(y),\varphi\big(T(x)\big)\big)\Big]$$

eşitsizşiği sağlanacak şekilde $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$, $\varphi: X \to [0,\infty)$ ve $\psi \in \Psi$ ve $M(x,y) = min\{d\big(x,T(x)\big), d\big(y,T(y)\big), d\big(y,T(x)\big)\}$ fonksiyonlarının var olmasıdır [26].

3.5.15 Uyarı

Tanım 3.5.14'te uygun α, F ve ψ temel fonksiyonları seçilerek $(F,\varphi,\alpha-\psi)$- zayıf daralma dönüşümünün literatürde var olan çeşitli türdeki daralmaları birleştirdiği gözlemlenebilir [26].

a) Her $x,y \in X$ $t \ge 0$ ve herhangi $k \in [0,1)$ için $F \in \mathcal{F}$, $\psi(t) = kt$ olmak üzere $\alpha(x,y) = 1$ seçerek Tanım 3.2.1'deki (F,φ)-daralması elde edilir [23].

b) Her $x,y \in X$ ve $F \in \mathcal{F}$ olmak üzere $\alpha(x,y) = 1$ seçerek Tanım 3.3.10'daki (F,φ,ψ)-zayıf daralması elde edilir [24].

c) Her $x,y \in X$ ve $F \in \mathcal{F}_M$ olmak üzere $\alpha(x,y) = 1$ seçerek [25]'teki (F,φ,ψ)- zayıf daralması elde edilir.

3.5.16 Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ verilen bir alt yarı sürekli fonksiyon, ψ∈ Ψ, $F \in \mathcal{F}_M$, $\alpha: X \times X \to [0,\infty)$ ve $T: X \to X$ bir $(F,\varphi,\alpha-\psi)$-zayıf daralma dönüşümü olsun.

Aşağıdaki koşulların geçerli olduğunu varsayalım:

i) T bir α- geçişli dönüşümdür.

ii) $\alpha\big(x_0, T(x_0)\big) \ge 1$ olmak üzere $x_0 \in X$ vardır.

iii) T süreklidir veya

iii)$'$ Tüm n'ler için eğer $\{x_n\}$ X'de bir dizi ise $\alpha(x_n, x_{n+1}) \ge 1$ ve $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ ise $\alpha(x_n, x) \ge 1$' dir.

Bu durumda T'nin bir φ-sabit noktası vardır [26].

İspat

(ii) koşulu göz önüne alındığında $\alpha\big(x_0, T(x_0)\big) \ge 1$ olmak üzere $x_0 \in X$ vardır. X'de bir $\{x_n\}$ dizisini her $n \in \mathbb{N}$ için $x_{n+1} = T(x_n)$ kuralı ile tanımlansın. T α- geçişli bir dönüşüm olduğu için

$\alpha(x_0, x_1) = \alpha(x_0, T(x_0)) \geq 1$ olduğunda $\alpha(T(x_0), T(x_1)) = \alpha(x_1, x_2) \geq 1$

olur. Tümevarımla her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\alpha(x_n, x_{n+1}) \geq 1 \tag{3.40}$$

elde edilir. (3.40) ve T'nin bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümü olması kullanılarak her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) &\leq \alpha(x_{n-1}, x_n) F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) \\ &\leq \psi\Big(F\big(d(x_{n-1}, x_n), \varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)\big)\Big) + \\ L\big[F\big(d(x_n, x_n), \varphi(x_n), \varphi(x_n)\big) &- F\big(0, \varphi(x_n), \varphi(x_n)\big)\big] \\ &= \psi\Big(F\big(d(x_{n-1}, x_n), \varphi(x_{n-1}), \varphi(x_n)\big)\Big) \end{aligned}$$

elde edilir. Tümevarımla $n \in \mathbb{N}$ için

$$F\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \varphi(x_{n+1})\big) \leq \psi^n\Big(F\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \varphi(x_1)\big)\Big)$$

elde edilir. İspatın kalanı Teorem 3.5.7 ile aynı şekilde devam etmektedir.

3.5.17 Uyarı

Uyarı 3.5.15 göz önüne alındığında ((a), (b), (c) şıkları) Teorem 3.2.5'in (ii) şıkkı Teorem 3.3.11'in (ii) şıkkı ve Teorem 3.4.7'nin (ii) şıkkı, Teorem 3.5.16'dan çıkarılabilir [26].

4. (φ-ψ)-SABİT NOKTALAR İLE $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$- DARALMA DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde metrik uzaylarda (φ-ψ)-sabit nokta kavramı $\mathcal{M}$ fonksiyon ailesi ile birlikte $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü ve $\mathcal{M}_{(\varphi,\psi)}$-grafik daralma dönüşümü tanıtılarak bu tür daralmalar için (φ-ψ)-sabit nokta sonuçları incelenecektir. Sonuçların hipotezlerinin geçerliliği için örnekler verilecektir.

Şimdi (φ-ψ)-sabit noktalar kavramı tanıtılsın.

$T: X \to X$ operatörünün tüm sabit noktalarının kümesi $Fix(T) = \{x \in X : T(x) = x\}$, $\varphi: X \to [0, \infty)$ ve $\psi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonlarının tüm sıfır yerlerinin kümeleri $Z_\varphi = \{x \in X : \varphi(x) = 0\}$ ve $Z_\psi = \{x \in X : \psi(x) = 0\}$ olmak üzere $Z_{(\varphi,\psi)} = Z_\varphi \cap Z_\psi$ olsun. Eğer $x \in Fix(T) \cap Z_{(\varphi,\psi)}$ ise $x \in X$ T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktasıdır [28].

Daralma dönüşümünü tanımlayabilmek için aşağıdaki fonksiyon ailesi gereklidir.

4.1 Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan $\mathcal{M}: (0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonların kümesi $\mathcal{M}$ ile gösterilecektir [28]:

$\mathcal{M}_1$) $\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ a_n:\ a_n > 0\}$,

$\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ b_n:\ b_n \geq 0\}$ ve

$\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ c_n:\ c_n \geq 0\}$ dizileri için $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim_{n\to\infty} \mathcal{M}(a_n, b_n, c_n) = -\infty$ olmasıdır.

$\mathcal{M}_2$) $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ olmak üzere:

$\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ a_n:\ a_n > 0\}$,

$\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ b_n:\ b_n \geq 0\}$ ve

$\{tüm\ n \in \mathbb{N}\ için\ c_n:\ c_n \geq 0\}$ dizileri için $k \in (0,1)$ olmak üzere

$\lim_{n\to\infty} a_n^k \mathcal{M}(a_n, b_n, c_n) = 0$'dir.

4.2 Örnek

$i = 1, 2$ için $\mathrm{M}_i : (0, \infty) \times [0, \infty) \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın.

i) Tüm $a > 0$ ve $b, c \geq 0$ için

$\mathrm{M}_1(a, b, c) = \ln(a + b + c)$,

ii) Tüm $a > 0$ ve $b, c \geq 0$ için

$\mathrm{M}_2(a, b, c) = a + b + c + \ln(a + b + c)$.

Bu durumda $i = 1, 2$ için $\mathrm{M}_i \in \mathrm{M}$ olduğu görülebilir [28].

Aşağıdaki tanımda $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü kavramı ve hemen ardından bu kavram ile elde edilen (φ-ψ)-sabit noktanın varlığı için bir teorem verilecektir.

4.3 Tanım

(X, d) bir metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ ve $\psi: X \to [0, \infty)$ verilen fonksiyonlar olsun. Eğer bir $M \in \mathrm{M}$ ve $\tau > 0$ sabiti her $x, y \in X$ için $d(T(x), T(y)) > 0$ iken

$$\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \psi\big(T(y)\big)\Big) \leq \mathrm{M}\big(d(x, y), \varphi(x), \psi(y)\big) \tag{4.1}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde varsa $T: X \to X$ dönüşümüne $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü denir [28].

4.4 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0, \infty)$ ve $\psi: X \to [0, \infty)$ dönüşümleri alt yarı sürekli olmak üzere $T: X \to X$ sürekli bir $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü olsun.

O halde T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktası vardır [28].

İspat

$x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \neq x_{n-1}$ ve $x_n = T(x_{n-1})$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir.

(4.1)'den,

$$\tau + \mathrm{M}\big(d(x_1, x_2), \varphi(x_1), \psi(x_2)\big) = \tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x_0), T(x_1)\big), \varphi\big(T(x_0)\big), \psi\big(T(x_1)\big)\Big)$$
$$\leq \mathrm{M}\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \psi(x_1)\big) \quad (4.2)$$

elde edilir. Yine (4.1)'den

$$\tau + \mathrm{M}\big(d(x_2, x_3), \varphi(x_2), \psi(x_3)\big) = \tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x_1), T(x_2)\big), \varphi\big(T(x_1)\big), \psi\big(T(x_2)\big)\Big)$$
$$\leq \mathrm{M}\big(d(x_1, x_2), \varphi(x_1), \psi(x_2)\big) \quad (4.3)$$

elde edilir. (4.2) ve (4.3)'ten

$$\mathrm{M}\big(d(x_2, x_3), \varphi(x_2), \psi(x_3)\big) \leq \mathrm{M}\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \psi(x_1)\big) - 2\tau$$

elde edilir. Bu şekilde devam edilirse her $n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\mathrm{M}\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \psi(x_{n+1})\big) \leq \mathrm{M}\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \psi(x_1)\big) - n\tau. \quad (4.4)$$

(4.4)'te $n \to \infty$ iken

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{M}\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \psi(x_{n+1})\big) = -\infty$$

elde edilir. Böylece (M_1) koşuluna göre,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_{n+1}) = 0$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $d_n = d(x_n, x_{n+1})$, $\varphi_n = \varphi(x_n)$ ve $\psi_n = \psi(x_{n+1})$ olsun. $k \in (0,1)$ olmak üzere (M_2)'den

$$\lim_{n\to\infty} d_n^k \mathrm{M}(d_n, \varphi_n, \psi_n) = 0$$

olur. (4.4)'ten her $n \in \mathbb{N}$ için

$$d_n^k \mathrm{M}(d_n, \varphi_n, \psi_n) - d_n^k \mathrm{M}(d_0, \varphi_0, \psi_0) \leq -d_n^k n\tau \leq 0 \tag{4.5}$$

elde edilir. $n \to \infty$ iken (4.5)'ten

$$\lim_{n\to\infty} n d_n^k = 0 \tag{4.6}$$

elde edilir. Bu, $n \geq n_1$ için $n d_n^k \leq 1$ olacak şekilde $n_1 \in \mathbb{N}$ sayısının var olduğunu gösterir. Buradan

$$d_n \leq \frac{1}{n^{1/k}} \tag{4.7}$$

elde edilir. $\{x_n\}$'in bir Cauchy dizisi olduğunu göstermek için, $m > n > n_1$ ile birlikte $m, n \in \mathbb{N}$ olduğu düşünülsün. Üçgen eşitsizliği ve (4.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \cdots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &= \sum_{i=n}^{m-1} d_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} d_i \leq \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}} \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^{1/k}}$$

serisi yakınsak bir seridir. Buradan, $\lim_{m,n\to\infty} d(x_n, x_m) = 0$ olur. Bu da $\{x_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. (X, d) bir tam metrik uzay olduğu için $n \to \infty$ iken $x_n \to x^*$ olmak üzere $x^* \in X$ vardır. Böylece $x_n \to x^*$ ve $\lim_{n\to\infty} \varphi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \psi(x_n) = 0$ ile birlikte φ, ψ alt yarı sürekli fonksiyonlardır. Buradan $\varphi(x^*) = \psi(x^*) = 0$ elde edilir. T'nin sürekliliğinden $x_{n+1} = T(x_n) \to T(x^*)$ elde edilir. Böylece $x^* = T(x^*)$ ve $\varphi(x^*) = \psi(x^*) = 0$ olur. Dolayısıyla x^* T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

4.5 Sonuç

(X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ ve $\psi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonları alt yarı sürekli, tüm $x,y \in X$ ve $0 \leq k < 1$ $için$; $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olmak üzere

$$d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \psi\big(T(y)\big) \leq k\big(d(x,y) + \varphi(x) + \psi(y)\big)$$

eşitsizliği sağlansın. O halde T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktası vardır [28].

Sonuç 4.5, Teorem 4.4'te her $a > 0$ ve $b, c \geq 0$ için $\mathrm{M}(a,b,c) = \mathrm{M}_1(a,b,c)$ fonksiyonu dikkate alınarak elde edilebilir.

4.6 Örnek

$X = [0,\infty)$ olsun ve $d: X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y \in X$ için $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlansın. O halde (X,d) bir tam metrik uzaydır. $T: X \to X$ fonksiyonu $T(x) = \frac{x}{2(x+1)}$ ile tanımlansın. Her $x \in X$ için $\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\varphi(x) = x$ ve $\psi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu $\psi(x) = \frac{x}{2}$ şeklinde tanımlansın. Böylece aşağıdaki eşitsizlik ispatlanabilir:

$$\begin{aligned}
&d\big(T(x),T(y)\big) + \varphi\big(T(x)\big) + \psi\big(T(y)\big) \\
&\leq \left|\frac{x}{2(x+1)} - \frac{y}{2(y+1)}\right| + \frac{x}{2(x+1)} + \frac{1}{2}\left(\frac{y}{2(y+1)}\right) \\
&\leq \frac{1}{2}|x-y| + \frac{x}{2} + \frac{y}{4} \\
&= \frac{1}{2}\big(d(x,y) + \varphi(x) + \psi(y)\big).
\end{aligned}$$

Buradan, Sonuç 4.5 (veya Teorem 4.4)'ten T'nin $\left(x, \frac{x}{2}\right)$-sabit noktaya, yani (φ-ψ)-sabit noktaya sahip olduğu sonucuna varılabilir [28]. Gerçekten; $Fix(T) = \left\{-\frac{1}{2}, 0\right\}$, $Z_{(\varphi,\psi)} = \{0\}$ ve $Fix(T) \cap Z_{(\varphi,\psi)} = \{0\}$ olduğu kolayca görülebilir.

Aşağıda $\mathfrak{Z}$ ailesi tanıtılacaktır. Bu aileyi kullanarak yeni bir (φ-ψ)-sabit nokta teoremi elde edilecektir.

4.7 Tanım

Aşağıdaki koşulları sağlayan Z: $(0,\infty) \times [0,\infty) \times [0,\infty) \rightarrow (0,\infty)$ fonksiyonların kümesi $\mathfrak{Z}$ ile gösterilecektir [28]:

i) Her $a > 0$ ve $b, c \geq 0$ için $max\{a,b\} \leq Z(a,b,c)$'dir.

ii) $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ reel sayı dizileri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$ olması için gerekli ve yeterli koşul özel olarak $Z(a,0,0) = a$ için $\lim_{n\to\infty} Z(a_n, b_n, c_n) = a$ olmasıdır.

4.8 Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0,\infty)$ ve $\psi: X \rightarrow [0,\infty)$ fonksiyonları alt yarı sürekli ve her $x, y \in X$ için $d\big(T(x),T(y)\big) > 0$ olduğunda

$$Z\Big(d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \psi\big(T(y)\big)\Big) \leq k\Big(Z\big(d(x,y), \varphi(x), \psi(y)\big)\Big)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $T: X \rightarrow X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Burada $0 \leq k < 1$ ve $Z \in \mathfrak{Z}$'dir. Bu durumda T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktası vardır [28].

İspat

Teorem 4.4'te $Z \in \mathfrak{Z}$, her $a > 0$ ve $b, c \geq 0$ için $\mathrm{M}(a,b,c) = ln\big(Z(a,b,c)\big)$ seçilerek bu teoremin ispatı elde edilir.

4.9 Açık Problem

$F \in \mathfrak{F}$ olacak şekilde Teorem 3.2.2 T'nin (φ-ψ)-sabit noktalarının varlığı için genişletilebilir mi [28] ?

Aşağıdaki teorem, Teorem 4.4'ten her $x \in X$ için $\varphi(x) = \psi(x)$ alınarak elde edilir.

4.10 Teorem

(X,d) bir tam metrik uzay, $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm, $\mathrm{M} \in \mathcal{M}$ ve bir $\tau > 0$ sabiti ile $d\big(T(x), T(y)\big) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için

$$\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) \leq \mathrm{M}\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big) \tag{4.8}$$

eşitsizliği sağlansın ve $\varphi: X \to [0,\infty)$ alt yarı sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda T'nin bir φ-sabit noktası vardır [28].

Aşağıdaki sonuç, Teorem 4.8'de her $x \in X$ için $\varphi(x) = \psi(x)$ alınarak elde edilir.

4.11 Sonuç

(X,d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \to [0,\infty)$ fonksiyonu alt yarı sürekli olsun. $T: X \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun ve $d\big(T(x), T(y)\big) > 0$ koşulunu sağlayan her $x, y \in X$ için

$$Z\Big(d\big(T(x),T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) \leq k\Big(Z\big(d(x,y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)$$

eşitsizliği sağlansın. Burada $0 \leq k < 1$ ve $Z \in \mathfrak{Z}$'dir. Bu durumda T'nin bir φ-sabit noktası vardır [28].

Şimdi $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$-grafik daralma dönüşümleri incelenecektir. Aşağıdaki tanımda grafik daralma dönüşümü kavramı verilecektir.

4.12 Tanım

(X,d) bir metrik uzay olsun. $T: X \to X$ dönüşümünün bir grafik daralma dönüşümü olması için gerekli ve yeterli koşul her $x \in X$ için $\alpha \in [0,1)$ olmak üzere

$$d\big(T(x), T^2(x)\big) \leq \alpha . d\big(x, T(x)\big) \tag{4.9}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır [28].

4.13 Teorem

(X,d) bir metrik uzay, $\varphi\colon X \to [0,\infty)$ ve $\psi\colon X \to [0,\infty)$ alt yarı sürekli fonksiyonlar olsun. $T\colon X \to X$ bir sürekli $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$- grafik daralma dönüşümü, yani $d\big(T(x),T^2(x)\big) > 0$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x),T^2(x)\big),\varphi\big(T(x)\big),\psi\big(T^2(x)\big)\Big) \le \mathrm{M}\Big(d\big(x,T(x)\big),\varphi(x),\psi\big(T(x)\big)\Big) \quad (4.10)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $M \in \mathrm{M}$ ve $\tau > 0$ sabiti varsa T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktası vardır [28].

İspat

$x_0 \in X$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n(x_0)$ ve $x_n \neq x_{n-1}$ olacak şekilde bir $\{x_n\}$ dizisi oluşturulabilir. (4.10)'dan

$$\begin{aligned}&\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x_0),T^2(x_0)\big),\varphi\big(T(x_0)\big),\psi\big(T^2(x_0)\big)\Big)\\ &\le \mathrm{M}\Big(d\big(x_0,T(x_0)\big),\varphi(x_0),\psi\big(T(x_0)\big)\Big) \qquad (4.11)\end{aligned}$$

elde edilir. Ve yine (4.10)'dan

$$\begin{aligned}&\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T^2(x_0),T^3(x_0)\big),\varphi\big(T^2(x_0)\big),\psi\big(T^3(x_0)\big)\Big)\\ &\le \mathrm{M}\Big(d\big(T(x_0),T^2(x_0)\big),\varphi\big(T(x_0)\big),\psi\big(T^2(x_0)\big)\Big) \qquad (4.12)\end{aligned}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.12)'den,

$$\begin{aligned}&\mathrm{M}\Big(d\big(T^2(x_0),T^3(x_0)\big),\varphi\big(T^2(x_0)\big),\psi\big(T^3(x_0)\big)\Big)\\ &\le \mathrm{M}\Big(d\big(x_0,T(x_0)\big),\varphi(x_0),\psi\big(T(x_0)\big)\Big) - 2\tau\end{aligned}$$

elde edilir. Bu şekilde devam ederek her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n = T^n(x_0)$ gerçeğini kullanarak

$$\mathrm{M}\big(d(x_n, x_{n+1}), \varphi(x_n), \psi(x_{n+1})\big) \leq \mathrm{M}\big(d(x_0, x_1), \varphi(x_0), \psi(x_1)\big) - n\tau \tag{4.13}$$

eşitsizliğine ulaşılır. İspatın kalanı Teorem 4.4'ün ispatına benzerdir. Böylece T'nin bir (φ-ψ)-sabit noktaya sahip olduğu sonucuna varılır.

Bir sonraki teorem her $x \in X$ için yukarıdaki teoremde $\varphi(x) = \psi(x)$ alınarak elde edilir.

4.14 Teorem

(X, d) bir tam metrik uzay, $\varphi: X \rightarrow [0, \infty)$ alt yarı sürekli bir fonksiyon olsun. $T: X \rightarrow X$ sürekli dönüşümü için, $d\big(T(x), T^2(x)\big) > 0$ koşulunu sağlayan her $x \in X$ için

$$\tau + \mathrm{M}\Big(d\big(T(x), T^2(x)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T^2(x)\big)\Big) \leq \mathrm{M}\Big(d\big(x, T(x)\big), \varphi(x), \varphi\big(T(x)\big)\Big) \tag{4.14}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $M \in \mathrm{M}$ ve $\tau > 0$ sabiti varsa bu durumda T'nin bir φ-sabit noktası vardır [28].

5. UYGULAMALAR

Bu çalışmada bahsedilen sabit nokta kavramlarının önemine ikinci bölümde değinilmişti. Şimdi bu kavramların uygulanabileceği iki durum bu bölümde kısaca verilecektir.

5.1 Doğrusal Olmayan İntegral Denklemler İçin Bir Uygulama

$\varphi: [a, b] \to \mathbb{R}$ ve $K: [a, b] \times [a, b] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verilen iki fonksiyon, $a \in \mathbb{R}$ ile $x \in C([a, b], \mathbb{R})$ olmak üzere aşağıdaki doğrusal olmayan integral denklemi [24]'de dikkate alınmıştır.

$$x(t) = \varphi(t) + \int_a^t K\big(t, s, x(s)\big)ds \tag{5.1}$$

5.1.1 Teorem

(5.1)'deki doğrusal olmayan integral denklemi göz önüne alınsın. Aşağıdaki koşulların sağlandığı varsayılsın:

i) K sürekli bir fonksiyondur.

ii) Tüm $x, y \in C([a, b], \mathbb{R})$ ve $t, s \in [a, b]$ için

$$\big|K\big(t, s, x(s)\big) - K\big(t, s, y(s)\big)\big| \leq \frac{\theta(|x(s) - y(s)|)}{b - a}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\theta \in J$ vardır. Bu durumda (5.1) doğrusal olmayan integral denkleminin bir tek çözümü vardır [25].

İspat

$X := C([a, b], \mathbb{R})$ olsun. Her $x \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü;

$$T\big(x(t)\big) = \varphi(t) + \int_a^t K\big(t, s, x(s)\big)ds$$

ile tanımlansın.

Her $x, y \in X$ için d metriğini $d(x, y) = max_{t\in[a,b]}|x(s) - y(s)|$ ile tanımlayalım. Buradan X bir tam metrik uzaydır. Şimdi F ve φ fonksiyonları da tanımlansın. Her $a, b, c \in [0, \infty)$ için $F(a, b, c) = max\{a, b\} + [c]$ ve her $x \in X$ için $\varphi(x) = 0$ olsun.

$x, y \in X$ ve $t \in [a, b]$ alalım. Buradan

$$
\begin{aligned}
|T(x(t)) - T(y(t))| &= \left|\int_a^t K(t,s,x(s))ds - \int_a^t K(t,s,y(s))ds\right| \\
&\leq \int_a^t |K(t,s,x(s)) - K(t,s,y(s))|\, ds \\
&\leq \int_a^t \frac{\theta(|x(s) - y(s)|)}{b-a} ds \\
&\leq \frac{1}{b-a} \int_a^t \theta(d(x,y)) ds \\
&\leq \theta(d(x,y))
\end{aligned}
$$

bulunur. Yani tüm $x, y \in X$ için

$$
\begin{aligned}
&d(T(x), T(y)) \leq \theta(d(x,y)) \\
&max\{d(T(x), T(y)), \varphi(T(x))\} \leq \theta(max\{d(x,y), \varphi(x)\}) \\
&max\{d(T(x), T(y)), \varphi(T(x))\} + [\varphi(T(y))] \leq \theta(max\{d(x,y), \varphi(x)\} + [\varphi(y)])
\end{aligned}
$$

eşitsizlikleri elde edilir. Bu da $F \in \mathfrak{F}_M$ iken T'nin Tanım 3.3.5'deki daralma koşullarını sağladığını gösterir. O halde T'nin X'de bir tek φ-sabit noktası vardır. Bu da (5.1) integral denkleminin bir tek çözümünün varlığını garantiler.

5.2 Doğrusal Olmayan Adi Diferansiyel Denklemlere Bir Uygulama

Bu bölümde $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere

$$
\begin{cases} -\frac{d^2x}{dt^2} = f(t, x(t)), \ t \in [0,1], \\ \qquad x(0) = x(1) = 0 \end{cases} \tag{5.2}
$$

ikinci dereceden adi diferansiyel denkleminin sınır değer probleminin varlığı araştırılacaktır [26].

$X = C[0,1]$, $[0,1]$'de tanımlanan tüm sürekli fonksiyonlar uzayı olsun. Her $x, y \in X$ için X'de $d: X \times X \to \mathbb{R}$ metriği;

$$d(x,y) = \|x - y\|_\infty = max_{t\in[0,1]}|x(t) - y(t)|$$

şeklinde tanımlansın. (X, d)'nin bir tam metrik uzaydır [29]. (5.2) diferansiyel denklemi ile ilgili Green fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlanır [26]:

$$G(s,t) = \begin{cases} t(1-s), & 0 \leq t \leq s \leq 1, \\ s(1-t), & 0 \leq s \leq t \leq 1. \end{cases}$$

$T: X \to X$ ve $\xi: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ verilen iki fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki koşulların sağlandığını varsayalım [26]:

i) Her $t \in [0,1]$ ve $\xi(a,b) \geq 0$ özelliğindeki $a, b \in \mathbb{R}$ için

$|f(t,a) - f(t,b)| \leq max_{a,b\in\mathbb{R}}|a - b|$ 'dir.

ii) Her $t \in [0,1]$ için $\xi\left(x_0(t), T(x_0(t))\right) \geq 0$ olacak şekilde $x_0 \in X$ vardır.

iii) Her $x, y \in X$ ve $t \in [0,1]$ için eğer $\xi(x(t), y(t)) \geq 0$ ise $\xi\left(T(x(t)), T(y(t))\right) \geq 0$'dır.

iv) $\{x_n\}$, X'de tüm n'ler için $\xi(x_n, x_{n+1}) \geq 0$ ve $x_n \to x \in X$ olacak şekilde bir dizi ise her n için $\xi(x_n, x) \geq 0$'dır.

5.2.1 Teorem

(i)-(iv) koşullarının sağlandığını varsayarsak (5.2) denkleminin $C^2[0,1]$'de bir çözümü vardır [26].

İspat

$x \in X$ için (5.2) denkleminin bir çözümü olabilmesinin gerekli ve yeterli koşulu her $x \in X$ için

$$x(t) = \int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds$$

integral denkleminin bir çözümü olmasıdır. Her $x \in X$ için $T: X \to X$ dönüşümü

$$T\big(x(t)\big) = \varphi(t) + \int_0^T G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds$$

şeklinde tanımlansın. Her $t \in [0,1]$ için $x, y \in X$ olduğunda $\xi\big(x(t), y(t)\big) \geq 0$ olsun. (i) koşulunu kullanarak,

$$\begin{aligned}
\big|T\big(x(t)\big) - T\big(y(t)\big)\big| &= \left|\int_0^1 G(t,s) f\big(s, x(s)\big) ds - \int_0^1 G(t,s) f\big(s, y(s)\big) ds\right| \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) \big| f\big(s, x(s)\big) - f\big(s, y(s)\big)\big| ds \\
&\leq \int_0^1 G(t,s) max_{s\in[0,1]} |x(s) - y(s)| ds \\
&\leq \left(sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s) ds \right). \|x - y\|_\infty
\end{aligned}$$

elde edilir. Her $t \in [0,1]$ için $\int_0^1 G(t,s)ds \ = -\frac{t^2}{2} + \frac{t}{2}$ olduğundan

$sup_{t\in[0,1]} \int_0^1 G(t,s)ds \ = \frac{1}{8}$ olur ve

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty \leq \frac{1}{8}\|x - y\|_\infty$$

elde edilir. Şimdi her $a, b, c \in [0, \infty)$ için $F: [0, \infty)^3 \to [0, \infty)$ fonksiyonu $F(a, b, c) = a + b + c$ ve her $x \in X$ için $\varphi: X \to [0, \infty)$ fonksiyonu $\varphi(x) = 0$ ile verilsin. Bu iki fonksiyonu göz önüne alarak

$$\|T(x) - T(y)\|_\infty + \varphi\big(T(x)\big) + \varphi\big(T(y)\big) \leq \ \frac{1}{8}\big(\|x - y\|_\infty + \varphi(x) + \varphi(y)\big) \text{ veya}$$

$$F\Big(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) \leq \frac{1}{8}\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)$$

elde edilir. Sonra $\alpha: X \times X \to [0, \infty)$ fonksiyonu

$$\alpha(x, y) = \begin{cases} 1, & \xi\big(x(t), y(t)\big) \geq 0, \qquad t \in [0,1], \\ 0, & \qquad\qquad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. O halde tüm $x, y \in X$ için $\psi(u) = \frac{1}{8}u$ olmak üzere

$$\alpha(x, y)F\Big(d\big(T(x), T(y)\big), \varphi\big(T(x)\big), \varphi\big(T(y)\big)\Big) \leq \psi\Big(F\big(d(x, y), \varphi(x), \varphi(y)\big)\Big)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan T bir $(F, \varphi, \alpha - \psi)$-daralma dönüşümüdür. (iii) koşulu kullanılarak T'nin bir α- geçişli dönüşüm olduğunu görmek kolaydır. (ii) koşulu da $\alpha\big(x_0, T(x_0)\big) \geq 1$ iken $x_0 \in X$ sayısının var olduğunu gösterir. Bunlarla birlikte (iv) koşulu Teorem 3.5.7'nin tüm şartlarının sağlandığını, yani T'nin X'de (5.2) denkleminin bir çözümü olan φ-sabit noktaya sahip olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada φ-sabit nokta kavramı ile (F,φ)-daralma dönüşümü kavramının ilişkisi, bu daralma dönüşümünün genelleştirilmesi ve geliştirilmesi ile ilgili literatür derlemesi verildi. Daha sonra φ-sabit nokta kavramı da geliştirilerek, (φ-ψ)-sabit nokta kavramı ile ilgili sonuçlar incelendi. (φ-ψ)-sabit nokta kavramının $\mathrm{M}_{(\varphi,\psi)}$-daralma dönüşümü ile ilişkisi ve dönüşümün geliştirilmesi ile ilgili çalışmalar ele alındı.

Literatürde sabit noktalar ve daralma prensibi kavramları çok geniş bir yer oluşturmaktadır. Analiz, uygulamalı matematik, topoloji gibi alanlarda çalışılabilmektedir. Aynı zamanda farklı uzaylar üzerinde bir çok çalışma vardır ve yine farklı uzaylar (örneğin S-metrik uzaylar, b-metrik uzaylar vb.) üzerinde çalışmalara devam edilebilir. Buradan hareketle bu çalışma genişletilerek şunlar yapılabilir:

Öncelikle çalışmamızda incelenen bir makalede yer alan Açık Problem 4.9 dikkate alındığında, bu açık problemin çözülmesi ile ilgili daha genel fonksiyonlarla (φ-ψ)-sabit nokta kavramı çalışılabilir.

Ayrıca beşinci bölümde incelediğimiz uygulamalar dikkate alındığında, bu tez çalışmasında sunulan teorik sonuçların farklı alanlardaki uygulamaları çalışılabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] S. Banach, “Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales”, *Fund. math*, vol. 3 no. 1, pp. 133-181, 1922, doi: 10.4064/fm.

[2] M. S. Khan, M. Swaleh and S. Sessa, “Fixed point theorems by altering distances between the points”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 30 no. 1, pp. 1-9, 1984, doi.org/10.1017/S0004972700001659.

[3] M. Edelstein, “An extension of Banach's contraction principle”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 12 no. 1, pp. 7-10, 1961, doi.org/10.1090/S0002-9939-1961-0120625-6.

[4] B. E. Rhoades, “A comparison of various definitions of contractive mappings”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol 226, pp. 257-290, 1977, doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0433430-4.

[5] L. B. Ćirić, “A generalization of Banach’s contraction principle”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 45, no. 2, pp. 267-273, 1974.

[6] E. Karapınar, O. Alqahtani and H. Aydi, “On interpolative Hardy-Rogers type contractions”, *Symmetry*, vol. 11, no. 1, p. 8, 2019, doi.org/10.3390/sym11010008.

[7] R. Kannan, “Some results on fixed points-II”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 76 no. 4, pp. 405-408, 1969, doi.org/10.1080/00029890.1969.12000228.

[8] R. P. Agarwal, E. Karapınar, D. O'Regan and A. F. Roldán-López-de-Hierro, *Fixed point theory in metric type spaces*. Switzerland: Springer, 2015.

[9] Y. Soykan, *Metrik uzaylar ve topolojisi.* Nobel Akademik Yayıncılık, 2012.

[10] S. Lipschutz, *General topology*. Schaum’s Outlines, 1965.

[11] A. W. Knapp, *Basic real analysis*. Springer Science and Business Media, 2005.

[12] T. Başkan, O. Bizim, ve İ. N. Cangül, *Metrik uzaylar ve genel topolojiye giriş*. Vipaş, 2000.

[13] Y. Chen, Y. J. Cho and L. Yang, “Note on the results with lower semi-continuity”, *B. Korean Math. Soc.*, vol. 39, no. 4, pp. 535-542, 2002.

[14] T. Suzuki, “A new type of fixed point theorem in metric spaces”, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, vol. 71, no. 11, pp. 5313-5317, 2009.

[15] S. Almezel, Q. H. Ansari and M. A. Khamsi (Eds.). *Topics in fixed point theory. vol. 5,* Switzerland: Springer, 2014.

[16] K. Ciesielski, “On Stefan Banach and some of his results”, *Banach J. Math. Anal.*, vol.

1, pp. 1-10, 2007, doi: 10.15352/bjma/1240321550.

[17] A. Poniecki, "The Banach Contraction Principle", 2008.

[18] E. Rakotch, "A note on contractive mappings", *P. Am. Math. Soc.*, vol. *13*, no.3, pp. 459-465, 1962, doi.org/10.1090/S0002-9939-1962-0148046-1.

[19] A. Dönmez, "Ömer Hayyam'ın İkinci Ve Üçüncü Dereceden Denklemlerin Geometrik Çözümleri", *Anadolu Bil Meslek Yüksekokulu Dergisi*, sayı 16, ss. 41-49, 2008.

[20] G. B. Thomas, M. D. Weir, J. Hass and F. R. Giordano, *Thomas-féle kalkulus I.* Typotex Kft, 2008.

[21] M. N. Vrahatis, "Intermediate value theorem for simplices for simplicial approximation of fixed points and zeros", *Topology and its Applications*, vol. 275, no. 107036, 2020, doi.org/10.1016/j.topol.2019.107036.

[22] H. Geuvers, F. Wiedijk and J. Zwanenburg, "A constructive proof of the Fundamental Theorem of Algebra without using the rationals", *In International Workshop on Types for Proofs and Programs*, pp. 96-111, 2000.

[23] M. Jleli, B. Samet and C. Vetro, "Fixed point theory in partial metric spaces via φ-fixed point's concept in metric spaces", *J. Inequal. Appl.*, pp. 1-9, 2014, doi.org/10.1186/1029-242X-2014-426.

[24] P. Kumrod and W. Sintunavarat, "A new contractive condition approach to φ-fixed point results in metric spaces and its applications", *J. Comput. Appl. Math.*, vol. 311, pp. 194-204, 2017, doi.org/10.1016/j.cam.2016.07.016.

[25] M. Asadi, "Discontinuity of control function in the (F, φ, θ)-contraction in metric spaces", *Filomat*, vol. 31, no. 17, pp. 5427-5433, 2017, doi.org/10.2298/FIL1717427A.

[26] M. Imdad, A. R. Khan, H. N. Saleh, and W. M. Alfaqih, "Some φ-fixed point results for (F, φ, α-ψ)-contractive type mappings with applications", *Mathematics*, vol. 7, no. 2, p. 122, 2019, doi.org/10.3390/math7020122.

[27] B. Samet, C. Vetro and P. Vetro, "Fixed point theorems for α–ψ-contractive type mappings", *Nonlinear Anal.-Theor.*, vol. 75, no. 4, pp. 2154-2165, 2012, doi.org/10.1016/j.na.2011.10.014.

[28] M. U. Ali, K. Muangchoo-in, ve P. Kumam, "Zeroes and Fixed Points of Different Functions via Contraction Type Conditions", *In International Econometric Conference of Vietnam, Springer,* Cham, vol. 760, pp. 353-359, 2018, doi.org/10.1007/978-3-319-73150-6_28.

[29] G. S. D. Souza, A. Abebe, and E. Kwessi, "Mini-Course on Functional Analysis", *Samsa Masamu Program*, pp. 1-98, 2011.