T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜLŞAH DOĞRAYICI

BALIKESİR, TEMMUZ - 2021

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI

GÜLŞAH DOĞRAYICI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Recep ŞAHİN
Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Prof. Dr. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

BALIKESİR, TEMMUZ - 2021

# ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Genelleştirilmiş Ve Genişletilmiş Genelleştirilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları** " başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Gülşah DOĞRAYICI**

# ÖZET

**GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ BAZI NORMAL ALT GRUPLARI**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**GÜLŞAH DOĞRAYICI**
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**(TEZ DANIŞMANI : PROF. DR. RECEP ŞAHİN)**
**BALIKESİR, 2021 - TEMMUZ**

Bu çalışmada genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirimiş Hecke grupları üzerinde çalışılmıştır. Tez beş bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirimiş Hecke grupları tanıtılmıştır.
Tezin ikinci bölümü tezde kullanılacak olan tanım, teorem ve genellemeleri içermektedir.
Üçüncü bölümü genelleştirilmiş Hecke gruplarının komutatör alt gruplarının üreteçleri, sunuşları, simgeleri bulunmuş ve örneklerle açıklanmıştır.
Tezin dördüncü bölümünde genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının komutatör alt grupları çalışılmıştır. Bu grupların üreteçleri, sunuşları, simgeleri bulunmuş ve örnekler ile ifade edilmiştir.
Beşinci bölümünde ise genelleştirilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt grupları çalışılmış olup bu grupların üreteçleri, simgeleri, sunuşları incelenmiştir.
Tezin altıncı ve son bölümünde ise elde edilen sonuçlar açıklanmıştır. Ayrıca ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler ve öneriler verilmiştir.



**ANAHTAR KELİMELER:** Genelleştirilmiş Hecke grupları, genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları, komütatör alt grup, kuvvet alt grup.

Bilim Kodu : 20401 Sayfa Sayısı : 48

# ABSTRACT

**SOME NORMAL SUBGROUPS OF GENERALIZED AND EXTENDED GENERALIZED HECKE GROUPS**
**MSC THESIS**
**GÜLŞAH DOĞRAYICI**
**BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR : PROF. DR. RECEP ŞAHİN)**
**BALIKESİR, 2021 - JULY**

In this study the generalized and extended generalized Hecke groups are studied. Thesis consist of five chapters.
In the first chapter, general Hecke and extended generalized Hecke groups are introduced.
The second chapter of the thesis includes definitions, theorems and generalizations that will be used in the thesis.
In the third chapter, the generators, presentations, the signatures of the commutator subgroups of the generalized Hecke groups are found and explained with examples.
In the fourth chapter of the thesis, commutator subgroups of the extended generalized Hecke groups are studied.The generators, presentations, the signatures of these groups are found and expressed with examples.
In the fifth chapter, power subgroups of generalized Hecke groups are studied and The generators, presentations, the signatures of these groups are investigated.
In chapter six and end chapter are explained the results obtained from this study. Also open problems and suggestions are given for further studies.



**KEYWORDS:** generalized Hecke groups, extended generalized Hecke groups, commutator subgroup, power subgroup.
Science Code : 20401 Page Number : 48

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SEMBOL LİSTESİ

| **Simge** | | **Adı** |
|---|---|---|
| $\mathbb{Z}$ | : | Tam Sayılar Kümesi, Sonsuz Mertebeli Devirli Grup |
| $\mathbb{Z}_p$ | : | p Mertebeli Devirli Grup |
| $\mathbb{C}$ | : | Kompleks Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{C}_\infty$ | : | Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{R}$ | : | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbf{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$ | : | Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesinin Otomorfizmaları |
| $\mathbf{GL}(2,\mathbb{C})$ | : | Kompleks Sayılar Üzerinde Genel Lineer Grup |
| $\mathbf{PSL}(2,\mathbb{C})$ | : | Kompleks Sayılar Üzerinde Projektif Özel Lineer Grup |
| $\mathbf{U}$ | : | Üst Yarı Düzlem |
| $[\mathbf{G}:\mathbf{H}]$ | : | H Alt Grubunun G Grubu İçindeki İndeksi |
| $\mathbf{C_n}$ | : | Devirli Grup |
| $\mathbf{D_n}$ | : | Dihedral Grup |
| $\mathbf{S_n}$ | : | Simetrik Grup |
| $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ | : | Direk Çarpım Grubu |
| $\mathbf{A}*\mathbf{B}$ | : | Serbest Çarpım Grubu |
| $\mathbf{A}*_{\mathbf{C}}\mathbf{B}$ | : | Karışımlı Serbest Çarpım Grubu |
| $\mathbf{g}'$ | : | Bir grubun cinsi |
| $\mathbf{G}'$ | : | Komütatör Alt Grup |
| $\mathbf{G^m}$ | : | Kuvvet Alt Grubu |
| $[\mathbf{a}.\mathbf{b}]$ | : | a ile b elemanlarının komütatörü |
| $\Sigma$ | : | Schreier Transverseli |

# ÖNSÖZ

Bu çalışmada değerli bilgileri ile bana sürekli yol gösteren, arada yüzlerce kilometre olmasına rağmen desteğini hiç esirgemeyen ve sabırla yanımda olan sevgili danışman hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e,
Değerli bilgilerinden ve tecrübelerinden faydalandığım kıymetli hocalarım Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e ve Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na,
Ülkemizde bilimin ve bilimsel çalışmaların ilerlemesinde öncülük eden ve beni yüksek lisans eğitimim boyunca destekleyen TÜBİTAK'a
teşekkür ederim.

**BALIKESİR,2021** **Gülşah DOĞRAYICI**

# 1. GİRİŞ

Eric Hecke [1] numaralı çalışma ile Hecke gruplarını tanımlamıştır. Hecke grupları $\lambda$ pozitif sabit bir sayı olmak üzere

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümleri ile üretilir. $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$, $q \geq 3$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda Hecke grupları Fuchsian grup olacaktır[1]. Cangül, Şahin, Koruoğlu, Yılmaz, Bizim, İkikardeş gibi yazarlar tarafından Hecke grupları çalışılmıştır. Hecke gruplarına [2-10] numaralı çalışmalar ile ulaşılabilir.

Genel Hecke grupları Lehner ve Newman tarafından [11] numaralı çalışma ile literatüre kazandırılmıştır. p ve q tamsayı, $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ olmak üzere

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p} \text{ ve } V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

dönüşümleri ile üretilen gruplara genel Hecke grupları denir [11]. Genel Hecke grupları $H_{p,q}$ ile gösterilir. Burada $Y(z) = X(z).V = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ alınarak grubun sunuşu

$$H_{p,q} = \langle X, Y : X^p = Y^q = I\rangle \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$$

olur. Bu gruplar [12] numaralı çalışma ile Demir tarafından ayrıntılı bir şekilde incelenmiştir. Huang tarafından [13] numaralı çalışma ile genel Hecke grupları da genelleştirilmiş ve bunun sonucunda $p_i \geq 2$ tamsayı ve $1 \geq i \geq n$ olmak üzere $p_i$ mertebeli n tane devirli grubun serbest çarpımına izomorf olan gruplara genelleştirilmiş Hecke grupları olarak adlandırılmıştır. Genelleştirilmiş Hecke grupları $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ile gösterilir. Bu gruplar ile ilgili bilgilere [13] ve [14] numaralı çalışmalarla ulaşılabilir. Ayrıca $n = 3$ alınarak $H(2, p, q)$ grubu [15] numaralı çalışmada çalışılmıştır.

Genelleştirilmiş Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümünün eklenmesi ile genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları oluşur [13] . $p_i \geq 2$ tamsayı ve $1 \geq i \geq n$ olmak üzere $p_i$ mertebeli n tane diedral grubun 2 mertebeli devirli grup altında karışık serbest çarpımına izomorf olan gruplara genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları olarak adlandırılmıştır Bu gruplar $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ olarak gösterilir.

Bu tezde ise $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı, $n \geq 2$ ve her $p_i \geq 2$ olmak üzere $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke grupları üzerinde durulmuştur.

Tezin ikinci bölümü tezde kullanılacak olan tanım, teorem ve genellemeleri içermektedir.

Tezin üçüncü bölümü genelleştirilmiş Hecke gruplarının komutatör alt gruplarının üreteçleri, sunuşları, simgeleri bulunmuş ve örneklerle açıklanmıştır.

Tezin dördüncü bölümünde genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının komutatör alt grupları çalışılmıştır. Bu grupların üreteçleri, sunuşları, simgeleri bulunmuş ve örneklendirilmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise genelleştirilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt grupları çalışılmış olup bu grupların üreteçleri, simgeleri, sunuşarı incelenmiştir.

# 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tez içerisinde gerekli olacak tanımlara, teoremlere ve kavramlara yer verilecektir.

## 2.1 Mobiüs Dönüşümleri

**Tanım 2.1.1** $V(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} \qquad (a,b,c,d \in \mathbb{C}, ad-bc \neq 0)$

olan Mobiüs dönüşümleri denir. Mobiüs dönüşümlerinin kümesi $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ ile gösterilir [16].

**Teorem 2.1.1** Mobiüs dönüşümlerinin kümesi bileşke işlemi altında bir gruptur [16].

**Tanım 2.1.2** $a,b,c,d \in \mathbb{C}, \Delta = ad-bc \neq 0$ olmak üzere $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçiminde $2\times2$ matrislerin kümesine $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kıümesinde genel lineer grup denir. Genel lineer grup $GL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilir [16].

**Teorem 2.1.2** $\varphi : GL(2,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}_\infty)$ olmak üzere

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d}$$

tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmadır [12].

**Teorem 2.1.3** $Aut(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C})$

**Tanım 2.1.3** $G' = \{U(z) : U(z) = \dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = -1\}$ kümesinin elemanlarına U üst yarı düzlemin anti-otomorfizmleri denir [17].

**Teorem 2.1.4** $G = PSL(2,\mathbb{R}) \cup G'$ bileşke işlemi altında gruptur [17].

**Teorem 2.1.5** Hecke grupları $PSL(2,\mathbb{R})$ nin alt grubudur. Genişletilmiş Hecke grupları ise G nin bir alt grubudur [17].

## 2.2 Fuchsian Grupları

**Tanım 2.2.1** $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun ayrık alt gruplarına Fuchsian grup denir. Herhangi bir $\Gamma$ Fuchian grubunun üreteçleri aşağıdaki gibi sıralandığında;

| | |
|---|---|
| $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_g, b_g$ | (Hiperbolik Üreteçler) |
| $x_1, x_2, \ldots, x_r$ | (Eliptik üreteçler) |
| $p_1, p_2, \ldots, p_t$ | (Parabolik üreteçler) |
| $h_1, h_2, \ldots, h_u$ | (Hiperbolik sınır elemanları) |

ve bu üreteçler arasında

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} \prod_{k=1}^{t} \prod_{l=1}^{u} = 1$$

bağıntıları varsa sağlanıyorsa Funchian grubunun simgesi

$$(g; m_1, \ldots, m_r; t; u)$$

şeklinde olur [12], [18], [19].

## 2.3 Hecke Grupları

Hecke grupları, 1936 yılında Eric Hecke tarafından [1] numaralı çalışmada tanımlanmıştır.

**Tanım 2.3.1** $\lambda \in \mathbb{R}$ pozitif ve sabit bir sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile oluşturulan gruplara Hecke grupları denir. Hecke grupları $H(\lambda)$ ile gösterilir. Burada $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri ile $(ToU)(z) = S(z)$ hesaplanırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

olarak bulunur.

**Teorem 2.3.1** $\lambda \geq 2$ gerçel sayı veya $q \geq 3$ tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$ ise $H(\lambda)$ grubu Fuchsian gruptur. Ayrıca E. Hecke $H(\lambda)$ grubunun temel bölgesini

$$F_\lambda = \{z \in U \mid |\operatorname{Re} z| < \lambda/2, |z| > 1\}$$

kümesi ile göstermiştir [1].

En çok çalışılan Hecke grubu $q = 3$ olmak üzere modüler gruptur. Hecke grupları $\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$, $1 \leq \lambda < 2$ ise $H(\lambda_q)$ veya $H_{2,q}$ ile gösterilir. Bazı kaynaklarda bu durum 1. tip Hecke grupları olarak adlandırılmaktadır. Eğer Hecke grupları $\lambda \geq 2$ ise $H(\lambda)$ ile gösterilir. Bu durumda ise 2. tip Hecke grupları olarak adlandırılır. Bu grupların sunuşları aşağıdaki teoremler ile verilmiştir.

**Teorem 2.3.2** $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu

$$H(\lambda_q) = \langle T, S : T^2 = S^q = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

biçimindedir. Buradan $H(\lambda_q)$ Hecke grubu, 2 mertebeli ve q mertebeli iki sonlu devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

**Teorem 2.3.3** [3] $\lambda \geq 2$ ise $H(\lambda)$ Hecke grubunun sunuşu

$$H(\lambda) = \langle T, S : T^2 = S^\infty = I \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$$

biçimindedir [2]. Buradan $H(\lambda)$ Hecke grubu, 2 mertebeli ve sonsuz mertebeli, iki grubun serbest çarpımına izomorf olur .

## 2.4 Genişletilmiş Hecke Grupları

**Tanım 2.4.1** [2] Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmasının eklenmesi ile oluşan yeni gruba genişletilmiş Hecke grupları denir. $\lambda$ sayısına göre genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda_q)$ veya $\overline{H}(\lambda)$ ile gösterilir.

Burada R dönüşümü ile $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun üreteçleri arasındaki bağlantılar incelendiğinde

$$T.R = R.T \text{ ve } S.R = R.S^{q-1}$$

olduğu görülür. Tüm bunlardan genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

**Teorem 2.4.1** [2] $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle T, S, R : T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir. Buradan $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grubu 2 mertebeli ve q mertebeli iki dihedral grubun 2 mertebeli devirli grup altında birleştirilmiş serbest çarpımına izomorf olur.

**Teorem 2.4.2** [4] $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grubunun sunuşu

$$\overline{H}(\lambda) = \langle T, S, R : T^2 = S^\infty = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I\rangle \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

biçimindedir. Buradan $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grubu 2 mertebeli ve sonsuz mertebeli iki diedral grubun 2 mertebeli devirli grup altında birleştirilmiş serbest çarpımına izomorf olur.

## 2.5 Genel Hecke Grupları

1965 yılında genel Hecke grupları Lehner ve Newman tarafından [13] numaralı çalışma ile tanımlanmıştır. Daha sonrasında Lehner tarafından [14] numaralı çalışma ile incelenmiştir. Bu bölümde genel Hecke grupları ile ilgili tanım ve teoremlere yer verilecektir.

**Tanım 2.5.1** [13] Genel Hecke grupları p ve q tamsayıları için $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ olmak üzere

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p} \text{ ve } V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

kesirli dönüşümleri ile üretilen gruplara denir. Genel Hecke grupları $H_{p,q}$ ile gösterilir.

Burada $Y(z) = XV(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$ elde edilir.

**Teorem 2.5.1** p ve q tamsayıları için $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ olmak üzere genel Hecke gruplarının sunuşu

$$H_{p,q} = \langle X, Y : X^p = Y^q = I \rangle \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$$

biçimindedir.

## 2.6 Genişletilmiş Genel Hecke Grupları

**Tanım 2.6.1** Genel Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmasının eklenmesi ile oluşan yeni gruba genişletilmiş genel Hecke grupları denir. Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}_{p,q}$ ile gösterilir.

**Teorem 2.6.1** $\overline{H}_{p,q}$ grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,q} = \langle X, Y, R : X^p = Y^q = R^2 = I, XR = RX^{p-1}, YR = RY^{q-1} \rangle \cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

biçimindedir.

## 2.7 Genelleştirilmiş Hecke Grupları

**Tanım 2.7.1** [6] $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı ve $n \geq 2$ ve her $p_k \geq 2$ koşulunu sağlasın. $\lambda_k = 2\cos(\frac{\pi}{p_k})$, $p_k \geq 2$ olmak üzere

$$X_i(z) = -\frac{1}{z+\lambda_i} \text{ veya } X_j(z) = -\frac{1}{z+\lambda_j}$$

kesirli dönüşümleri ile üretilen gruplara genelleştirilmiş Hecke grupları denir. Bu gruplar $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ile gösterilir.

## 2.8 Permütasyon Metotu

**Tanım 2.8.1** Singerman permütasyon metodunun yardımı ile bir Fuchsian grubun sonlu indeksli normal alt gruplarının simgesi hesaplanabilir. Bu permütasyon metodu Teorem 2.8.1 de açıklanmıştır.

**Teorem 2.8.1** $(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; t; u)$ bir $\Gamma$ Fuchsian grubunun simgesi olmak üzere $\Gamma$ grubunun N indeksli ve

$$(g'; n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1p_1}, \ldots, n_{r_1}, n_{r_2}, \ldots, n_{rp_r}; s'; t')$$

simgesi olan bir $\Gamma_1$ alt grubu olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki koşuların sağlanmasıdır.

1) $\Gamma$ grubundan N nokta üzerinde geçişli olan bir G permütasyon grubuna tanımlı $\vartheta : \Gamma \to G$ epimorfizması iki koşulu sağlar:

a) $\vartheta(x_j)$ permütasyonu, uzunlukları $m_j$ den kısa olan $p_j$ tane devirden oluşur. Bu devirlerin uzunlukları

$$\frac{m_j}{n_{j_1}}, \frac{m_j}{n_{j_2}}, \ldots, \frac{m_j}{n_{jp_j}}$$

olur.

b) $\vartheta(\gamma)$ permütasyonunda devirlerin sayısı $\delta(\gamma)$ ise

$$s' = \sum_{k=1}^{s} \delta(p_k) \text{ ve } t' = \sum_{k=1}^{t} h_1$$

eşitlikleri ile bulunur.

2) Hiperbolik alan $2\pi\mu(\Gamma)$ olmak üzere $\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)} = N$ eşitliği vardır [?].

$\Gamma$, $(g; m_1, m_2, \ldots, m_k)$ simgesine sahip bir Fuchsian grup ve $\Gamma$ içinde $\Gamma_1$, N indeksli normal alt grup olsun. $x_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ üreteçlerini bölüm grubundaki mertebe karşılıkları olmak üzere $\Gamma_1$ nin simgesi:

$$(g'; (\tfrac{m_1}{l_1})^{(\frac{N}{l_1})}, (\tfrac{m_2}{l_2})^{(\frac{N}{l_2})}, \ldots, (\tfrac{m_k}{l_k})^{(\frac{N}{l_k})})$$

şeklindedir. Buradaki $g'$ cinsi Riemann-Hurwitz formülü yardımı ile hesaplanır [19].

### 2.9 Reidemeister-Schreier Metodu

**Tanım 2.9.1** Reidemeister-Schreier metodu bir grubun sonlu indeksli normal alt grubunun üreteçlerini ve sunuşunu elde etmemize sağlayan bir metottur. $\{g_i\}$ ,G grubunun üreteç ailesi ve H, G grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. G/H bölüm grubu incelenerek bu metot uygulanır. Bu G/H bölüm grubunun eleman sayısı ile aynı eleman sayısına sahip bir $\sum$ Schreier transverseli seçilir. Transverselin elemanlarının aşağıdaki koşullar altında seçilir:
(i) $I \in \sum$ (Birim eleman transverselde yer alır.)
(ii) $\sum$ sağ sadeleştirme işlemi altında kapalıdır. Yani; $g_{i_1}.g_{i_2}.\ldots.g_{i_r} \in \sum$ ise $g_{i_1}.g_{i_2}.\ldots.g_{i_{r-1}} \in \sum$ olmalıdır.
Bu şartlar altında bir $\sum$ Schreier transverseli seçildikten sonra H grubunun bir üreteci aşağıdaki formda olmalıdır [20].

$$(\textstyle\sum \text{ nın bir elemanı}) \times (\text{G grubunun bir üreteci}) \times (\text{önceki çarpımın koset gösterimi})^{-1}$$

### 2.10 Riemann-Hurwitz Formülü

**Tanım 2.10.1** $\Gamma$ Fuchsian grubunun simgesi $(g; m_1, m_2, \ldots, m_r; t; u)$ ve temel bölgesinin hiperbolik alanı $2\pi\mu(\Gamma)$ olsun. $\mu(\Gamma)$ için aşağıdaki eşitlik vardır:

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

Bu denklem ile $\Gamma$ Fuchsian grubunun g saysısı olan cinsi bulunur. $\Gamma_1$, $\Gamma$ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu ise $|\,\Gamma/\Gamma_1\,| = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)}$ eşitliği vardır. Bu eşitlik Riemann-Hurtwitz formülü denir [15].

### 2.11 Komutatör Alt Gruplar

G bir grup ve G grubunun iki elemanı $x_1$ ve $x_2$ olsun.

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye bu iki elemanın komütatörü denir.

**Tanım 2.11.1** Bir G grubunun tüm elemanlarının komütatörü alınması ile elde edilen gruba G grubunun komütatör alt grubu denir ve $G'$ ile gösterilir. Bu işlem yapıldığı gibi birinci komütatör alt grubunun tüm elemanlarına da aynı işlem gerçekleştirilse ikinci komütatör alt grubu elde edilir ve bu şekilde diğer komütatör alt gruplar bulunabilir.

$$G^{(n)} \leq \ldots \leq G'' \leq G' \leq G$$

Komütatör alt grupları tamamen değişmez bir grup olduğu için normal alt gruptur [21] .

**Teorem 2.11.1** $G/G'$ bölüm grubu değişmeli bir gruptur [22] .

**Örnek 2.1** Reidemeister-Schreier metodunu kullanarak $H(2,3)$ modüler grubun komütatör alt grubunun üreteçlerini ve sunuşunu elde edelim. $H(2,3)$ grubunun sunuşu;

$$H(2,3) =< T, S | T^2 = S^3 = I >$$

şeklindedir. Komütatör alt grubu için bölüm grubunun sunuşu

$$H(2,3)/H'(2,3) =< T, S | T^2 = S^3 = I, TS = ST > \cong C_2 \times C_3$$

elde edilir. Bir $\sum$ Schreier transverseli;

$$\sum = \{I, T, S, S^2, TS, TS^2\}$$

olarak seçilir. Reidemeister-Schreier metotu kullanılarak olabilecek tüm çarpımlar;

| | |
|---|---|
| $I.T.(T)^{-1} = I$ | $I.S.(S)^{-1} = I$ |
| $T.T.(I)^{-1} = I$ | $T.S.(TS)^{-1} = I$ |
| $S.T.(TS)^{-1} = STS^{-1}T^{-1}$ | $S.S.(S^2)^{-1} = I$ |
| $S^2.T.(TS^2)^{-1} = S^2TS^{-2}T^{-1}$ | $S^2.S.(I)^{-1} = I$ |
| $TS.T.(S)^{-1} = TSTS^{-1}$ | $TS.S.(TS^2)^{-1} = I$ |
| $TS^2.T.(S^2)^{-1} = TS^2T(S^2)^{-1}$ | $TS^2.S.(I)^{-1} = I$ |

olarak yazılır. Burada $(STS^{-1}T^{-1})^{-1} = TSTS^{-1}$ ve $(S^2TS^{-2}T^{-1})^{-1} = TS^2T(S^2)^{-1}$ yazılabilir. Modüler grubun komütatör alt grubunun sunuşu

$$H'(2,3) =< TSTS^{-1}, TS^2T(S^2)^{-1} | > \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

elde edilir.

## 2.12 Kuvvet Alt Gruplar

**Tanım 2.12.1** $m \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bir G grubun tüm elemanlarının m. kuvveti alınarak hesaplanan alt gruba kuvvet alt grubu denir. Kuvvet alt grubu $G^m$ ile gösterilir.

$$G =< x_1, x_2, \ldots > \text{ ise}$$
$$G^m =< x_1^m, x_2^m, \ldots >$$

**Teorem 2.12.1** $m, n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $G^{m.n} \subset (G^m)^n$ olur [12].

**Teorem 2.12.2** Kuvvet alt grupları tamamen değişmez gruplardır. Bu yüzden kuvvet alt grupları normal alt gruptur [23].

**Örnek 2.2** Reidemeister-Schreier metodunu kullanarak $H(2,3)$ modüler grubun ikinci derece, kuvvet alt grubunun sunuşunu elde edelim. $H(2,3)$ grubunun sunuşu;

$$H(2,3) =< T, S | T^2 = S^3 = I >$$

şeklindedir. Kuvvet alt grubu için tüm elemanların ikinci kuvvetleri alınıp bölüm grubu oluşturulursa

$$H(2,3)/H^2(2,3) =< T, S | T^2 = S^3 = I, T^2 = S^2 = I >$$

elde edilir. Burada $S^3 = S^2 = I$ ise $S = I$ bulunur.

$$H(2,3)/H^2(2,3) =< T | T^2 = I > \cong C_2$$

elde edilir. Bir $\sum$ Schreier transverseli;

$$\sum = \{I, T\}$$

olarak seçilir. Reidemeister-Schreier metotu kullanılarak olabilecek tüm çarpımlar;

| | |
|---|---|
| $I.T.(T)^{-1} = I$ | $I.S.(I)^{-1} = S$ |
| $T.T.(I)^{-1} = I$ | $T.S.(T)^{-1} = TST$ |

biçimindedir. Üreteçler S ve TST olarak bulunur. Buradan
$H(2,3)^2 =< S, TST | S^3 = TST^3 = I > \cong C_3 \times C_3$ sunuşu elde edilir.

# 3. GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ KOMÜTATÖR ALT GRUPLARI

**Teorem 3.1** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı, $n \geq 2$ ve her $p_i \geq 2$ koşulunu sağlasın.

i) $\mid H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : H'(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid = p_1.p_2.\ldots.p_n$

ii) $H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komütator alt grubu

$$1.\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1) + 2.\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)$$

$$+ \ldots + (n-1).\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\ldots\sum_{s=n}^{n}(p_i-1)(p_j-1).\ldots.(p_s-1)$$

ranklı bir serbest gruptur.

**ispat:** i) $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ Hecke grubunun bölüm grubunu elde etmek için $H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komütatör alt grubunun var olan bağıntılarına $i \neq j$ ve $i, j = 1, 2, \ldots, n$ olmak üzere $X_iX_j = X_jX_i$ eklenir. Böylece $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)/H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubu $< X_i : X_i^{p_i} = I, X_iX_j = X_jX_i > \cong C_{p_1} \times C_{p_2} \times \ldots \times C_{p_n}$ olarak bulunur. Buradan indeks $\mid H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : H'(p_1, p_2, \ldots, p_n) \mid = p_1.p_2.\ldots.p_n$ olur.

ii) $H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komütatör alt grubunun üreteçlerini Reidemeister-Schreier yöntemini kullanarak bulabiliriz. Bunun için ilk olarak Schreier $\sum$ transversalini oluşturalım. Birim eleman I her zaman $\sum$ transversalin elemanıdır. Ayrıca $\sum$ transversalinin diğer elemanlarını şu şekilde seçelim: $1 \leq i \leq n$ ve $1 \leq a_i \leq p_i - 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n}(p_i-1)$ tanesinin formu $X_i^{a_i}$ biçiminde, $1 \leq i < j \leq n$ ve $t = i, j$, $1 \leq a_t \leq p_t - 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1)$ tanesinin formu $X_i^{a_i}X_j^{a_j}$ biçiminde, $1 \leq i < j < k \leq n$ ve $t = i, j, k$, $1 \leq a_t \leq p_t - 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)$ tanesinin formu $X_i^{a_i}X_j^{a_j}X_k^{a_k}$ biçiminde, ..., $1 \leq t \leq n$ ve $1 \leq a_t \leq p_t - 1$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\ldots\sum_{s=n}^{n}(p_i-1)(p_j-1)\ldots(p_s-1)$ tanesinin formu $X_i^{a_i}X_j^{a_j}\ldots X_n^{a_n}$ biçiminde olur. Reidemeister-Schreier yöntemi uygulanarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak $H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$'nin komütatör alt grubunun üreteçlerini aşağıdaki gibi buluruz.

1. $\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1)$ tane üreteç $1\le i<j\le n$ ve $t=i,j$, $1\le a_t\le p_t-1$ olmak üzere $[X_i^{a_i},X_j^{a_j}]$ biçiminde, 2. $\sum_{i=1}^{n-2}\sum_{j=i+1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)$ tane üreteç $1\le i<j<k\le n$ ve $t=i,j,k$, $1\le a_t\le p_t-1$ olmak üzere $[X_i^{a_i},X_j^{a_j}X_k^{a_k}]$ ya da $[X_i^{a_i}X_j^{a_j},X_k^{a_k}]$ biçimindedir (Virgüllerin yerdeğiştirimi ile farklı üreteçler elde edilir). Benzer şekilde devam ettiğimizde $(n-1).\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\dots\sum_{s=n}^{n}(p_i-1)(p_j-1).\dots.(p_s-1)$ tane üreteç $1\le t\le n$ ve $1\le a_t\le p_t-1$ olmak üzere $[X_i^{a_i},X_j^{a_j}\dots X_n^{a_n}]$ ya da $[X_i^{a_i}X_j^{a_j},\dots X_n^{a_n}]$ ya da ... ya da $[X_i^{a_i}X_j^{a_j}\dots,X_n^{a_n}]$ biçiminde olacaktır. Ek olarak Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile $H'(p_1,p_2,\dots,p_n)$ komütatör alt grubunun simgesini aşağıdaki gibi buluruz.

$$\left(1+\frac{((n-1)-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{p_i}.p_1.p_2.\dots.p_n)-\frac{p_1.p_2.\dots.p_n}{\text{ekok}(p_1,p_2,\dots,p_n)}}{2};\infty^{\frac{p_1p_2\dots p_n}{\text{ekok}(p_1,p_2,\dots,p_n)}}\right) \tag{4.1}$$

**Örnek 3.1** $H(2,3)$ genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $n=2$ ve $p_1=2$, $p_2=3$'tür.
$H(2,3)=<X_1,X_2\mid X_1^2=X_2^3=I>\cong C_2*C_3$

Bu grup iyi bilinen modüler gruptur. $H(2,3)/H'(2,3)$ bölüm grubunu oluşturalım. $H(2,3)/H'(2,3)\cong<X_1,X_2\mid X_1^2=X_2^3=I,X_1X_2=X_2X_1>\cong C_2\times C_3$.
elde ederiz. Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Bir Schreier transversalinde $\mid H(2,3):H'(2,3)\mid=6$ tane eleman bulunur. Bu $\sum$ Schreier transversalinde; I her zaman elemandır ve $\sum_{i=1}^{2}(p_i-1)=3$ tane eleman $X_1$, $X_2$, $X_2^2$ olarak; $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}(p_i-1)(p_j-1)=2$ tane eleman $X_1X_2$, $X_1X_2^2$ olarak seçilir. Bölüm grubunun bir Schreier transversalini;
$\sum=\{I,X_1,X_2,X_2^2,X_1X_2,X_1X_2^2\}$
olarak seçelim. Mümkün olan tüm çarpımlar;
$I.X_1.(X_1)^{-1}=I,$
$X_1.X_1.(I)^{-1}=I,$
$X_2.X_1.(X_1X_2)^{-1}=X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-1},$
$X_2^2.X_1.(X_1X_2^2)^{-1}=X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-1},$

$X_1X_2.X_1.(X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2^{-1}$,
$X_1X_2^2.X_1.(X_2^2)^{-1} = X_1X_2^2X_1^{-1}X_2^{-1}$,

$I.X_2.(X_2)^{-1} = I$,
$X_1.X_2.(X_1X_2)^{-1} = I$,
$X_2.X_2.(X_2^2)^{-1} = I$,
$X_2^2.X_2.(I)^{-1} = I$,
$X_1X_2.X_2.(X_1X_2^2)^{-1} = I$,
$X_1X_2^2.X_2.(X_1)^{-1} = I$.

olarak bulunur. Buradan $H'(2,3)$ komütatör alt grubunun üreteçleri
$(X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-1})^{-1} = X_1X_2X_1X_2^{-1} = [X_1, X_2]$,
$(X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-1})^{-1} = X_1X_2^2X_1^{-1}X_2^{-1} = [X_1, X_2^2]$ olur.

Ayrıca bu alt grubun simgesini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. (4.1) formülünde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ve $n = 2$ yazarsak $H'(2,3)$ grubunun simgesini $(1;\infty)$ olarak buluruz.

**Örnek 3.2** $H(2,q)$ genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $n = 2$ ve $p_1 = 2$, $p_2 = q \geq 3$ tamsayı olur. Bu grup özel olarak Hecke grubudur. Grubun sunuşu;
$H(2,q) = < X_1, X_2 \mid X_1^2 = X_2^q = I > = C_2 * C_q$
biçimindedir. Burada $H(2,q)/H'(2,q)$ bölüm grubu
$H(2,q)/H'(2,q) = < X_1, X_2 \mid X_1^2 = X_2^q = I, X_1X_2 = X_2X_1 > \cong C_2 \times C_q$
olarak bulunur. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Bir Schreier transversalinde $\mid H(2,q) : H'(2,q) \mid = 2.q$ tane eleman bulunur. Bu $\sum$ Schreier transversalinde; $I$ her zaman elemandır ve $\sum_{i=1}^{2}(p_i - 1) = q$ tane eleman $X_1, X_2, X_2^2, \ldots, X_2^{q-1}$ olarak; $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}(p_i - 1)(p_j - 1) = (q-1)$ tane eleman $X_1X_2, X_1X_2^2, \ldots, X_1X_2^{q-1}$ olarak seçilir. Yani transversal
$\sum = \{I, X_1, X_2, X_2^2, \ldots, X_2^{q-1}, X_1X_2, X_1X_2^2, \ldots, X_1X_2^{q-1}\}$
biçiminde olur. Burada mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.X_1.(X_1)^{-1} = I$,
$X_1.X_1.(I)^{-1} = I$,

$X_2.X_1.(X_1X_2)^{-1} = X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-1},$
$X_2^2.X_1.(X_1X_2^2)^{-1} = X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-1},$
$\vdots$
$X_2^{q-1}.X_1.(X_1X_2^{q-1})^{-1} = X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)}X_1^{-1},$
$X_1X_2.X_1.(X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2^{-1},$
$X_1X_2^2.X_1.(X_2^2)^{-1} = X_1X_2^2X_1X_2^{-2},$
$\vdots$
$X_1X_2^{q-1}.X_1.(X_2^{q-1})^{-1} = X_1X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)},$

$I.X_2.(X_2)^{-1} = I,$
$X_1.X_2.(X_1X_2)^{-1} = I,$
$X_2.X_2.(X_2^2)^{-1} = I,$
$X_2^2.X_2.(X_2^3)^{-1} = I,$
$\vdots$
$X_2^{q-1}.X_2.(I)^{-1} = I,\ X_1X_2.X_2.(X_1X_2^2)^{-1} = I,$
$X_1X_2.X_2.(X_1X_2^2)^{-1} = I,$
$X_1X_2^2.X_2.(X_1X_2^3)^{-1} = I,$
$\vdots$
$X_1X_2^{q-1}.X_2.(X_1)^{-1} = I.$
biçimindedir. Buradan $H'(2,q)$ komütatör alt grubunun üreteçleri
$(X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-1})^{-1} = X_1X_2X_1X_2^{-1} = [X_1, X_2],$
$(X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-1})^{-1} = X_1X_2^2X_1X_2^{-2} = [X_1, X_2^2],$
$\vdots$
$(X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)}X_1^{-1})^{-1} = X_1X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)} = [X_1, X_2^{q-1}].$
olarak bulunur.

Ayrıca bu alt grubun simgesini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. (4.1) formülünde $p_1 = 2$, $p_2 = q$ ve $n = 2$ yazarsak $H'(2,3)$ grubunun simgesini q tek iken $(\frac{1}{2}(q-1);\infty)$ ve q çift iken $(\frac{1}{2}q-1;\infty)$ olarak bulunur.

**Örnek 3.3** $H(p,q)$ genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $n = 2$, $p_1 = p$, $p_2 = q$, $2 \leq p \leq q$ ve $p+q > 4$ olarak alınır. Bu grup $H(p,q)$ özel olarak genel Hecke grubudur. Grubun sunuşu;
$H(p,q) = < X_1, X_2 \mid X_1^p = X_2^q = I > = C_p * C_q$
biçimindedir. $H(p,q)/H'(p,q)$ bölüm grubu
$H(p,q)/H'(p,q) \cong < X_1, X_2 \mid X_1^p = X_2^q = I, X_1X_2 = X_2X_1 > \cong C_p \times C_q$
olarak bulunur. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.

Bir Schreier transversalinde $\mid H(p,q) : H'(p,q) \mid = p.q$ tane eleman bulunur. Bu $\sum$ Schreier transversalinde; I her zaman elemandır ve $\sum_{i=1}^{2}(p_i - 1) = (p-1) + (q-1)$ tane eleman $X_1, X_1^2, \ldots, X_1^{p-1}, X_2, X_2^2, \ldots, X_2^{q-1}$ olarak; $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=i+1}^{2}(p_i - 1)(p_j - 1) = (p-1)(q-1)$ tane eleman $X_1X_2, X_1X_2^2, \ldots, X_1X_2^{q-1}, X_1^2X_2, X_1^2X_2^2, \ldots, X_1^2X_2^{q-1}, \ldots, X_1^{p-1}X_2, X_1^{p-1}X_2^2, \ldots, X_1^{p-1}X_2^{q-1}$ olarak seçilir. Yani transversal;

$\sum = \{I, X_1, X_1^2, \ldots, X_1^{p-1}, X_2, X_2^2, \ldots, X_2^{q-1}, X_1X_2, X_1X_2^2,$
$\ldots, X_1X_2^{q-1}, X_1^2X_2, X_1^2X_2^2, \ldots, X_1^2X_2^{q-1}, \ldots, X_1^{p-1}X_2, X_1^{p-1}X_2^2, \ldots, X_1^{p-1}X_2^{q-1}\}$
kümesi biçimindedir. Mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.X_1.(X_1)^{-1} = I,$
$X_1.X_1.(X_1^2)^{-1} = I,$
$X_1^2.X_1.(X_1^3)^{-1} = I,$
$\vdots$
$X_1^{p-1}.X_1.(I)^{-1} = I,$
$X_2.X_1.(X_1Y)^{-1} = X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-1},$
$X_2^2.X_1.(X_1X_2^2)^{-1} = X_2^2X_1(X_2^2)^{-1}X_1^{-1},$
$\vdots$
$X_2^{q-1}.X_1.(X_1X_2^{q-1})^{-1} = X_2^{q-1}X_1X_1^{-1}X_2^{-(q-1)},$
$X_1X_2.X_1.(X_1^2X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-2},$
$X_1X_2^2.X_1.(X_1^2X_2^2)^{-1} = X_1X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-2},$
$\vdots$
$X_1X_2^{q-1}.X_1.(X_1^2X_2^{q-1})^{-1} = X_1X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)}X_1^{-2},$
$X_1^2X_2.X_1.(X_1^3X_2)^{-1} = X_1^2X_2X_1X_2^{-1}X_1^{-3},$
$X_1^2X_2^2.X_1.(X_1^3X_2^2)^{-1} = X_1^2X_2^2X_1X_2^{-2}X_1^{-3},$
$\vdots$
$X_1^2X_2^{q-1}.X_1.(X_1^3X_2^{q-1})^{-1} = X_1^2X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)}X_1^{-3},$
$\vdots$
$X_1^{p-1}X_2.X_1.(X_2)^{-1} = X_1^{p-1}X_2X_1X_2^{-1},$
$X_1^{p-1}X_2^2.X_1.(X_2^2)^{-1} = X_1^{p-1}X_2^2X_1X_2^{-2},$
$\vdots$
$X_1^{p-1}X_2^{q-1}.X_1.(X_2^{q-1})^{-1} = X_1^{p-1}X_2^{q-1}X_1X_2^{-(q-1)},$

$I.X_2.(X_2)^{-1} = I,$
$X_1.X_2.(X_1X_2)^{-1} = I,$

$X_1^2.X_2.(X_1^2X_2)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_1^{p-1}.X_2.(X_1^{p-1}X_2)^{-1} = I,$

$X_2.X_2.(X_2^2)^{-1} = I,$

$X_2^2.X_2.(X_2^3)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_2^{q-1}.X_2.(I)^{-1} = I,$

$X_1X_2.X_2.(X_1X_2^2)^{-1} = I,$

$X_1X_2^2.X_2.(X_1X_2^3)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_1X_2^{q-1}.X_2.(X_1)^{-1} = I,$

$X_1^2X_2.X_2.(X_1^2X_2^2)^{-1} = I,$

$X_1^2X_2^2.X_2.(X_1^2X_2^3)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_1^2X_2^{q-1}.X_2.(X_1^2)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_1^{p-1}X_2.X_2.(X_1^{p-1}X_2^2)^{-1} = I,$

$X_1^{p-1}X_2^2.X_2.(X_1^{p-1}X_2^3)^{-1} = I,$

$\vdots$

$X_1^{p-1}X_2^{q-1}.X_2.(X_1^{p-1})^{-1} = I.$

biçimindedir. Gerekli hesaplamalar ve kısaltmalar yapılırsa $H'(p,q)$ komütatör alt grubunun üreteçleri;
$[X_1,X_2]$, $[X_1,X_2^2]$, …, $[X_1,X_2^{q-1}]$, $[X_1^2,X_2]$, $[X_1^2,X_2^2]$, …, $[X_1^2,X_2^{q-1}]$, …, $[X_1^{p-1},X_2]$, $[X_1^{p-1},X_2^2]$, …, $[X_1^{p-1},X_2^{q-1}]$
olarak bulunur. Ayrıca bu alt grubun simgesini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. (4.1) formülünde $p_1 = p$, $p_2 = q$ ve $n = 2$ yazarsak $H'(p,q)$ alt grubunun simgesini $(\frac{pq-p-q-(p,q)+2}{2}; \infty^{(p,q)})$ olarak elde edilir.

**Örnek 3.4** $H(2,3,4)$ genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $n = 3$, $p_1 = 2$, $p_2 = 3$ ve $p_3 = 4$ olur. Grubun sunuşu;
$H(2,3,4) = < X_1, X_2, X_3 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = I > = C_2 * C_3 * C_4$
biçimindedir. $H(2,3,4)/H'(2,3,4)$ bölüm grubu üreteçlerde değişmelilik koşulu eklenerek

$$H(2,3,4)/H'(2,3,4) \cong < X_1, X_2, X_3 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = I, X_1X_2 = X_2X_1, X_1X_3 = X_3X_1, X_3X_2 = X_2X_3 > \cong C_2 \times C_3 \times C_4$$

olarak bulunur. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Bir Schreier transversalinde $\mid H(2,3,4) : H'(2,3,4) \mid = 2.3.4 = 24$ tane eleman bulunur.

Burada $\sum$ Schreier transversalinde; I her zaman elemandır ve $\sum_{i=1}^{3}(p_i - 1) = 6$ tane eleman $X_1, X_2, X_3, X_2^2, X_3^2, X_3^3$ olarak; $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}(p_i - 1)(p_j - 1) = 11$ tane eleman $X_1X_2, X_1X_3, X_1X_2^2,$ $X_1X_3^2,$ $X_1X_3^3,$ $X_2, X_3,$ $X_2X_3^2,$ $X_2X_3^3,$ $X_2^2X_3,$ $X_2^2X_3^2,$ $X_2^2X_3^3$olarak; $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\sum_{k=3}^{3}(p_i - 1)(p_j - 1)(p_k - 1) = 6$ tane eleman $X_1X_2X_3$, $X_1X_2X_3^2$, $X_1X_2X_3^3$, $X_1X_2^2X_3$, $X_1X_2^2X_3^2$, $X_1X_2^2X_3^3$ olarak seçilir. Yani transversal kümesi

$$\sum = \{I, X_1, X_2, X_3, X_2^2, X_3^2, X_3^3, X_1X_2, X_1X_3, X_1X_2^2, X_1X_3^2, X_1X_3^3, X_2X_3, X_2X_3^2, X_2X_3^3, X_2^2X_3, X_2^2X_3^2, X_2^2X_3^3, X_1X_2X_3, X_1X_2X_3^2, X_1X_2X_3^3, X_1X_2^2X_3, X_1X_2^3X_3^2, X_1X_2^2X_3^3\}$$

biçiminde seçilir. Reidemeister-Schreier yöntemi uygulandığında ve gerekli tüm hesaplamalar yapıldığında $H'(2,3,4)$'nin komütatör alt grubunun üreteçleri:
1. $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}(p_i-1)(p_j-1)=11$ tanesi $[X_1, X_2], [X_1, X_2^2], [X_1, X_3], [X_1, X_3^2], [X_1, X_3^3], [X_2, X_3],$ $[X_2, X_3^2], [X_2, X_3^3], [X_2^2, X_3], [X_2^2, X_3^2], [X_2^2, X_3^3]$; 2. $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\sum_{k=3}^{3}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)=12$ tanesi $[X_1X_2, X_3]$, $[X_1X_2, X_3^2]$, $[X_1X_2, X_3^3]$, $[X_1X_2^2, X_3]$, $[X_1X_2^2, X_3^2]$, $[X_1X_2^2, X_3^3]$, $[X_1, X_2X_3]$, $[X_1, X_2X_3^2]$, $[X_1, X_2X_3^3]$, $[X_1, X_2^2X_3]$, $[X_1, X_2^2X_3^2]$, $[X_1, X_2^2X_3^3]$
şeklinde olur.
Ayrıca bu alt grubun simgesini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. (4.1) formülünde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_2 = 4$ ve $n = 3$ yazarsak $H'(2,3,4)$ alt grubunun simgesini $(11; \infty^{(2)})$ olarak elde edilir.

**Örnek 3.5** $H(2,3,4,6)$ genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$, $p_4 = 6$ ve $n = 4$ olur. Grubun sunuşu;
$H(2,3,4,6) = < X_1, X_2, X_3, X_4 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = X_4^6 = I > \cong C_2 * C_3 * C_4 * C_6$
biçimindedir. Burada $H(2,3,4,6)/H'(2,3,4,6)$ bölüm grubunu

$$\begin{aligned} H(2,3,4,6)/H'(2,3,4,6) \cong \quad & < X_1, X_2, X_3, X_4 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = X_4^6 = I, X_1X_2 = X_2X_1, \\ & X_1X_3 = X_3X_1, X_1X_4 = X_4X_1, X_3X_2 = X_2X_3, X_2X_4 = X_4X_2, \\ & X_3X_4 = X_4X_3 > \cong C_2 \times C_3 \times C_4 \times C_6 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Reidemeister ve Schreier yöntemini kullanalım. Bölüm grubunun bir Schreier transversalinde $\mid H(2,3,4,6) : H'(2,3,4,6) \mid = 2.3.4.6 = 144$ tane eleman bulunur. $\sum$ Schreier transversalinde; I her zaman elemandır ve $\sum_{i=1}^{4}(p_i - 1) = 11$ tane eleman $X_1$, $X_2$, $X_2^2$, $X_3$, $X_3^2$, $X_3^3$, $X_4$, $X_4^2$, $X_4^3$, $X_4^4$, $X_4^5$ olarak; $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(p_i - 1)(p_j - 1) = 41$

tane eleman $X_1X_2$, $X_1X_2^2$, $X_1X_3$, $X_1X_3^2$, $X_1X_3^3$, $X_1X_4$, $X_1X_4^2$, $X_1X_4^3$, $X_1X_4^4$, $X_1X_4^5$, $X_2, X_3$, $X_2X_3^2$, $X_2X_3^3$, $X_2, X_4$, $X_2X_4^2$, $X_2X_4^3$, $X_2X_4^4$, $X_2X_4^5$, $X_2^2X_3$, $X_2^2X_3^2$, $X_2^2X_3^3$, $X_2^2X_4$, $X_2^2X_4^2$, $X_2^2X_4^3$, $X_2^2X_4^4$, $X_2^2X_4^5$, $X_3X_4$, $X_3X_4^2$, $X_3X_4^3$, $X_3X_4^4$, $X_3X_4^5$, $X_3^2X_4$, $X_3^2X_4^2$, $X_3^2X_4^3$, $X_3^2X_4^4$, $X_3^2X_4^5$, $X_3^3X_4$, $X_3^3X_4^2$, $X_3^3X_4^3$, $X_3^3X_4^4$, $X_3^3X_4^5$ olarak; $\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\sum_{k=j+1}^{4}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1) = 46$ tane eleman $X_1X_2X_3$, $X_1X_2X_3^2$, $X_1X_2X_3^3$, $X_1X_2X_4$, $X_1X_2X_4^2$, $X_1X_2X_4^3$, $X_1X_2X_4^4$, $X_1X_2X_4^5$, $X_1X_2^2X_3$, $X_1X_2^2X_3^2$, $X_1X_2^2X_3^3$, $X_1X_2^2X_4$, $X_1X_2^2X_4^2$, $X_1X_2^2X_4^3$, $X_1X_2^2X_4^4$, $X_1X_2^2X_4^5$, $X_1X_3X_4$, $X_1X_3X_4^2$, $X_1X_3X_4^3$, $X_1X_3X_4^4$, $X_1X_3X_4^5$, $X_1X_3^2X_4$, $X_1X_3^2X_4^2$, $X_1X_3^2X_4^3$, $X_1X_3^2X_4^4$, $X_1X_3^2X_4^5$, $X_1X_3^3X_4$, $X_1X_3^3X_4^2$, $X_1X_3^3X_4^3$, $X_1X_3^3X_4^4$, $X_1X_3^3X_4^5$, $X_2X_3X_4$, $X_2X_3X_4^2$, $X_2X_3X_4^3$, $X_2X_3X_4^4$, $X_2X_3X_4^5$, $X_2X_3^2X_4$, $X_2X_3^2X_4^2$, $X_2X_3^2X_4^3$, $X_2X_3^2X_4^4$, $X_2X_3^2X_4^5$, $X_2X_3^3X_4$, $X_2X_3^3X_4^2$, $X_2X_3^3X_4^3$, $X_2X_3^3X_4^4$, $X_2X_3^3X_4^5$ olarak; $\sum_{i=1}^{1}\sum_{j=2}^{2}\sum_{k=3}^{3}\sum_{t=4}^{4}(p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)(p_t-1) = 30$ tane eleman $X_1X_2X_3X_4$, $X_1X_2X_3X_4^2$, $X_1X_2X_3X_4^3$, $X_1X_2X_3X_4^4$, $X_1X_2X_3X_4^5$, $X_1X_2X_3^2X_4$, $X_1X_2X_3^2X_4^2$, $X_1X_2X_3^2X_4^3$, $X_1X_2X_3^2X_4^4$, $X_1X_2X_3^2X_4^5$, $X_1X_2X_3^3X_4$, $X_1X_2X_3^3X_4^2$, $X_1X_2X_3^3X_4^3$, $X_1X_2X_3^3X_4^4$, $X_1X_2X_3^3X_4^5$, $X_1X_2^2X_3X_4$, $X_1X_2^2X_3X_4^2$, $X_1X_2^2X_3X_4^3$, $X_1X_2^2X_3X_4^4$, $X_1X_2^2X_3X_4^5$, $X_1X_2^2X_3^2X_4$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^2$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^3$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^4$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^5$, $X_1X_2^2X_3^3X_4$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^2$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^3$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^4$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^5$ olarak seçilir. Yani transversalin elemanları;

$\sum = \{I$, $X_1$, $X_2$, $X_2^2$, $X_3$, $X_3^2$, $X_3^3$, $X_4$, $X_4^2$, $X_4^3$, $X_4^4$, $X_4^5$, $X_1X_2$, $X_1X_2^2$, $X_1X_3$, $X_1X_3^2$, $X_1X_3^3$, $X_1X_4$, $X_1X_4^2$, $X_1X_4^3$, $X_1X_4^4$, $X_1X_4^5$, $X_2, X_3$, $X_2X_3^2$, $X_2X_3^3$, $X_2, X_4$, $X_2X_4^2$, $X_2X_4^3$, $X_2X_4^4$, $X_2X_4^5$, $X_2^2X_3$, $X_2^2X_3^2$, $X_2^2X_3^3$, $X_2^2X_4$, $X_2^2X_4^2$, $X_2^2X_4^3$, $X_2^2X_4^4$, $X_2^2X_4^5$, $X_3X_4$, $X_3X_4^2$, $X_3X_4^3$, $X_3X_4^4$, $X_3X_4^5$, $X_3^2X_4$, $X_3^2X_4^2$, $X_3^2X_4^3$, $X_3^2X_4^4$, $X_3^2X_4^5$, $X_3^3X_4$, $X_3^3X_4^2$, $X_3^3X_4^3$, $X_3^3X_4^4$, $X_3^3X_4^5$, $X_1X_2X_3$, $X_1X_2X_3^2$, $X_1X_2X_3^3$, $X_1X_2X_4$, $X_1X_2X_4^2$, $X_1X_2X_4^3$, $X_1X_2X_4^4$, $X_1X_2X_4^5$, $X_1X_2^2X_3$, $X_1X_2^2X_3^2$, $X_1X_2^2X_3^3$, $X_1X_2^2X_4$, $X_1X_2^2X_4^2$, $X_1X_2^2X_4^3$, $X_1X_2^2X_4^4$, $X_1X_2^2X_4^5$, $X_1X_3X_4$, $X_1X_3X_4^2$, $X_1X_3X_4^3$, $X_1X_3X_4^4$, $X_1X_3X_4^5$, $X_1X_3^2X_4$, $X_1X_3^2X_4^2$, $X_1X_3^2X_4^3$, $X_1X_3^2X_4^4$, $X_1X_3^2X_4^5$, $X_1X_3^3X_4$, $X_1X_3^3X_4^2$, $X_1X_3^3X_4^3$, $X_1X_3^3X_4^4$, $X_1X_3^3X_4^5$, $X_2X_3X_4$, $X_2X_3X_4^2$, $X_2X_3X_4^3$, $X_2X_3X_4^4$, $X_2X_3X_4^5$, $X_2X_3^2X_4$, $X_2X_3^2X_4^2$, $X_2X_3^2X_4^3$, $X_2X_3^2X_4^4$, $X_2X_3^2X_4^5$, $X_2X_3^3X_4$, $X_2X_3^3X_4^2$, $X_2X_3^3X_4^3$, $X_2X_3^3X_4^4$, $X_2X_3^3X_4^5$, $X_1X_2X_3X_4$, $X_1X_2X_3X_4^2$, $X_1X_2X_3X_4^3$, $X_1X_2X_3X_4^4$, $X_1X_2X_3X_4^5$, $X_1X_2X_3^2X_4$, $X_1X_2X_3^2X_4^2$, $X_1X_2X_3^2X_4^3$, $X_1X_2X_3^2X_4^4$, $X_1X_2X_3^2X_4^5$, $X_1X_2X_3^3X_4$, $X_1X_2X_3^3X_4^2$, $X_1X_2X_3^3X_4^3$, $X_1X_2X_3^3X_4^4$, $X_1X_2X_3^3X_4^5$, $X_1X_2^2X_3X_4$, $X_1X_2^2X_3X_4^2$, $X_1X_2^2X_3X_4^3$, $X_1X_2^2X_3X_4^4$, $X_1X_2^2X_3X_4^5$, $X_1X_2^2X_3^2X_4$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^2$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^3$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^4$, $X_1X_2^2X_3^2X_4^5$, $X_1X_2^2X_3^3X_4$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^2$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^3$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^4$, $X_1X_2^2X_3^3X_4^5\}$ biçimindedir.

Reidemeister-Schreier yöntemi uygulandığında ve gerekli tüm hesaplamalar yapıldığında $H'(2,3,4)$'nin komütatör alt grubunun üreteçleri:

1. $\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=i+1}^{4}(p_i-1)(p_j-1)=41$ tanesinin şekli $[X_1,X_2]$, $[X_1,X_2^2]$, $[X_1,X_3]$, $[X_1,X_3^2]$, $[X_1,X_3^3]$, $[X_1,X_4]$, $[X_1,X_4^2]$, $[X_1,X_4^3]$, $[X_1,X_4^4]$, $[X_1,X_4^5]$, $[X_2,X_3]$, $[X_2,X_3^2]$, $[X_2,X_3^3]$, $[X_2,X_4]$, $[X_2,X_4^2]$, $[X_2,X_4^3]$, $[X_2,X_4^4]$, $[X_2,X_4^5]$, $[X_2^2,X_3]$, $[X_2^2,X_3^2]$, $[X_2^2,X_3^3]$, $[X_2^2,X_4]$, $[X_2^2,X_4^2]$, $[X_2^2,X_4^3]$, $[X_2^2,X_4^4]$, $[X_2^2,X_4^5]$, $[X_3,X_4]$, $[X_3,X_4^2]$, $[X_3,X_4^3]$, $[X_3,X_4^4]$, $[X_3,X_4^5]$, $[X_3^2,X_4]$,

$[X_3^2, X_4^2]$, $[X_3^2, X_4^3]$, $[X_3^2, X_4^4]$, $[X_3^2, X_4^4]$, $[X_3^3, X_4]$, $[X_3^3, X_4^2]$, $[X_3^3, X_4^3]$, $[X_3^3, X_4^4]$, $[X_3^3, X_4^5]$ biçiminde;

2. $\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=i+1}^{3} \sum_{k=j+1}^{4} (p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)=122$ tanesinin şekli $[X_1, X_2X_3]$, $[X_1, X_2X_3^2]$, $[X_1, X_2X_3^3]$, $[X_1, X_2X_4]$, $[X_1, X_2X_4^2]$, $[X_1, X_2X_4^3]$, $[X_1, X_2X_4^4]$, $[X_1, X_2X_4^5]$, $[X_1, X_2^2X_3]$, $[X_1, X_2^2X_3^2]$, $[X_1, X_2^2X_3^3]$, $[X_1, X_2^2X_4]$, $[X_1, X_2^2X_4^2]$, $[X_1, X_2^2X_4^3]$, $[X_1, X_2^2X_4^4]$, $[X_1, X_2^2X_4^5]$, $[X_1, X_3X_4]$, $[X_1, X_3X_4^2]$, $[X_1, X_3X_4^3]$, $[X_1, X_3X_4^4]$, $[X_1, X_3X_4^5]$, $[X_1, X_3^2X_4]$, $[X_1, X_3^2X_4^2]$, $[X_1, X_3^2X_4^3]$, $[X_1, X_3^2X_4^4]$, $[X_1, X_3^2X_4^5]$, $[X_1, X_3^3X_4]$, $[X_1, X_3^3X_4^2]$, $[X_1, X_3^3X_4^3]$, $[X_1, X_3^3X_4^4]$, $[X_1, X_3^3X_4^5]$, $[X_2, X_3X_4]$, $[X_2, X_3X_4^2]$, $[X_2, X_3X_4^3]$, $[X_2, X_3X_4^4]$, $[X_2, X_3X_4^5]$, $[X_2, X_3^2X_4]$, $[X_2, X_3^2X_4^2]$, $[X_2, X_3^2X_4^3]$, $[X_2, X_3^2X_4^4]$, $[X_2, X_3^2X_4^5]$, $[X_2, X_3^3X_4]$, $[X_2, X_3^3X_4^2]$, $[X_2, X_3^3X_4^3]$, $[X_2, X_3^3X_4^4]$, $[X_2, X_3^3X_4^5]$, $[X_2^2, X_3X_4]$, $[X_2^2, X_3X_4^2]$, $[X_2^2, X_3X_4^3]$, $[X_2^2, X_3X_4^4]$, $[X_2^2, X_3X_4^5]$, $[X_2^2, X_3^2X_4]$, $[X_2^2, X_3^2X_4^2]$, $[X_2^2, X_3^2X_4^3]$, $[X_2^2, X_3^2X_4^4]$, $[X_2^2, X_3^2X_4^5]$, $[X_2^2, X_3^3X_4]$, $[X_2^2, X_3^3X_4^2]$, $[X_2^2, X_3^3X_4^3]$, $[X_2^2, X_3^3X_4^4]$, $[X_2^2, X_3^3X_4^5]$, $[X_1X_2, X_3]$, $[X_1X_2, X_3^2]$, $[X_1X_2, X_3^3]$, $[X_1X_2, X_4]$, $[X_1X_2, X_4^2]$, $[X_1X_2, X_4^3]$, $[X_1X_2, X_4^4]$, $[X_1X_2, X_4^5]$, $[X_1X_2^2, X_3]$, $[X_1X_2^2, X_3^2]$, $[X_1X_2^2, X_3^3]$, $[X_1X_2^2, X_4]$, $[X_1X_2^2, X_4^2]$, $[X_1X_2^2, X_4^3]$, $[X_1X_2^2, X_4^4]$, $[X_1X_2^2, X_4^5]$, $[X_1X_3, X_4]$, $[X_1X_3, X_4^2]$, $[X_1X_3, X_4^3]$, $[X_1X_3, X_4^4]$, $[X_1X_3, X_4^5]$, $[X_1X_3^2, X_4]$, $[X_1X_3^2, X_4^2]$, $[X_1X_3^2, X_4^3]$, $[X_1X_3^2, X_4^4]$, $[X_1X_3^2, X_4^5]$, $[X_1X_3^3, X_4]$, $[X_1X_3^3, X_4^2]$, $[X_1X_3^3, X_4^3]$, $[X_1X_3^3, X_4^4]$, $[X_1X_3^3, X_4^5]$, $[X_2X_3, X_4]$, $[X_2X_3, X_4^2]$, $[X_2X_3, X_4^3]$, $[X_2X_3, X_4^4]$, $[X_2X_3, X_4^5]$, $[X_2X_3^2, X_4]$, $[X_2X_3^2, X_4^2]$, $[X_2X_3^2, X_4^3]$, $[X_2X_3^2, X_4^4]$, $[X_2X_3^2, X_4^5]$, $[X_2X_3^3, X_4]$, $[X_2X_3^3, X_4^2]$, $[X_2X_3^3, X_4^3]$, $[X_2X_3^3, X_4^4]$, $[X_2X_3^3, X_4^5]$, $[X_2^2X_3, X_4]$, $[X_2^2X_3, X_4^2]$, $[X_2^2X_3, X_4^3]$, $[X_2^2X_3, X_4^4]$, $[X_2^2X_3, X_4^5]$, $[X_2^2X_3^2, X_4]$, $[X_2^2X_3^2, X_4^2]$, $[X_2^2X_3^2, X_4^3]$, $[X_2^2X_3^2, X_4^4]$, $[X_2^2X_3^2, X_4^5]$, $[X_2^2X_3^3, X_4]$, $[X_2^2X_3^3, X_4^2]$, $[X_2^2X_3^3, X_4^3]$, $[X_2^2X_3^3, X_4^4]$, $[X_2^2X_3^3, X_4^5]$ biçiminde;

3. $\sum_{i=1}^{1} \sum_{j=2}^{2} \sum_{k=3}^{3} \sum_{t=4}^{4} (p_i-1)(p_j-1)(p_k-1)(p_t-1)=90$ tanesinin şekli $[X_1, X_2X_3X_4]$, $[X_1, X_2X_3X_4^2]$, $[X_1, X_2X_3X_4^3]$, $[X_1, X_2X_3X_4^4]$, $[X_1, X_2X_3X_4^5]$, $[X_1, X_2X_3^2X_4]$, $[X_1, X_2X_3^2X_4^2]$, $[X_1, X_2X_3^2X_4^3]$, $[X_1, X_2X_3^2X_4^4]$, $[X_1, X_2X_3^2X_4^5]$, $[X_1, X_2X_3^3X_4]$, $[X_1, X_2X_3^3X_4^2]$, $[X_1, X_2X_3^3X_4^3]$, $[X_1, X_2X_3^3X_4^4]$, $[X_1, X_2X_3^3X_4^5]$, $[X_1, X_2^2X_3X_4]$, $[X_1, X_2^2X_3X_4^2]$, $[X_1, X_2^2X_3X_4^3]$, $[X_1, X_2^2X_3X_4^4]$, $[X_1, X_2^2X_3X_4^5]$, $[X_1, X_2^2X_3^2X_4]$, $[X_1, X_2^2X_3^2X_4^2]$, $[X_1, X_2^2X_3^2X_4^3]$, $[X_1, X_2^2X_3^2X_4^4]$, $[X_1, X_2^2X_3^2X_4^5]$, $[X_1, X_2^2X_3^3X_4]$, $[X_1, X_2^2X_3^3X_4^2]$, $[X_1, X_2^2X_3^3X_4^3]$, $[X_1, X_2^2X_3^3X_4^4]$, $[X_1, X_2^2X_3^3X_4^5]$, $[X_1X_2, X_3X_4]$, $[X_1X_2, X_3X_4^2]$, $[X_1X_2, X_3X_4^3]$, $[X_1X_2, X_3X_4^4]$, $[X_1X_2, X_3X_4^5]$, $[X_1X_2, X_3^2X_4]$, $[X_1X_2, X_3^2X_4^2]$, $[X_1X_2, X_3^2X_4^3]$, $[X_1X_2, X_3^2X_4^4]$, $[X_1X_2, X_3^2X_4^5]$, $[X_1X_2, X_3^3X_4]$, $[X_1X_2, X_3^3X_4^2]$, $[X_1X_2, X_3^3X_4^3]$, $[X_1X_2, X_3^3X_4^4]$, $[X_1X_2, X_3^3X_4^5]$, $[X_1X_2^2, X_3X_4]$, $[X_1X_2^2, X_3X_4^2]$, $[X_1X_2^2, X_3X_4^3]$, $[X_1X_2^2, X_3X_4^4]$, $[X_1X_2^2, X_3X_4^5]$, $[X_1X_2^2, X_3^2X_4]$, $[X_1X_2^2, X_3^2X_4^2]$, $[X_1X_2^2, X_3^2X_4^3]$, $[X_1X_2^2, X_3^2X_4^4]$, $[X_1X_2^2, X_3^2X_4^5]$, $[X_1X_2^2, X_3^3X_4]$, $[X_1X_2^2, X_3^3X_4^2]$, $[X_1X_2^2, X_3^3X_4^3]$, $[X_1X_2^2, X_3^3X_4^4]$, $[X_1X_2^2, X_3^3X_4^5]$, $[X_1X_2X_3, X_4]$, $[X_1X_2X_3, X_4^2]$, $[X_1X_2X_3, X_4^3]$, $[X_1X_2X_3, X_4^4]$, $[X_1X_2X_3, X_4^5]$, $[X_1X_2X_3^2, X_4]$, $[X_1X_2X_3^2, X_4^2]$, $[X_1X_2X_3^2, X_4^3]$, $[X_1X_2X_3^2, X_4^4]$, $[X_1X_2X_3^2, X_4^5]$, $[X_1X_2X_3^3, X_4]$, $[X_1X_2X_3^3, X_4^2]$, $[X_1X_2X_3^3, X_4^3]$, $[X_1X_2X_3^3, X_4^4]$, $[X_1X_2X_3^3, X_4^5]$, $[X_1X_2^2X_3, X_4]$, $[X_1X_2^2X_3, X_4^2]$, $[X_1X_2^2X_3, X_4^3]$, $[X_1X_2^2X_3, X_4^4]$, $[X_1X_2^2X_3, X_4^5]$, $[X_1X_2^2X_3^2, X_4]$, $[X_1X_2^2X_3^2, X_4^2]$, $[X_1X_2^2X_3^2, X_4^3]$, $[X_1X_2^2X_3^2, X_4^4]$, $[X_1X_2^2X_3^2, X_4^5]$, $[X_1X_2^2X_3^3, X_4]$,

$[X_1X_2^2X_3^3, X_4^2]$, $[X_1X_2^2X_3^3, X_4^3]$, $[X_1X_2^2X_3^3, X_4^4]$, $[X_1X_2^2X_3^3, X_4^5]$ biçiminde olur. Bu alt grubun simgesini bulmak için Riemann-Hurwitz formülünü kullanalm. (4.1) formülünde $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 4$, $p_4 = 6$ ve $n = 4$ yazarsak $(121; \infty^{(12)})$ olarak bulunur.

# 4. GENİŞLETİLMİŞ GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ KOMÜTATÖR ALT GRUPLARI

Bu kısımda $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının komütatör alt grupları çalışılacaktır. Bunun için ilk olarak $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ grubunun $X_i$ üreteçlerini yeniden adlandıralım. Bu adlandırmayı şu şekilde yapalım: $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ grubunun $X_i$ olan üreteçlerinin mertebeleri $p_i$ olmak üzere $p_i = 2$ olanların sayısı s, $p_i$ =çift $\geq 4$ olanlarının sayısı t ve $p_i$ =tek ($\geq 3$) olanlarının sayısı u olsun. $0 \leq j \leq s$; $0 \leq k \leq t$ ve $0 \leq l \leq u$ olmak üzere $p_i = 2$ ise $X_i$ üreteçleri $A_j$ olarak, $p_i$ = çift $\geq 4$ ise $X_i$ üreteçleri $B_k$ olarak, $p_i$ =tek ($\geq 3$) ise $X_i$ üreteçleri $C_l$ olarak gösterelim. Ayrıca $B_k$ ve $C_l$ üreteçlerinin mertebeleri sırası ile $q_k$ ve $r_l$ olarak gösterelim. Tüm bunlardan $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının sunuşunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz.
$< A_j, B_k, C_l, R \mid A_j^2 = B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = I, RA_j = A_jR, RB_k = B_k^{-1}R, RC_l = C_l^{-1}R >$
Artık tüm bu koşullar altında bu grubun komütatör alt gruplarını çalışabiliriz.

**Teorem 4.1** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı, $n \geq 2$ ve $p_i \geq 2$ olmak üzere

i) $\left[\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n) : \overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)\right] = 2^{s+t+1}$

ii) $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komütatör alt grubu
$$\sum_{j=2}^{s}(j-1)\binom{s}{j} + \sum_{k=1}^{t}(2k-1)\binom{t}{k} + \sum_{j=1}^{s}\sum_{k=1}^{t}(2k+j-1)\binom{s}{j}\binom{t}{k} + 2^{s+t}u$$
tane üreteci olan bir gruptur.

**ispat:** $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)/\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubunu oluşturmak için $\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komütatör alt grubuna bilinen bağıntılara $0 \leq k \leq t$ ve $0 \leq l \leq u$ olmak üzere $RB_k = B_kR$, $RC_l = C_lR$ değişmelilik bağıntıları eklenir. Böylece $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)/\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubu

$$\begin{aligned}
&\cong < A_j, B_k, C_l, R \mid A_j^2 = B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = I, RA_j = A_jR, RB_k = B_k^{-1}R, RC_l = C_l^{-1}R,\\
&\qquad RB_k = B_kR, RC_l = C_lR >\\
&\cong < A_j, B_k, C_l, R \mid A_j^2 = B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = (A_jR)^2 = (B_kR)^2 = (C_lR)^2 = I >
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Burada;
$RB_k = B_kR$; $RB_k = B_k^{-1}R$ bağıntılarından $B_k^2 = I$,
$RC_l = C_lR$; $RC_l = C_l^{-1}R$ bağıntılarından $C_l^2 = I$,
$B_k^{q_k} = B_k^2 = I$ bağıntılarından ($q_k$ çift sayı) $B_k^2 = I$,
$C_l^{r_l} = C_l^2 = I$ bağıntılarından ($r_l$ tek sayı) $C_l = I$
olarak bulunur. Böylece $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)/\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubu;

$\cong < A_j, B_k, R \mid A_j^2 = B_k^2 = R^2 = (A_jR)^2 = (B_kR)^2 = I > \cong \underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{s+t} \times C_2$

şeklindedir. Burada $C_2$ sayısı $s + t + 1$ tane olduğundan indeks $\left[\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n) : \overline{H}' p_1, p_2, \ldots, p_n)\right] = 2^{s+t+1}$ olarak bulunur. İlk olarak Schreier $\sum$ transversalini oluşturalım. Schreier $\sum$ transversalini oluşturmak için $M = \{A_1, A_2, \ldots, A_s, B_1, B_2, \ldots, B_n\}$ kümesini kulanalım. Bu kümenin tüm alt kümeleri için sahip olduğu elemanlarının tamamı kullanılarak (alfabetik ve numarasal sıralama yapılarak) elde edilen elemanlar $\sum$ Schreier transversalinin elemanlarıdır. Örneğin M kümesinin bir alt kümesi $\{A_3, A_4, A_7, B_1, B_6\}$ ise o zaman $A_3A_4A_7B_1B_6$ ifadesi de $\sum$'in bir elemanıdır. Buradan $\sum$ Schreier transversalinde $2^{s+t} - 1$ tane elemanın olduğunu söyleyebiliriz (Kümenin alt kümelerinden biri olan boş kümeyi çıkararak). Aynı mantık ile $2^{s+t} - 1$ tane elemanın R ile çarpılmış hali yine $\sum$'in bir elemanıdır (Örneğin $A_3A_4A_7B_1B_6$ ifadesi de $\sum$'in bir elemanı ise $A_3A_4A_7B_1B_6R$ de $\sum$ de olur). Ayrıca I ve R, $\sum$ Schreier transversalinde yer alır. Tüm bunlardan transversalde $2^{s+t}-1+2^{s+t}-1+2 = 2^{s+t+1}$ tane eleman olur. Burada $s = t = 0$ olduğunda transversalde sadece I ve R bulunur. Reidemeister-Schreier yöntemi uygulanarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak $\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$'nin komütatör alt grubunun üreteçlerini aşağıdaki gibi buluruz.Bağıntılar arasında $A_j^{-1} = A_j$ ve $B_j^{-1} \neq B_j$ koşulları vardır. Burada eğer $s \geq 2$ ise $1 \leq d < e \leq s$ olmak üzere $1.\binom{s}{2}$ tane üreteç $A_dA_eA_dA_e$ biçiminde; $1 \leq d < e < f \leq s$ olmak üzere $2.\binom{s}{3}$ tane üreteç $A_dA_eA_fA_d(A_eA_f)^{-1}$ ya da $A_dA_eA_fA_e(A_dA_f)^{-1}$ biçiminde; ...; $(s-1).\binom{s}{s}$ tane üreteç $A_1A_2 \ldots A_sA_1(A_2 \ldots A_s)^{-1}$ ya da $A_1A_2 \ldots A_sA_2(A_1A_3 \ldots A_s)^{-1}$ ya da ... ya da $A_1A_2 \ldots A_sA_{s-1}(A_1 \ldots A_{s-2}A_s)^{-1}$biçiminde olur. Eğer $t \geq 1$ ise; $1 \leq g \leq t$ olmak üzere $1.\binom{t}{1}$ tane üreteç $B_g^2$ biçiminde, $1 \leq g < h \leq t$ olmak üzere $3.\binom{t}{2}$ tane üreteç $B_gB_hB_gB_h^{-1}$ ya da $B_gB_hB_g^{-1}B_h^{-1}$ ya da $B_gB_h^2B_h^{-1}$ biçiminde, $1 \leq g < h < m \leq t$ olmak üzere $5 \times \binom{t}{3}$ tane üreteç $B_gB_hB_mB_g(B_hB_m)^{-1}$ ya da $B_gB_hB_mB_g^{-1}(B_hB_m)^{-1}$ ya da $B_gB_hB_mB_h(B_gB_m)^{-1}$ ya da $B_gB_hB_mB_h^{-1}(B_gB_m)^{-1}$ ya da $B_gB_hB_m^2(B_gB_h)^{-1}$ biçiminde, ..., $(2t-1).\binom{t}{t}$ tane üreteç $B_1B_2 \ldots B_tB_1(B_2 \ldots B_t)^{-1}$ ya da $B_1B_2 \ldots B_tB_1^{-1}(B_2 \ldots B_t)^{-1}$ ya da $B_1B_2 \ldots B_tB_2(B_1B_3 \ldots B_t)^{-1}$ ya da $B_1B_2 \ldots B_tB_2^{-1}(B_1B_3 \ldots B_t)^{-1}$ ya da ... ya da $B_1B_2 \ldots B_tB_{t-1}(B_1 \ldots B_{t-2}B_t)^{-1}$ ya da $B_1B_2 \ldots B_tB_{t-1}^{-1}(B_1 \ldots B_{t-2}B_t)^{-1}$ ya da $B_1B_2 \ldots B_t^2(B_1 \ldots B_{t-2}B_{t-1})^{-1}$ olur. Eğer $s \geq 1$ ve $t \geq 1$ ise; $1 \leq d \leq s$, $1 \leq g \leq t$ olmak üzere $2.\binom{s}{1}\binom{t}{1}$ tane üreteç $A_dB_gA_dB_g^{-1}$ ya da $A_dB_g^2A_d$ biçiminde, $1 \leq d < e \leq s$, $1 \leq g \leq t$ olmak üzere $3.\binom{s}{2}\binom{t}{1}$ tane üreteç $A_dA_eB_gA_d(A_eB_g)^{-1}$ ya da $A_dA_eB_gA_e(A_dB_g)^{-1}$ ya da $A_dA_eB_g^2(A_dA_e)^{-1}$ biçiminde, $1 \leq d \leq s$, $1 \leq g < h \leq t$

olmak üzere $4.\binom{s}{1}\binom{t}{2}$ tane üreteç $A_dB_gB_hA_d(B_gB_h)^{-1}$ ya da $A_dB_gB_hB_g(A_dB_h)^{-1}$ ya da $A_dB_gB_hB_g^{-1}(A_dB_h)^{-1}$ ya da $A_dB_gB_h^2(A_dB_g)^{-1}$ biçiminde, ..., $(2t+s-1).\binom{s}{s}\binom{t}{t}$ tane üreteç
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tA_1(A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tA_2(A_1\ldots A_sB_1B_2\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$\vdots$
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tA_s(A_1\ldots A_{s-1}B_1B_2\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_1(A_1\ldots A_sB_2\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_1^{-1}(A_1\ldots A_sB_2\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_2(A_1\ldots A_sB_1B_3\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_2^{-1}(A_1\ldots A_sB_1B_3\ldots B_t)^{-1}$ ya da
$\vdots$
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_{t-1}(A_1\ldots A_sB_1\ldots B_{t-2}B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tB_{t-1}^{-1}(A_1\ldots A_sB_1\ldots B_{t-2}B_t)^{-1}$ ya da
$A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_t^2(A_1\ldots A_sB_1\ldots B_{t-2}B_{t-1})^{-1}$ biçiminde olur.
$1\le l\le u$ olmak üzere $u.\binom{s+t}{0}$ tane üreteç $C_l$ biçiminde; $1\le d\le s$, $1\le g\le t$ ve $1\le l\le u$ olmak üzere $u.\binom{s+t}{1}$ tane üreteç $A_dC_lA_d$ ya da $B_gC_lB_g^{-1}$ biçiminde, $1\le d(<e)\le s$, $1\le g(<h)\le t$ ve $1\le l\le u$ olmak üzere $u.\binom{s+t}{2}$ tane üreteç $A_dA_eC_l(A_dA_e)^{-1}$ ya da $B_gB_hC_l(B_gB_h)^{-1}$ ya da $A_dB_gC_l(A_dB_g)^{-1}$ biçiminde, $1\le d(<e(<f))\le s$, $1\le g(<h(<m))\le t$ ve $1\le l\le u$ olmak üzere $u.\binom{s+t}{3}$ tane üreteç $A_dA_eA_fC_l(A_dA_eA_f)^{-1}$ ya da $A_dA_eB_gC_l(A_dA_eB_g)^{-1}$ ya da $A_dB_gB_hC_l(A_dB_gB_h)^{-1}$ ya da $B_gB_hB_mC_l(B_gB_hB_m)^{-1}$ biçiminde, ..., $1\le l\le u$ olmak üzere $u\times\binom{s+t}{s+t}$ tane üreteç $A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_tC_l(A_1A_2\ldots A_sB_1B_2\ldots B_t)^{-1}$ biçiminde olur. Ayrıca Riemann-Hurwitz formülünü ve permütasyon metodunu kullanarak $1\le k\le t$ ve $1\le l\le u$ iken $\overline{H}'(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ komütatör alt grubunun simgesini:

$$\begin{cases} (1+\frac{2^{s+t-1}(s+t-3)}{2};(\frac{q_k}{2})^{2^{s+t-1}},(r_l^{2^{s+t}}),\infty^{2^{s+t-1}}) & s\ge 1 \quad \text{ve} \quad t\ge 1 \quad \text{ise} \\ (0;r_1^{(2)},\infty) & s=1 \quad \text{ve} \quad t=0 \quad \text{ise} \\ (0;(\frac{q_k}{2}),r_1^{(2)},\infty) & s=0 \quad \text{ve} \quad t=1 \quad \text{ise} \\ (0;r_l,\infty) & s=0 \quad \text{ve} \quad t=0 \quad \text{ise} \end{cases} \tag{5.1}$$

şekilde buluruz.

**Örnek 4.1** $\overline{H}(3,5,7)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$ ve $s = 0$, $t = 0$, $u = 3$ olur. $1 \leq l \leq 3$ ve $r_l$, $C_l$'lerin mertebeleri olmak üzere;

$\overline{H}(3,5,7) = < C_l, R \mid C_l^{r_l} = R^2 = I, RC_l = C_l^{-1}R >$

$\overline{H}(3,5,7)/\overline{H}'(3,5,7)$ bölüm grubunu oluşturalım.

$$\begin{aligned}\overline{H}(3,5,7)/\overline{H}'(3,5,7) &\cong < C_l, R \mid C_l^{r_l} = R^2 = I, RC_l = C_l^{-1}R, RC_l = C_lR > \\ &\cong < C_l, R \mid R^2 = I > \cong C_2\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada

$RC_l = C_l^{-1}R, RC_l = C_lR$ eşitliklerinden $C_l^2 = I$

$C_l^2 = I$ ve $C_l^{r_l} = I$ eşitliklerinden $C_l = I$

elde edilir. Bunlardan haraketle indeks;

$\left[\overline{H}(3,5,7) : \overline{H}'(3,5,7)\right] = 2^1 = 2$ bulunur. Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Bölüm grubunun bir Schreier transversalini; $\sum = \{I, R\}$ olarak elde edilir. Mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.C_1.(I) = C_1,$

$R.C_1.(R)^{-1} = RC_1R^{-1} = C_1^{-1}RR^{-1} = C_1^{-1},$

$I.C_2.(I) = C_2,$

$R.C_2.(R)^{-1} = RC_2R^{-1} = C_2^{-1}RR^{-1} = C_2^{-1},$

$I.C_3.(I) = C_3,$

$R.C_3.(R)^{-1} = RC_3R^{-1} = C_3^{-1}RR^{-1} = C_3^{-1}.$

olur. Buradan $\overline{H}'(3,5,7)$ komütatör alt grubunun üreteçleri $s = 0$, $t = 0$, $u = 3$ olmak üzere $u \times \binom{s+t}{0} = 3 \times \binom{0}{0} = 3$ tane üreteç $C_l$ biçiminde elde edilir. Son olarak Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile $\overline{H}'(3,5,7)$ komütatör alt grubunun simgesini (5.1) formülü ile $(0; 3,5,7,\infty)$ olarak buluruz.

**Örnek 4.2** $\overline{H}(2,2,5,7)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 5$, $p_4 = 7$ ve $s = 2$, $t = 0$, $u = 2$ olur. $0 \leq j \leq s$, $1 \leq l \leq 3$ ve $r_l$, $C_l$'lerin mertebeleri olmak üzere $\overline{H}(2,2,5,7)$ grubunun sunuşu aşağıdaki gibidir:

$\overline{H}(2,2,5,7) = < A_j, C_l, R \mid A_j^2 = C_l^{r_l} = R^2 = I, RA_j = A_jR, RC_l = C_l^{-1}R >$

$\overline{H}(2,2,5,7)/\overline{H}'(2,2,5,7)$ bölüm grubu;

$$\begin{aligned}\overline{H}(2,2,5,7)/\overline{H}'(2,2,5,7) &\cong < A_j, C_l, R \mid A_j^2 = C_l^{r_l} = R^2 = I, RA_j = A_jR, RC_l = C_l^{-1}R, \\ &\qquad RC_l = C_lR > \\ &\cong < A_j, C_l, R \mid A_j^2 = R^2 = (A_jR)^2 = I >\end{aligned}$$

biçimindedir. Burada
$RC_1 = C_1^{-1}R, RC_1 = C_1R$ eşitliklerinden $C_1^2 = I$
$C_1^2 = I$ ve $C_1^{r_1} = I$ eşitliklerinden $C_1 = I$
elde edilir. Bölüm grubunun son hali
$\overline{H}(2,2,5,7)/\overline{H}'(2,2,5,7) \cong C_2 \times C_2 \times C_2$
biçiminde olur. Tüm bunlardan haraketle indeks;
$\left[\overline{H}(2,2,5,7) : \overline{H}'(2,2,5,7)\right] = 2^3 = 8$
bulunur. Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Schreier transversalinin elemanlarını şu şekilde seçeriz: M kümesi $M = \{A_1, A_2\}$ olarak seçilir. M kümesinin boş küme hariç alt kümeleri $\{A_1\}$, $\{A_2\}$, $\{A_1, A_2\}$ olduğundan Schreier transversalinde $A_1, A_2, A_1A_2$ elemanları bulunur. Bu elemanların R ile çarpılmış halleri de Schreier transversalinde vardır. Buradan bir Schreier transversali;
$\sum = \{I, R, A_1, A_2, A_1A_2, A_1R, A_2R, A_1A_2R\}$
olarak elde edilir. Mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.A_1.(A_1)^{-1} = I,$
$A_1.A_1.(I)^{-1} = I,$
$A_2.A_1.(A_1A_2)^{-1} = A_2A_1A_2A_1,$
$A_1A_2.A_1.(A_2)^{-1} = A_1A_2A_1A_2,$
$R.A_1.(A_1R)^{-1} = A_1RR^{-1}A_1^{-1} = I,$
$A_1R.A_1.(R)^{-1} = I,$
$A_2R.A_1.(A_1A_2R)^{-1} = I,$
$A_1A_2R.A_1.(A_2R)^{-1} = I,$

$I.A_2.(A_2)^{-1} = I,$
$A_1.A_2.(A_1A_2)^{-1} = I,$
$A_2.A_2.(I)^{-1} = I,$
$A_1A_2.A_2.(A_1)^{-1} = I,$
$R.A_2.(A_2R)^{-1} = I,$
$A_1R.A_2.(A_1A_2R)^{-1} = I,$
$A_2R.A_2.(R)^{-1} = I,$
$A_1A_2R.A_2.(A_1R)^{-1} = I,$

$I.C_1.(I)^{-1} = C_1,$
$A_1.C_1.(A_1)^{-1} = A_1C_1(A_1)^{-1},$
$A_2.C_1.(A_2)^{-1} = A_2C_1(A_2)^{-1},$
$A_1A_2.C_1.(A_1A_2)^{-1} = A_1A_2C_1(A_1A_2)^{-1},$
$R.C_1.(R)^{-1} = C_1^{-1},$

$A_1R.C_1.(A_1R)^{-1} = I,$
$A_2R.C_1.()^{-1} = A_2R,$
$A_1A_2R.C_1.(A_1A_2R)^{-1} = I,$

$I.C_2.(I)^{-1} = C_2,$
$A_1.C_2.(A_1)^{-1} = A_1C_2(A_1)^{-1},$
$A_2.C_2.(A_2)^{-1} = A_2C_2(A_2)^{-1},$
$A_1A_2.C_2.(A_1A_2)^{-1} = A_1A_2C_2(A_1A_2)^{-1},$
$R.C_2.(R)^{-1} = C_2^{-1},$
$A_1R.C_2.(A_1R)^{-1} = A_1C_2^{-1}A_1^{-1},$
$A_2R.C_2.(A_2R)^{-1} = A_2C_2^{-1}A_2^{-1},$
$A_1A_2R.C_2.(A_1A_2)^{-1} = A_1A_2C_2^{-1}(A_1A_2)^{-1},$

$I.R.(R)^{-1} = I,$
$A_1.R.(A_1R)^{-1} = I,$
$A_2.R.(A_2R)^{-1} = I,$
$A_1A_2.R.(A_1A_2R)^{-1} = I,$
$R.R.(I)^{-1} = I,$
$A_1R.R.(A_1)^{-1} = I,$
$A_2R.R.(A_2)^{-1} = I,$
$A_1A_2R.R.(A_1A_2)^{-1} = I.$

olur. Buradan $\overline{H}'(2,2,5,7)$ komütatör alt grubunun üreteçleri $s = 2$, $t = 0$, $u = 2$ olmak üzere; $1.\binom{s}{2} = 1.\binom{2}{2} = 1$ tane üreteç $A_1A_2A_1A_2$ biçiminde, $u.\binom{s+t}{0} = 2.\binom{2}{0} = 2$ tane üreteç $C_l, C_2$ biçiminde, $u.\binom{s+t}{1} = 2.\binom{2}{1} = 4$ tane üreteç $A_1C_lA_1^{-1}, A_1C_2A_1^{-1}, A_2C_lA_2^{-1}, A_2C_2A_2^{-1}$ biçiminde, $u.\binom{s+t}{2} = 2.\binom{2}{2} = 2$ tane üreteç $A_1A_2C_l(A_1A_2)^{-1}, A_1A_2C_2(A_1A_2)^{-1}$ biçiminde elde edilir.

**Örnek 4.3** $\overline{H}(5,5,7,8)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $p_1 = 5$, $p_2 = 5$, $p_3 = 7$, $p_4 = 8$ ve $s = 0$, $t = 1$, $u = 3$ olur. $0 \leq j \leq s$, $1 \leq l \leq 3$ ve $r_l$, $C_l$ üreteçlerinin mertebeleri ve $q_k$, $B_k$ üreteçlerinin mertebeleri olmak üzere $\overline{H}(5,5,7,8)$ grubunun sunuşu;
$\overline{H}(5,5,7,8) = < B_k, C_l, R \mid B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = I, RB_k = B_k^{-1}R, RC_l = C_l^{-1}R >$
biçimindedir. $\overline{H}(5,5,7,8)/\overline{H}'(5,5,7,8)$ bölüm grubu için bilinen bağıntılara değişmelilik bağıntıları eklendiğinde;

$$\overline{H}(5,5,7,8)/\overline{H}'(5,5,7,8) \cong < B_k, C_l, R \mid B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = I, RB_k = B_k^{-1}R, RC_l = C_l^{-1}R, RC_l = C_lR, RB_k = B_kR >$$
$$\cong < B_k, C_l, R \mid B_k^2 = R^2 = (B_kR)^2 = I >$$

olur. Burada

$RB_k = B_kR, RB_k = B_k^{-1}R$ bağıntılarından $B_k^2 = I$

$RC_l = C_l^{-1}R, RC_l = C_lR$ bağıntılarından $C_l^2 = I$

$C_l^2 = I$ ve $C_l^{r_l} = I$ eşitliklerinden $C_l = I$

elde edilir. Bölüm grubunun son hali

$\overline{H}(5,5,7,8)/\overline{H}'(5,5,7,8) \cong C_2 \times C_2$

biçimindedir. Bunlardan haraketle indeks;

$\left[\overline{H}(5,5,7,8) : \overline{H}'(5,5,7,8)\right] = 2^2 = 4$ bulunur. Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Schreier transversalinin elemanlarını şu şekilde seçeriz: M kümesi $M = \{B_1\}$ olarak seçilir. M kümesinin boş küme hariç alt kümesi $\{B_1\}$ olduğundan Schreier transversalinde $B_1$ elemanları bulunur. Bu elemanların R ile çarpılmış halleri de Schreier transversalinde vardır. Buradan bir Schreier transversali;

$\sum = \{I, R, B_1, B_1R\}$

olarak elde edilir. Mümkün olan tüm çarpımlar;

$I.C_1.(I)^{-1} = C_1,$
$B_1.C_1.(B_1)^{-1} = B_1C_1B_1^{-1},$
$R.C_1.(R)^{-1} = C_1^{-1},$
$B_1R.C_1.(B_1R)^{-1} = B_1C_1^{-1}B_1^{-1},$

$I.C_2.(I)^{-1} = C_2,$
$B_1.C_2.(B_1)^{-1} = B_1C_2B_1^{-1},$
$R.C_2.(R)^{-1} = C_2^{-1},$
$B_1R.C_2.(B_1R)^{-1} = B_1C_2^{-1}B_1^{-1},$

$I.C_3.(I)^{-1} = C_3,$
$B_1.C_3.(B_1)^{-1} = B_1C_3B_1^{-1},$
$R.C_3.(R)^{-1} = C_3^{-1},$
$B_1R.C_3.(B_1R)^{-1} = B_1C_3^{-1}B_1^{-1},$

$I.B_1.(B_1)^{-1} = I,$
$B_1.B_1.(I)^{-1} = B_1^2,$
$R.B_1.(B_1R)^{-1} = I,$
$B_1R.B_1.(R)^{-1} = B_1C_1^{-1}B_1^{-1},$

$I.R.(R)^{-1} = I,$
$B_1.R.(B_1R)^{-1} = I,$
$R.R.(I)^{-1} = I,$
$B_1R.R.(B_1)^{-1} = I,$

olur. Gerekli kısaltmalar ve hesaplamalar yapıldığında $\overline{H}'(5,5,7,8)$ komütatör alt grubunun üreteçleri $s = 0$, $t = 1$, $u = 3$ olmak üzere; $1.\binom{t}{1} = 1.\binom{1}{1} = 1$ tane üreteç $B_1^2$ biçiminde, $u.\binom{s+t}{0} = 3.\binom{1}{0} = 1$ tane üreteç $C_1$, $C_2$, $C_3$ biçiminde, $u.\binom{s+t}{1} = 3.\binom{1}{1} = 3$ tane üreteç $B_1C_lB_1^{-1}$, $B_1C_2B_1^{-1}$, $B_1C_3B_1^{-1}$ biçiminde elde edilir.
Son olarak Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile (5.1) formülünde $s = 0$, $t = 1$ ve $u = 3$ olarak yazılırsa $\overline{H}'(5,5,7,8)$ komütatör alt grubunun simgesini $(0; 4, 5^{(2)}), 7^{(2)}, \infty)$ olarak buluruz.

**Örnek 4.4** $\overline{H}(2,2,2,3,4,5,9,10)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunu inceleyelim. Burada $p_1 = 2$, $p_2 = 2$, $p_3 = 2$, $p_4 = 3$, $p_5 = 4$, $p_6 = 5$, $p_7 = 9$, $p_8 = 10$ ve $s = 3$, $t = 2$, $u = 3$ olur. $0 \le j \le s$, $1 \le 1 \le 3$ ve $r_l$, $C_l$ üreteçlerinin mertebeleri ve $q_k$, $B_k$ üreteçlerinin mertebeleri olmak üzere $RB_k = B_kR$, $RC_l = C_lR$ değişmelilik bağıntıları eklendiğinde $\overline{H}(2,2,2,3,4,5,9,10)/\overline{H}'(2,2,2,3,4,5,9,10)$ bölüm grubu sunuşu;

$$\cong \quad < A_j, B_k, C_l, R \mid A_j^2 = B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = I, RA_j = A_jR, RB_k = B_k^{-1}R, RC_l = C_l^{-1}R,$$
$$RB_k = B_kR, RC_l = C_lR >$$
$$\cong \quad < A_j, B_k, C_l, R \mid A_j^2 = B_k^{q_k} = C_l^{r_l} = R^2 = (A_jR)^2 = (B_kR)^2 = (C_lR)^2 = I >$$

biçiminde bulunur. Burada;
$RB_k = B_kR$; $RB_k = B_k^{-1}R$ bağıntılarından $B_k^2 = I$,
$RC_l = C_lR$; $RC_l = C_l^{-1}R$ bağıntılarından $C_l^2 = I$,
$B_k^{q_k} = B_k^2 = I$ bağıntılarından ($q_k$ çift sayı) $B_k^2 = I$,
$C_l^{r_l} = C_l^2 = I$ bağıntılarından ($r_l$ tek sayı) $C_l = I$
olarak bulunur. Böylece $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)/\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubu;

$$\cong < A_j, B_k, R \mid A_j^2 = B_k^2 = R^2 = (A_jR)^2 = (B_kR)^2 = I > \cong \underbrace{C_2 \times C_2 \times \ldots \times C_2}_{5} \times C_2$$

şeklindedir. Buradan indeks;

$$\left[\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)/\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)\right] = 2^6 = 64$$

bulunur. Reidemeister-Schreier yöntemini ile Schreier transversalinin elemanlarını şu şekilde seçeriz: M kümesi $M = \{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2\}$ olur. M kümesinin boş küme hariç alt kümeleri $\{A_1\}$, $\{A_2\}$, $\{A_3\}$, $\{B_1\}$, $\{B_2,\}$, $\{A_1, A_2\}$, $\{A_1, A_3\}$, $\{A_2, A_3\}$, $\{B_1, B_2,\}$, $\{A_1, B_1\}$, $\{A_2, B_1\}$, $\{A_3, B_1\}$, $\{A_1, B_2\}$, $\{A_2, B_2\}$, $\{A_3, B_2\}$, $\{A_1, A_2, A_3\}$, $\{A_1, A_2, B_1\}$, $\{A_1, A_2, B_2\}$, $\{A_1, A_3, B_1\}$, $\{A_1, A_3, B_2\}$, $\{A_2, A_3, B_1\}$, $\{A_2, A_3, B_2\}$, $\{A_1, B_1, B_2\}$, $\{A_2, B_1, B_2\}$, $\{A_3, B_1, B_2\}$, $\{A_1, A_2, A_3, B_1\}$, $\{A_1, A_2, A_3, B_2\}$, $\{A_1, A_2, B_1, B_2\}$,

$\{A_1, A_3, B_1, B_2\}$, $\{A_12, A_3, B_1, B_2\}$, $\{A_1, A_2, A_3, B_1, B_2\}$ şeklindedir. Bu kümelerin tüm elemanları ile oluşturulan yeni elemanlar Schreier transversalinde bulunur. Bu elemanların R ile çarpılmış halleri de Schreier transversalinde vardır. Yani tüm bunlardan haraketle bir Schreier transversali;

$\sum = \{I, R, A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3, B_1B_2, A_1B_1, A_2B_1, A_3B_1, A_1B_2, A_2B_2,$ $A_3B_2, A_1A_2A_3, A_1A_2B_1, A_1A_2B_2, A_1A_3B_1, A_1A_3B_2, A_2A_3B_1, A_2A_3B_2, A_1B_1B_2,$ $A_2B_1B_2, A_3B_1B_2, A_1A_2A_3B_1, A_1A_2A_3B_2, A_1A_2B_1B_2, A_1A_3B_1B_2, A_2A_3B_1B_2,$ $A_1A_2A_3B_1B_2, A_1R, A_2R, A_3R, B_1R, B_2R, A_1A_2R, A_1A_3R, A_2A_3R, B_1B_2R,$ $A_1B_1R, A_2B_1R, A_3B_1R, A_1B_2R, A_2B_2R, A_3B_2R, A_1A_2A_3R, A_1A_2B_1R, A_1A_2B_2R,$ $A_1A_3B_1R, A_1A_3B_2R, A_2A_3B_1R, A_2A_3B_2R, A_1B_1B_2R, A_2B_1B_2R, A_3B_1B_2R,$ $A_1A_2A_3B_1R, A_1A_2A_3B_2R, A_1A_2B_1B_2R, A_1A_3B_1B_2R, A_2A_3B_1B_2R, A_1A_2A_3B_1B_2R\}$

olarak elde edilir. Reidemeister-Schreier yöntemi uygulanarak ve gerekli hesaplamalar yapılarak $\overline{H}'(2, 2, 2, 3, 4, 5, 9, 10)$'nin komütatör alt grubunun üreteçlerini aşağıdaki gibi buluruz. Burada $\overline{H}'(2, 2, 2, 3, 4, 5, 9, 10)$ komütatör alt grubunun üreteçleri $s = 3$, $t = 2$, $u = 3$ olmak üzere;

1.$\binom{3}{2} = 3$ tane üreteç $A_1A_2A_1A_2$, $A_1A_3A_1A_3$, $A_2A_3A_2A_3$ biçiminde; 2.$\binom{3}{3} = 2$ tane üreteç $A_1A_2A_3A_1(A_2A_3)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3A_2(A_1A_3)^{-1}$ biçiminde;

1.$\binom{2}{1}$ tane üreteç $B_1^2$,$B_2^2$ biçiminde,

3.$\binom{2}{2} = 3$ tane üreteç $B_1B_2B_1B_2^{-1}$ ya da $B_1B_2B_1^{-1}B_2^{-1}$ ya da $B_1B_2^2B_2^{-1}$ biçiminde,

2.$\binom{3}{1}\binom{2}{1} = 12$ tane üreteç $A_1B_1A_1B_1^{-1}, A_1B_2A_1B_2^{-1}, A_2B_1A_2B_1^{-1}, A_2B_2A_2B_2^{-1}, A_3B_1A_3B_1^{-1},$ $A_3B_2A_3B_2^{-1}$ya da $A_1B_1^2A_1$, $A_1B_2^2A_1$, $A_2B_1^2A_2$, $A_2B_2^2A_2$, $A_2B_1^2A_3$, $A_3B_2^2A_3$ biçiminde,

3.$\binom{3}{2}\binom{2}{1} = 18$ tane üreteç $A_1A_2B_1A_1(A_2B_1)^{-1}, A_1A_2B_2A_1(A_2B_2)^{-1}, A_1A_3B_1A_1(A_3B_1)^{-1},$ $A_1A_3B_2A_1(A_3B_2)^{-1}, A_2A_3B_1A_2(A_3B_1)^{-1}, A_2A_3B_2A_2(A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2B_1A_1(A_2B_1)^{-1}$ , $A_1A_2B_2A_1(A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1A_1(A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_3B_2A_1(A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1A_2(A_3B_1)^{-1}$, $A_2A_3B_2A_2(A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2B_1^2(A_1A_2)^{-1}$, $A_1A_2B_2^2(A_1A_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1^2(A_1A_3)^{-1}$, $A_1A_3B_2^2(A_1A_3)^{-1}$, $A_2A_3B_1^2(A_2A_3)^{-1}$, $A_2A_3B_2^2(A_2A_3)^{-1}$ biçiminde,

4.$\binom{3}{1}\binom{2}{2} = 12$ tane üreteç $A_1B_1B_2A_1(B_1B_2)^{-1}$, $A_2B_1B_2A_2(B_1B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2A_3(B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1B_1B_2B_1(A_1B_2)^{-1}$, $A_2B_1B_2B_1(A_2B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2B_1(A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1B_1B_2B_1^{-1}(A_1B_2)^{-1}$ , $A_2B_1B_2B_1^{-1}(A_2B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2B_1^{-1}(A_3B_2)^{-1}$ya da $A_1B_1B_2^2(A_1B_1)^{-1}$, $A_2B_1B_2^2(A_2B_1)^{-1}$, $A_3B_1B_2^2(A_3B_1)^{-1}$ biçiminde,

(5).$\binom{3}{2}\binom{2}{2} = 15$ tane üreteç $A_1A_2B_1B_2A_1(A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2A_2(A_1B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2A_1(A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2A_3(A_1B_1B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2A_2(A_3B_1B_2)^{-1}$,

$A_2A_3B_1B_2A_2(A_3B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2B_1B_2B_1(A_1A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2B_1^{-1}(A_1A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2^2(A_1A_2B_1)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2B_1(A_1A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2B_1^{-1}(A_1A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2^2(A_1A_3B_1)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2B_1(A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2B_1^{-1}(A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2^2(A_2A_3B_1)^{-1}$ biçiminde,
(6).$\binom{3}{3}\binom{2}{2} = 6$ tane üreteç $A_1A_2A_3B_1B_2A_1(A_2A_3B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3B_1B_2A_2(A_1A_3B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3B_1B_2A_3(A_1A_2B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3B_1B_2B_1(A_1A_2A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3B_1B_2B_1^{-1}(A_1A_2A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1A_2A_3B_1B_2^2(A_1A_2A_3B_1)^{-1}$ biçiminde olur.
$3.\binom{5}{0} = 3$ tane üreteç $C_1$, $C_2$, $C_3$ biçiminde; $3.\binom{5}{1} = 15$ tane üreteç $A_1C_1A_1$, $A_1C_2A_1$, $A_1C_3A_1$, $A_2C_1A_2$, $A_2C_2A_2$, $A_2C_3A_2$, $A_3C_1A_3$, $A_3C_2A_3$, $A_3C_3A_3$ ya da $B_1C_1B_1^{-1}$, $B_1C_2B_1^{-1}$, $B_1C_3B_1^{-1}$, $B_2C_1B_2^{-1}$, $B_2C_2B_2^{-1}$, $B_2C_3B_2^{-1}$ biçiminde,
$3.\binom{5}{2} = 30$ tane üreteç $A_1A_2C_1(A_1A_2)^{-1}$, $A_1A_3C_1(A_1A_3)^{-1}$, $A_2A_3C_1(A_2A_3)^{-1}$, $A_1A_2C_2(A_1A_2)^{-1}$, $A_1A_3C_2(A_1A_3)^{-1}$, $A_2A_3C_2(A_2A_3)^{-1}$, $A_1A_2C_3(A_1A_2)^{-1}$, $A_1A_3C_3(A_1A_3)^{-1}$, $A_2A_3C_3(A_2A_3)^{-1}$ ya da $B_1B_2C_1(B_1B_2)^{-1}$, $B_1B_2C_2(B_1B_2)^{-1}$ , $B_1B_2C_3(B_1B_2)^{-1}$ ya da $A_1B_1C_1(A_1B_1)^{-1}$, $A_1B_1C_2(A_1B_1)^{-1}$, $A_1B_1C_3(A_1B_1)^{-1}$, $A_2B_1C_1(A_2B_1)^{-1}$, $A_2B_1C_2(A_2B_1)^{-1}$, $A_2B_1C_3(A_2B_1)^{-1}$, $A_3B_1C_1(A_3B_1)^{-1}$, $A_3B_1C_2(A_3B_1)^{-1}$, $A_3B_1C_3(A_3B_1)^{-1}$, $A_1B_2C_1(A_1B_2)^{-1}$, $A_1B_2C_2(A_1B_2)^{-1}$, $A_1B_2C_3(A_1B_2)^{-1}$, $A_2B_2C_1(A_2B_2)^{-1}$, $A_2B_2C_2(A_2B_2)^{-1}$, $A_2B_2C_3(A_2B_2)^{-1}$, $A_3B_2C_1(A_3B_2)^{-1}$, $A_3B_2C_2(A_3B_2)^{-1}$, $A_3B_2C_3(A_3B_2)^{-1}$, biçiminde,
$3.\binom{5}{3} = 30$ tane üreteç $A_1A_1A_3C_1(A_1A_2A_3)^{-1}$, $A_1A_1A_3C_2(A_1A_2A_3)^{-1}$, $A_1A_1A_3C_3(A_1A_2A_3)^{-1}$ ya da $A_1A_2B_1C_1(A_1A_2B_1)^{-1}$, $A_1A_2B_1C_2(A_1A_2B_1)^{-1}$, $A_1A_2B_1C_3(A_1A_2B_1)^{-1}$, $A_1A_2B_2C_1(A_1A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_2C_2(A_1A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_2C_3(A_1A_2B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1C_1(A_1A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_3B_1C_2(A_1A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_3B_1C_3(A_1A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_3B_2C_1(A_1A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_2C_2(A_1A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_2C_3(A_1A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1C_1(A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_2A_3B_1C_2(A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_2A_3B_1C_3(A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_2A_3B_2C_1(A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_2C_2(A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_2C_3(A_2A_3B_2)^{-1}$ ya da $A_1B_1B_2C_1(A_1B_1B_2)^{-1}$, $A_1B_1B_2C_2(A_1B_1B_2)^{-1}$, $A_1B_1B_2C_3(A_1B_1B_2)^{-1}$, $A_2B_1B_2C_1(A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_2B_1B_2C_2(A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_2B_1B_2C_3(A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2C_1(A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2C_2(A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_3B_1B_2C_3(A_3B_1B_2)^{-1}$ biçiminde,
$3.\binom{5}{4} = 15$ tane üreteç $A_1A_2A_3B_1C_1(A_1A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_1C_2(A_1A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_1C_2(A_1A_2A_3B_1)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_2C_1(A_1A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_2C_2(A_1A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_2C_3(A_1A_2A_3B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2C_1(A_1A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2C_2(A_1A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_2B_1B_2C_3(A_1A_2B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2C_1(A_1A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2C_2(A_1A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_3B_1B_2C_3(A_1A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2C_1(A_2A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2C_2(A_2A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_2A_3B_1B_2C_3(A_2A_3B_1B_2)^{-1}$,
$3.\binom{5}{5} = 3$ tane üreteç $A_1A_2A_3B_1B_2C_1(A_1A_2A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_1B_2C_2(A_1A_2A_3B_1B_2)^{-1}$, $A_1A_2A_3B_1B_2C_3(A_1A_2A_3B_1B_2)^{-1}$ biçiminde olur.
Son olarak Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile $\overline{H}'(2,2,2,3,4,5,9,10)$

komütatör alt grubunun simgesini (5.1) formülünde $s = 3$, $t = 2$ ve $u = 3$ olarak yerine yazıldığında $(49; 2^{(5)}, 3^{(64)}), 5^{(64)}, 9^{(64)}, \infty^{(32)})$ buluruz.

# 5. GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUPLARININ KUVVET ALT GRUPLARI

Bu bölümde m pozitif tamsayı olmak üzere $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grupları incelenecektir. Bunun için m kuvveti ile üreteçlerin mertebeleri arasındaki durumlar incelenecektir.

**Teorem 5.1** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı, $n \geq 2$ tamsayı ve her $p_i \geq 2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koşulunu sağlasın. Eğer her $(p_i, m) = 1$ ise;

i) $| H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) | = 1$,

ii) $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$

**ispat:** $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşu $< X_i : X_1^{p_1} = X_2^{p_2} = \ldots = X_n^{p_n} = I >$ şeklindedir. $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)/H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubunun sunuşunu elde etmek için var olan bağıntılara tüm elemanların m. kuvvetlerinin alınması ile oluşan bağıntılar eklenir. Buradan $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)/H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ bölüm grubunun sunuşu;
$< X_i : X_1^{p_1} = X_2^{p_2} = \ldots = X_n^{p_n} = I, X_1^m = X_2^m = \ldots = X_n^m = \ldots = I >$
olarak bulunur. Burada her $i = 1, 2, \ldots, n$ için $X_i^{p_i} = X_i^m = I$ ve $(p_i, m) = 1$ olduğundan $X_i = I$ bulunur. Böylece $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) = H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ olarak elde edilir.

**Örnek 5.1** $H(3, 5, 7, 9, 11, 13)$ grubunun $H^2(3, 5, 7, 9, 11, 13)$ kuvvet alt grubunu inceleyelim. Burada $H(3, 5, 7, 9, 11, 13)/H^2(3, 5, 7, 9, 11, 13)$ bölüm grubunun sunuşu;

$< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \mid X_1^3 = X_2^5 = X_3^7 = X_4^9 = X_5^{11} = X_6^{13} = I, X_i^2 = I >$
biçimindedir. $X_1^3 = I$ ve $X_1^2 = I$ olduğundan $X_1 = I$, $X_2^5 = I$ ve $X_2^2 = I$ olduğundan $X_2 = I$, $X_3^7 = I$ ve $X_3^2 = I$ olduğundan $X_3 = I$, $X_4^9 = I$ ve $X_4^2 = I$ olduğundan $X_4 = I$, $X_5^{11} = I$ ve $X_5^2 = I$ olduğundan $X_5 = I$, $X_6^{13} = I$ ve $X_6^2 = I$ olduğundan $X_6 = I$ elde edilir. Böylece bölüm grubu $H(3, 5, 7, 9, 11, 13)/H^2(3, 5, 7, 9, 11, 13) \cong \{I\}$ bulunur. O halde $H^2(3, 5, 7, 9, 11, 13) = H(3, 5, 7, 9, 11, 13)$ olur.

**Teorem 5.2** $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tamsayı, $n \geq 2$ tamsayı, her $p_i \geq 2$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ koşulunu sağlasın. Tek bir tane j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ için $(p_j, m) = d > 1$ ve her $j \neq i$ için $(p_i, m) = 1$ ise

i) $| H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) |= d$,

ii) $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grubu $(n-1).d+1$ tane üreteci olan bir gruptur.

**ispat:** $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun bölüm grubu $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)/H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) = < X_i : X_i^{p_i} = X_j^{p_j} = I, X_i^m = X_j^m = \ldots = I >$ biçimindedir. Burada $(p_i, m) = 1$ ile $X_i^{p_i} = X_i^m = I$ olduğundan $X_i = I$, $(p_j, m) = d$ ile $X_j^{p_j} = X_j^m = I$ olduğundan $X_j^d = I$ bulunur. Böylece bölüm grubu
$H(p_1, p_2, \ldots, p_n)/H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) \cong < X_j : X_j^d = I > \cong C_d$
olarak bulunur.. Buradan indeks $| H(p_1, p_2, \ldots, p_n) : H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n) | = d$ olur.
$H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.Bir $\sum$ Schreier transversalini
$\sum = \{I, X_j, X_j^2, \ldots, X_j^{d-1}\}$
olarak seçelim. Böylece tüm çarpımlar

$I.X_i.(I)^{-1} = X_i,$
$X_j.X_i.(X_j)^{-1} = X_jX_iX_j^{-1},$
$X_j^2.X_i.(X_j^2)^{-1} = X_j^2X_iX_j^{-2},$
$\vdots$
$X_j^{d-1}.X_i.(X_j^{d-1})^{-1} = X_j^{d-1}X_iX_j^{-(d-1)},$

$I.X_j.(X_j)^{-1} = I,$
$X_j.X_j(X_j^2)^{-1} = I,$
$X_j^2.X_j.(X_j^3)^{-1} = I,$
$\vdots$
$X_j^{d-1}.X_j.(I)^{-1} = X_j^d$

biçimindedir. Buradan $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grubunun tüm üreteçleri bir j elemanı ve j den farklı tüm i ler için $(n-1)$ tane $X_i$, $(n-1)$ tane $X_jX_iX_j^{-1}, \ldots, (n-1)$ tane $X_j^{d-1}X_iX_j^{-(d-1)}$ ve $X_j^d$ biçiminde olur. Böylece toplam $(n-1)d+1$ tane üreteç bulunur. Burada eğer $d = p_j$ ise $X_j^{p_j} = I$ olduğundan $(n-1)d$ tane üreteç bulunur. Ayrıca Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grubunun simgesini

$$\begin{cases} \left(0; (p_j)^d, (\frac{p_i}{d}), \infty\right), & \text{eğer } p_j \neq d \text{ ise} \\ \left(0; (p_j)^d, \infty\right), & \text{eğer } p_j = d \text{ ise} \end{cases} \tag{6.1}$$

bulunur.

**Örnek 5.2** $H(2,3,4,5,8)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^9(2,3,4,5,8)$ kuvvet alt grubunu inceleyelim. $H(2,3,4,5,8)/H^9(2,3,4,5,8)$ bölüm grubu oluşturulduğunda

$< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = X_4^5 = X_5^8 = I, X_i^9 = I >$
elde ederiz. Burada
$X_1^2 = I$ ve $X_1^9 = I$ olduğundan $X_1 = I$,
$X_2^3 = I$ ve $X_2^9 = I$ olduğundan $X_2^3 = I$ ,
$X_3^4 = I$ ve $X_3^9 = I$ olduğundan $X_3 = I$,
$X_4^5 = I$ ve $X_4^9 = I$ olduğundan $X_4 = I$,
$X_5^8 = I$ ve $X_5^9 = I$ olduğundan $X_5 = I$,
elde edilir. Buradan indeks $[H(2,3,4,5,8) : H(2,3,4,5,8)] = 3$ bulunur. Bir Schreier trasverseli olarak $\sum = \{I, X_2, X_2^2\}$ seçelim. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.
$I.X_1.(I)^{-1} = X_1$,
$X_2.X_1.(X_2)^{-1} = X_2X_1X_2^{-1}$,
$X_2^2.X_1.(X_2^2)^{-1} = X_2^2X_1X_2^{-2}$,

$I.X_2.(X_2)^{-1} = I$,
$X_2.X_2.(X_2^2)^{-1} = I$,
$X_2^2.X_2.(I)^{-1} = I$,

$I.X_3.(I)^{-1} = X_3$,
$X_2.X_3.(X_2)^{-1} = X_2X_3X_2^{-1}$,
$X_2^2.X_3.(X_2^2)^{-1} = X_2^2X_3X_2^{-2}$,

$I.X_4.(I)^{-1} = X_4$,
$X_2.X_4.(X_2)^{-1} = X_2X_4X_2^{-1}$,
$X_2^2.X_4.(X_2^2)^{-1} = X_2^2X_4X_2^{-2}$,

$I.X_5.(I)^{-1} = X_5$,
$X_2.X_5.(X_2)^{-1} = X_2X_5X_2^{-1}$,
$X_2^2.X_5.(X_2^2)^{-1} = X_2^2X_5X_2^{-2}$.
biçimindedir. Buradan $H^9(2,3,4,5,8)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri
$X_1, X_2X_1X_2^{-1}, X_2^2X_1X_2^{-2}, X_3, X_2X_3X_2^{-1}, X_2^2X_3X_2^{-2}, X_4, X_2X_4X_2^{-1}, X_2^2X_4X_2^{-2}$,
$X_5, X_2X_5X_2^{-1}, X_2^2X_5X_2^{-2}$
olarak bulunur.Ayrıca kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon yöntemini ve Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. Burada $p_j = 3 = d$ olduğundan (6.1) formülünde simge $(0; 2^{(3)}, 4^{(3)}, 5^{(3)}, 8^{(3)}, \infty)$ olarak bulunur.

**Teorem 5.3** $H(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ genelleştirilmiş Hecke grubu için $p_1,p_2,\ldots,p_n$ tamsayı, $n\geq 2$ tamsayı, her $p_i\geq 2$ koşulları sağlansın. Eğer sadece iki tane j ve k $(j,k=1,2,\ldots,n)$ değeri için $(p_j,m)=(p_k,m)=2$ ve j ile k sayılarından farklı tüm i $(i=1,2,\ldots,n)$ değerleri için $(p_i,m)=1$ ise

i) $\mid H(p_1,p_2,\ldots,p_n):H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)\mid=2m$

ii) $H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ kuvvet alt grubunun üreteç sayısı

$$\begin{cases} 2m(n-1), & \text{eğer } p_j>2 \text{ ve } p_k>2 \text{ ise}\\ m(2n-3), & \text{eğer } p_j=2 \text{ ve } p_k>2 \text{ veya eğer } p_j>2 \text{ ve } p_k=2 \text{ ise}\\ 2m(n-2), & \text{eğer } p_j=2 \text{ ve } p_k=2 \text{ ise}\end{cases} \tag{1}$$

olur.

**ispat:** i) $H(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşunu şu şekilde verelim.
$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)=<X_1,X_2,\ldots,X_n:X_1^{p_1}=X_2^{p_2}=\ldots=X_j^{p_j}=\ldots=X_k^{p_k}=\ldots=I>$
Böylece bölüm grubu

$$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)/H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)= <X_1,X_2,\ldots,X_n:X_1^{p_1}=X_2^{p_2}=\ldots=X_j^{p_j}=\ldots=X_k^{p_k}=\ldots= I,X_1^m=\ldots=X_j^m=\ldots=X_k^m=\ldots=I>$$

biçiminde oluşur. Burada
$X_j^{p_j}=X_j^m=I$ ile $(p_j,m)=2$ olduğundan $X_j^2=I$,
$X_k^{p_k}=X_k^m=I$ ile $(p_k,m)=2$ olduğundan $X_k^2=I$ ve
$i\neq j,k$ için $X_i^{p_i}=X_i^m=I$ ile $(p_i,m)=1$ olduğundan $X_i=I$
bulunur. Buradan bölüm grubu şu şekilde elde edilir:
$H(p_1,p_2,\ldots,p_n)/H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)=<X_j,X_k:X_j^2=X_k^2=(X_jX_k)^m=I>\cong D_m$
Buradan indeks $[H(p_1,p_2,\ldots,p_n):H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)]=2m$
olarak bulunur.

ii) $H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım. Bir $\sum$ Schreier transversali olarak

$$\sum=\{I,X_j,X_k,X_jX_k,X_jX_kX_j,X_jX_kX_jX_k,\ldots,\underbrace{(X_jX_k)(X_jX_k)\ldots(X_jX_k)}_{(m-1)\text{tane}X_jX_k}\}$$

kümesini seçelim. Gerekli hesaplamalar ve kısaltmalar yapılarak $H^m(p_1,p_2,\ldots,p_n)$'nin kuvvet alt grubunun üreteçlerini aşağıdaki gibi buluruz.

Bir tane üretecin formu $X_j^2$ biçiminde, bir tane üretecin formu $X_k^2$ biçiminde, bir tane üretecin formu $X_kX_j^2X_k^{-1}$, bir tane üretecin formu $X_kX_j(X_jX_k)^{m-1}$ biçiminde; bir tane üretecin formu $X_jX_k^2X_j^{-1}$ biçiminde; m – 2 tane üretecin formu $(X_jX_k)X_j^2(X_jX_k)^{-1}$ ya da $(X_jX_k)^2X_j^2(X_jX_k)^{-2}$ ya da ... ya da $(X_jX_k)^{m-2}X_j^2(X_jX_k)^{-(m-2)}$ biçiminde; m – 2 tane üretecin formu $(X_jX_k)X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-1}$ ya da $(X_jX_k)^2X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-2}$ ya da ... ya da $(X_jX_k)^{m-2}X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-(m-2)}$ biçiminde; n–2 tane üretecin formu $X_i$ biçiminde; n–2 tane üretecin formu $X_jX_iX_j^{-1}$ biçiminde; n – 2 tane üretecin formu $X_kX_iX_k^{-1}$ biçiminde; n – 2 tane üretecin formu $X_jX_kX_i(X_jX_k)^{-1}$ biçiminde; n – 2 tane üretecin formu $X_jX_kX_jX_i(X_jX_kX_j)^{-1}$ biçiminde; ... ; n – 2 tane üretecin formu $(X_jX_k)^{m-1}X_i(X_jX_k)^{-(m-1)}$ biçiminde olur. Toplam $2m(n-1)+1$ tane üreteç bulunur.

Burada eğer $p_j = 2$ ise $X_j^2 = I$ olacağından $X_j^2$, $X_kX_j^2X_k^{-1}$, $(X_jX_k)X_j^2(X_jX_k)^{-1}$ , $(X_jX_k)^2X_j^2(X_jX_k)^{-2}$, ... , $(X_jX_k)^{m-2}X_j^2(X_jX_k)^{-(m-2)}$ üreteçleri birim olur. Bu durumda m tane üreteç eksilir. Eğer $p_k = 2$ ise $X_k^2 = I$ olacağından $X_k^2$ , $X_jX_k^2X_j^{-1}$, $(X_jX_k)X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-1}, (X_jX_k)^2X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-2}, \ldots, (X_jX_k)^{m-2}X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-(m-2)}$ üreteçleri birim olur. Toplamda m tane üreteç eksilir. Eğer $p_j = p_k = 2$ ise $X_j^2$ ,$X_kX_j^2X_k^{-1}$, $(X_jX_k)X_j^2(X_jX_k)^{-1}$ , $(X_jX_k)^2X_j^2(X_jX_k)^{-2}$, ... , $(X_jX_k)^{m-2}X_j^2(X_jX_k)^{-(m-2)}$, $X_k^2$, $X_jX_k^2X_j^{-1}$, $(X_jX_k)X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-1}, (X_jX_k)^2X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-2}, \ldots, (X_jX_k)^{m-2}X_jX_k^2X_j^{-1}(X_jX_k)^{-(m-2)}$ üreteçleri birim olur. 2m tane üreteç eksilir.

Ek olarak Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu ile $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grubunun simgesi

$$\begin{cases} \left(0; (p_i)^{2m}, (\frac{p_j}{2})^{(m)}, (\frac{p_k}{2})^m, \infty^{(2)}\right), & \text{eğer } p_j > 2 \text{ ve } p_k > 2 \text{ ise} \\ \left(0; (p_i)^{2m}, (\frac{p_k}{2})^m, \infty^{(2)}\right), & \text{eğer } p_j = 2 \text{ ve } p_k > 2 \text{ ise} \\ \left(0; (p_i)^{2m}, (\frac{p_j}{2})^{(m)}, \infty^{(2)}\right), & \text{eğer } p_j > 2 \text{ ve } p_k = 2 \text{ ise} \\ \left(0; (p_i)^{2m}, \infty^{(2)}\right), & \text{eğer } p_j = 2 \text{ ve } p_k = 2 \text{ ise} \end{cases} \tag{6.2}$$

olarak bulunur.

**Örnek 5.3** $H(3,3,6,7,10)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^4(3,3,6,7,10)$ kuvvet alt grubunu inceleyelim. $H(3,3,6,7,10)/H^4(3,3,6,7,10)$ bölüm grubunu incelendiğinde

$< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 \mid X_1^3 = X_2^3 = X_3^6 = X_4^7 = X_5^{10} = I, X_i^4 = I >$
olur. Burada
$X_1^3 = I$ ve $X_1^4 = I$ olduğundan $X_1 = I$,
$X_2^3 = I$ ve $X_2^4 = I$ olduğundan $X_2 = I$ ,
$X_3^6 = I$ ve $X_3^4 = I$ olduğundan $X_3^2 = I$,
$X_4^7 = I$ ve $X_4^4 = I$ olduğundan $X_4 = I$,
$X_5^{10} = I$ ve $X_5^4 = I$ olduğundan $X_5^2 = I$,

bulunur. Son olarak bölüm grubu $< X_3, X_5 \mid X_3^2 = X_5^2 = (X_3X_5)^4 = I >\cong D_4$ olarak elde edilir. Buradan indeks $[H(3,3,6,7,10) : H^4(3,3,6,7,10)] = 8$ bulunur. Bir Schreier trasverseli olarak
$\sum = \{I, X_3, X_5, X_3X_5, X_3X_5X_3, X_3X_5X_3X_5, X_3X_5X_3X_5X_3, X_3X_5X_3X_5X_3X_5\}$
seçelim. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.
$I.X_1.(I)^{-1} = X_1,$
$X_3.X_1.(X_3)^{-1} = X_3X_1X_3^{-1},$
$X_5.X_1.(X_5)^{-1} = X_5X_1X_5^{-1},$
$X_3X_5.X_1.(X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_1(X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3.X_1.(X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_1(X_3X_5X_3)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5.X_1.(X_3X_5X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_1(X_3X_5X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5X_3.X_1.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_3X_1(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5X_3X_5.X_1.(X_3X_5X_3X_5X_3X_5)^{-1} = (X_3X_5)^3X_1(X_3X_5)^{-3},$

$I.X_2.(I)^{-1} = X_2,$
$X_3.X_2.(X_3)^{-1} = X_3X_2X_3^{-1},$
$X_5.X_2.(X_5)^{-1} = X_5X_2X_5^{-1},$
$X_3X_5.X_2.(X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_2(X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3.X_2.(X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_2(X_3X_5X_3)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5.X_2.(X_3X_5X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_2(X_3X_5X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5X_3.X_2.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_3X_2(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5X_3X_5.X_2.(X_3X_5X_3X_5X_3X_5)^{-1} = (X_3X_5)^3X_2(X_3X_5)^{-3},$

$I.X_3.(X_3)^{-1} = I,$
$X_3.X_3.(I)^{-1} = X_3^2,$
$X_5.X_3.((X_3X_5)^3)^{-1} = X_5X_3(X_3X_5)^{-3},$
$X_3X_5.X_3.(X_3X_5X_3)^{-1} = I,$
$X_3X_5X_3.X_3.(X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_3^2(X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5.X_3.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = I,$
$X_3X_5X_3X_5X_3.X_3.(X_3X_5X_3X_5)^{-1} = (X_3X_5)^2X_3^2(X_3X_5)^{-2},$
$X_3X_5X_3X_5X_3X_5.X_3.(X_5)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_3X_5X_3(X_5)^{-1},$

$I.X_4.(I)^{-1} = X_4,$
$X_3.X_4.(X_3)^{-1} = X_3X_4X_3^{-1},$
$X_5.X_4.(X_5)^{-1} = X_5X_4X_5^{-1},$
$X_3X_5.X_4.(X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_4(X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3.X_4.(X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_4(X_3X_5X_3)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5.X_4.(X_3X_5X_3X_5)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_4(X_3X_5X_3X_5)^{-1},$
$X_3X_5X_3X_5X_3.X_4.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = X_3X_5X_3X_5X_3X_4(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1},$

$X_3X_5X_3X_5X_3X_5.X_4.(X_3X_5X_3X_5X_3X_5)^{-1} = (X_3X_5)^3X_4(X_3X_5)^{-3}$,

$I.X_5.(X_5)^{-1} = I$,
$X_3.X_5.(X_3X_5)^{-1} = I$,
$X_5.X_5.(I)^{-1} = X_5^2$,
$X_3X_5.X_5.(X_3)^{-1} = X_3X_5^2(X_3)^{-1}$,
$X_3X_5X_3.X_5.(X_3X_5X_3X_5)^{-1} = I$,
$X_3X_5X_3X_5.X_5.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = (X_3X_5)X_3X_5^2X_3{}^{-1}(X_3X_5)^{-1}$,
$X_3X_5X_3X_5X_3.X_5.(X_3X_5X_3X_5X_3X_5)^{-1} = I$,
$X_3X_5X_3X_5X_3X_5.X_5.(X_3X_5X_3X_5X_3)^{-1} = (X_3X_5)^2X_3X_5^2X_3{}^{-1}(X_3X_5)^{-2}$,

biçimindedir. Burada $X_5X_3(X_3X_5)^{-3}$ ile $X_3X_5X_3X_5X_3X_5X_3(X_5)^{-1}$ ifadelerini çarpınca $X_5X_3(X_3X_5)^{-3}.X_3X_5X_3X_5X_3X_5X_3(X_5)^{-1} = X_5X_3^2X_5^{-1}$ bulunur. Buradan $H^4(3, 3, 6, 7, 10)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri
$X_1$ , $X_3X_1X_3^{-1}$, $X_5X_3(X_3X_5)^{-3}$, $X_5X_1X_5^{-1}$, $X_3X_5X_1(X_3X_5)^{-1}$, . . . , $(X_3X_5)^3X_1(X_3X_5)^{-3}$, $X_2$ , $X_3X_2X_3^{-1}$, $X_5X_2X_5^{-1}$, $X_3X_5X_2(X_3X_5)^{-1}$, . . . , $(X_3X_5)^3X_2(X_3X_5)^{-3}$, $X_4$ , $X_3X_4X_3^{-1}$, $X_5X_4X_5^{-1}$, $X_3X_5X_4(X_3X_5)^{-1}$, . . . , $(X_3X_5)^3X_4(X_3X_5)^{-3}$, $X_3^2$, $X_5X_3^2X_5$, $X_3X_5X_3^2(X_3X_5)^{-1}$, $(X_3X_5)^2X_3^2(X_3X_5)^{-2}$, $X_5^2$, $X_3X_5^2(X_3)^{-1}$, $(X_3X_5)X_3X_5^2X_3{}^{-1}(X_3X_5)^{-1}$, $(X_3X_5)^2X_3X_5^2X_3{}^{-1}(X_3X_5)^{-2}$
olarak bulunur.Ayrıca kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon yöntemini ve Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. Burada $p_j = 6$ ve $p_k = 10$ olduğundan (6.2) formülünde simge $\left(0; (3)^8, (3)^8, (3)^{(4)}, (7)^8, (5)^4, \infty^{(2)}\right)$ olarak bulunur.

**Örnek 5.4** $H(2, 5, 7, 8, 11, 13)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^6(2, 5, 7, 8, 11, 13)$ kuvvet alt grubunu inceleyelim. $H(2, 5, 7, 8, 11, 13)/H^{10}(2, 5, 7, 8, 11, 13)$ bölüm grubunu incelendiğinde

$< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6 \mid X_1^2 = X_2^5 = X_3^7 = X_4^8 = X_5^{11} = X_6^{13} = I, X_i^6 = I >$
olur. Burada
$X_1^2 = I$ ve $X_1^6 = I$ olduğundan $X_1^2 = I$,
$X_2^5 = I$ ve $X_2^6 = I$ olduğundan $X_2 = I$ ,
$X_3^7 = I$ ve $X_3^6 = I$ olduğundan $X_3 = I$,
$X_4^8 = I$ ve $X_4^6 = I$ olduğundan $X_4^2 = I$,
$X_5^{11} = I$ ve $X_5^6 = I$ olduğundan $X_5 = I$,
$X_6^{13} = I$ ve $X_6^6 = I$ olduğundan $X_6 = I$ bulunur.
Son olarak bölüm grubu $< X_1, X_4 \mid X_1^2 = X_4^2 = (X_1X_4)^6 = I >\cong D_6$ olarak elde edilir. Buradan indeks $[H(2, 5, 7, 8, 11, 13) : H^6(2, 5, 7, 8, 11, 13)] = 12$ bulunur. Bir Schreier

trasverseli olarak

$\sum = \{I, X_1, X_4, X_1X_4, X_1X_4X_1, X_1X_4X_1X_4, X_1X_4X_1X_4X_1, X_1X_4X_1X_4X_1X_4, X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1,$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4, X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1, X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4\}$ seçelim.

Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.

$I.X_1.(X_1)^{-1} = I,$
$X_1.X_1.(I)^{-1} = I,$
$X_4.X_1.((X_1X_4)^5)^{-1} = X_4X_1(X_1X_4)^{-5},$
$X_1X_4.X_1.(X_1X_4X_1)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1.X_1.(X_1X_4)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4.X_1.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_1.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_1.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_1.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I(X_1X_4)^3X_1^2(X_1X_4)^{-3},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_1.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_1.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I,$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_1.(X_4)^{-1} = (X_1X_4)^5X_1X_4^{-1},$

$I.X_2.(I)^{-1} = X_2,$
$X_1.X_2.(X_1)^{-1} = X_1X_2X_1^{-1},$
$X_4.X_2.(X_4)^{-1} = X_4X_2X_4^{-1},$
$X_1X_4.X_2.(X_1X_4)^{-1} = X_1X_4X_2(X_1X_4)^{-1},$
$X_1X_4X_1.X_2.(X_1X_4X_1)^{-1} = X_1X_4X_1X_2(X_1X_4X_1)^{-1},$
$X_1X_4X_1X_4.X_2.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^2X_2(X_1X_4)^{-2},$
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^2X_1X_2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^3X_2(X_1X_4)^{-3},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^3X_1X_2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^4X_2(X_1X_4)^{-4},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^4X_1X_2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_2.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^5X_2(X_1X_4)^{-5},$

$I.X_3.(I)^{-1} = X_3,$
$X_1.X_3.(X_1)^{-1} = X_1X_3X_1^{-1},$
$X_4.X_3.(X_4)^{-1} = X_4X_3X_4^{-1},$
$X_1X_4.X_3.(X_1X_4)^{-1} = X_1X_4X_3(X_1X_4)^{-1},$
$X_1X_4X_1.X_3.(X_1X_4X_1)^{-1} = X_1X_4X_1X_3(X_1X_4X_1)^{-1},$
$X_1X_4X_1X_4.X_3.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^2X_3(X_1X_4)^{-2},$
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^2X_1X_3X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^3X_3(X_1X_4)^{-3},$
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^3X_1X_3X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3},$

$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^4X_3(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^4X_1X_3X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_3.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^5X_3(X_1X_4)^{-5}$,

$I.X_4.(X_4)^{-1} = I$,
$X_1.X_4.(X_1X_4)^{-1} = I$,
$X_4.X_4.(I)^{-1} = X_4^2$,
$X_1X_4.X_4.(X_1)^{-1} = X_1X_4^2X_1^{-1}$,
$X_1X_4X_1.X_4.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I$,
$X_1X_4X_1X_4.X_4.(X_1X_4X_1)^{-1} = X_1X_4X_1X_4^2(X_1X_4X_1)^{-1}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^2X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^3X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = I$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_4.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^4X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4}$,

$I.X_5.(I)^{-1} = X_5$,
$X_1.X_5.(X_1)^{-1} = X_1X_5X_1^{-1}$,
$X_4.X_5.(X_4)^{-1} = X_4X_5X_4^{-1}$,
$X_1X_4.X_5.(X_1X_4)^{-1} = X_1X_4X_5(X_1X_4)^{-1}$,
$X_1X_4X_1.X_5.(X_1X_4X_1)^{-1} = X_1X_4X_1X_2(X_1X_4X_1)^{-1}$,
$X_1X_4X_1X_4.X_2.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^2X_5(X_1X_4)^{-2}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^2X_1X_5X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^3X_5(X_1X_4)^{-3}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^3X_1X_5X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^4X_5(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^4X_1X_5X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_5.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^5X_5(X_1X_4)^{-5}$,

$I.X_6.(I)^{-1} = X_6$,
$X_1.X_6.(X_1)^{-1} = X_1X_6X_1^{-1}$,
$X_4.X_6.(X_4)^{-1} = X_4X_6X_4^{-1}$,
$X_1X_4.X_6.(X_1X_4)^{-1} = X_1X_4X_6(X_1X_4)^{-1}$,
$X_1X_4X_1.X_6.(X_1X_4X_1)^{-1} = X_1X_4X_1X_6(X_1X_4X_1)^{-1}$,
$X_1X_4X_1X_4.X_6.(X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^2X_6(X_1X_4)^{-2}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^2X_1X_6X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^3X_6(X_1X_4)^{-3}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^3X_1X_6X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3}$,

$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^4X_6(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1)^{-1} = (X_1X_4)^4X_1X_6X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4}$,
$X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4.X_6.(X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4X_1X_4)^{-1} = (X_1X_4)^5X_6(X_1X_4)^{-5}$.

biçimindedir. Burada $X_4X_1(X_1X_4)^{-5}$ ile $(X_1X_4)^5X_1X_4{}^{-1}$ ifadelerini çarpınca $X_4X_1(X_1X_4)^{-5}.(X_1X_4)^5X_1X_4{}^{-1} = X_4X_1^2X_4^{-1} = I$ olduğu görülür. Buradan $H^6(2,5,7,8,11,13)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri;
$X_2$ , $X_1X_2X_1^{-1}$, $X_4X_1(X_1X_4)^{-5}$, $X_4X_2X_4^{-1}$, $X_1X_4X_2(X_1X_4)^{-1}$, $\ldots$, $(X_1X_4)^5X_2(X_1X_4)^{-5}$, $X_3$ , $X_1X_3X_1^{-1}$, $X_4X_3X_4^{-1}$, $X_1X_4X_3(X_1X_4)^{-1}$, $\ldots$, $(X_1X_4)^5X_3(X_1X_4)^{-5}$, $X_5$ , $X_1X_5X_1^{-1}$, $X_4X_5X_4^{-1}$, $X_1X_4X_5(X_1X_4)^{-1}$, $\ldots$, $(X_1X_4)^5X_5(X_1X_4)^{-5}$, $X_6$ , $X_1X_6X_1^{-1}$, $X_4X_6X_4^{-1}$, $X_1X_4X_6(X_1X_4)^{-1}, \ldots, (X_1X_4)^5X_6(X_1X_4)^{-5}, X_4^2, X_1X_4^2(X_1)^{-1}, (X_1X_4)X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-1}$, $(X_1X_4)^2X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-2}$, $(X_1X_4)^3X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-3}$, $(X_1X_4)^4X_1X_4^2X_1{}^{-1}(X_1X_4)^{-4}$
olarak bulunur.Ayrıca kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon yöntemini ve Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. Burada $p_j = 2$ ve $p_k = 8$ olduğundan (6.2) formülünde simge $\left(0;(5)^{12},(7)^{12},(4)^{(6)},(11)^{12},(12)^{12},\infty^{(2)}\right)$ olarak bulunur.

**Örnek 5.5** $H(2,2,3,7,9)$ genelleştirilmiş Hecke grubunun $H^4(2,2,3,7,9)$ kuvvet alt grubunu inceleyelim. $H(2,2,3,7,9)/H^4(2,2,3,7,9)$ bölüm grubu incelendiğinde

$$H(2,2,3,7,9)/H^4(2,2,3,7,9) = \langle X_1,X_2,X_3,X_4,X_5 \mid X_1^2 = X_2^2 = X_3^3 = X_4^7 = X_5^9 = I, X_i^4 = I \rangle$$

olur. Burada
$X_1^2 = I$ ve $X_1^4 = I$ olduğundan $X_1^2 = I$,
$X_2^2 = I$ ve $X_2^4 = I$ olduğundan $X_2^2 = I$ ,
$X_3^3 = I$ ve $X_3^4 = I$ olduğundan $X_3 = I$,
$X_4^7 = I$ ve $X_4^4 = I$ olduğundan $X_4 = I$,
$X_5^9 = I$ ve $X_5^4 = I$ olduğundan $X_5 = I$ bulunur. Son olarak bölüm grubu
$H(2,2,3,7,9)/H^4(2,2,3,7,9) \cong \langle X_1,X_2 \mid X_1^2 = X_2^2 = (X_1X_2)^4 = I \rangle \cong D_4$ olarak elde edilir. Buradan indeks $[H(2,2,3,7,9) : H^4(2,2,3,7,9)] = 8$ bulunur. Bir Schreier trasverseli olarak $\sum = \{I, X_1, X_2, X_1X_2, X_1X_2X_1, X_1X_2X_1X_2, X_1X_2X_1X_2X_1, X_1X_2X_1X_2X_1X_2\}$ seçelim. Üreteçleri bulmak için Reidemeister-Schreier yöntemini kullanalım.
$I.X_1.(X_1)^{-1} = I$,
$X_1.X_1.(I)^{-1} = I$,
$X_2.X_1.((X_1X_2)^3)^{-1} = X_2X_1(X_1X_2)^{-3}$,
$X_1X_2.X_1.(X_1X_2X_1)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1.X_1.(X_1X_2)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1X_2.X_1.(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1X_2X_1.X_1.(X_1X_2X_1X_2)^{-1} = I$,

$X_1X_2X_1X_2X_1X_2.X_1.(X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,

$I.X_2.(X_2)^{-1} = I$,
$X_1.X_2.(X_1X_2)^{-1} = I$,
$X_2.X_2.(I)^{-1} = I$,
$X_1X_2.X_2.(X_1)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1.X_2.(X_1X_2X_1X_2)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1X_2.X_2.(X_1X_2X_1)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1X_2X_1.X_2.(X_1X_2X_1X_2X_1X_2)^{-1} = I$,
$X_1X_2X_1X_2X_1X_2.X_2.(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1} = I$,

$I.X_3.(I)^{-1} = X_3$,
$X_1.X_3.(X_1)^{-1} = X_1X_3X_1{}^{-1}$,
$X_2.X_3.(X_2)^{-1} = X_2X_3X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2.X_3.(X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_3X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1.X_3.(X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_3X_1X_2X_1{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2.X_3.(X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_3X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1.X_3.(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_3(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1X_2.X_3.(X_1X_2X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_3X_1X_2X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,

$I.X_4.(I)^{-1} = X_4$,
$X_1.X_4.(X_1)^{-1} = X_1X_4X_1{}^{-1}$,
$X_2.X_4.(X_2)^{-1} = X_2X_4X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2.X_4.(X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_4X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1.X_4.(X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_4X_1X_2X_1{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2.X_4.(X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_4X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1.X_4.(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_4(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1X_2.X_4.(X_1X_2X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_4X_1X_2X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,

$I.X_5.(I)^{-1} = X_5$,
$X_1.X_5.(X_1)^{-1} = X_1X_5X_1{}^{-1}$,
$X_2.X_5.(X_2)^{-1} = X_2X_5X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2.X_5.(X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_5X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1.X_5.(X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_5X_1X_2X_1{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2.X_5.(X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_5X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1.X_5.(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_5(X_1X_2X_1X_2X_1)^{-1}$,
$X_1X_2X_1X_2X_1X_2.X_5.(X_1X_2X_1X_2X_1X_2)^{-1} = X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_5X_1X_2X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$,

biçimindedir. Burada $X_2X_1(X_1X_2)^{-3}$ ile $X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_1X_2{}^{-1}$ ifadelerini çarpınca yeni üreteç $X_2X_1(X_1X_2)^{-3}.X_1X_2X_1X_2X_1X_2X_1X_2^{-1} = I$ olarak bulunur. Buradan $H^4(2,2,3,7,9)$ kuvvet alt grubunun üreteçleri

$X_3$ , $X_1X_3X_1^{-1}$, $X_2X_1(X_1X_2)^{-3}$, $X_2X_3X_2^{-1}$, $X_1X_2X_3(X_1X_2)^{-1}$, $(X_1X_2)^2X_3(X_1X_2)^{-2}$, $X_4$ , $X_1X_4X_1^{-1}$, $X_2X_4X_2^{-1}$, $X_1X_2X_4(X_1X_2)^{-1}$, $(X_1X_2)^2X_4(X_1X_2)^{-2}$, $X_5$ , $X_1X_5X_1^{-1}$, $X_2X_5X_2^{-1}$, $X_1X_2X_5(X_1X_2)^{-1}$, $(X_1X_2)^2X_5(X_1X_2)^{-2}$

olarak bulunur.Ayrıca kuvvet alt grubunun simgesini bulmak için permütasyon yöntemini ve Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım. Burada $p_j = 2$ ve $p_k = 2$ olduğundan (6.2) formülünde simge $\left(0; (3)^{12}, (7)^{12}, (9)^{12}, \infty^{(2)}\right)$ olarak bulunur.

# 6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmanın bu bölümünde elde edilen sonuçlar özetlenecek ve ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler ve öneriler verilecektir.

Üçüncü bölümde $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının $H'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komutatör alt gruplarının üreteçleri, sunuşları ve simgeleri bulunmuştur.

Tezin dördüncü bölümünde $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının $\overline{H}'(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ komutatör alt grupları çalışılmıştır. $\overline{H}(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarının üreteçlerinin mertebeleri iki ($p_i = 2$) olanların sayısına s, mertebeleri ikiden farklı çift $p_i$ = çift $\geq 4$ olanların sayısına t ve mertebeleri $p_i$ = tek olanların sayısına u alınarak komütatör alt grubun üreteçlerinin formları elde edilmiştir.

Beşinci bölümünde ise $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının $H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ kuvvet alt grupları çalışılmıştır. (5.1), (5.2), (5.3) nolu teoremlerde m kuvveti ile $p_i$ üreteçleri arasındaki ilişkilere göre değerlendirmeler yapılmıştır. İncelenen durumlar dışındaki durumlar Reidemeister-Schereier yöntemi çalışmadığı için ele alınmamıştır.

İleride yapılacak çalışmalarda beşinci bölümde incelenen kuvvet alt grubunun $(H^m(p_1, p_2, \ldots, p_n))'$ komütatörü incelenebilir. Ayrıca $H(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ genelleştirilmiş Hecke gruplarının sonlu indeksli alt gruplarının bulunabilir. Sonlu indeksli normal alt grupları sınıflandırılabilir.

# 7. KAYNAKLAR


[1] Hecke, E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", Math. Ann , 11, 664-699, (1936).

[2] Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Groups", Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "On the group structure and parabolic points of the Hecke group H(λ)", Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 51, 35-46,(2002).

[4] Cangül, İ. N., Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "Power Subgroups of Some Hecke Groups II" Houston J. Math., 33, 33-42, (2007).

[5] Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of the Hecke Group H($\sqrt{2}$) ", Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A, 43, 129-135, (1994).

[6] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Group H($\sqrt{5}$) ", Bull. Inst.Math. Acad. Sinica, 28, 4, 277-283, (2000).

[7] Cangül, İ.N. and Singerman, D., "Normal Subgroups of hecke groups and regular maps", Math. Proc. Camb. Pill. Soc., 59-74,(1998).000).

[8] İkikardeş, S., Şahin,R. and Koruoğlu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups", Rocky J. Math, 36(2), 497-508, (2006).

[9] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups", Ramanujan J., 151-159, (2011).

[10] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups II", C.R Acad. Sci., Paris, 127-130, (2011).

[11] Lehner, J. and Newman, M., "Real two-dimensional representations of the modular group and related groups", Amer. J. Math., 87, 945-954, (1965).

[12] Demir, "Extended Generalized Hecke groups" PhD. Thesis, Balıkesir University, Balıkesir, (2015).

[13] Huang S. Generalized Hecke groups and Hecke polygons. Ann Acad Sci Fenn Math 1999. 24 (1) : 187-214.

[14] Huang, S., "Realizability of torsioon free subgroups with prescribed signatures in Fuchsian groups" Taiwanese J. Math., 13, 441-457, (2009).

[15] Babadağlı, C., "Genelleştirilmiş Hecke Grupları", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, (2019).

[16] Jones, G. A. and Singerman, D., Complex functions, Cambridge: Cambridge University Press, (1987).

[17] Koruoğlu, Ö., "$\overline{H}(\lambda_p)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler", Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[18] Singerman, D., "Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups", Bull. London Math. Soc., 2, 319-323, (1970).

[19] Singerman, D., “Finitely maximal Fuchsian groups”, J. London Math. Soc., 2,6, 29-38, (1972).

[20] Cangül, İ. N., “Normal subgroups of Hecke groups”, Ph.D. Thesis, Southampton University, Southampton, (1993).

[21] Robinson, D. J. S., A Course in the theory of groups, New York: Springer-Verlag, (2001).

[22] Fraleigh, J. B., A first course in abstract algebra, 6, New York: Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[23] Robinson, D. J. S., A Course in the theory of groups, New York: Springer-Verlag, (2001).

**Yayın Listesi**

[1] G. Doğrayıcı and R. Şahin, "Commutator subgroups of generalized Hecke and extended generalized Hecke groups, II", Turk J Math, 44 : 2123−2131, (2020) **[Tezden türetilmiştir.]**