T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TZITZEICA EĞRİLERİNİN VE YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU

EMRAH TUNÇ

DOKTORA TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Bengü BAYRAM (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Kadri ARSLAN
Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR
Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ

BALIKESİR, EKİM - 2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Tzitzeica Eğrilerinin ve Yüzeylerinin Bir Karakterizasyonu**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Emrah TUNÇ

ÖZET

TZITZEICA EĞRİLERİNİN VE YÜZEYLERİNİN BİR KARAKTERİZASYONU
DOKTORA TEZİ
EMRAH TUNÇ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)
BALIKESİR, EKİM - 2021

Bu çalışma üç ve dört boyutlu Öklid uzayında eğriler, üç boyutlu Öklid uzayında yüzeyler ve dört boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler için Tzitzeica şartı üzerine yapılmış ve orijinal sonuçlar elde edilmiştir.
Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm, giriş bölümüdür.
İkinci bölümde, çalışma için gerekli olan temel tanım ve kavramlar verilmiştir.
Üçüncü bölümde, bazı özel tanımlı eğrilerin Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi) olma koşulları incelenmiştir. Bu eğriler normal, rektifiyan, 1. ve 2. mertebeden involute eğrileridir.
Dördüncü bölümde, Tzitzeica yüzeyi (Tz-yüzeyi) olma şartı yüzeyin temel form elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Bazı özel yüzeyler incelenmiş ve örnekler verilmiştir. Bu yüzeyler Monge, öteleme, çarpanlarına ayrılabilir, küresel çarpım, dönel ve regle yüzeylerdir. Ayrıca bu kısımda düzlemsel Tz-eğrisi tanımlanmıştır.
Beşinci bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında Tz-eğrisi olma şartı üç çeşit olarak belirlenmiştir. Bazı özel eğrilerin bu üç çeşit altında Tz-eğrisi olma şartları elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.
Altıncı bölümde, dört boyutlu Öklid uzayında bir hiperyüzeyin Tz-hiperyüzey olma şartı hiperyüzeyin temel form elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Bazı özel hiperyüzeyler incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Tzitzeica eğrisi, Tzitzeica yüzeyi, temel form, Gauss eğriliği

Bilim Kod / Kodları : 20402 Sayfa Sayısı : 108

ABSTRACT

A CHARACTERIZATION OF TZITZEICA CURVES AND SURFACES
PH.D THESIS
EMRAH TUNÇ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. BENGÜ BAYRAM)
BALIKESİR, OCTOBER - 2021

This study has been done on the Tzitzeica condition for curves in three and four dimensional Euclidean spaces, surfaces in three dimensional Euclidean space and hypersurfaces in four dimensional Euclidean space and some original results has been obtained.
This thesis consists of six chapters.
The first chapter is the introduction.
In the second chapter, basic definitions and theorems which will be used in the other chapters are given.
In the third chapter, the conditions for some specially defined curves (i.e. normal, rectifying, first and second order involute curves) to be Tzitzeica curves (Tz-curve) are examined.
In the fourth chapter, the condition of being a Tzitzeica surface (Tz-surface) is expressed in terms of the fundamental form elements of the surface. Some special surfaces are examined and examples are given. These surfaces are Monge, translation, factorable, spherical product, revolution and ruled surfaces. In addition, in this chapter planar Tz-curves are defined.
In the fifth chapter, Tz-curve condition for the four dimensional Euclidean space are determined as three types. Tz-curve conditions are obtained for some special curves under these three types and some examples are given.
In the sixth chapter, the condition for a hypersurface to be Tz-hypersurface in four dimensional Euclidean space is expressed in terms of fundamental form elements of the hypersurface. Some special hypersurfaces are examined and examples are given.

KEYWORDS: Tzitzeica curve, Tzitzeica surface, fundamental form, Gaussian curvature

Science Code / Codes : 20402 Page Number : 108

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{E}^3$	: 3-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^4$	: 4-boyutlu Öklid uzayı
$\mathbb{E}^n$	: n-boyutlu Öklid uzayı
C^∞	: Diferensiyellenebilme
df_p	: Türev dönüşümü
V_i	: Frenet vektörleri
k_i	: Frenet eğrilikleri
v	: x eğrisinin hızı
m_i	: Diferensiyellenebilir fonksiyon
d_{osc}	: Eğrinin bir noktasındaki oskülatör düzleminin orijinden uzaklığı
d_{tan}	: Yüzeyin bir noktasındaki teğet düzleminin orijinden uzaklığı
d	: Hiperyüzeyin bir noktasındaki teğet hiperdüzleminin orijinden uzaklığı
α, β	: Düzlemsel eğriler
E, F, G	: Yüzeyin birinci temel form katsayıları
e, f, g	: Yüzeyin ikinci temel form katsayıları
K	: Gauss eğriliği
A, B, C, E, F, G	: Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları
L, M, N, P, T, V	: Hiperyüzeyin ikinci temel form katsayıları
M	: Yüzey
N	: $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında yüzeyin birim normal vektör alanı
N_1	: $\mathbb{E}^2$ Öklid uzayında eğrinin birim normal vektör alanı
$S^n(1)$	: Birim n-küre
$T_p(M)$	: M nin p noktasındaki tanjant uzayı
X	: Regüler yama
$\langle \, , \rangle$	: İç çarpım
$\times$	: Vektörel çarpım
$\| \quad \|$	: Norm
ζ	: $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

ÖNSÖZ

Tez çalışmasının başından sonuna kadar geçen süreçte gerek akademik anlamda gerek özel hayata dair her problemin çözümünde bana destek ve rehber olan, çokça sabır ve anlayış gösteren danışman hocam Prof. Dr. Bengü Bayram'a teşekkürü borç bilirim.

Tez konusunun belirlenmesinde ve tez sürecinde hem akademik hem de manevi olarak desteğini hiç esirgemeyen hocam Prof. Dr. Kadri Arslan'a çok teşekkür ederim.

Bu süreçte değerli fikirlerini ve desteklerini esirgemeyen hocalarım Prof. Dr. Günay Öztürk'e ve Prof. Dr. Cihan Özgür'e teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım esnasında destek veren ve motivasyonumu hep arttıran sevgili eşim Canan'a teşekkür ediyorum.

Balıkesir, 2021 **Emrah Tunç**

1. GİRİŞ

George Tzitzeica, Rumen Matematikçi (1873-1939), 1907 de bugünlerde Tzitzeica yüzeyleri diye isimlendirilen bir yüzey sınıfı [1], 1911 de ise Tzitzeica eğrileri diye isimlendirilen bir eğri sınıfı tanıttı [2]. $\mathbb{E}^3$ de bir Tzitzeica eğrisi, k_2 eğriliğinin, eğrinin keyfi bir noktasındaki oskülatör düzlemin başlangıç noktasına olan d_{osc} uzaklığının karesiyle oranının sabit olmasıyla tanımlanır. $\mathbb{E}^3$ de bir Tzitzeica yüzeyi ise, K Gauss eğriliğinin, yüzeyin keyfi bir noktasındaki tanjant düzlemin başlangıç noktasına olan d_{tan} uzaklığının dördüncü kuvvetiyle oranının sabit olmasıyla tanımlıdır. Bu yüzey denklemi kendine, lineer olmayan integrali hesaplanabilir denklemlerin çözümü [3] ve Einstein alan denklemlerinin kozmoloji sabitinin bulunması [4] gibi teorik fizik konularında kullanım alanları bulmaktadır.

[5] de yazarlar Minkowski uzayında Tzitzeica eğrileri ve yüzeyleri arasındaki bağlantıları vermişlerdir. Negatif Gauss eğrilikli Tzitzeica yüzeylerinin asimptotik çizgilerinin Tzitzeica eğrileri olduğuna [6] da değinilmiştir. Yine [6] da Öklid uzayında Tzitzeica koşulunu sağlayan eliptik ve hiperbolik silindirik eğriler tespit edilmiştir. [7] ve [8] de sırasıyla hiperbolik ve eliptik silindirik eğriler Minkowski uzayına taşınmıştır. [9] da yazar, bir uzay eğrisinin Tzitzeica eğrisi olması için gerekli ve faydalı bir ifade vermiştir. Diğer taraftan Vilcu [10] da Cobb-Douglas çarpanlarına ayrılabilir hiperyüzeyinin bir Tz-hiperyüzey olması için gerek ve yeter şartı vermiştir. Ayrıca [11] de yazarlar Tz-şartını sağlayan öteleme hiperyüzeyleri sınıflandırmışlardır.

Bu çalışmanın amacı, üç ve dört boyutlu Öklid uzayında eğriler, üç boyutlu Öklid uzayında yüzeyler ve dört boyutlu Öklid uzayında hiperyüzeyler için Tzitzeica şartlarını elde etmektir.

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm, giriş bölümüdür.

İkinci bölüm, temel kavramlar olup dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, $\mathbb{E}^3$ de özel bazı eğriler, ikinci kısımda, $\mathbb{E}^3$ de bazı özel yüzeyler; üçüncü kısımda, $\mathbb{E}^4$ de özel bazı eğriler ve dördüncü kısımda, $\mathbb{E}^4$ de özel bazı hiperyüzeyler ifade edilmiştir.

Üçüncü bölümde, $\mathbb{E}^3$ de normal eğri, rektifiyan eğri, 1. ve 2. mertebeden involüt eğriler tanımlanmış ve bu eğrilerin Tzitzeica eğri olma şartları incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, düzlemsel Tz-eğrisi tanımlanmış ve Tzitzeica yüzey olma şartı yüzeyin temel form elemanları cinsinden ifade edilmiştir. Ayrıca Monge, öteleme, çarpanlarına ayrılabilir, küresel çarpım, dönel ve regle yüzeylerinin Tz-yüzey olma şartları incelenmiş ve örnekler verilmiştir.

Beşinci bölümde, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında Tz-eğri olma şartı üç çeşit olarak belirlenmiştir. Bazı özel eğrilerin bu üç çeşit altında Tz-eğrisi olma şartları elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

Altıncı ve son bölümde, $\mathbb{E}^4$ Öklid uzayında bir hiperyüzeyin Tz-hiperyüzey olma şartı hiperyüzeyin temel form elemanları cinsinden ifade edilmiş, bazı özel hiperyüzeylerin Tz-hiperyüzey olma şartları elde edilmiş ve örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve tanımlar verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, $\mathbb{E}^3$ deki bazı özel eğrilere yer verilmiştir. Bunlar sırasıyla küresel, Salkowski, anti-Salkowski, normal, rektifiyan, 1. ve 2. mertebeden involüt eğrileridir. İkinci kısımda, $\mathbb{E}^3$ deki bazı özel yüzeyler ele alınmıştır. Bunlar sırasıyla Monge, öteleme, çarpanlarına ayrılabilir, küresel çarpım, dönel ve regle yüzeylerdir. Üçüncü kısımda, $\mathbb{E}^4$ deki bazı özel eğriler ele alınmıştır. Bunlar T-sabit, N-sabit, oskülatör eğrileri ve sabit eğrilikli (W eğrileri) eğrilerdir. Dördüncü kısımda, ise $\mathbb{E}^4$ de bazı özel hiperyüzeylere yer verilmiştir. Bunlar da sırayla rotasyonel gömme, rotasyonel ve çarpanlarına ayrılabilir hiperyüzeylerdir.

2.1 $\mathbb{E}^n$ Öklid Uzayında Eğriler

Tanım 2.1.1 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere; $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin. Bu takdirde $x(I) \subset \mathbb{E}^n$ kümesine $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında (I, x) koordinat komşuluğu ile verilen bir *eğri* denir. $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığına, x eğrisinin parametre aralığı ve $s \in I$ değişkenine de *x(s)* eğrisinin parametresi denir. *x(s)* eğrisi için

$$\|x'\|: I \rightarrow \mathbb{R}$$

$$s \rightarrow \|x'\|(s) = \|x'(s)\|$$

şeklinde tanımlı $\|x'\|$ fonksiyonuna *x* eğrisinin *skaler hız fonksiyonu,* $\|x'(s)\|$ reel sayısına da *x* eğrisinin *x(s)* noktasındaki *skaler hızı* denir. Eğer her $s \in I$ için $\|x'(s)\| = 1$ ise *x* eğrisine *birim hızlı eğri* ve $s \in I$ parametresine de *eğrinin yay parametresi* denir.

Eğer her $s \in I$ için $x'(s) \neq 0$ ise, *x* eğrisine *regüler eğri* denir [12].

Tanım 2.1.2 $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere; $\mathbb{E}^n$ n-boyutlu Öklid uzayında $x: I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^n$ birim hızlı eğrisi verilsin. Eğer her $s \in I$ için x eğrisinin yüksek mertebeden türevleri $x'(s), x''(s), \ldots, x^{(d)}(s)$ lineer bağımsız olup $x'(s), x''(s), \ldots, x^{(d+1)}(s)$ vektörleri lineer bağımlı ise *x* eğrisine *d-mertebeli Frenet eğrisi* denir [13].

$\mathbb{E}^n$ uzayının d-mertebeli her bir *x* Frenet eğrisi üzerinde $\{V_1, V_2, \ldots, V_d\}$ biçiminde oluşturulan d-çatısı ve $k_1, k_2, \ldots, k_{d-1} : I \rightarrow \mathbb{R}$ Frenet eğrilik fonksiyonları için *x* eğrisinin Frenet türev denklemleri,

$$\begin{bmatrix} V_1{}' \\ V_2{}' \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{d-1}{}' \\ V_d{}' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_{d-1} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_{d-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ V_{d-1} \\ V_d \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Burada v, x eğrisinin hızıdır. Gram-Schmidt ortonormalleştirme yöntemi yardımıyla x eğrisinin Frenet çatısı ve Frenet eğrilikleri,

$$E_1 = x', \qquad E_d = x^{(\mathrm{k})} - \sum_{i=1}^{\mathrm{k}-1} \langle x^{(\mathrm{k})}, E_i \rangle \frac{E_i}{\|E_i\|^2}, \qquad V_i = \frac{E_i}{\|E_i\|}, \qquad 1 \le i \le d$$

$$k_{d-1} = \frac{\|E_{\mathrm{k}}\|}{\|E_{\mathrm{k}-1}\| \|E_1\|} \tag{2.2}$$

eşitlikleri yardımıyla elde edilir. Burada $\mathrm{k} \in \{2,3, \dots, d\}$ ve $k_d = k_{d+1} = \dots = k_{n-1} = 0$ dır [14].

2.2 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Eğriler

3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler bir eğri olsun. Eğer, $\forall s \in I$ için x in türevleri $x'(s), x''(s), x'''(s)$ lineer bağımsız ve $x'(s), x''(s), x'''(s), x^{\iota v}(s)$ lineer bağımlı ise x eğrisine 3-*mertebeli Frenet eğrisi* denir. Her bir 3-mertebeli Frenet eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3\}$ ortonormal 3-çatısı ve $k_1, k_2 : I \to \mathbb{R}$, *Frenet eğrilik fonksiyonları* için

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 \\ 0 & -k_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

Frenet denklemleri sağlanır, burada v, x eğrisinin *hızıdır* (yani $v = \|x'(s)\|$ dir) [14].

Buradan itibaren $\mathbb{E}^3$ de eğriler kısmında, $V_1(s)$ yerine $T(s)$, $V_2(s)$ yerine $N_1(s)$ ve $V_3(s)$ yerine $N_2(s)$ kullanılacaktır.

$\mathbb{E}^3$ de eğer $v = \|x'(s)\| = 1$ alınırsa, x eğrisi birim hızlı eğri olur ve (2.3) Frenet denklemleri

$$T'(s) = k_1(s) N_1(s)$$

$$N_1{}'(s) = -k_1(s) T(s) + k_2(s) N_2(s)$$

$$N_2{}'(s) = -k_2(s) N_1(s) \tag{2.4}$$

formunu alır.

$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. $T(s) = x'(s)$, x in *birim teğet vektör alanı* olarak adlandırılır.

$k_1 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+, \forall s \in I$ için

$$k_1(s) = \|T'(s)\| = \|x''(s)\|$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *x* in k_1 *eğrilik fonksiyonu* ve $k_1(s)$ değerine de *x* in k_1 *eğriliği* denir. Ayrıca $k_1(s) > 0$ olmak üzere;

$$N_1 = \frac{T'}{k_1} = \frac{T'}{\|T'(s)\|}$$

vektör alanı *asli normal vektör alanı,*

$$N_2 = T \times N_1$$

vektör alanı da *binormal vektör alanı* olarak adlandırılır.

$$k_2 : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad k_2 = -\langle {N_2}', N_1 \rangle$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *x* in k_2 *eğrilik fonksiyonu* ve $k_2(s)$ değerine o noktadaki k_2 *eğriliği (burulması)* denir.

$\mathbb{E}^3$ de, $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$m_0(s) = \langle x(s), T(s) \rangle, \qquad m_1(s) = \langle x(s), N_1(s) \rangle, \qquad m_2(s) = \langle x(s), N_2(s) \rangle \tag{2.5}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; *x* eğrisinin yer vektörü

$$x(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N_1(s) + m_2(s)N_2(s) \tag{2.6}$$

parametrik denklemini sağlar. (2.6) denkleminin *s* ye göre birinci türevi alınıp, (2.4) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} x'(s) &= {m_0}'(s)T(s) + m_0(s)T'(s) + {m_1}'(s)N_1(s) + m_1(s){N_1}'(s) + {m_2}'(s)N_2(s) \\ &\quad + m_2(s){N_2}'(s) \\ &= \big({m_0}'(s) - m_1(s)k_1(s)\big)T(s) + \big(m_0(s)k_1(s) + {m_1}'(s) - m_2(s)k_2(s)\big)N_1(s) \\ &\quad + \big(m_1(s)k_2(s) + {m_2}'(s)\big)N_2(s) \\ &= T(s) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$m_0' - k_1 m_1 = 1$

$m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0$

$$m_2' + k_2 m_1 = 0 \tag{2.7}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\mathbb{E}^3$ de eğrilerle ilgili kısımda (2.6) parametrik denklemi ve buna ait (2.7) eşitlikleri kullanılacaktır.

Tanım 2.2.1 Bir $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi için eğer x'in k_1 eğriliği $k_1(s)$ ve k_2 eğriliği $k_2(s)$ sabit fonksiyonlar iseler bu durumda x bir vida eğrisi veya bir helis olarak isimlendirilir [15].

Bu eğriler, Öklid dönüşümlerinin bir parametreli gruplarının izleri olduklarından, F. Klein ve S. Lie tarafından *W eğrileri* olarak isimlendirilmişlerdir [16].

Eğer $\mathbb{E}^3$ deki bir x eğrisinin $\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ oranı sıfırdan farklı sabit ise, bu eğri *genel helis* olarak adlandırılır [17].

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayındaki Salkowski (anti-Salkowski) eğrileri, sabit k_1 eğrilikli (k_2 eğrilikli) fakat sabit olmayan k_2 eğriliğe (k_1 eğriliğe) sahip eğrilerin ailesi olarak bilinir [18,19].

Tanım 2.2.2 Bir $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi için, x in her noktasında $\{T, N_1\}$, $\{T, N_2\}$, $\{N_1, N_2\}$ tarafından gerilen düzlemler sırasıyla, *oskülatör düzlem, rektifiyan düzlem* ve *normal düzlem* olarak adlandırılır. Eğer x eğrisinin yer vektörü rektifiyan düzlemde yatıyorsa, x *rektifiyan eğri*, oskülatör düzlemde yatıyorsa *oskülatör eğri,* normal düzlemde yatıyorsa eğri *normal eğri* olarak isimlendirilir [20, 21].

Tanım 2.2.3 Bir $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ regüler eğrisi için, x yer vektörü her noktada teğet ve normal bileşenlerine ayrıştırılabilir:

$x = x^T + x^N.$

Eğer x eğrisinin yer vektörünün x^N normal bileşeni sabit uzunluklu ise bu eğriye *N-sabit* eğri denir [22, 23, 24]. *x,* N-sabit eğrisi için ya $\|x^N\| = 0$ ya da $\|x^N\| = \mu$ dir. Burada μ

sıfır olmayan sabittir. Bununla beraber x, N-sabit eğrisi eğer $\|x^N\| = 0$ ise 1. *çeşit* diğer durumda 2. *çeşit* eğri olarak adlandırılır.

Önerme 2.2.4 $\mathbb{E}^3$'de bir eğrinin N-sabit eğri olması için gerek ve yeter şart $\frac{k_2(s)}{k_1(s)}$ oranının s yay uzunluğu parametresine bağlı, sabit olmayan lineer fonksiyon olmasıdır. Yani, $c_1 \neq 0$ olmak üzere; c_1 ve c_2 sabitleri için $\frac{k_2}{k_1}(s) = c_1 s + c_2$ olmasıdır [22, 24].

Tanım 2.2.5 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^n$ birim hızlı bir eğri olsun. O zaman, *x* in *k*-boyutlu oskülatör hiperdüzlemine dik olan eğriler *x* eğrisinin *k. mertebeden involütleri* olarak adlandırılır [25]. *x* eğrisinin *k*. mertebeden $\bar{x}$ involütlerinin parametrizasyonu

$$\bar{x}(s) = x(s) + \sum_{\alpha=1}^{k} \lambda_\alpha(s) V_\alpha(s), \quad k \leq n-1 \tag{2.8}$$

ifadesiyle verilir. Burada λ_α lar diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

2.3 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Yüzeyler

M, $\mathbb{E}^3$ uzayının bir alt kümesi olsun. $X: U \subset \mathbb{E}^2 \to M \subset \mathbb{E}^3$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olmak üzere; $\mathbb{E}^3$ uzayında bir koordinat yaması oluşturur. Bu yama regülerse M kümesine $\mathbb{E}^3$ uzayında *türevlenebilir (düzgün) bir yüzey* denir [26].

M yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilen bir yüzey olsun. M yüzeyinin keyfi bir $p \in X(u,v)$ noktasındaki teğet uzayı $T_p(M)$, X_u ve X_v vektörleri ile gerilen bir vektör uzayıdır. Böylece M yüzeyinin *birinci temel formu*

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \tag{2.9}$$

eşitliği ile hesaplanır. Burada

$$E = \langle X_u, X_u \rangle, \qquad F = \langle X_u, X_v \rangle, \qquad G = \langle X_v, X_v \rangle \tag{2.10}$$

olup $\langle\ ,\ \rangle$ Öklid iç çarpımıdır. Bununla birlikte (2.10) yardımıyla

$$\|X_u \times X_v\|^2 = EG - F^2 \tag{2.11}$$

elde edilir. Eğer $X_u \times X_v \neq 0$ ise X $(u,\ v)$ yaması *regülerdir* denir [26]. Aksi belirtilmedikçe $X(u,v)$ yaması regüler kabul edilecektir ve

$$EG - F^2 = W^2 \tag{2.12}$$

ile gösterilecektir.

Tanım 2.3.1 M yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. *X(u,v)* yamasının ikinci mertebeden kısmi türevleri X_{uu}, X_{uv}, X_{vv} ve birim normal vektör alanı N olmak üzere; *M* yüzeyinin *ikinci temel form katsayıları*

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle, \qquad f = \langle X_{uv}, N \rangle, \qquad g = \langle X_{vv}, N \rangle \tag{2.13}$$

şeklinde tanımlanır. Ayrıca yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \tag{2.14}$$

ile tanımlıdır [27].

Tanım 2.3.2 *M* yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. Eğer *X(u,v)* yaması, $f: U \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon olmak üzere;

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v)) \tag{2.15}$$

parametrizasyonuyla veriliyorsa *X(u,v)*, *Monge yaması (Monge patch)* olarak adlandırılır.

Tanım 2.3.3 *M* yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. Eğer *X(u,v)* yaması, *f* ve *g* türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$X(u,v) = (u, v, f(u) + g(v)) \tag{2.16}$$

parametrizasyonuyla verilirse *M*, 1. *tip öteleme yüzeyi (*1*-type translation surface)*,

$$X(u,v) = (u + v, g(v), f(u)) \tag{2.17}$$

parametrizasyonuyla verilirse *M, 2. tip öteleme yüzeyi (*2*-type translation surface)* olarak adlandırılır [28].

Ayrıca 1. tip öteleme yüzeyinin *X(u,v)* yaması,

$$X(u,v) = \big(u, 0, f(u)\big) + \big(0, v, g(v)\big)$$
$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

ve 2. tip öteleme yüzeyinin *X(u,v)* yaması,

$$X(u,v) = \big(u, 0, f(u)\big) + (v, g(v), 0)$$
$$X(u,v) = \alpha(u) + \beta(v)$$

olacak şekilde iki düzlemsel eğrinin toplamları şeklinde de ifade edilir.

Tanım 2.3.4 *M* yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. Eğer *X(u,v)* yaması, f ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere;

$$X(u,v) = (u, v, f(u)g(v)) \tag{2.18}$$

ya da

$$X(u,v) = (f(u)g(v), u, v,) \tag{2.19}$$

ya da

$$X(u,v) = (u, f(u)g(v), v) \tag{2.20}$$

parametrizasyonlarıyla verilirse, bu yamalarla tanımlanan yüzeylere *çarpanlarına ayrılabilir yüzey (factorable surface)* denir [29] .

Tanım 2.3.5 α, β : $\mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ iki türevlenebilir düzlemsel eğriler olsun. $\alpha(u) = \big(f_1(u), f_2(u)\big)$, $\beta(v) = \big(g_1(v), g_2(v)\big)$ olmak üzere; bu iki eğrinin *küresel çarpımı (spherical product)* $\alpha \times \beta : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ olacak şekilde

$$X(u,v) = (f_1(u), f_2(u)g_1(v), f_2(u)g_2(v)) \tag{2.21}$$

şeklinde tanımlanır. Bu yamayla verilen yüzeye *küresel çarpım yüzeyi* denir [30].

Tanım 2.3.6 (2.21) parametrik ifadesi ile verilen küresel çarpım yüzeyinde

$\beta(v) = (\cos v, \sin v)$ olarak alınırsa

$$X(u,v) = (f_1(u), f_2(u)\cos v, f_2(u)\sin v) \tag{2.22}$$

şeklinde elde edilen yüzeye *dönel yüzey (surface of revolution)* denir.

Tanım 2.3.7 M yüzeyi $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. $\alpha(u) = (x_1(u), y_1(u), z_1(u))$ ve $\gamma(u) = (x_2(u), y_2(u), z_2(u))$, $\mathbb{E}^3$ de regüler eğriler olsunlar. Eğer $M \subset \mathbb{E}^3$ yüzeyinin parametrizasyonu

$$X(u,v) = \alpha(u) + v\gamma(u) \tag{2.23}$$

biçiminde veriliyorsa o zaman M yüzeyi *regle yüzey (ruled surface)* olarak isimlendirilir [27]. Regle yüzey, bir parametreye bağlı doğru ailesi olarak da ifade edilir. α üreteç eğrisi, γ doğrultman eğrisidir.

2.4 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Eğriler

4-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^4$ de $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ regüler bir eğri olsun. Eğer, x eğrisinin türevleri $x'(s), x''(s), x'''(s), x^{iv}(s)$ lineer bağımsız ve $x'(s), x''(s), x'''(s), x^{iv}(s), x^{v}(s)$ lineer bağımlı ise x eğrisine 4-*mertebeli Frenet eğrisi* denir. Her bir 4-mertebeli Frenet eğrisinin $\{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ ortonormal 4-çatısı ve $k_1, k_2, k_3 : I \to \mathbb{R}$, *Frenet eğrilik fonksiyonları* için

$$\begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \\ V_4' \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} 0 & k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & 0 & k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

Frenet denklemleri sağlanır, burada *v*, *x* eğrisinin hızıdır (yani $v = \|x'(s)\|$) [14].

Buradan itibaren $\mathbb{E}^4$ de eğriler kısmında, $V_1(s)$ yerine $T(s)$, $V_2(s)$ yerine $N_1(s)$, $V_3(s)$ yerine $N_2(s)$ ve $V_4(s)$ yerine $N_3(s)$ kullanılacaktır.

$\mathbb{E}^4$ de eğer $v = \|x'(s)\| = 1$ ise *x* eğrisi birim hızlı eğri olarak adlandırılır ve (2.24) Frenet denklemleri

$$T'(s) = k_1(s)N_1(s)$$
$$N_1{}'(s) = -k_1(s)T(s) + k_2(s)N_2(s)$$
$$N_2{}'(s) = -k_2(s)N_1(s) + k_3(s)N_3(s)$$

$$N_3{}'(s) = -k_3(s)N_2(s) \tag{2.25}$$

formunu alır.

$x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun.

$$m_0(s) = \langle x(s), T(s)\rangle, \qquad m_1(s) = \langle x(s), N_1(s)\rangle$$
$$m_2(s) = \langle x(s), N_2(s)\rangle, \qquad m_3(s) = \langle x(s), N_3(s)\rangle \tag{2.26}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; *x* eğrisinin yer vektörü

$$x(s) = m_0(s)T(s) + m_1(s)N_1(s) + m_2(s)N_2(s) + m_3(s)N_3(s) \tag{2.27}$$

parametrik denklemini sağlar. (2.27) denkleminin *s* ye göre birinci türevi alınıp (2.25) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} x'(s) &= m_0{}'(s)T(s) + m_0(s)T'(s) + m_1{}'(s)N_1(s) + m_1(s)N_1{}'(s) + m_2{}'(s)N_2(s) \\ &\quad + m_2(s)N_2{}'(s) + m_3{}'(s)N_3(s) + m_3(s)N_3{}'(s) \\ &= \big(m_0{}'(s) - m_1(s)k_1(s)\big)T(s) + \big(m_0(s)k_1(s) + m_1{}'(s) - m_2(s)k_2(s)\big)N_1(s) \\ &\quad + \big(m_1(s)k_2(s) + m_2{}'(s) - m_3(s)k_3(s)\big)N_2(s) + N_3(m_2(s)k_3(s) + m_3'(s)) \\ &= T(s) \end{aligned}$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned} &m_0' - k_1m_1 = 1 \\ &m_1' + k_1m_0 - k_2m_2 = 0 \\ &m_2' + k_2m_1 - k_3m_3 = 0 \\ &m_3' + k_3m_2 = 0 \end{aligned} \tag{2.28}$$

eşitlikleri elde edilir.

$\mathbb{E}^4$ de eğrilerle ilgili kısımda (2.27) parametrik denklemi ve buna ait (2.28) eşitlikleri kullanılacaktır.

Tanım 2.4.1 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\|x^T\| = c$ sabit ise o zaman *x* eğrisine *T-sabit eğri (T-constant curve)* denir. *x*, T-sabit eğrisi için $\|x^T\| = 0$ ya da $\|x^T\| = \lambda$ dır. Burada λ sıfır olmayan diferensiyellenebilir fonksiyondur [31,32]. Bununla beraber, $\|x^T\| = 0$ ise *x*, T-sabit eğrisi 1. *çeşit* diğer durumda 2. *çeşit* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.2 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer $\|x^N\| = c$ sabit ise o zaman x e *N-sabit eğri (N-constant curve)* denir. *x,* N-sabit eğrisi için $\|x^N\| = 0$ ya da $\|x^N\| = \mu$ dır. Burada μ sıfır olmayan diferensiyellenebilir fonksiyondur [31,32]. Bununla beraber, $\|x^N\| = 0$ ise *x*, N-sabit eğrisi 1. *çeşit* diğer durumda 2. *çeşit* olarak adlandırılır.

Tanım 2.4.3 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı bir eğri olsun. Eğer *x* eğrisinin yer vektörü, $\{T, N_1, N_3\}$ tarafından gerilen hiperdüzlemde yatıyorsa, o zaman *x* e $\mathbb{E}^4$ de 1. *çeşit oskülatör eğri*, $\{T, N_2, N_3\}$ tarafından gerilen hiperdüzlemde yatıyorsa o zaman *x* e $\mathbb{E}^4$ de 2. *çeşit oskülatör eğri*, $\{T, N_1, N_2\}$ tarafından gerilen hiperdüzlemde yatıyorsa o zaman *x* e $\mathbb{E}^4$ de 3*. çeşit oskülatör eğri* denir.

Tanım 2.4.4 Bir $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, $\mathbb{E}^4$ de birim hızlı eğrisi için eğer *x*'in Frenet eğrilikleri k_1, k_2, k_3 sabit fonksiyonlar iseler bu durumda *x* genelleştirilmiş *vida eğrisi* veya bir *helis* olarak isimlendirilir [15].

Bu eğriler, Öklid dönüşümlerinin bir parametreli gruplarının izleri olduklarından, F. Klein ve S. Lie tarafından *W eğrileri* olarak isimlendirilmişlerdir [16].

2.5 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Hiperyüzeyler

$U \subset \mathbb{E}^4$ bir açık küme olsun. f diferensiyellenebilir bir fonksiyon ve c reel sabit olmak üzere;

$M = \{x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in U \mid f: U \to \mathbb{R}, f(x) = c\}$

kümesinde her $p \in M$ için $\nabla f(p) \neq 0$ oluyorsa M kümesine $\mathbb{E}^4$ uzayında bir *hiperyüzey* denir [13].

Tanım 2.5.1 $\mathbb{E}^4$'de $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3, y_4)$, $\vec{z} = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ vektörleri için iç çarpım

$$\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 + x_4 y_4 \tag{2.29}$$

ve üçlü vektörel çarpım

$$\vec{x} \times \vec{y} \times \vec{z} = det \begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} = (&x_2 y_3 z_4 - x_2 y_4 z_3 - x_3 y_2 z_4 + x_3 y_4 z_2 + x_4 y_2 z_3 - x_4 y_3 z_2, \\ &-x_1 y_3 z_4 + x_1 y_4 z_3 + x_3 y_1 z_4 - x_3 z_1 y_4 - y_1 x_4 z_3 + x_4 y_3 z_1, \\ &x_1 y_2 z_4 - x_1 y_4 z_2 - x_2 y_1 z_4 + x_2 z_1 y_4 + y_1 x_4 z_2 - x_4 y_2 z_1, \\ &-x_1 y_2 z_3 + x_1 y_3 z_2 + x_2 y_1 z_3 - x_2 y_3 z_1 - x_3 y_1 z_2 + x_3 y_2 z_1) \end{aligned} \tag{2.30}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.5.2 M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla *n* ve (*n*+*d*)-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olmak üzere; $f: M \to \widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için

$df_p: T_p(M) \to T_{f(p)}(\widetilde{M})$

dönüşümü birebir ise f ye bir *immersiyon (daldırma)* denir. Ayrıca $f: M \to f(M)$ bir homeomorfizm ise *f* ye bir *gömme (imbedding)* denir. Eğer $M^n \subseteq \widetilde{M}^{n+d}$ ve $f: M \to \widetilde{M}$ dönüşümü bir gömme ise M ye $\widetilde{M}$ nin *n*-boyutlu bir *immersed (gömülen) altmanifoldu* adı verilir. Bununla beraber f bir immersiyon olmak üzere; $\forall X, Y \in T_p(M)$ için

$\langle df_p(X), df_p(Y) \rangle_{f(p)} = \langle X, Y \rangle_p$

şartını sağlıyorsa, *f* ye bir *izometrik immersiyon* adı verilir [33].

$X = X(u, v, w)$, $\mathbb{E}^4$'de M^3 hiperyüzeyinin izometrik immersiyonu olsun. Hiperyüzeyin birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{X_u \times X_v \times X_w}{\|X_u \times X_v \times X_w\|} \tag{2.31}$$

ile tanımlıdır. Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları,

$$\begin{aligned} &E = < X_u, X_u > \quad F = < X_u, X_v > \quad G = < X_v, X_v > \\ &A = < X_u, X_w > \quad B = < X_v, X_w > \quad C = < X_w, X_w > \end{aligned} \tag{2.32}$$

şeklinde, ikinci temel form katsayıları da

$$\begin{aligned} &L = < X_{uu}, \zeta > \quad M = < X_{uv}, \zeta > \quad N = < X_{vv}, \zeta > \\ &P = < X_{uw}, \zeta > \quad T = < X_{vw}, \zeta > \quad V = < X_{ww}, \zeta > \end{aligned} \tag{2.33}$$

şeklindedir. Ayrıca hiperyüzeyin Gauss eğriliği

$$detI = (EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E$$
$$detII = (LN - M^2)V + 2MPT - P^2N - T^2L \tag{2.34}$$

olmak üzere;

$$K = \frac{(LN - M^2)V + 2MPT - P^2N - T^2L}{(EG - F^2)C + 2ABF - A^2G - B^2E} = \frac{detII}{detI} \tag{2.35}$$

ifadesiyle elde edilir [34].

Tanım 2.5.3 M bir C^{∞} manifold olmak üzere; $f: M^m \rightarrow \mathbb{E}^{m+d}$ $f(u) = \left(f_1(u), f_2(u), \dots, f_{m+d}(u)\right);\ u = (u_1, u_2, \dots, u_m) \epsilon M^m$ izometrik immersiyon ve $g: S^n(1) \rightarrow \mathbb{E}^{n+1}$

$$g(v_1, v_2, \dots, v_n) = (\prod_{i=1}^{n} cos\, v_i\, , \prod_{j=2}^{n} sinv_1 cos\, v_j\, , \prod_{k=3}^{n} sinv_2 cos\, v_k\, , \dots, sinv_{n-1} cos\, v_n\, , sinv_n)$$

biçiminde bir gömme tanımlansın. Bu takdirde $\forall u \epsilon M^m;\ f_1(u) \neq 0$ ve $v \epsilon S^n$ için

$$X: M^m \times S^n(1) \rightarrow \mathbb{E}^{m+n+d}$$
$$(u, v) \rightarrow X(u, v) = \left(f_1(u), f_2(u), \dots, f_{m+d-1}(u), f_{m+d}(u).\, g(v)\right) \tag{2.36}$$

şeklinde tanımlanan *X* gömmesi *rotasyonel gömme* olarak tanımlanır [35].

Tanım 2.5.4 $\gamma: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \Pi \subset \mathbb{E}^2$, $\mathbb{E}^4$ de bir düzlem eğrisi ve ℓ bu düzlemde düz bir doğru olsun. $\mathbb{E}^4$ de bir *dönel hiperyüzey*, γ profil eğrisinin ℓ ekseni etrafında dönmesiyle tanımlanır. ℓ, $(0,0,0,1)$ vektörü tarafından gerilen doğru olsun ve $v, w \in \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$Z = \begin{pmatrix} \cos v \cos w & -\sin v & -\cos v \sin w & 0 \\ \sin v \cos w & \cos v & -\sin v \sin w & 0 \\ \sin w & 0 & \cos w & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.37}$$

ortogonal matrisi göz önüne alınırsa, bu matris

$$Z.\ell = \ell\,,\ \ Z.Z^t = Z^t.Z = I_4\,,\ \ detZ = 1 \tag{2.38}$$

eşitliklerini sağlar. $\varphi(u): I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\forall u \in I$ için diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; profil eğrisi $\gamma(u) = (u, 0{,}0, \varphi(u))$ ile verilir. (0,0,0,1) vektörü tarafından gerilen dönel hiperyüzey,

$$X(u,v,w) = Z(v,w).\gamma(u) \tag{2.39}$$

çarpımıyla elde edilir ve $u \in \mathbb{R} - \{0\}$ ve $v, w \in [0,2\pi)$ olmak üzere;

$$X(u,v,w) = \left(u \cos v \cos w\,, u \sin v \cos w\,, u \sin w\,, \varphi(u)\right) \tag{2.40}$$

şeklinde tanımlıdır [36].

Tanım 2.5.5 $X: \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^4$ ve $f = f(u,v,w)$ diferensiyellenebilir bir fonksiyon olacak şekilde $X(u,v,w) = (u, v, w, f(u,v,w))$ dönüşümüne *Monge hiperyüzey* denir [37]. f fonksiyonu özel olarak $f(u,v,w) = f_1(u).f_2(v).f_3(w)$ seçilirse, Monge hiperyüzeyi *çarpanlarına ayrılabilir (factorable) hiperyüzey* olarak isimlendirilir ve

$$X(u,v,w) = \left(u, v, w, f_1(u).f_2(v).f_3(w)\right) \tag{2.41}$$

parametrizasyonu ile verilir.

3. $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA EĞRİLERİ

Tanım 3.1 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere; birim hızlı bir eğri olsun. *a* sıfırdan farklı sabit olmak üzere; eğer x'in k_2 eğriliği,

$$\frac{k_2(s)}{d_{osc}^2} = a \tag{3.1}$$

koşulunu sağlıyorsa, bu durumda x'e *Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi)* denir. x'in oskülatör düzleminin orijinden uzaklığı $d_{osc} = \langle x, N_2 \rangle$ ifadesi ile verilir. Burada N_2, x in binormal vektör alanıdır [2].

Teorem 3.2 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı bir eğri olsun. x'in Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_2'(s)\langle N_2(s), x(s)\rangle + 2k_2^2(s)\langle N_1(s), x(s)\rangle = 0 \tag{3.2}$$

olmasıdır. Bu eşitlik aynı zamanda (2.5) eşitliklerinden

$$k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 = 0 \tag{3.3}$$

ifadesine denktir.

İspat: ($\Rightarrow$) (3.1) ifadesinde her iki tarafın türevi alınırsa,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{k_2}{\langle N_2, x\rangle^2}\right)' = (a)' \;\Rightarrow\; & \frac{k_2'\langle N_2, x\rangle^2 - 2k_2\langle N_2, x\rangle\langle N_2, x\rangle'}{\langle N_2, x\rangle^4} = 0 \\
& \Rightarrow k_2'\langle N_2, x\rangle^2 - 2k_2\langle N_2, x\rangle[\langle N_2{}', x\rangle + \langle N_2, x'\rangle] = 0 \\
& \Rightarrow k_2'\langle N_2, x\rangle - 2k_2[\langle -k_2 N_1, x\rangle + \langle N_2, T\rangle] = 0 \\
& \Rightarrow k_2'\langle N_2, x\rangle + 2k_2^2\langle N_1, x\rangle = 0
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca (2.5) yardımıyla (3.3) elde edilir.

($\Leftarrow$) İspatın diğer yönü açıktır.

Teorem 3.3 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ olmak üzere; birim hızlı bir eğri olsun. x'in küresel bir eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{k_2(s)}{k_1(s)} = \left(\frac{k_1'(s)}{k_2(s)k_1^2(s)}\right)' \tag{3.4}$$

olmasıdır [12].

Teorem 3.4 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $k_1(s) > 0$ ve $k_2(s) \neq 0$ şartlarını sağlayan birim hızlı küresel bir eğri olsun. Eğer *x*, bir *Tz-eğrisi* ise bu durumda, *x* in eğrilikleri arasında

$$\frac{k_2'(s)}{2k_2^3(s)} = \frac{k_1(s)}{k_1'(s)} \tag{3.5}$$

bağıntısı vardır. Ayrıca *x* in k_2 eğriliği,

$$k_2(s) = \sqrt{\frac{k_1''(s)k_1(s) - 2{k_1'}^2(s)}{3{k_1}^2(s)}} \tag{3.6}$$

denklemini sağlar.

İspat x, birim hızlı küresel bir eğri olsun. Bu durumda $\|x\| = r$ dir. *x*, (2.5) yardımıyla

$$\|x\| = r = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
$$(\langle x, x\rangle)' = (r^2)' \;\Rightarrow\; \langle x, x'\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \langle x, T\rangle = 0 = m_0 \tag{3.7}$$

elde edilir. Bununla birlikte (2.4) Frenet denklemleri kullanılarak

$$\langle x, T\rangle' = 0 \;\Rightarrow\; \langle x', T\rangle + \langle x, T'\rangle = 0$$
$$\Rightarrow 1 + k_1\langle x, N_1\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \langle x, N_1\rangle = \frac{-1}{k_1} = m_1 \tag{3.8}$$

elde edilir. Ayrıca (2.4) Frenet denklemleri yardımıyla

$$\langle x, N_1\rangle' = \left(\frac{-1}{k_1}\right)' \;\Rightarrow\; \langle x', N_1\rangle + \langle x, {N_1}'\rangle = \frac{{k_1}'}{{k_1}^2}$$
$$\Rightarrow\; 0 - k_1\langle x, T\rangle + k_2\langle x, N_2\rangle = \frac{{k_1}'}{{k_1}^2}$$

olur. (3.7) ifadesinde $\langle x, T\rangle = 0$ olduğundan

$$\langle x, N_2\rangle = \frac{{k_1}'}{k_2{k_1}^2} = m_2 \tag{3.9}$$

bulunur. Üstteki $\langle x, N_1\rangle$ ve $\langle x, N_2\rangle$ değerleri (3.2) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_2'\langle N_2, x\rangle + 2k_2^2\langle N_1, x\rangle = 0$$

$$k_2'\frac{{k_1}'}{k_2{k_1}^2} + 2k_2^2\frac{(-1)}{k_1} = 0 \;\Rightarrow\; \frac{k_2'{k_1}' - 2k_2^3k_1}{k_2{k_1}^2} = 0$$

$$\Rightarrow\; k_2'{k_1}' - 2k_2^3k_1 = 0$$

$$\Rightarrow\; \frac{k_2'}{2k_2^3} = \frac{k_1}{{k_1}'}$$

bulunarak (3.5) ifadesi elde edilmiş olur.

Diğer taraftan (3.4) ifadesinde eşitliğin sağ tarafındaki türev açılırsa

$$\frac{k_2}{k_1} = \left(\frac{k_1'}{k_2k_1^2}\right)'$$

$$= \frac{k_1''k_2{k_1}^2 - k_1'\left(k_2{k_1}^2\right)'}{{k_2}^2{k_1}^4}$$

$$= \frac{k_1''k_2{k_1}^2 - k_1'k_2'k_1^2 - k_1'k_2 2k_1'k_1}{{k_2}^2{k_1}^4}$$

$${k_2}^3{k_1}^3 = k_1''k_2{k_1}^2 - 2(k_1')^2k_1k_2 - k_1'k_2'k_1^2$$

ve (3.5) ifadesi de üstteki eşitliğin son teriminde kullanılırsa

$$3{k_2}^3{k_1}^3 = k_1''k_2{k_1}^2 - 2(k_1')^2k_2k_1$$

bulunur. Ara işlemler de yapılarak k_2 nin k_1 e bağlı olan (3.6) ifadesi elde edilir.

Sonuç 3.5 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı (2.6) parametrizasyonunu sağlayan küresel bir eğri olsun. Bu durumda Teorem 3.4 ün ispatında açıkça gösterilen

$$m_0 = 0$$

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$

$$m_2 = \frac{k_1'}{k_2k_1^2} \tag{3.10}$$

eşitlikleri elde edilir.

Sonuç 3.6 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı anti-Salkowski küresel Tz-eğrisi olsun. Bu durumda x'in k_2 eğriliği sabit olacağından, *x* in k_1 eğriliği

$$k_1(s) = \frac{\sqrt{3}k_2}{c_1 \sin\left(\sqrt{3}k_2 s\right) - c_2 \cos\left(\sqrt{3}k_2 s\right)} \tag{3.11}$$

ifadesiyle verilir. Burada $c_1 \; ve \; c_2$ integral sabitleridir.

İspat (3.6) ifadesinin düzenlenmesiyle $k_1'' k_1 - 2(k_1')^2 - 3{k_1}^2{k_2}^2 = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözülmesiyle (3.11) elde edilir.

Önerme 3.7 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, m_0, m_1, m_2 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; yer vektörü (2.6) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. Eğer *x*, Tz-eğrisi ise bu durumda

$$\begin{aligned} &m_0' - k_1 m_1 = 1 \\ &m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0 \\ &m_2' + k_2 m_1 = 0 \\ &k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 = 0 \end{aligned} \tag{3.12}$$

eşitlikleri vardır.

İspat *x*, (2.6) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı eğri olduğu için (2.7) denklemleri ve eğri Tz-eğrisi olduğu için (3.3) denklemine sahip olur. Sonuç olarak (3.12) denklem sistemi elde edilir.

Sonuç 3.8 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (2.6) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı anti-Salkowski Tz-eğrisi olsun ($k_2(s) \neq 0$, sabit). Bu durumda *x*, N-sabit rektifiyan bir eğridir.

İspat x anti-Salkowski eğri olduğundan $k_2 = sabit$ ve $k_2{}' = 0$ dır. (3.3) ifadesinde $k_2{}' = 0$ yerine yazılırsa

$$k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 = 0$$
$$\Rightarrow k_2^2 m_1 = 0$$
$$\Rightarrow m_1 = 0$$

elde edilir. (3.12) eşitliklerinde $m_1 = 0$ yerine yazılırsa birinci eşitlikten,

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$
$$\Rightarrow m_0' = 1$$
$$\Rightarrow m_0 = s + c_1$$

elde edilir. Üçüncü eşitlikte $m_1 = 0$ yerine yazılırsa

$$m_2' + k_2 m_1 = 0$$
$$\Rightarrow m_2' = 0$$
$$\Rightarrow m_2 = c_2$$

bulunur. m_0, m_1, m_2 değerleri (2.6) ifadesinde yerine yazılırsa

$$x(s) = (s + c_1)T(s) + c_2 N_2(s)$$

olur. Bu, eğrinin rektifiyan eğri olduğunu gösterir. Ayrıca m_0, m_1, m_2 değerleri (3.12) eşitliklerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0$$
$$k_1(s + c_1) - k_2 c_2 = 0$$
$$\Rightarrow \frac{k_2}{k_1} = \frac{s + c_1}{c_2}$$

elde edilir. Yani $\frac{k_2}{k_1}$ sabit olmayan lineer fonksiyon olmuştur. Bu durumda x eğrisi N-sabittir.

Sonuç 3.9 $x : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^3$, (2.6) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı Salkowski Tz-eğrisi olsun ($k_1(s) \neq 0$, sabit). Bu durumda

$$m_1''(s) + (k_1^2(s) + 3k_2^2(s))m_1(s) + k_1(s) = 0 \tag{3.13}$$

eşitliği elde edilir.

İspat x, Salkowski eğrisi olduğundan $k_1 = sabit$ ve ${k_1}' = 0$ dır. (3.12) eşitliklerinden ikincinin türevi alınırsa

$$(m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2)' = 0$$
$$m_1'' + k_1 {m_0}' - k_2' m_2 - k_2 m_2' = 0$$

elde edilir. (3.12) eşitliklerinin birincisinden ${m_0}'$, üçüncüsünden m_2' ve dördüncüsünden de $k_2' m_2$ çekilip üstteki eşitlikte yerine yazılırsa (3.13) eşitliği elde edilir.

3.1 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Normal Eğrileri

Tanım 3.1.1 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, birim hızlı normal eğrisi, $m_1(s)$ ve $m_2(s)$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $N_1(s)$ ve $N_2(s)$ sırasıyla x'in asli normal ve binormal vektör alanları olmak üzere;

$$x(s) = m_1(s) N_1(s) + m_2(s) N_2(s) \tag{3.14}$$

parametrik denklemiyle karakterize edilebilir [21].

Önerme 3.1.2 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (3.14) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı normal bir eğri olsun. (3.14) normal eğri denkleminin k_1 ve k_2 eğrilikleri cinsinden ifadesi,

$$x(s) = -\frac{1}{k_1(s)} N_1(s) + \frac{k_1'(s)}{(k_1^2 k_2)(s)} N_2(s) \tag{3.15}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$-k_1^2 k_2^3 + k_1 k_1'' k_2 - k_1 k_1' k_2' - 2(k_1')^2 k_2 = 0 \tag{3.16}$$

eşitliği de normal eğri olma şartıdır.

İspat (3.14) ifadesinin türevi (2.4) Frenet denklemleriyle beraber düşünülürse

$$\begin{aligned} x' &= {m_1}' N_1 + m_1 {N_1}' + {m_2}' N_2 + m_2 {N_2}' \\ &= {m_1}' N_1 + m_1(-k_1 T + k_2 N_2) + {m_2}' N_2 + m_2(-k_2 N_1) \end{aligned}$$

$$T = -k_1 m_1 T + (m_1{}' - k_2 m_2)N_1 + (k_2 m_1 + m_2{}')N_2$$

bulunur. Polinom eşitliğinden elde edilecek üç eşitlik

$$-k_1 m_1 = 1$$
$$m_1{}' - k_2 m_2 = 0$$
$$m_2{}' + k_2 m_1 = 0 \tag{3.17}$$

dır. Bu eşitliklerin birincisinden m_1 çekilip türevi alınırsa

$$-k_1 m_1 = 1$$
$$\Rightarrow m_1 = \frac{-1}{k_1}$$
$$\Rightarrow m_1{}' = \frac{k_1{}'}{k_1{}^2}$$

bulunur. $m_1{}'$ değeri (3.17) eşitliklerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$m_1{}' - k_2 m_2 = 0$$
$$\Rightarrow m_2 = \frac{m_1{}'}{k_2}$$
$$\Rightarrow m_2 = \frac{k_1{}'}{k_2 k_1{}^2}$$

olarak bulunur. Bulunan m_1 ve m_2 değerleri (3.14) de yerine yazılırsa (3.15) elde edilir.

Diğer taraftan m_1 ve m_2 değerleri (3.17) eşitliklerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$k_2 m_1 + m_2{}' = 0$$
$$k_2\left(\frac{-1}{k_1}\right) + \left(\frac{k_1{}'}{k_2 k_1{}^2}\right)' = 0$$
$$\Rightarrow \frac{-k_2}{k_1} + \frac{k_1{}'' k_2 k_1{}^2 - k_1{}' k_2{}' k_1{}^2 - k_1{}' k_2 2 k_1 k_1{}'}{\left(k_2 k_1{}^2\right)^2} = 0$$
$$\Rightarrow -k_1{}^2 k_2{}^3 + k_1 k_1{}'' k_2 - k_1 k_1{}' k_2{}' - 2(k_1{}')^2 k_2 = 0$$

bulunarak (3.16) denklemi de elde edilmiş olur.

Önerme 3.1.3 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (3.14) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı normal eğrinin Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$3k_1k_1'k_2' + 4(k_1')^2k_2 - 2k_1k_1''k_2 = 0 \quad (3.18)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (3.1) ifadesinde yer alan $d_{osc} = \langle x, N_2 \rangle$ aynı zamanda (2.5) ifadesiyle birlikte göz önüne alınırsa $m_2 = \langle x, N_2 \rangle = d_{osc}$ olur. Bu durumda (3.1) eşitliği

$$a = \frac{k_2}{{d_{osc}}^2} \Rightarrow a = \frac{k_2}{{m_2}^2}$$

formuna dönüşür. (3.15) deki $m_2 = \frac{{k_1}'}{k_2{k_1}^2}$ değeri üstteki ifadede yerine yazılırsa

$$a = \frac{k_2^3k_1^4}{(k_1')^2} \quad (3.19)$$

bulunur. (3.19) un türevi alınırsa

$$\frac{(k_1')^2 3k_2^2k_2'k_1^4 + (k_1')^2 4k_1^3k_1'k_2^3 - 2k_1'k_1''k_2^3k_1^4}{(k_1')^4} = 0$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.18) eşitliği elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 3.1.4 Tz-Normal eğrisi için $k_2 =$ sabit alınırsa $k_1(s) = \frac{c_1}{s+c_2}$ olarak bulunur ve eğri aynı zamanda anti-Salkowski eğrisi olur. Burada c_1, c_2 integral sabitleridir.

İspat $k_2 = sabit$ olduğundan $k_2' = 0$ olur. Bu durumda (3.18) ifadesinde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa $2(k_1')^2 - k_1k_1'' = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse $k_1(s) = \frac{c_1}{s+c_2}$ olarak bulunur. Burada c_1, c_2 integral sabitleridir.

3.2 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Rektifiyan Eğrileri

Tanım 3.2.1 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı rektifiyan eğrisi, $m_0(s)$ ve $m_2(s)$ türevlenebilir fonksiyonlar ve $T(s)$ ve $N_2(s)$ sırayla *x* in teğet ve binormal vektör alanları olmak üzere;

$$x(s) = m_0(s)T(s) + m_2(s)N_2(s) \tag{3.20}$$

parametrik denklemiyle karakterize edilmiştir [20, 22].

Önerme 3.2.2 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (3.20) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı rektifiyan eğri olsun. Rektifiyan eğri denklemi, c_1 ve c_2 integral sabitleri olmak üzere;

$$x(s) = (s + c_1)T(s) + c_2N_2(s) \tag{3.21}$$

şeklindedir. Ayrıca

$$\frac{k_1}{k_2}(s) = \frac{c_2}{s + c_1} \tag{3.22}$$

eşitliği de rektifiyan eğri olma şartıdır.

İspat (3.20) ifadesinin türevi (2.4) Frenet denklemleriyle beraber düşünülürse

$$\begin{aligned} x' &= m_0{}'T + m_0T' + m_2{}'N_2 + m_2N_2{}' \\ &= m_0{}'T + m_0(k_1N_1) + m_2{}'N_2 + m_2(-k_2N_1) \\ T &= m_0{}'T + (k_1m_0 - k_2m_2)N_1 + m_2{}'N_2 \end{aligned}$$

bulunur. Polinom eşitliğinden elde edilecek üç eşitlik

$$\begin{aligned} &m_0{}' = 1 \\ &k_1m_0 - k_2m_2 = 0 \\ &m_2{}' = 0 \end{aligned}$$

şeklindedir. Eşitliklerin birincisinde ve üçüncüsünde integral alınırsa

$$\begin{aligned} &m_0{}' = 1 \Rightarrow m_0 = s + c_1 \\ &m_2{}' = 0 \Rightarrow m_2 = c_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bulunan m_0 ve m_2 değerleri (3.20) de yerine yazılırsa (3.21) ifadesi elde edilir.

Diğer taraftan m_0 ve m_2 değerleri ikinci eşitlikte yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} &k_1m_0 - k_2m_2 = 0 \\ &k_1(s + c_1) - k_2c_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_2}{s + c_1}$$

olarak bulunur. Bu da, (3.22) rektifiyan eğri olma şartıdır.

Teorem 3.2.3 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (3.21) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı rektifiyan eğrinin Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart k_2 eğriliğinin sabit olması yani eğrinin anti-Salkowski eğrisi olmasıdır.

İspat (⇒) (2.26) ifadesinden $d_{osc} = \langle N_2, x \rangle = m_2$ idi. Önerme (3.2.2) nin ispatında $m_2 = c_2$ bulunmuştu. Bu değer (3.1) de yerine yazılırsa $a = \frac{k_2}{{c_2}^2}$ elde edilir ve a nın sabit olması yani eğrinin Tz-eğrisi olması ancak k_2 eğriliğinin sabit olmasıyla mümkündür.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 3.2.4 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı rektifiyan Tz-eğrisi için $k_1(s) = \frac{c_2 c_3}{s + c_1}$ olur. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleri, c_3 sıfırdan farklı sabittir.

İspat Eğri birim hızlı rektifiyan olduğundan (3.22) vardır. Tz-eğrisi olduğundan Teorem (3.2.3) den de $k_2 = c_3$ sabittir. Bu değer (3.22) de yerine yazılırsa $k_1(s) = \frac{c_2 c_3}{s + c_1}$ elde edilir.

Sonuç 3.2.5 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, (3.21) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı rektifiyan eğri, N-sabit eğriye denktir.

İspat Birim hızlı rektifiyan eğri koşulu olan $\frac{k_1}{k_2} = \frac{c_2}{s + c_1}$ ifadesinde k_2 nin k_1 e oranı sabit olmayan lineer fonksiyon olduğundan Tanım (2.2.3) gereği N-sabit eğriye denktir.

3.3 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında 1. Mertebeden Tz-İnvolüt Eğrileri

Tanım 3.3.1 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklerine sahip (2.6) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı bir eğri olsun. c integral sabiti olmak üzere; x'in 1. mertebeden involüt eğrisi

$$\bar{x}(s) = x(s) + (c - s)T(s) \tag{3.23}$$

şeklindedir [25].

Önerme 3.3.2 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin 1. mertebeden involüt eğrisi olan $\bar{x}(s)$ eğrisinin Tz-eğrisi olma şartı, $\bar{a}$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\bar{a} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'(s)k_1(s)}{(c-s)\big(k_1(s)m_2(s) + k_2(s)m_0(s) + (c-s)k_2(s)\big)^2} \tag{3.24}$$

eşitliğinin olmasıdır.

İspat (3.23) ifadesiyle verilen x eğrisine ait 1. mertebeden involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ eğrilikleri, x eğrisinin Frenet vektörleri ve k_1, k_2 eğrilikleri cinsinden sırasıyla

$$\bar{T} = N_1\,, \qquad \bar{N}_1 = \frac{-k_1 T + k_2 N_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}\,, \qquad \bar{N}_2 = \frac{k_2 T + k_1 N_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}}{|k_1||c-s|}\,, \qquad \bar{k}_2 = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' k_1}{(k_1^2 + k_2^2)(c-s)} \tag{3.25}$$

dır [25]. x eğrisinin 1. mertebeden involütü olan $\bar{x}$ eğrisinin Tz-eğrisi olma şartı $\bar{a} \neq 0$ sabit olmak üzere;

$$\bar{a} = \frac{\bar{k}_2}{\langle \bar{x}, \bar{N}_2 \rangle^2} \tag{3.26}$$

şeklindedir ve yine $\bar{d}_{osc} = \langle \bar{x}, \bar{N}_2 \rangle$ dir. Buradan $\bar{x}$ ve $\bar{N}_2$ yerine yazılır ve (2.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$\langle \bar{x}, \bar{N}_2 \rangle = \langle x + (c-s)T, \frac{k_2 T + k_1 N_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \rangle$$

$$= \frac{k_1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle x, N_2 \rangle + \frac{k_2}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle x, T \rangle + \frac{k_1(c-s)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle T, N_2 \rangle + \frac{k_2(c-s)}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} \langle T, T \rangle$$

$$= \frac{1}{\sqrt{k_1^2 + k_2^2}} [k_1 m_2 + k_2 m_0 + k_2(c-s)]$$

bulunur. Bu değer ve (3.25) eşitliklerindeki $\bar{k}_2$ nin değeri (3.26) da yerine yazılır, ara işlemler de yapılırsa (3.24) elde edilir.

Sonuç 3.3.3 Silindirik helisin $\frac{k_2}{k_1}$ değeri sabit olduğundan $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)' = 0$ olur ve (3.24) ifadesi sıfıra eşit olur. Bu da tanıma aykırıdır. Dolayısıyla silindirik helisin 1. mertebeden involütü Tz-eğrisi olamaz.

Sonuç 3.3.4 *x* birim hızlı küresel eğrisinin 1. mertebeden involütünün Tz-eğrisi olması için, $\bar{a}$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\bar{a} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'(s)\left({k_1}^3\, {k_2}^2\right)(s)}{(c-s)\left({k_1}'(s) + (c-s)k_1(s){k_2}^2(s)\right)^2} \tag{3.27}$$

eşitliği sağlanmalıdır.

İspat (3.24) ifadesinde (3.10) eşitlikleri yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

Önerme 3.3.5 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı küresel eğrisinin bir Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart, a sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\left(\frac{1}{k_1}\right)' = -\frac{(k_2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{a}} \tag{3.28}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat $d_{osc} = \langle N_2, x \rangle = m_2$ idi. (3.10) daki m_2 değeri (3.1) de yerine yazılırsa $a = \frac{k_2}{\left(\frac{k_1'}{k_2 k_1^2}\right)^2}$ olur. k_1 ve k_2 ler eşitliğin iki tarafında kalacak şekilde ara işlemler yapılırsa istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.6 *x*, birim hızlı küresel Tz-eğrisi olsun. *x* in 1. mertebeden involütü olan $\bar{x}$ de Tz-eğrisi ise

$$ak_2' - \sqrt{a}k_1 k_2^{5/2} - \bar{a}(c-s)k_1^2 k_2 + 2\sqrt{a}\bar{a}(c-s)^2 k_1 k_2^{3/2} + a\bar{a}(c-s)^3 k_2^2 = 0 \qquad (3.29)$$

bağıntısı elde edilir. Burada $a \neq 0$ sabit, x'in Tz-sabiti ve $\bar{a} \neq 0$ sabit, $\bar{x}$ in Tz-sabiti, $k_1,\ k_2$ ise *x* in sırayla sıfırdan farklı birinci ve ikinci eğrilikleridir.

İspat *x* birim hızlı küresel eğrisinin Tz-eğrisi olma şartı olan (3.28) ifadesinde eşitliğin sol tarafı açılır ve k_1' yalnız bırakılırsa

$$-\frac{k_1'}{k_1^2} = -\frac{k_2^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

$$k_1' = \frac{k_1^2 k_2^{3/2}}{\sqrt{a}}$$

bulunur. Diğer taraftan *x* birim hızlı küresel eğrisinin 1. mertebeden involütü $\bar{x}$ eğrisinin Tz-eğrisi olma şartı olan (3.27) ifadesinde $\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'$ açılırsa

$$\bar{a} = \frac{\left(\frac{k_2}{k_1}\right)'\left({k_1}^3\,{k_2}^2\right)}{(c-s)\left({k_1}' + (c-s)k_1{k_2}^2\right)^2} = \frac{\left(\frac{{k_2}'k_1 - k_2{k_1}'}{{k_1}^2}\right){k_1}^3\,{k_2}^2}{(c-s)\left({k_1}' + (c-s)k_1{k_2}^2\right)^2}$$

bulunur. Burada k_1' nün bir üstteki eşiti yerine yazılır ve ara işlemler yapılırsa

$$\bar{a} = \frac{\sqrt{a}\left(\sqrt{a}{k_2}' - k_1 k_2^{5/2}\right)}{(c-s)k_2\left[k_1 + \sqrt{a}(c-s)k_2^{1/2}\right]^2}$$

elde edilir. Buradan da işlem yapmaya devam edilirse (3.29) bağıntısına ulaşılır.

3.4 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında 2. Mertebeden Tz-İnvolüt Eğrileri

Tanım 3.4.1 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ sıfırdan farklı k_1 ve k_2 eğriliklerine sahip (2.6) parametrizasyonuyla verilen birim hızlı bir eğri olsun. *x* in 2. mertebeden involütü

$$\bar{x}(s) = x(s) + \lambda_1(s)T(s) + \lambda_2(s)N_1(s) \tag{3.30}$$

parametrizasyonuyla verilir. Burada T ve N_1, *x* in teğet ve asli normal vektör alanları ve λ_1 ve λ_2

$$\begin{aligned} \lambda_1'(s) &= k_1(s)\lambda_2(s) - 1 \\ \lambda_2'(s) &= -\lambda_1(s)k_1(s) \end{aligned} \tag{3.31}$$

eşitliklerini sağlayan türevlenebilir fonksiyonlardır [25].

Önerme 3.4.2 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı eğrisinin 2. mertebeden involütü olan $\bar{x}(s)$ eğrisinin *Tz-eğrisi* olma şartı, $\bar{a}$ sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\bar{a} = \frac{k_1(s)}{k_2(s)\lambda_2(s)\big(m_0(s) + \lambda_1(s)\big)^2} \tag{3.32}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (3.30) ifadesiyle verilen *x* eğrisine ait 2. mertebeden involüt eğrisinin Frenet vektörleri ve $\bar{k}_1, \bar{k}_2$ eğrilikleri, *x* eğrisinin Frenet vektörleri ve k_1, k_2 eğrilikleri cinsinden sırasıyla

$$\begin{aligned} &\bar{T} = N_2\,, \qquad \bar{N}_1 = -N_1\,, \qquad \bar{N}_2 = T \\ &\bar{k}_1 = \frac{sgn(k_2)}{|\lambda_2|}\,, \qquad \bar{k}_2 = \frac{k_1}{k_2\lambda_2} \end{aligned} \tag{3.33}$$

dır [25]. Ayrıca

$$\begin{aligned} \langle \bar{x}, \bar{N}_2 \rangle &= \langle x + \lambda_1 T + \lambda_2 N_1, T \rangle \\ &= \langle x, T \rangle + \lambda_1 \langle T, T \rangle + \lambda_2 \langle N_1, T \rangle \\ &= m_0 + \lambda_1 \end{aligned}$$

bulunur. Bu değer ve (3.33) eşitliklerindeki $\bar{k}_2$ nin değeri (3.26) Tz-eğri olma şartında yerine yazılır, ara işlemler de yapılırsa (3.32) elde edilir.

Sonuç 3.4.3 $m_0 + \lambda_1 = 0$ olursa (3.32) ifadesi tanımsız olacağından bu durumda *x* in 2. mertebeden involütü olamaz.

Sonuç 3.4.4 $x : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$ birim hızlı (2.6) parametrizasyonunu sağlayan küresel eğrinin 2. mertebeden involütünün Tz-eğrisi olması için

$$k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\lambda_1\lambda_2 - k_1(2\lambda_2^2k_1 - 2\lambda_2 - \lambda_1^2k_1) = 0 \tag{3.34}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Eğer *x* bir genel helis ise bu durumda (3.34) eşitliği

$$2\lambda_2^2k_1 - 2\lambda_2 - \lambda_1^2k_1 = 0 \tag{3.35}$$

formuna dönüşür.

İspat *x* küresel bir eğri olduğundan Teorem 3.4 ün ispatında $m_0 = 0$ bulunmuştur. Bu durumda (3.32) ifadesi $\bar{a} = \frac{k_1}{k_2\lambda_2(\lambda_1)^2}$ şeklini alır. Bu ifadenin türevi alınır ve (3.31) eşitlikleri de kullanılırsa

$$\left(\frac{\frac{k_1}{k_2}}{\lambda_2(\lambda_1)^2}\right)' = \left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\lambda_2{\lambda_1}^2 - \frac{k_1}{k_2}\left({\lambda_2}'{\lambda_1}^2 + \lambda_2 2\lambda_1{\lambda_1}'\right) = 0$$

$$k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\lambda_1\lambda_2 - k_1[\lambda_1(-\lambda_1k_1) + 2\lambda_2(k_1\lambda_2 - 1)] = 0$$

$$k_2\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'\lambda_1\lambda_2 - k_1(2\lambda_2^2k_1 - 2\lambda_2 - \lambda_1^2k_1) = 0$$

bulunarak istenen sonuç elde edilmiş olur. Eğer *x* eğrisi bir genel helis ise $\frac{k_1}{k_2}$ oranı sabit olacağından $\left(\frac{k_1}{k_2}\right)' = 0$ olur. Böylece (3.34) ifadesi (3.35) ifadesine dönüşür.

4. $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA YÜZEYLERİ

Tzitzeica yüzeyi, yüzeyin Gauss eğriliğinin, yüzeyin keyfi bir noktasındaki teğet düzleminin orijinden uzaklığının dördüncü kuvvetine oranının sabit olması ile tanımlanır. Buna göre, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yamasıyla verilen M yüzeyi için a sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\frac{K}{d_{tan}^4} = a \tag{4.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa M yüzeyine *Tzitzeica yüzeyi (Tz-yüzeyi)* adı verilir. Burada K bu yüzeyin Gauss eğriliği, N yüzeyin birim normal vektör alanı ve d_{tan} teğet düzlemin orijinden uzaklığı olur ve

$$d_{tan} = \langle X, N \rangle \tag{4.2}$$

ile tanımlanır [1].

Tanım 4.1 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$, $(k_1 > 0)$ birim hızlı düzlemsel bir eğri olsun. Bu taktirde a_1 sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$k_1(s) = a_1 . d_{osc}^2 \tag{4.3}$$

şartını sağlıyorsa x'e *düzlemsel Tzitzeica eğrisi (düzlemsel Tz-eğrisi)* denir. Burada N_1 eğrinin birim normal vektör alanı olup

$$d_{osc} = \langle x, N_1 \rangle \tag{4.4}$$

ile tanımlanır.

Önerme 4.2 M yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$

$$X(u, v) = \big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \tag{4.5}$$

regüler yaması ile verilsin. M nin Tz-yüzeyi olması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı bir sabit a için

$$(eg - f^2)(EG - F^2) = a(X, X_u, X_v)^4 \tag{4.6}$$

ifadesi ve bu ifadenin eşiti olan

$$\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}^2 = a\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}^4 \qquad (4.7)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) Regüler bir yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}$$

dir. Bu ifade (4.2) de yerine yazılırsa

$$d_{tan} = \langle X, N\rangle = \langle X, \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}}\rangle = \frac{(X, X_u, X_v)}{\sqrt{EG - F^2}}$$

elde edilir. Bu değer ve (2.14) deki *K* nın eşiti, (4.1) de yerine yazılırsa

$$\frac{eg - f^2}{EG - F^2} = a.\frac{(X, X_u, X_v)^4}{(EG - F^2)^2}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.6) elde edilir.

Bununla birlikte

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}$$

ve (2.13) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{\langle X_{uu}, N\rangle\langle X_{vv}, N\rangle - \langle X_{uv}, N\rangle^2}{W^2} \\ &= \frac{1}{W^2}\left\{\langle X_{uu}, \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}\rangle\langle X_{vv}, \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}\rangle - \langle X_{uv}, \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|}\rangle^2\right\} \\ &= \frac{1}{W^2}\left\{\frac{1}{(\|X_u \times X_v\|)^2}[(X_{uu}, X_u, X_v)(X_{vv}, X_u, X_v) - (X_{uv}, X_u, X_v)^2]\right\} \\ &= \frac{1}{W^2}\frac{\begin{vmatrix} x_{uu} & y_{uu} & z_{uu} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}\begin{vmatrix} x_{vv} & y_{vv} & z_{vv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_{uv} & y_{uv} & z_{uv} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}^2}{W^2} \end{aligned}$$

elde edilir. Öte yandan *N* nin eşiti yardımıyla

$$
\begin{aligned}
d_{tan} &= \langle X, N\rangle \\
&= \langle (x,y,z), \frac{X_u \times X_v}{\sqrt{EG-F^2}}\rangle \\
&= \frac{1}{W}\begin{vmatrix} x & y & z \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

elde edilir. d_{tan} değerinin dördüncü kuvveti ile K nın eşiti (4.1) de yerine yazılırsa (4.7) ifadesi de elde edilmiş olur.

($\Leftarrow$) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 4.3 (4.5) regüler yamasıyla verilen M yüzeyinin $x(u,v)$, $y(u,v), z(u,v)$ fonksiyonları türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere; Tz-yüzey olması için gerek ve yeter şart a_1 sıfırdan farklı bir sabit olacak şekilde

$$
\begin{aligned}
& a^2(x_{uu}x_{vv} - x_{uv}^2) + b^2(y_{uu}y_{vv} - y_{uv}^2) + c^2(z_{uu}z_{vv} - z_{uv}^2) \\
& + ab(x_{uu}y_{vv} + y_{uu}x_{vv} - 2x_{uv}y_{uv}) + ac(x_{uu}z_{vv} + z_{uu}x_{vv} - 2x_{uv}z_{uv}) \\
& + bc(y_{uu}z_{vv} + z_{uu}y_{vv} - 2y_{uv}z_{uv}) = a_1(ax+by+cz)^4 \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

eşitliğinin sağlamasıdır. Burada

$$
\begin{aligned}
a(u,v) &= y_u z_v - y_v z_u \\
b(u,v) &= -x_u z_v + x_v z_u \\
c(u,v) &= x_u y_v - x_v y_u
\end{aligned}
$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

İspat M yüzeyi, (4.5) regüler yaması ile verilsin. Buna göre

$$
\begin{aligned}
X_u \times X_v &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = (y_u z_v - y_v z_u, -x_u z_v + x_v z_u, x_u y_v - x_v y_u) \\
&= (a(u,v), b(u,v), c(u,v))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu durumda $\|X_u \times X_v\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} > 0$ olur. Böylece M yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$
N = \frac{(a,b,c)}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} \qquad (4.9)
$$

ile verilebilir. (2.10) eşitlikleri kullanılarak birinci temel form katsayıları

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2 \qquad F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v \qquad G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

olarak bulunur. (2.13) eşitlikleri kullanılarak ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{a x_{uu} + b y_{uu} + c z_{uu}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad f = \frac{a x_{uv} + b y_{uv} + c z_{uv}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \qquad g = \frac{a x_{vv} + b y_{vv} + c z_{vv}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} K &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \\ &= \frac{a^2(x_{uu}x_{vv} - x_{uv}^2) + b^2(y_{uu}y_{vv} - y_{uv}^2) + c^2(z_{uu}z_{vv} - z_{uv}^2)}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\quad + \frac{ab(x_{uu}y_{vv} + y_{uu}x_{vv} - 2x_{uv}y_{uv}) + ac(x_{uu}z_{vv} + z_{uu}x_{vv} - 2x_{uv}z_{uv})}{a^2 + b^2 + c^2} \\ &\quad + \frac{bc(y_{uu}z_{vv} + z_{uu}y_{vv} - 2y_{uv}z_{uv})}{a^2 + b^2 + c^2} \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$d_{tan} = \langle X, N \rangle = \frac{xa + yb + zc}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

olarak bulunur. Buradan d_{tan} değeri ve *K* Gauss eğriliği (4.1) de yerine yazılırsa (4.8) elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Tanım 4.4 (4.8) ifadesiyle verilen denklem *Tz- yüzey denklemleri* olarak isimlendirilir.

4.1 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Monge Yüzeyi

Önerme 4.1.1 *M* yüzeyi, (2.15) Monge yaması ile verilsin. Buna göre *M* yüzeyinin Tz-yüzeyi olması için gerek ve yeter şart, *a* sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$a = \frac{f_{uu} \cdot f_{vv} - {f_{uv}}^2}{(-uf_u - vf_v + f)^4}. \qquad (4.10)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (2.15) koordinat yamasının u ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa sırasıyla

$X_u = (1,0, f_u)$ ve $X_v = (0,1, f_v)$

elde edilir. Buradan birinci temel form katsayıları

$$E = \langle X_u, X_u \rangle = 1 + f_u^2 \qquad F = \langle X_u, X_v \rangle = f_u . f_v \qquad G = \langle X_v, X_v \rangle = 1 + f_v^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$X_u \times X_v = (-f_u, -f_v, 1) \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}$$

yardımıyla M nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}(-f_u, -f_v, 1)$$

şeklindedir. Benzer şekilde X in ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$X_{uu} = (0,0, f_{uu}) \qquad X_{uv} = (0,0, f_{uv}) \qquad X_{vv} = (0,0, f_{vv})$$

elde edilir. Böylece M nin ikinci temel form katsayıları

$$e = \langle X_{uu}, N \rangle = \frac{f_{uu}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, f = \langle X_{uv}, N \rangle = \frac{f_{uv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}, g = \langle X_{vv}, N \rangle = \frac{f_{vv}}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{f_{uu} . f_{vv} - f_{uv}^2}{(1 + f_u^2 + f_v^2)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2) eşitliğinden

$$d_{tan} = \langle X, N \rangle = \frac{-u f_u - v f_v + f}{\sqrt{1 + f_u^2 + f_v^2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak d_{tan} ve K Gauss eğriliği, (4.1) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Örnek 4.1.2 $\mathbb{E}^3$ de $X(u,v) = (u, v, \frac{-(3+uv)}{u+v})$ parametrizasyonuyla verilen regüler Monge yaması bir Tz-yüzeyidir.

Çözüm $f(u,v) = \frac{-(3+uv)}{u+v}$ nin u ya ve v ye göre kısmi türevleri

$$f_u = \frac{-v(u+v)+(3+uv)}{(u+v)^2} = \frac{-uv - v^2 + 3 + uv}{(u+v)^2} = \frac{3-v^2}{(u+v)^2}$$

$$f_{uv} = \frac{-6-2uv}{(u+v)^3}$$

$$f_{uu} = \frac{-2(3-v^2)}{(u+v)^3}$$

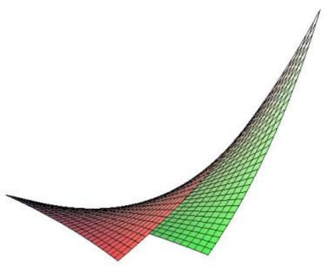
$$f_v = \frac{-u(u+v)+(3+uv)}{(u+v)^2} = \frac{-u^2 - uv + 3 + uv}{(u+v)^2} = \frac{3-u^2}{(u+v)^2}$$

$$f_{vv} = \frac{-2(3-u^2)}{(u+v)^3}.$$

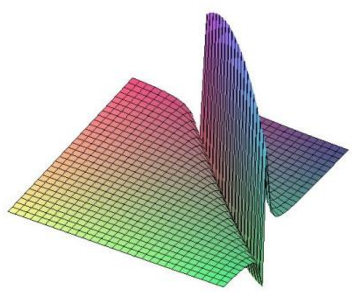
Bu değerler (4.10) da yerine yazılırsa

$$a = \frac{\frac{4(3-v^2)(3-u^2)}{(u+v)^6} - \frac{(-6-2uv)^2}{(u+v)^6}}{\left(-u\frac{(3-v^2)}{(u+v)^2} - v\frac{(3-u^2)}{(u+v)^2} + \frac{-(3+uv)}{u+v}\right)^4} = -\frac{1}{108}$$

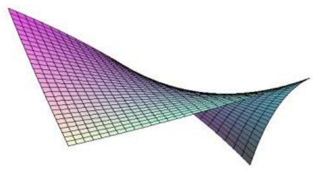
olarak bulunur. Bu yüzey Şekil 4.1 de farklı aralıklar kullanılarak gösterilmiştir. Çizimlere ait Maple komutu plot3d([u,v,(-3+u*v)/(u+v)], u=m..n, v=p..r, grid=[30,30]); şeklindedir.



(a)



(b)



(c)

Şekil 4.1: Tz-Monge yüzeyi a) m=-2, n=-1, p=-2, r=-1, b) m=-1, n=2, p=-1, r=2.
c) m=1, n=2, p=1, r=2

4.2 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Öteleme Yüzeyi

Önerme 4.2.1 $M \subset \mathbb{E}^3$ (2.16) regüler yaması ile verilen 1. tip öteleme yüzeyi olsun. Buna göre *M* yüzeyinin Tz-yüzeyi olması için gerek ve yeter şart *a* sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$a = \frac{f''g''}{(-uf' - vg' + f + g)^4} \tag{4.11}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (2.16) koordinat yamasının *u* ve *v* ye göre kısmi türevleri alınırsa sırasıyla

$X_u = (1,0,f')$ ve $X_v = (0,1,g')$

elde edilir. Buradan birinci temel form katsayıları

$E = 1 + f'^2 \quad F = f'.g' \quad G = 1 + g'^2$

olarak bulunur. Böylece

$X_u \times X_v = (-f', -g', 1) \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = \sqrt{1 + f'^2 + g'^2}$

yardımıyla *M* nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f', -g', 1)}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

şeklindedir. Benzer şekilde *X* in ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$X_{uu} = (0,0,f'') \qquad X_{uv} = (0,0,0) \qquad X_{vv} = (0,0,g'')$$

elde edilir. Böylece *M* nin ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{f''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}} \qquad f = 0 \qquad g = \frac{g''}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{f''g''}{\left(1 + f'^2 + g'^2\right)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2) eşitliğinden

$$d_{tan} = \langle X, N \rangle = \frac{(-uf' - vg' + f + g)}{\sqrt{1 + f'^2 + g'^2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak d_{tan} ve *K* Gauss eğriliği, (4.1) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 4.2.2 $M \subset \mathbb{E}^3$ (2.17) regüler yaması ile verilen 2. tip öteleme yüzeyi olsun. Buna göre *M* yüzeyinin Tz-yüzeyi olması için gerek ve yeter şart, *a* sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$a = \frac{f'g'f''g''}{(-uf'g' - vf'g' + fg' + gf')^4} \qquad (4.12)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (2.17) koordinat yamasının *u* ve *v* ye göre kısmi türevleri alınırsa sırasıyla

$X_u = (1,0,f')$ ve $X_v = (1,g',0)$

elde edilir. Buradan b irinci temel form katsayıları,

$$E = 1 + f'^2 \quad F = 1 \quad G = 1 + g'^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$X_u \times X_v = (-f'g', f', g') \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = \sqrt{f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2}$$

yardımıyla *M* nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(-f'g', f', g')}{\sqrt{f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2}}$$

şeklindedir. Benzer şekilde *X* in ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$X_{uu} = (0,0,f'') \quad X_{uv} = (0,0,0) \quad X_{vv} = (0,g'',0)$$

elde edilir. Böylece *M* nin ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{g'f''}{\sqrt{f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2}} \quad f = 0 \quad g = \frac{f'g''}{\sqrt{f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2}}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{f'f''g'g''}{\left(f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2\right)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2) eşitliğinden

$$d_{tan} = \langle X, N\rangle = \frac{-(u+v)f'g' + f'g + g'f}{\sqrt{f'^2g'^2 + f'^2 + g'^2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak d_{tan} ve *K* Gauss eğriliği, (4.1) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 4.2.3 *M* yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ yaması ile verilsin. (2.16) ifadesiyle verilen 1. tip Tz-Öteleme yüzeyini oluşturan $\alpha(u)$ ve $\beta(v)$ eğrileri düzlemsel Tz-eğrisi olsun. Bu takdirde *a* sıfırdan farklı sabit, $a_{1\alpha}$, $\alpha(u)$ eğrisine ait Tz-eğri sabiti, $a_{1\beta}$, $\beta(v)$ eğrisine ait Tz-eğri sabiti olmak üzere;

$$a = \frac{f''g''}{\left(\dfrac{\sqrt{f''}}{\sqrt{a_{1\alpha}}.\left(1+f'^2\right)^{\frac{1}{4}}} + \dfrac{\sqrt{g''}}{\sqrt{a_{1\beta}}.\left(1+g'^2\right)^{\frac{1}{4}}}\right)^4} \tag{4.13}$$

eşitliği sağlanır.

İspat $X(u,v) = \big(u,0,f(u)\big) + \big(0,v,g(v)\big) = \alpha(u) + \beta(v)$ olmak üzere; $\alpha(u) = \big(u,0,f(u)\big)$ düzlem eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_\alpha = \frac{(1,0,f')}{\sqrt{1+f'^2}}, \qquad N_{1\alpha} = \frac{(-f',0,1)}{\sqrt{1+f'^2}}$$

ve eğriliği

$$k_{1\alpha} = \frac{f''}{\left(\sqrt{1+f'^2}\right)^3}$$

şeklindedir. (4.4) eşitliğinden

$$d_{osc_\alpha} = \langle \alpha(u), N_{1\alpha} \rangle = \frac{-f'u+f}{\sqrt{1+f'^2}}$$

bulunur. $k_{1\alpha}$ ve d_{osc_α}, (4.3) de yerine yazılırsa $\alpha(u)$ eğrisine ait Tz-sabiti

$$a_{1\alpha} = \frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}(-f'u+f)^2}$$

olarak bulunur.

$\beta(v) = \big(0, v, g(v)\big)$ düzlem eğrisinin Frenet vektörleri

$$T_\beta = \frac{(0,1,g')}{\sqrt{1+g'^2}}, \qquad N_{1\beta} = \frac{(0,-g',1)}{\sqrt{1+g'^2}}$$

ve eğriliği

$$k_{1\beta} = \frac{g''}{\left(\sqrt{1+g'^2}\right)^3}$$

şeklindedir. (4.4) eşitliğinden

$$d_{osc_\beta} = \langle \beta(v), N_{1\beta} \rangle = \frac{-g'v+g}{\sqrt{1+g'^2}}$$

bulunur. $k_{1\beta}$ ve d_{osc_β}, (4.3) de yerine yazılırsa $\beta(v)$ eğrisine ait Tz-sabiti

$$a_{1\beta} = \frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}(-g'v+g)^2}$$

olarak bulunur.

$a_{1\alpha}$ dan $(-f'u+f)$ çekilir ve $a_{1\beta}$ dan da $(-g'v+g)$ çekilip (4.11) de yerine yazılırsa (4.13) elde edilir.

Sonuç 4.2.4 $a_{1\alpha}$, $\alpha(u)$ eğrisine ait Tz-eğri sabiti, $a_{1\beta}$, $\beta(v)$ eğrisine ait Tz-eğri sabiti ve a da 1. tip Tz-Öteleme yüzeyinin Tz-yüzey sabiti olsun. Bu takdirde

$$A = \frac{-uf'+f}{-vg'+g} \tag{4.14}$$

olmak üzere;

$$\sqrt{(1+f'^2)(1+g'^2)} = A(4+A) + \frac{1}{A}\left(4+\frac{1}{A}\right) + 6 \tag{4.15}$$

şartı altında $a_{1\alpha}.a_{1\beta} = a$ olur.

İspat Sonuç 4.2.3 ün ispatında bulunan $a_{1\alpha}$ ve $a_{1\beta}$ değerleri çarpılırsa

$$a_{1\alpha}.a_{1\beta}=\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}(-uf'+f)^2}.\frac{g''}{\sqrt{1+g'^2}(-vg'+g)^2}$$

elde edilir. (4.14) ve (4.15) eşitlikleri bir üstteki ifadede yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

4.3 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Çarpanlarına Ayrılabilir Yüzey

Teorem 4.3.1 *M* yüzeyi, $X: U\subset\mathbb{E}^2\rightarrow\mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. *f* ve g türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere; (2.18), (2.19) veya (2.20) parametrizasyonlarıyla verilen çarpanlarına ayrılabilir yüzeyin Tz-yüzey olması için gerek ve yeter şart a sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$a=\frac{ff''gg''-(f'g')^2}{(-uf'g-vfg'+fg)^4} \tag{4.16}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (2.18) koordinat yamasının *u* ve *v* ye göre kısmi türevleri alınırsa sırasıyla

$X_u=(1,0,gf')$ ve $X_v=(0,1,fg')$

elde edilir. Buradan birinci temel form katsayıları,

$$E=1+(gf')^2 \quad F=ff'gg' \quad G=1+(fg')^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$X_u\times X_v=(-gf',-fg',1)\Rightarrow \|X_u\times X_v\|=\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}$$

yardımıyla *M* nin birim normal vektör alanı

$$N=\frac{X_u\times X_v}{\|X_u\times X_v\|}=\frac{(-gf',-fg',1)}{\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}}$$

şeklindedir. Benzer şekilde *X* in ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$X_{uu}=(0,0,gf'') \quad X_{uv}=(0,0,g'f') \quad X_{vv}=(0,0,fg'')$$

elde edilir. Böylece *M* nin ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{gf''}{\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}} \qquad f = \frac{g'f'}{\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}} \qquad g = \frac{fg''}{\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla

$$K = \frac{eg-f^2}{EG-F^2}$$

$$= \frac{ff''gg''-(g'f')^2}{(1+(gf')^2+(fg')^2)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2) eşitliğinden

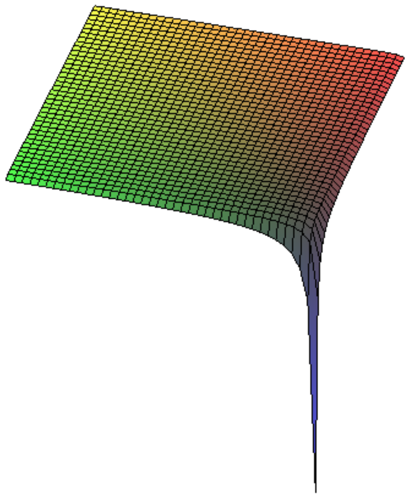
$$d_{tan} = \langle X, N\rangle = \frac{(-ugf'-vfg'+fg)}{\sqrt{1+(gf')^2+(fg')^2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak d_{tan} ve K Gauss eğriliği, (4.1) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Ayrıca (2.19) ve (2.20) parametrizasyonları için de aynı sonuç bulunur.

Örnek 4.3.2 $\mathbb{E}^3$ de, $X(u,v) = (u, v, \frac{1}{uv})$ parametrizasyonuyla verilen regüler Monge yamasında $f(u,v) = \frac{1}{uv} = f(u).g(v)$ olarak yazılabileceğinden (2.18) parametrizasyonuna uygundur. Dolayısıyla f nin ve g nin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınıp (4.16) de yerine yazılırsa $a = \frac{1}{27}$ olarak bulunur ve böylece verilen yüzey bir Tz-yüzeyi olur. Bu yüzey Şekil 4.2 de gösterilmiştir. Çizime ait Maple komutu plot3d([u,v,1/(u*v)], u=1..100, v=1..100, grid=[40,40]); şeklindedir.



Şekil 4.2: Tz-çarpanlarına ayrılabilir yüzey

4.4 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Küresel Çarpım Yüzeyi

Teorem 4.4.1 $\alpha,\ \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$ ve $\alpha(u) = \big(f_1(u), f_2(u)\big),\ \beta(v) = \big(g_1(v), g_2(v)\big)$ türevlenebilir düzlem eğrileri olmak üzere; (2.21) parametrizasyonuyla verilen bu iki eğrinin küresel çarpım yaması $X(u,v) = \alpha(u) \otimes \beta(v)$ nin Tz-yüzey olması için gerek ve yeter şart *a* sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$a = \frac{-f_1{}'(f_1{}''f_2{}' - f_1{}'f_2{}'')(g_1{}''g_2{}' - g_1{}'g_2{}'')}{f_2(f_1f_2{}' - f_1{}'f_2)^4(g_1g_2{}' - g_1{}'g_2)^3} \tag{4.17}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (⇒) (2.21) koordinat yamasının *u* ya ve *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınıp (4.7) de yerine yazılırsa

$$\begin{vmatrix} f_1{}'' & f_2{}''g_1 & f_2{}''g_2 \\ f_1{}' & f_2{}'g_1 & f_2{}'g_2 \\ 0 & f_2g_1{}' & f_2g_2{}' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & f_2g_1{}'' & f_2g_2{}'' \\ f_1{}' & f_2{}'g_1 & f_2{}'g_2 \\ 0 & f_2g_1{}' & f_2g_2{}' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & f_2{}'g_1{}' & f_2{}'g_2{}' \\ f_1{}' & f_2{}'g_1 & f_2{}'g_2 \\ 0 & f_2g_1{}' & f_2g_2{}' \end{vmatrix}^2 = a \begin{vmatrix} f_1 & f_2g_1 & f_2g_2 \\ f_1{}' & f_2{}'g_1 & f_2{}'g_2 \\ 0 & f_2g_1{}' & f_2g_2{}' \end{vmatrix}^4$$

bulunur ve determinantlar açılıp işlemler yapılırsa

$$\big[f_2\big(g_1g_2{}' - g_1{}'g_2\big)\big(f_1{}''f_2{}' - f_1{}'f_2{}''\big)\big]\big[-f_1{}'f_2{}^2\big(g_1{}''g_2{}' - g_1{}'g_2{}''\big)\big] - 0$$
$$= a\big[f_2\big(g_1g_2{}' - g_1{}'g_2\big)\big(f_1f_2{}' - f_1{}'f_2\big)\big]^4$$

$$-f_1{}'(f_1{}''f_2{}' - f_1{}'f_2{}'')(g_1{}''g_2{}' - g_1{}'g_2{}'') = af_2(f_1f_2{}' - f_1{}'f_2)^4(g_1g_2{}' - g_1{}'g_2)^3$$

elde edilir ve a çekilip yalnız bırakılırsa (4.17) bulunur.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 4.4.2 (2.21) ifadesindeki α ve β eğrileri birim hızlı alınırsa (4.17) ifadesi

$$a = \frac{-f_1{}'\kappa_{1\alpha}\kappa_{1\beta}}{f_2(f_1f_2{}' - f_1{}'f_2)^4(g_1g_2{}' - g_1{}'g_2)^3} \qquad (4.18)$$

formuna dönüşür. Burada $\|\alpha'\| = 1$ ve $\|\beta'\| = 1$ olduğundan $\kappa_{1\alpha} = \|\alpha' \times \alpha''\| = (f_1{}''f_2{}' - f_1{}'f_2{}'')$ ve $\kappa_{1\beta} = \|\beta' \times \beta''\| = (g_1{}''g_2{}' - g_1{}'g_2{}'')$ sırasıyla α ve β nın eğrilik fonksiyonlarıdır.

Örnek 4.4.3 (2.21) parametrik ifadesi ile verilen küresel çarpım yüzeyi

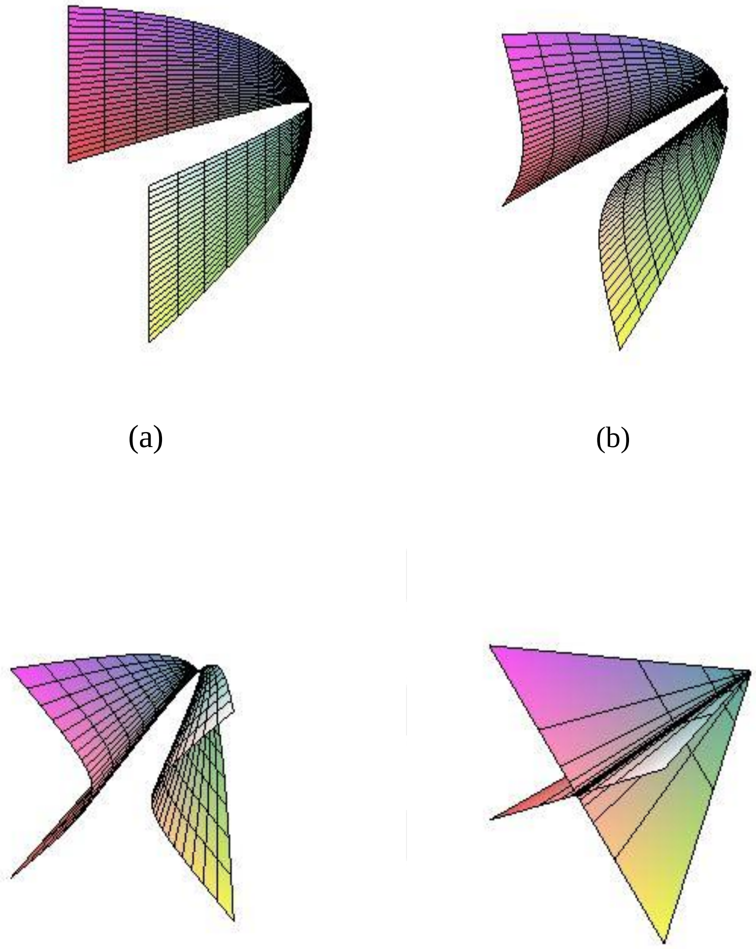
$\alpha(u) = \big(f_1(u), f_2(u)\big) = (\cosh u\,, \sinh u)$

$\beta(v) = \big(g_1(v), g_2(v)\big) = (\cosh v\,, \sinh v)$

alınırsa bu durumda

$X(u, v) = (\cosh u\,, \sinh u \cosh v\,, \sinh u \sinh v)$

tek kanatlı hiperboloid elde edilir. f_1, f_2, g_1, g_2 nin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınıp (4.17) de yerine yazılırsa $a = -1$ bulunur ve yüzey Tz-yüzeyi olur. Bu yüzey Şekil 4.3 de farklı aralıklar kullanılarak gösterilmiştir. Çizimlere ait Maple komutu plot3d([cosh(u),sinh(u)*cosh(v),sinh(u)*sinh(v)], u=-m..n, v=p..r); şeklindedir.



(a) (b) (c) (d)

Şekil 4.3: Tz-küresel çarpım yüzeyi a) m=-0.1, n=0.1, p=-0.1, r=0.1, b) m=-1, n=1, p=-1, r=1 c) m=-2, n=2, p=-2, r=2, d) m=-10, n=10, p=-10, r=10

Örnek 4.4.4 (2.21) parametrik ifadesi ile verilen küresel çarpım yüzeyinde

$$\alpha(u) = \left(f_1(u), f_2(u)\right) = (\cos(c+u), \sin(c+u))$$

$$\beta(v) = \left(g_1(v), g_2(v)\right) = (\sin(c_1+v), \cos(c_1+v))$$

çemberleri alınırsa bu durumda

$$X(u,v) = (\cos(c+u), \sin(c+u)\sin(c_1+v), \sin(c+u)\cos(c_1+v))$$

küresi elde edilir. f_1, f_2, g_1, g_2 nin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınıp (4.17) de yerine yazılırsa $a = 1$ bulunur ve yüzey Tz-yüzeyi olur.

4.5 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Dönel Yüzeyi

Önerme 4.5.1 $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{E}^2$, $\alpha(u) = \big(f_1(u), f_2(u)\big)$ türevlenebilir düzlemsel eğri ve (2.22) parametrik ifadesiyle verilen dönel yüzeyin Tz-yüzey olması için gerek ve yeter şart, *a* sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$a = \frac{f_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{f_2(f_1f_2' - f_1'f_2)^4} \tag{4.19}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat (2.22) koordinat yamasının *u* ve *v* ye göre kısmi türevleri alınırsa sırasıyla

$X_u = (f_1', f_2' \cos v, f_2' \sin v)$ ve $X_v = (0, -f_2 \sin v, f_2 \cos v)$

elde edilir. Buradan birinci temel form katsayıları,

$$E = {f_1'}^2 + {f_2'}^2 \quad F = 0 \quad G = {f_2}^2$$

olarak bulunur. Böylece

$$X_u \times X_v = (f_2 f_2', -f_1' f_2 \cos v, -f_1' f_2 \sin v) \Rightarrow \|X_u \times X_v\| = \sqrt{{f_2}^2\left({f_1'}^2 + {f_2'}^2\right)}$$

yardımıyla *M* nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{\|X_u \times X_v\|} = \frac{(f_2', -f_1' \cos v, -f_1' \sin v)}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}}$$

şeklindedir. Benzer şekilde *X* in ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$X_{uu} = \big(f_1'', f_2'' \cos v, f_2'' \sin v\big), X_{uv} = \big(0, -f_2' \sin v, f_2' \cos v\big), X_{vv} = (0, -f_2 \cos v, -f_2 \sin v)$$

elde edilir. Böylece yüzeyin ikinci temel form katsayıları

$$e = \frac{f_1''f_2' - f_1'f_2''}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}} \qquad f = 0 \qquad g = \frac{f_1'f_2}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}}$$

olarak bulunur. Birinci ve ikinci temel form katsayıları yardımıyla

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}$$

$$= \frac{f_1'(f_1''f_2' - f_1'f_2'')}{f_2\left({f_1'}^2 + {f_2'}^2\right)^2}$$

bulunur. Diğer taraftan (4.2) eşitliğinden

$$d_{tan} = \langle X, N \rangle = \frac{f_1f_2' - f_1'f_2}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}}$$

elde edilir. Sonuç olarak d_{tan} ve K Gauss eğriliği, (4.1) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 4.5.2 $\alpha(u) = \left(f_1(u), f_2(u)\right)$ eğrisi birim hızlı alınırsa dönel yüzeyin Tz-yüzey şartı, a sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere;

$$a = \frac{-f_2''}{f_2(f_1f_2' - f_1'f_2)^4} \tag{4.20}$$

biçimine dönüşür.

İspat $\alpha(u) = \left(f_1(u), f_2(u)\right)$ birim hızlı alınırsa $\alpha' = \left(f_1', f_2'\right)$ ve $\|\alpha'\| = \sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2} = 1$ olur. Normun her iki tarafının türevi alınırsa

$$\left({f_1'}^2 + {f_2'}^2\right)' = 0$$

$$f_1'f_1'' + f_2'f_2'' = 0$$

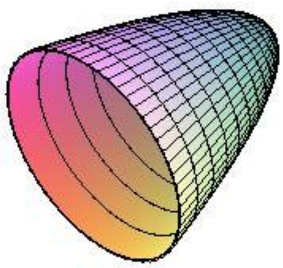
$$f_1'' = \frac{-f_2'f_2''}{f_1'}$$

elde edilir. Bu değer (4.19) nin pay kısmındaki parantezin içinde yerine yazılırsa istenen sonuç bulunur.

Örnek 4.5.3 (2.22) parametrik ifadesi ile verilen dönel yüzeyde $\alpha(u) = \left(f_1(u), f_2(u)\right) = (cosh\, u\,, sinh\, u)$ alınırsa yüzey

$$X(u,v) = (cosh\, u\,, sinh\, u \cos v\,, sinh\, u \sin v)$$

elde edilir. Bu yüzey eliptik pseudo küresel bir yüzeydir. f_1 ve f_2 nin birinci ve ikinci mertebeden türevleri alınıp (4.19) da yerine yazılırsa $a = 1$ bulunur ve elde edilen yüzey Tz-yüzeyi olur. Bu yüzey Şekil 4.4 de gösterilmiştir. Çizime ait Maple komutu plot3d([cosh(u),sinh(u)*cos(v),sinh(u)*sin(v)], u=-0.5..0.5, v=-2*Pi..2*Pi, grid=[30,30]); şeklindedir.



Şekil 4.4: Tz-dönel yüzeyi

4.6 $\mathbb{E}^3$ Öklid Uzayında Tz-Regle Yüzeyi

Önerme 4.6.1 M yüzeyi, $X : U \subset \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^3$ regüler yaması ile verilsin. (2.23) parametrizasyonuyla verilen regle yüzeyin Tz-yüzeyi olması için gerek ve yeter şart, a sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$a = \frac{-(\gamma', X_u, \gamma)^2}{(X, X_u, \gamma)^4} \tag{4.21}$$

şartının sağlanmasıdır.

İspat $\alpha(u) = (x_1(u), y_1(u), z_1(u))$ ve $\gamma(u) = (x_2(u), y_2(u), z_2(u))$ olmak üzere; (2.23) ifadesi

$$
\begin{aligned}
X(u,v) &= \alpha(u) + v\gamma(u) \\
&= \big(x_1(u), y_1(u), z_1(u)\big) + v\big(x_2(u), y_2(u), z_2(u)\big) \\
&= \big(x_1(u) + vx_2(u), y_1(u) + vy_2(u), z_1(u) + vz_2(u)\big) \\
&= (x(u,v), y(u,v), z(u,v))
\end{aligned}
$$

olur. Bu ifadenin *u* ya ve *v* ye göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınırsa

$$
\begin{aligned}
X_u &= (x_1' + vx_2', y_1' + vy_2', z_1' + vz_2') \\
X_v &= (x_2, y_2, z_2) \\
X_{uu} &= (x_1'' + vx_2'', y_1'' + vy_2'', z_1'' + vz_2'') \\
X_{uv} &= (x_2', y_2', z_2') \\
X_{vv} &= (0,0,0)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu türevler (4.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$
\begin{vmatrix} x_1'' + vx_2'' & y_1'' + vy_2'' & z_1'' + vz_2'' \\ x_1' + vx_2' & y_1' + vy_2' & z_1' + vz_2' \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}
\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .. & .. & .. \\ .. & .. & .. \end{vmatrix}
- \begin{vmatrix} x_2' & y_2' & z_2' \\ x_1' + vx_2' & y_1' + vy_2' & z_1' + vz_2' \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2
$$

$$
= a \begin{vmatrix} x_1 + vx_2 & y_1 + vy_2 & z_1 + vz_2 \\ x_1' + vx_2' & y_1' + vy_2' & z_1' + vz_2' \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}^4
$$

elde edilir. Bu ifade de (4.21) e eşittir.

($\Leftarrow$) İspatın diğer yönü açıktır.

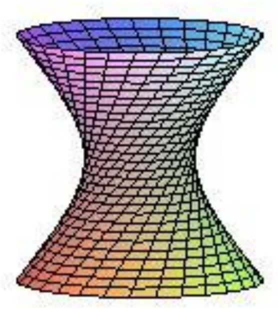
Örnek 4.6.2 $\alpha, \gamma: \mathbb{R} \to \mathbb{E}^3$, $\alpha(u) = (\cos u, \sin u, 0)$ ve $e_3 = (0,0,1)$ olacak şekilde $\gamma(u) = \alpha'(u) + e_3 = (-\sin u, \cos u, 1)$ regüler eğrileri (2.23) ifadesinde yerine yazılırsa oluşan regle yüzey

$$
\begin{aligned}
X(u,v) &= \alpha(u) + v\gamma(u) \\
&= (\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v)
\end{aligned}
$$

şeklindedir [27].

$\gamma' = (-\cos u, -\sin u, 0)$ ve $X_u = (-\sin u - v\cos u, \cos u - v\sin u, 0)$

(4.21) de yerine yazılır ve işlemler yapılırsa $a = -1$ bulunur ve yüzey Tz-yüzeyi olur. Bu yüzey Şekil 4.5 de gösterilmiştir. Çizime ait Maple komutu plot3d([cos(u)-v*sin(u),sin(u)+v*cos(u),v], u=-Pi..Pi, v=-2..2, grid=[30,30]); şeklindedir.



Şekil 4.5: Tz-regle yüzeyi

5. $\mathbb{E}^4$ ÖKLİD UZAYINDA TZITZEICA EĞRİLERİ

Tanım 5.1 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$ birim hızlı bir eğri olsun. $\{T, N_1, N_3\}$ tarafından gerilen hiper düzlemin orijinden uzaklığı

$$d_{\{T,N_1,N_3\}} = \langle x, N_2 \rangle \tag{5.1}$$

olsun. Bu durumda a_1 sıfırdan farklı sabit olmak üzere; k_2 eğriliği

$$\frac{k_2}{d^2_{\{T,N_1,N_3\}}} = a_1 \tag{5.2}$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman *x* e *birinci çeşit Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi)* denir.

$\{T, N_2, N_3\}$ tarafından gerilen hiper düzlemin orijinden uzaklığı

$$d_{\{T,N_2,N_3\}} = \langle x, N_1 \rangle \tag{5.3}$$

olsun. Bu durumda a_2 sıfırdan farklı sabit olmak üzere; k_1 eğriliği

$$\frac{k_1}{d^2_{\{T,N_2,N_3\}}} = a_2 \tag{5.4}$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman *x* e *ikinci çeşit Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi)* denir.

$\{T, N_1, N_2\}$ tarafından gerilen hiper düzlemin orijinden uzaklığı

$$d_{\{T,N_1,N_2\}} = \langle x, N_3 \rangle \tag{5.5}$$

olsun. Bu durumda a_3 sıfırdan farklı sabit olmak üzere; k_3 eğriliği

$$\frac{k_3}{d^2_{\{T,N_1,N_2\}}} = a_3 \tag{5.6}$$

koşulunu sağlıyorsa o zaman *x* e *üçüncü çeşit Tzitzeica eğrisi (Tz-eğrisi)* denir.

5.1 Birinci Çeşit Tz-Eğrileri

Teorem 5.1.1 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. *x* in birinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 - 2k_2 k_3 m_3 = 0 \tag{5.7}$$

olmasıdır.

İspat (⇒) x, birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. O zaman (5.2) ifadesinin türevi alınırsa

$$k_2'\langle x, N_2\rangle^2 - 2k_2\langle x, N_2\rangle\langle x, N_2\rangle' = 0$$
$$k_2'\langle x, N_2\rangle^2 - 2k_2\langle x, N_2\rangle\{\langle x', N_2\rangle + \langle x, {N_2}'\rangle\} = 0$$

elde edilir. (2.25) Frenet denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$k_2'\langle x, N_2\rangle^2 - 2k_2\langle x, N_2\rangle\{-k_2\langle x, N_1\rangle + k_3\langle x, N_3\rangle\} = 0$$
$$k_2'\langle x, N_2\rangle + 2{k_2}^2\langle x, N_1\rangle - 2k_2k_3\langle x, N_3\rangle = 0$$

bulunur. (2.26) da kullanılırsa (5.7) elde edilmiş olur.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 5.1.2 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı küresel bir eğri olsun. Bu durumda

$$m_0 = 0$$
$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$
$$m_2 = \frac{k_1'}{k_2k_1^2}$$
$$m_3 = \frac{k_1''}{k_1^2k_2k_3} - \frac{2{k_1'}^2}{k_1^3k_2k_3} - \frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2k_3} - \frac{k_2}{k_1k_3} \tag{5.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler yardımıyla $k_2m_1 + m_2' - k_3m_3 = 0$ denklemi bulunur.

İspat x, birim hızlı küresel bir eğri olsun. Bu durumda $\|x\| = r$ dir. x, (2.26) yardımıyla

$$\|x\| = r = \sqrt{\langle x, x\rangle}$$
$$(\langle x, x\rangle)' = (r^2)' \;\Rightarrow\; \langle x, x'\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \langle x, T\rangle = 0 = m_0$$

bulunur. Bu ifadenin türevi alınır ve (2.25) Frenet denklemleri göz önüne alınırsa

$$\langle x,T\rangle' = 0 \;\Rightarrow\; \langle x',T\rangle + \langle x,T'\rangle = 0$$
$$\Rightarrow 1 + k_1\langle x,N_1\rangle = 0$$
$$\Rightarrow\; \langle x,N_1\rangle = \frac{-1}{k_1} = m_1$$

elde edilir. Elde edilen bu ifadenin türevi alınır ve (2.25) Frenet denklemleri göz önüne alınırsa

$$\langle x,N_1\rangle' = \left(\frac{-1}{k_1}\right)' \;\Rightarrow\; \langle x',N_1\rangle + \langle x,N_1{}'\rangle = \frac{k_1{}'}{k_1{}^2}$$
$$\Rightarrow\; 0 - k_1\langle x,T\rangle + k_2\langle x,N_2\rangle = \frac{k_1{}'}{k_1{}^2}$$

olur. $\langle x,T\rangle = 0$ ve (2.26) denklemi kullanılarak

$$\langle x,N_2\rangle = \frac{k_1{}'}{k_2 k_1{}^2} = m_2$$

bulunur. Benzer şekilde bulunan ifadenin türevi alınırsa

$$\langle x,N_2\rangle' = \frac{k_1{}''k_1{}^2k_2 - k_1{}'\left(2k_1k_1{}'k_2 + k_1{}^2k_2{}'\right)}{k_1{}^4k_2{}^2}$$

$$\langle x',N_2\rangle + \langle x,N_2{}'\rangle = \frac{k_1{}''k_1{}^2k_2 - 2k_1k_1{}'^2k_2 - k_1{}^2k_1{}'k_2{}'}{k_1{}^4k_2{}^2}$$

elde edilir. (2.25) Frenet denklemleri kullanılırsa

$$-k_2\langle x,N_1\rangle + k_3\langle x,N_3\rangle = \frac{k_1{}''k_1{}^2k_2 - 2k_1k_1{}'^2k_2 - k_1{}^2k_1{}'k_2{}'}{k_1{}^4k_2{}^2}$$

elde edilir. $\langle x,N_1\rangle = \frac{-1}{k_1}$ ifadesi yerine yazılır ve (2.26) denklemi kullanılırsa

$$k_3\langle x,N_3\rangle = \frac{k_1{}''k_1{}^2k_2 - 2k_1k_1{}'^2k_2 - k_1{}^2k_1{}'k_2{}'}{k_1{}^4k_2{}^2} - \frac{k_2}{k_1}$$

$$\langle x,N_3\rangle = \frac{k_1{}''}{k_1{}^2k_2k_3} - \frac{2k_1{}'^2}{k_1{}^3k_2k_3} - \frac{k_1{}'k_2{}'}{k_1{}^2k_2{}^2k_3} - \frac{k_2}{k_1k_3} = m_3$$

elde edilir. m_3 ifadesinde m_1 ve $m_2{}'$ yerine yazılarak $k_2m_1 + m_2' - k_3m_3 = 0$ denklemi bulunur.

Önerme 5.1.3 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı küresel bir eğri olsun. *x* in birinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$3k_1k_1'k_2' - 2k_1k_1''k_2 + 4{k_1'}^2k_2 = 0 \tag{5.9}$$

olmasıdır. Bu diferansiyel denklemin çözümünden $k_2 = c.\left[\left(\frac{-1}{k_1}\right)'\right]^{2/3}$ elde edilir. Burada c integral sabitidir.

İspat (⇒) *x*, birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. O zaman (5.8) eşitlikleri (5.7) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_2'\left(\frac{k_1'}{k_2k_1^2}\right) + 2k_2^2\left(\frac{-1}{k_1}\right) - 2k_2k_3\left(\frac{k_1''}{k_1^2k_2k_3} - \frac{2{k_1'}^2}{k_1^3k_2k_3} - \frac{k_1'k_2'}{k_1^2k_2^2k_3} - \frac{k_2}{k_1k_3}\right) = 0$$

bulunur. Gerekli ara işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa (5.9) elde edilir. Buradan

$$3k_1k_1'k_2' = k_2\left(2k_1k_1'' - 4{k_1'}^2\right)$$

$$\frac{k_2'}{k_2} = \frac{2}{3}\frac{k_1''}{k_1'} - \frac{4}{3}\frac{k_1'}{k_1}$$

bulunur. Her iki tarafın integrali alınarak gerekli işlemler yapılırsa $k_2 = c.\left[\left(\frac{-1}{k_1}\right)'\right]^{2/3}$ elde edilir. c, integral sabitidir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 5.1.4 (5.9) ifadesinde k_2 sabit olursa $k_1k_1'' - 2{k_1'}^2 = 0$ ikinci mertebeden lineer olmayan diferansiyel denklem elde edilir. Bu denklem çözülürse $k_1 = \frac{c_2}{c_1+s}$ elde edilir.

Önerme 5.1.5 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, m_0, m_1, m_2, m_3 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; yer vektörü (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. *x* in, birinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$
$$m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0$$
$$m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0$$
$$m_3' + k_3 m_2 = 0$$
$$k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 - 2k_2 k_3 m_3 = 0 \tag{5.10}$$

eşitliklerinin olmasıdır.

İspat *x*, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı eğri olduğu için (2.28) denklemleri ve eğri birinci çeşit Tz-eğrisi olduğu için (5.7) denklemine sahip olur. Sonuç olarak (5.10) denklem sistemi elde edilir.

Önerme 5.1.6 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* in 1. çeşit T-sabit eğrisi ($m_0 = 0$) olması için, $k_2 > 0$ sabit olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$
$$m_2 = \frac{c_1 k_3'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$
$$m_3 = \frac{c_1}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}}} \tag{5.11}$$

olmalıdır. Burada $c_1 \neq 0$ integral sabitidir.

İspat Tanım gereği $m_0 = 0$ olduğundan (5.10) eşitliklerinin ilki

$$-k_1 m_1 = 1 \Rightarrow m_1 = \frac{-1}{k_1}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan (5.10) eşitliklerinden beşincisinin türevi alınırsa

$$k_2'' m_2 + k_2' m_2' + 4k_2 k_2' m_1 + 2k_2^2 m_1' - 2m_3' k_2 k_3 - 2m_3(k_2' k_3 + k_2 k_3') = 0$$

bulunur. (5.10) eşitliklerinin ikinci, üçüncü ve dördüncüsünden sırayla m_1', m_2', m_3' çekilir ve $m_1 = \frac{-1}{k_1}$ ile birlikte bir üstteki denklemde yerine yazılıp, düzenlenirse

$$m_2\left(k_2'' + 2k_2^3 + 2k_2{k_3}^2\right) + m_3(-{k_2}'k_3 - 2k_2{k_3}') = \frac{3k_2{k_2}'}{k_1}$$

elde edilir. (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünden $m_2 = \frac{-{m_3}'}{k_3}$ ifadesi elde edilen eşitlikte yerine yazılır ve düzenlenirse

$${m_3}'\left(k_2'' + 2k_2^3 + 2k_2{k_3}^2\right) - m_3\left(-{k_2}'{k_3}^2 - 2k_2k_3{k_3}'\right) = \frac{-3k_2{k_2}'k_3}{k_1}$$

bulunur. $k_2 > 0$ sabit kabul edilirse ${k_2}' = 0$ olur ve üstteki ifade, gerekli sadeleştirmeler ve düzenlemeler de yapılınca

$${m_3}'\left(k_2^2 + {k_3}^2\right) = -m_3(k_3{k_3}')$$

formunu alır. Bu diferansiyel denklem çözülünce

$$m_3 = \frac{c_1}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{1}{2}}}$$

olarak bulunur ($c_1 \neq 0$ integral sabiti). m_3 ün türevi alınırsa

$${m_3}' = \frac{-c_1k_3{k_3}'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

elde edilir. ${m_3}'$ değeri (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_2 = \frac{c_1{k_3}'}{(k_2^2 + k_3^2)^{\frac{3}{2}}}$$

bulunarak (5.11) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

Önerme 5.1.7 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x in 2. çeşit T-sabit eğrisi ($m_0 \neq 0$ sabit) olması için, $k_1 > 0$ sabit, $k_2 = \frac{e^{\frac{-2m_0k_1^2}{3}s}}{c_2}$ ve $k_3 > 0$ sabit olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$

$$m_2 = -\frac{m_3'}{k_3}$$

$$m_3 = e^{-\left\{\frac{\left(\frac{2m_0 k_1^2}{3}k_3^2\right)s}{\frac{4{m_0}^2 k_1^4}{9}+2k_3^2} - \frac{\frac{2m_0 k_1^2}{3}k_3^2}{\left(\frac{4{m_0}^2 k_1^4}{9}+2k_3^2\right)\left(-\frac{4m_0 k_1^2}{3}\right)}.\log\left[\frac{2}{c_2^2}e^{\left(-\frac{4m_0 k_1^2}{3}\right)s}+\frac{4{m_0}^2 k_1^4}{9}+2k_3^2\right]+C\right\}} \tag{5.12}$$

olmalıdır.

İspat Tanımdan $m_0 = c\ (sabit)\ \Rightarrow {m_0}' = 0$ olur. Bu durumda (5.10) eşitliklerinin birincisinden

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$

elde edilir. (5.10) eşitliklerinden beşincisinin türevi alınırsa

$$k_2''m_2 + k_2'{m_2}' + 4k_2k_2'm_1 + 2k_2^2{m_1}' - 2{m_3}'k_2k_3 - 2m_3({k_2}'k_3 + k_2{k_3}') = 0$$

elde edilir. (5.10) eşitliklerinin ikinci, üçüncü ve dördüncüsünden sırayla m_1', m_2', m_3' çekilir ve $m_1 = \frac{-1}{k_1}$ ile birlikte elde edilen eşitlikte yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_2\left(k_2'' + 2k_2^3 + 2k_2{k_3}^2\right) + m_3(-{k_2}'k_3 - 2k_2{k_3}') = \frac{3k_2k_2'}{k_1} + 2ck_1k_2^2$$

elde edilir. (5.10) un dördüncü eşitliğinden elde edilen $m_2 = \frac{-m_3'}{k_3}$ ifadesi, üstteki ifadede yerine yazılıp düzenlenirse

$$m_3'\left(k_2'' + 2k_2^3 + 2k_2{k_3}^2\right) + m_3\left({k_2}'{k_3}^2 + 2k_2k_3{k_3}'\right) = \frac{-3k_2k_2'k_3}{k_1} - 2ck_1k_2^2k_3 \tag{5.13}$$

bulunur. Eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenir ve ara işlemler yapılırsa

$$-k_2k_3(3k_2' + 2ck_2k_1^2) = 0$$

elde edilir. Buradan k_2 ve k_3 sıfırdan farklı ve $3k_2' + 2ck_1^2k_2 = 0$ olduğunu varsayalım. $k_1 > 0\ (= c_1)$ sabit kabul edilirse bu diferansiyel denklemin çözümünden

$$k_2 = \frac{e^{\frac{-2cc_1^2}{3}s}}{c_2}$$

($c_2 \neq 0$, sabit) elde edilir. $k_1 = c_1$ ve k_2 üstteki gibi alınırsa (5.13) ifadesinde eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşit olur ve düzenlenirse

$$\frac{m_3'}{m_3} = -\frac{{k_2}'{k_3}^2 + 2k_2k_3{k_3}'}{k_2'' + 2k_2^3 + 2k_2{k_3}^2}$$

şeklini alır. k_2 nin birinci ve ikinci türevi alınır ve elde edilen ifadede yerine yazılırsa

$$\frac{m_3'}{m_3} = -\frac{\frac{2c{c_1}^2}{3}{k_3}^2 + 2k_3{k_3}'}{\frac{4c^2{c_1}^4}{9} + 2\left(\frac{e^{-\frac{2c{c_1}^2}{3}s}}{c_2}\right)^2 + 2{k_3}^2}$$

bulunur. $k_3 > 0\ (= c_3)$ sabit kabul edilir ve diferansiyel denklem çözülürse

$$m_3 = e^{\left\{-\int \frac{\frac{2c{c_1}^2}{3}{c_3}^2}{\frac{4c^2{c_1}^4}{9} + 2\left(\frac{e^{-\frac{2c{c_1}^2}{3}s}}{c_2}\right)^2 + 2{c_3}^2} ds\right\}}$$

olarak bulunur. Sabitlerin karşılıkları yazılıp integral de çözüldüğü taktirde

$$m_3 = e^{-\left\{\frac{\left(\frac{2m_0k_1^2k_3^2}{3}\right)s}{\frac{4{m_0}^2k_1^4}{9} + 2k_3^2} - \frac{\frac{2m_0k_1^2k_3^2}{3}}{\left(\frac{4{m_0}^2k_1^4}{9} + 2k_3^2\right)\left(-\frac{4m_0k_1^2}{3}\right)} . \log\left[\frac{2}{c_2^2}e^{\left(-\frac{4m_0k_1^2}{3}\right)s} + \frac{4{m_0}^2k_1^4}{9} + 2k_3^2\right] + m_0\right\}}$$

elde edilir. m_3 ün türevi alınıp (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünde yerine yazılırsa m_2 de bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.1.8 $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x in 1. çeşit N-sabit eğrisi $(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0)$ olması için, $k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$ sabitler olmak üzere;

$$m_0 = c_3 \frac{1}{k_1}\ , \qquad c_3 = \frac{c(k_2^2 + k_3^2)}{k_2}\ \text{(sabit)}$$

$$m_1 = \frac{k_3}{k_2}(c_1 s + c_2)\ , \qquad c_1 = -ck_3\ \text{(sabit)}$$

$$m_2 = c\ (sabit)$$

$$m_3 = c_1 s + c_2\ , \qquad c_1 = -ck_3\ \text{(sabit)} \tag{5.14}$$

olmasıdır.

İspat Tanımdan

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0 \tag{5.15}$$

dır. (5.15) in türevi alınırsa

$$m_1 m_1{}' + m_2 m_2{}' + m_3 m_3{}' = 0 \tag{5.16}$$

bulunur. (5.10) eşitliklerinden beşincisinin karesi alınıp, düzenlenirse

$$k_2{}'^2 m_2^2 + 4k_2^2 k_2' m_1 m_2 + 4k_2^4\, m_1^2 - 4k_2 k_2{}' k_3 m_2 m_3 - 8k_2^3 k_3 m_1 m_3 + 4k_2^2 k_3^2 m_3^2 = 0$$

elde edilir. (5.15) den m_2^2 çekilip üstteki ifadede yerine konulup düzenlenirse

$$m_1^2\left(-k_2{}'^2 + 4k_2^4\right) + m_3^2\left(-k_2{}'^2 + 4k_2^2 k_3^2\right) + 4k_2^2 k_2{}' m_1 m_2 - 4k_2 k_2{}' k_3 m_2 m_3$$
$$-8k_2^3 k_3 m_1 m_3 = 0$$

bulunur. Bu eşitliğin türevi alınıp, (5.16) dan $m_1 m_1{}' = -m_2 m_2{}' - m_3 m_3{}'$ eşitliği türevi alınan ifadede yerine yazılır ve düzenlenirse

$$m_2{}'\left(2k_2{}'^2 m_2 - 8k_2^4 m_2 + 4k_2^2 k_2{}' m_1 - 4k_2 k_2{}' k_3 m_3\right)$$
$$+m_3{}'(-8k_2^4 m_3 + 8k_2^2 k_3^2 m_3 - 4k_2 k_2{}' k_3 m_2 - 8k_2^3 k_3 m_1) + m_1{}'(4k_2^2 k_2' m_2 - 8k_2^3 k_3 m_3)$$
$$+m_1^2\left(-k_2{}'^2 + 4k_2^4\right)' + m_3^2\left(-k_2{}'^2 + 4k_2^2 k_3^2\right)' + m_1 m_2 (4k_2^2 k_2')'$$
$$-m_2 m_3 (4k_2 k_2{}' k_3) - m_1 m_3 (8k_2^3 k_3)' = 0$$

elde edilir. $k_2 \neq 0$ sabit ve $k_3 \neq 0$ sabit olarak alınırsa üstteki denklem

$$8k_2^2(k_2 m_1{}' - k_3 m_3{}')(k_2 m_1 - k_3 m_3) = 0$$

şeklini alır. Üstteki ifadede k_2 sıfırdan farklı olduğundan ya ikinci ya da üçüncü çarpanlar sıfıra eşitlenerek

$$k_2 m_1{}' - k_3 m_3{}' = 0 \Rightarrow m_1{}' = \frac{k_3}{k_2} m_3{}'$$

ya da

$$k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{k_3}{k_2} m_3 \tag{5.17}$$

bulunur. k_2, k_3 sabit olduklarından elde edilen bu iki ifade birbirine eşit olur. Diğer taraftan (5.10) eşitliklerinin üçüncüsünde (5.17) ifadesi kullanılırsa

$$m_2' + k_2 \frac{k_3}{k_2} m_3 - k_3 m_3 = 0 \Rightarrow m_2' = 0 \Rightarrow m_2 = c\ (sabit)$$

olarak bulunur. (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünde m_2 nin değeri yerine yazılırsa

$$m_3' + k_3 c = 0 \Rightarrow m_3' = -k_3 c\ (sabit) \Rightarrow m_3' = c_1 \Rightarrow m_3 = c_1 s + c_2$$

elde edilir. m_3 ün değeri (5.17) de yerine yazılırsa

$$m_1 = \frac{k_3}{k_2}(c_1 s + c_2) \Rightarrow m_1' = \frac{k_3}{k_2} c_1$$

bulunur. (5.10) eşitliklerinin ikincisinde m_2 ve m_1' değerleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{k_3}{k_2} c_1 + k_1 m_0 - k_2 c = 0$$

$$\Rightarrow m_0 = \underbrace{\frac{c(k_2^2 + k_3^2)}{k_2}}_{sabit} \frac{1}{k_1} = c_3 \frac{1}{k_1} \quad (c_3\ sabit)$$

olarak m_0 da bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.1.9 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x, 2. çeşit N-sabit eğrisi ise m_0, m_1, m_2, m_3 katsayıları (5.14) eşitliklerini sağlar.

Önerme 5.1.10 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x, 2. çeşit oskülatör eğri $(m_1 = 0)$ ise, $k_2 \neq 0$ (sabit) olmak üzere; $k_1 = c_2(s + c_1)$ ve $e^{\int (s+c_1)k_3^2 ds} = \frac{k_3^2}{(s+c_1)^2}$ eşitlikleri sağlanır. Burada c_1 ve c_2 integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_1 = 0$ dır. (5.10) eşitliklerinin birincisinden

$$m_0' = 1 \Rightarrow m_0 = s + c_1 \quad (c_1 \text{ sabit})$$

bulunur. (5.10) eşitliklerinin ikincisinde m_0 değeri yerine yazılırsa

$$k_1(s + c_1) - k_2 m_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{k_1}{k_2}(s + c_1)$$

elde edilir. m_2 nin türevi alınıp (5.10) eşitliklerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_2' - k_3 m_3 = 0$$

$$m_3 = \frac{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(s + c_1)}{k_3} + \frac{k_1}{k_2 k_3}$$

olarak bulunur. m_2, m_3 değerleri (5.10) un beşincisinde yerlerine yazılırsa

$$k_2' \frac{k_1}{k_2}(s + c_1) - 2k_2 k_3 \left(\frac{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(s + c_1)}{k_3} + \frac{k_1}{k_2 k_3} \right) = 0$$

olur. $k_2 \neq 0$ sabit alınır ve gerekli sadeleştirmeler de yapılırsa

$$-2k_1'(s + c_1) - 2k_1 = 0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklem de çözülürse

$$k_1 = c_2(s + c_1) \quad (c_2 \text{ sabit})$$

bulunur. Üstte bulunan m_2, m_3 değerleri (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünde yerine yazılırsa

$$\left(\frac{\left(\frac{k_1}{k_2}\right)'(s+c_1)}{k_3}\right)' + \left(\frac{k_1}{k_2 k_3}\right)' + k_3\frac{k_1}{k_2}(s+c_1) = 0$$

olur. $k_2 \neq 0$ sabit ve k_1 in eşiti üstteki ifadede yerine yazılıp gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılınca

$$-2(s+c_1)k_3' + 2k_3 + (s+c_1)^2 k_3^3 = 0$$

bulunur. Eşitliğin her iki tarafı $k_3(s+c_1)$ e bölünürse

$$-2\frac{k_3'}{k_3} + \frac{2}{(s+c_1)} + (s+c_1)k_3^2 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden de

$$e^{\int (s+c_1)k_3^2 ds} = \frac{k_3^2}{(s+c_1)^2}$$

bağıntısı elde edilerek ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.1.11 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. *x*, 3. çeşit oskülatör eğri $(m_3 = 0)$ ise, $k_3 = 0$ ve

$$m_0 = \frac{ck_2^{\frac{3}{2}}}{k_1} + \frac{ck_2''}{2k_2^{\frac{3}{2}}k_1} - \frac{3ck_2'^{\,2}}{4k_2^{\frac{5}{2}}k_1}$$

$$m_1 = \frac{-ck_2'}{2k_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$m_2 = ck_2^{\frac{1}{2}} \tag{5.18}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat Tanımdan $m_3 = 0$ dır. (5.10) eşitliklerinin dördüncüsünden $k_3 m_2 = 0$ olur. $m_2 \neq 0$ olduğundan $k_3 = 0$ olur. (5.10) un beşincisinden

$$k_2' m_2 + 2k_2^2 m_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{-k_2'}{2k_2^2} m_2$$

bulunur. (5.10) eşitliklerinin üçüncüsünde üstteki m_1 in değeri yerine yazılırsa

$$m_2' + k_2 \frac{-k_2'}{2k_2^2} m_2 = 0 \Rightarrow \frac{m_2'}{m_2} = \frac{k_2'}{2k_2}$$

olur. Bu diferansiyel denklemin çözümünden

$m_2 = ck_2^{\frac{1}{2}}$ (c integral sabiti)

olarak bulunur. Üstteki m_1 in eşitinde m_2 yerine yazılırsa

$$m_1 = \frac{-ck_2'}{2k_2^{\frac{3}{2}}} \Rightarrow m_1' = \frac{-2ck_2k_2'' + 3c{k_2'}^2}{4k_2^{\frac{5}{2}}}$$

elde edilir. (5.10) eşitliklerinin ikincisinde m_1' ve m_2 nin eşitleri yerlerine yazılırsa

$$\frac{-2ck_2k_2'' + 3c{k_2'}^2}{4k_2^{\frac{5}{2}}} + k_1m_0 - k_2ck_2^{\frac{1}{2}} = 0$$

eşitliği bulunur. Son olarak m_0 da

$$m_0 = \frac{ck_2^{\frac{3}{2}}}{k_1} + \frac{ck_2''}{2k_2^{\frac{3}{2}}k_1} - \frac{3c{k_2'}^2}{4k_2^{\frac{5}{2}}k_1}$$

olarak bulunur.

Sonuç 5.1.12 Önerme 5.1.11 de $k_2 \neq 0$ sabit alınırsa bu durumda

$$m_0 = \frac{ck_2^{\frac{3}{2}}}{k_1}, \quad m_1 = 0, \quad m_2 = ck_2^{\frac{1}{2}}$$

olarak bulunur. Ayrıca (5.10) eşitliklerinin birincisinden

$$m_0{}' = 1 \Rightarrow \left(\frac{ck_2^{\frac{3}{2}}}{k_1}\right)' = 1$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden de

$$k_1 = \frac{ck_2^{\frac{3}{2}}}{s + c.c_1.k_2^{\frac{3}{2}}}$$

olur. Burada *c* ve c_1 integral sabitleridir.

Önerme 5.1.13 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı birinci çeşit Tz-eğrisi olsun. Eğer *x*, W eğrisi ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$ sabitler) ise o zaman

$$\begin{aligned} m_0 &= c_3 \sin(k_1 s) - c_2 \cos(k_1 s) + (cs + c_1)\frac{k_2}{k_1} \\ m_1 &= c_2 \sin(k_1 s) + c_3 \cos(k_1 s) + \frac{ck_2 - k_1}{k_1^2} \\ m_2 &= cs + c_1 \\ m_3 &= \frac{c}{k_3} + \frac{c_2 \sin(k_1 s)}{k_3} + \frac{c_3 \cos(k_1 s)}{k_3} + \frac{ck_2 - k_1}{k_3 k_1^2} \end{aligned} \tag{5.19}$$

olur. Burada c, c_1, c_2, c_3 integral sabitleridir.

İspat W eğrisinin k_1, k_2, k_3 eğrilikleri sabittir. Bu durumda (5.10) eşitliklerinin ikinci, üçüncü ve beşincisinin ayrı ayrı türevleri alınırsa sırayla

$$m_1'' + k_1 m_0{}' - k_2 m_2{}' = 0 \tag{5.20}$$

$$m_2'' + k_2 m_1{}' - k_3 m_3{}' = 0 \tag{5.21}$$

$$2k_2^2 m_1{}' - 2k_2 k_3 m_3{}' = 0 \tag{5.22}$$

elde edilir. (5.10) un birincisinden $m_0{}'$ çekilip (5.20) de, dördüncüsünden $m_3{}'$ çekilip (5.21) ve (5.22) de yerlerine yazılırsa sırayla

$$m_1'' + k_1(1 + k_1 m_1) - k_2 m_2{}' = 0 \tag{5.23}$$

$$m_2'' + k_2 m_1{}' + k_3{}^2 m_2 = 0 \tag{5.24}$$

$$k_2 m_1{}' + k_3{}^2 m_2 = 0 \Rightarrow m_1{}' = \frac{-k_3{}^2}{k_2} m_2$$

bulunur. Üstteki $m_1{}'$ değeri (5.24) de yerine yazılıp düzenlenirse $m_2'' = 0$ elde edilir. Buradan

$m_2 = cs + c_1$ (c ve c_1 integral sabitleri)

bulunur. $m_2' = c$ değeri, (5.23) de yerine yazılırsa

$m_1'' + m_1 {k_1}^2 = ck_2 - k_1$ (= sabit)

diferansiyel denklemi bulunur. Bu denklemin çözümünden

$$m_1 = c_2 \sin(k_1 s) + c_3 \cos(k_1 s) + \frac{ck_2 - k_1}{k_1^2}$$

olarak bulunur. m_1 in türevi alınıp, m_2 ile birlikte (5.10) eşitliklerinin ikincisinde yerlerine yazılırsa

$$m_0 = c_3 \sin(k_1 s) - c_2 \cos(k_1 s) + (cs + c_1)\frac{k_2}{k_1}$$

şeklinde bulunur. m_2 nin türevi m_1 ile birlikte (5.10) eşitliklerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa m_3 de

$$m_3 = \frac{c}{k_3} + \frac{c_2 \sin(k_1 s)}{k_3} + \frac{c_3 \cos(k_1 s)}{k_3} + \frac{ck_2 - k_1}{k_3 k_1^2}$$

bulunarak (5.17) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

5.2 İkinci Çeşit Tz-Eğrileri

Teorem 5.2.1 $x: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. x in ikinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2 = 0 \qquad (5.25)$$

olmasıdır.

İspat (⇒) (5.4) ifadesinin türevi alınırsa

$$k_1' \langle x, N_1\rangle^2 - 2k_1 \langle x, N_1\rangle \langle x, N_1\rangle' = 0 \Rightarrow k_1' \langle x, N_1\rangle^2 - 2k_1 \langle x, N_1\rangle \{\langle x', N_1\rangle + \langle x, N_1'\rangle\} = 0$$

elde edilir. (2.25) Frenet türev denklemleri kullanılırsa

$$k_1' \langle x, N_1\rangle^2 - 2k_1 \langle x, N_1\rangle \{-k_1 \langle x, T\rangle + k_2 \langle x, N_2\rangle\} = 0$$

$k_1'\langle x, N_1\rangle + 2{k_1}^2\langle x, T\rangle - 2k_1k_2\langle x, N_2\rangle = 0$

bulunur. (2.26) da göz önüne alınırsa (5.25) elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 5.2.2 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı küresel bir eğri olsun. x in ikinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart $k_1 = c$ sabit olmasıdır.

İspat (⇒) x, ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. O zaman (5.8) deki eşitlikler (5.25) de yerine yazılıp düzenlenirse $3\frac{k_1'}{k_1} = 0$ elde edilir. Bu diferansiyel denklem de çözülürse istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 5.2.3 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, m_0, m_1, m_2, m_3 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; yer vektörü (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. x in ikinci çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$
\begin{aligned}
&m_0' - k_1m_1 = 1\\
&m_1' + k_1m_0 - k_2m_2 = 0\\
&m_2' + k_2m_1 - k_3m_3 = 0\\
&m_3' + k_3m_2 = 0\\
&k_1'm_1 + 2k_1^2m_0 - 2k_1k_2m_2 = 0 \qquad (5.26)
\end{aligned}
$$

eşitliklerinin olmasıdır.

İspat x, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı eğri olduğu için (2.28) denklemleri ve eğri ikinci çeşit Tz-eğrisi olduğu için (5.25) denklemine sahip olur. Sonuç olarak (5.26) denklem sistemi elde edilir.

Önerme 5.2.4 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x in 1. çeşit T-sabit eğrisi $(m_0 = 0)$ olması için, $k_2 > 0, k_3 > 0$ sabitler ve $k_1 = c_1 \sin(\sqrt{2}k_2 s) + c_2 \cos(\sqrt{2}k_2 s)$ olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}, \quad m_2 = -2k_3 e^{2k_3^2 s + c}, \quad m_3 = e^{2k_3^2 s + c} \tag{5.27}$$

olur. Burada c, c_1, c_2 ler integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_0 = 0$ dır. (5.26) nın birinci eşitliğinden

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}$$

olarak bulunur. (5.26) eşitliklerinin beşincisinin türevi alınıp, yine (5.26) eşitliklerinin ikincisinden ve üçüncüsünden sırasıyla $m_1{}', m_2{}'$ çekilip bu türevde yerlerine yazılırsa

$$(k_1'' + 2k_1 k_2^2)m_1 - (k_1' k_2 + 2k_1 k_2')m_2 - 2k_1 k_2 k_3 m_3 = 0$$

elde edilir. (5.26) eşitliklerinin birincisinden m_1, dördüncüsünden m_2 çekilip üstteki eşitlikte yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_3{}'(k_1 k_2 + 2k_1 k_2') - 2k_1 k_2 k_3{}^2 m_3 = 2k_2^2 k_3 + \frac{k_1'' k_3}{k_1}$$

bulunur. $k_2 > 0$ sabit ve $k_3 > 0$ sabit alınıp, eşitliğin her iki tarafı $k_1 k_2$ ye bölünürse

$$m_3{}' - 2k_3{}^2 m_3 = \frac{2k_2 k_3}{k_1} + \frac{k_1'' k_3}{k_1^2 k_2} \tag{5.28}$$

elde edilir. Eşitliğin sağ tarafı sıfıra eşitlenir ve sadeleştirmeler yapılırsa $k_1'' + 2k_2{}^2 k_1 = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$k_1 = c_1 \sin(\sqrt{2}k_2 s) + c_2 \cos(\sqrt{2}k_2 s)$$

bulunur. Burada c_1, c_2 ler integral sabitleridir. Böylece üstteki k_1 değeri, $k_2 > 0$ sabit, $k_3 > 0$ sabit için (5.28) eşitliğinin sol tarafı sıfıra eşit olur. Buradan

$$m_3{}' - 2k_3{}^2 m_3 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Denklemin çözümünden de

$m_3 = e^{2{k_3}^2 s+c} \Rightarrow {m_3}' = 2{k_3}^2 e^{2{k_3}^2 s+c}$

bulunur. Burada c integral sabitidir. ${m_3}'$, (5.26) nın dördüncü eşitliğinde yerine yazılırsa

$m_2 = -2k_3 e^{2{k_3}^2 s+c}$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.2.5 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x in 2. çeşit T-sabit eğrisi ($m_0 \neq 0$ sabit) olması için $k_1 \neq 0,\ \ k_2 \neq 0$ sabitler olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}, \quad m_2 = \frac{-k_2 k_3'}{k_1 k_3^3}, \quad m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \tag{5.29}$$

olmalıdır.

İspat Tanım gereği $m_0 \neq 0$ sabit olduğundan $m_0' = 0$ olur. Bu durumda (5.26) eşitliklerinin birincisinden

$$m_1 = \frac{-1}{k_1} \tag{5.30}$$

elde edilir. Sonrasında (5.26) eşitliklerinin beşincisinin türevi alınıp, yine (5.26) nın ikinci eşitliğinden m_1', üçüncü eşitliğinden de m_2' çekilir ve alınan türevde yerine yazılırsa

$$(k_1'' + 2k_1 k_2^2)m_1 - (k_1' k_2 + 2k_1 k_2')m_2 - 2k_1 k_2 k_3 m_3 + 3ck_1 k_1' = 0$$

bulunur. Burada da (5.26) eşitliklerinin dördüncüsünden m_2 çekilip, (5.30) dan m_1 in eşiti üstteki denklemde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$(k_1 k_1' k_2 + 2k_1^2 k_2')m_3' - 2{k_1}^2 k_2 {k_3}^2 m_3 = k_1'' k_3 - 3c{k_1}^2 k_1' k_3 + 2k_1 {k_2}^2 k_3$$

olarak bulunur. $k_1 \neq 0$ sabit, $k_2 \neq 0$ sabit olarak alınırsa

$$m_3 = -\frac{k_2}{k_1 k_3} \Rightarrow m_3' = \frac{k_2 {k_3}'}{k_1 {k_3}^2}$$

elde edilir. Üstteki m_3' değeri (5.26) nın dördüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_2 = -\frac{k_2 k_3'}{k_1 k_3^3}$$

bulunarak (5.29) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

Önerme 5.2.6 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* in, 1. çeşit N-sabit eğrisi $(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0)$ olması için $k_1 \neq 0$ sabit, $k_2 \neq 0$ sabit ve $k_3 = \frac{\mp\sqrt{k_1 + c_1 k_1^2 + c_1 k_2^2}}{\sqrt{c_3 - s[k_1(1 + c_1 k_1)s + 2c_2 k_1]}}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} &m_0 = (1 + c_1 k_1)s + c_2, \qquad m_1 = c_1 \\ &m_2 = \frac{k_1[(1 + c_1 k_1)s + c_2]}{k_2}, \quad m_3 = \frac{k_1 + c_1 k_1^2 + c_1 k_2^2}{k_2 k_3} \end{aligned} \tag{5.31}$$

olmalıdır. c_1, c_2 ler integral sabitleridir.

İspat (5.26) eşitliklerinin beşincisinin karesi alınıp düzenlenirse

$$(k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2)^2 = 0$$
$${k_1'}^2 {m_1}^2 + 4k_1^2 k_1' m_0 m_1 + 4k_1^4 {m_0}^2 - 4k_1 k_2 m_2 (k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0) + 4{k_1}^2 {k_2}^2 {m_2}^2 = 0$$

olur. Tanımdan $m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0$ idi. Burada m_1^2 çekilip üstteki ifadede yerine yazılıp düzenlenirse

$$-{k_1'}^2 (m_2^2 + m_3^2) + 4k_1^2 k_1' m_0 m_1 + 4k_1^4 {m_0}^2 - 4k_1 k_2 m_2 (k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0)$$
$$+4{k_1}^2 {k_2}^2 {m_2}^2 = 0$$
$$m_2^2\left(-{k_1'}^2 + 4k_1^2 {k_2}^2\right) - {k_1'}^2 m_3^2 + 4{k_1}^2 m_0 (k_1' m_1 + k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2)$$
$$-4k_1 k_1' k_2 m_1 m_2 = 0$$

olur. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$2m_2 {m_2}'\left(-{k_1'}^2 + 4k_1^2 {k_2}^2\right) + m_2^2\left(-{k_1'}^2 + 4k_1^2 {k_2}^2\right)' - 2k_1' k_1'' m_3^2 - 2{k_1'}^2 m_3 {m_3}'$$
$$+(8k_1 k_1' m_0 + 4k_1^2 {m_0}')(k_1' m_1 + k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2)$$
$$+4{k_1}^2 m_0 (k_1'' m_1 + k_1' {m_1}' + 2k_1 k_1' m_0 + k_1^2 {m_0}' - 2k_1' k_2 m_2 - 2k_1 k_2' m_2 - 2k_1 k_2 {m_2}')$$
$$-(4k_1 k_1' k_2)' m_1 m_2 - 4k_1 k_1' k_2 ({m_1}' m_2 + m_1 {m_2}') = 0$$

bulunur. $k_1 \neq 0$ sabit, $k_2 \neq 0$ sabit alınırsa ${k_1}' = 0$ ve ${k_2}' = 0$ olur. Bu durumda üstteki ifade düzenlenirse

$$2m_2{m_2}'\left(4k_1^2{k_2}^2\right) + 4k_1^2{m_0}'(k_1^2m_0 - 2k_1k_2m_2) + 4{k_1}^2m_0(k_1^2{m_0}' - 2k_1k_2{m_2}') = 0$$

$${k_2}^2m_2{m_2}' - k_1k_2{m_0}'m_2 - k_1k_2m_0{m_2}' + k_1^2m_0{m_0}' = 0$$

$$(k_2{m_2}' - k_1{m_0}')(k_2m_2 - k_1m_0) = 0$$

formunu alır. Buradan da

$$k_2{m_2}' - k_1{m_0}' = 0 \ \vee \ k_2m_2 - k_1m_0 = 0$$

olur. Dolayısıyla

$${m_2}' = \frac{k_1}{k_2}{m_0}' \ \ \vee \ \ m_2 = \frac{k_1}{k_2}m_0$$

koşulları elde edilir. k_1 ve k_2 sabit olduklarından ikinci koşulun türevi birinci koşula eşittir. Yani

$$m_2 = \frac{k_1}{k_2}m_0 \Rightarrow m_2' = \frac{k_1}{k_2}m_0' \tag{5.32}$$

olur. (5.32) den k_2m_2 çekilip, (5.26) eşitliklerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$m_1' = 0 \Rightarrow m_1 = c_1 \text{ (sabit)} \tag{5.33}$$

bulunur. (5.33) deki m_1 in eşiti (5.26) eşitliklerinin birincisinde yerine yazılırsa

$$m_0' - c_1k_1 = 1 \Rightarrow m_0' = 1 + c_1k_1 \Rightarrow m_0 = (1 + c_1k_1)s + c_2 \ (c_2 \text{ sabit}) \tag{5.34}$$

olur. (5.34) de elde edilen m_0, (5.32) de yerine yazılıp düzenlenirse

$$m_2 = \frac{k_1[(1 + c_1k_1)s + c_2]}{k_2} \Rightarrow m_2' = \frac{k_1}{k_2}(1 + c_1k_1) \tag{5.35}$$

olur. (5.35) den m_2' ve (5.33) den m_1, (5.26) eşitliklerinin üçüncüsünde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$m_2' + k_2m_1 - k_3m_3 = 0$$

$$\frac{k_1}{k_2}(1 + c_1k_1) + c_1k_2 - k_3m_3 = 0$$

$$m_3 = \frac{k_1 + c_1k_1^2 + c_1k_2^2}{k_2k_3} \Rightarrow m_3' = \frac{-k_3'(k_1 + c_1k_1^2 + c_1k_2^2)}{k_2{k_3}^2} \tag{5.36}$$

olarak bulunur. (5.36) dan m_3' ve (5.35) den m_2, (5.26) eşitliklerinin dördüncüsünde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_3' + k_3 m_2 = 0$$

$$\frac{-k_3'(k_1 + c_1 k_1^2 + c_1 k_2^2)}{k_2 {k_3}^2} + k_3 \frac{k_1[(1 + c_1 k_1)s + c_2]}{k_2} = 0$$

$$\frac{k_3'}{{k_3}^3} = \frac{k_1[(1 + c_1 k_1)s + c_2]}{k_1 + c_1 k_1^2 + c_1 k_2^2}$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklem çözdürülürse

$$k_3 = \frac{\mp\sqrt{k_1 + c_1 k_1^2 + c_1 k_2^2}}{\sqrt{c_3 - s[k_1(1 + c_1 k_1)s + 2c_2 k_1]}} \quad (c_3 \text{ sabit})$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.2.7 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. x, 2. çeşit N-sabit eğrisi ise m_0, m_1, m_2, m_3 katsayıları (5.31) eşitliklerini sağlar.

Önerme 5.2.8 $x: I \subset R \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* eğrisinin 1. çeşit oskülatör eğri olması ($m_2 = 0$) için

$$m_0 = \frac{-c k_1' k_3}{2 k_1^2 k_2}, \quad m_1 = \frac{c k_3}{k_2}, \quad m_3 = c \text{ (sabit)} \tag{5.37}$$

olmalıdır. Ayrıca $k_1 m_1'' - k_1' m_1' + k_1^3 m_1 + k_1^2 = 0$ diferansiyel denklemi elde edilir. Ve üstteki ifadede $k_1 \neq 0$ sabit alınırsa $m_0 = 0$ olacağından eğri $\{N_1, N_3\}$ düzleminde yatar. Bu durumda katsayılar

$$m_1 = c_1 \sin(k_1 s) + c_2 \cos(k_1 s) - \frac{1}{k_1}, \quad m_3 = c \text{ (sabit)} \tag{5.38}$$

olur.

İspat Tanımdan $m_2 = 0$ değeri (5.26) eşitliklerinin dördüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_3' + k_3 m_2 = 0$$

$$m_3' = 0 \Rightarrow m_3 = c \quad (c \text{ sabit}) \tag{5.39}$$

bulunur. m_2 ve m_3 değerleri (5.26) eşitliklerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0$$

$$k_2 m_1 - k_3 c = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{ck_3}{k_2} \tag{5.40}$$

olarak bulunur. m_2 ve m_1 değerleri (5.26) nın beşincisinde yerlerine yazılırsa

$$k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2 = 0$$

$$k_1' \frac{ck_3}{k_2} + 2k_1^2 m_0 = 0 \Rightarrow m_0 = -\frac{ck_1' k_3}{2k_1^2 k_2} \tag{5.41}$$

bulunarak (5.37) eşitlikleri elde edilmiş olur.

Diğer taraftan (5.26) eşitliklerinin ikicisinde $m_2 = 0$ kullanılıp m_0 yalnız bırakılırsa

$$m_1' + k_1 m_0 = 0$$

$$m_0 = \frac{-m_1'}{k_1} \Rightarrow m_0' = \frac{-m_1'' k_1 + m_1' k_1'}{k_1^2} \tag{5.42}$$

elde edilir. (5.42) den m_0' ın eşiti (5.26) eşitliklerinin birincisinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$

$$\frac{-m_1'' k_1 + m_1' k_1'}{k_1^2} - k_1 m_1 = 1$$

$$k_1 m_1'' - k_1' m_1' + k_1^3 m_1 + k_1^2 = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. $k_1 \neq 0$ sabit alınırsa $m_0 = 0$ olduğundan eğri $\{N_1, N_3\}$ düzleminde yatar ve m_3 de aynı kalır. Ayrıca en son elde edilen denklem

$$k_1 m_1'' + k_1^3 m_1 + k_1^2 = 0$$

olur ve bu denklem çözülerek

$$m_1 = c_1 \sin(k_1 s) + c_2 \cos(k_1 s) - \frac{1}{k_1}$$

elde edilir. Sonuç olarak (5.38) eşitlikleri de elde edilmiş olur.

Önerme 5.2.9 $x: I \subset R \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* eğrisinin 3. çeşit oskülatör eğri $(m_3 = 0)$ olması için $k_1 \neq 0$ sabit, $k_2 \neq 0$ sabit olmak üzere;

$$m_0 = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} s + c \quad m_1 = \frac{-k_1}{k_1^2 + k_2^2} \quad m_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} s + c_1 \tag{5.43}$$

olmalıdır. Burada c, c_1 integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_3 = 0$ dır. Bu durumda (5.26) eşitlikleri

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$
$$m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0$$
$$m_2' + k_2 m_1 = 0$$
$$k_3 m_2 = 0$$
$$k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2 = 0 \tag{5.44}$$

formunu alır. (5.44) ün dördüncüsünden $m_2 \neq 0$ olduğundan

$$k_3 = 0$$

olur. (5.44) ün beşincisinin türevi alınırsa

$$(k_1' m_1 + 2k_1^2 m_0 - 2k_1 k_2 m_2)' = 0$$
$$k_1'' m_1 + k_1' m_1' + 4k_1 k_1' m_0 + 2k_1^2 m_0' - 2(k_1 k_2)' m_2 - 2k_1 k_2 m_2' = 0$$

bulunur. (5.44) ün birincisinden, ikincisinden ve üçüncüsünden sırasıyla, m_0', m_1', m_2' yalnız bırakılıp eşitleri üstteki ifadede yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_1(k_1'' + 2k_1^3 + 2k_1 k_2^2) + m_2(k_1' k_2 - 2(k_1 k_2)') + 3k_1 k_1' m_0 + 2k_1^2 = 0$$

elde edilir. $k_1 \neq 0$ sabit, $k_2 \neq 0$ sabit alınırsa üstteki ifadeden

$$m_1(2k_1^3 + 2k_1 k_2^2) + 2k_1^2 = 0$$
$$m_1 = \frac{-k_1}{k_1^2 + k_2^2}$$

olarak bulunur. Üstteki m_1 in eşiti, (5.44) ün birincisinde yerine yazılır ve ara işlemler de yapılırsa

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$

$$m_0' = 1 + k_1 \frac{(-k_1)}{k_1^2 + k_2^2} = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2}$$

$$m_0 = \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} s + c \ \ (c \text{ sabit})$$

şeklinde bulunur. Ayrıca m_1 in eşiti (5.44) ün üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_2' + k_2 m_1 = 0$$

$$m_2' + k_2 \frac{(-k_1)}{k_1^2 + k_2^2} = 0$$

$$m_2 = \frac{k_1 k_2}{k_1^2 + k_2^2} s + c_1 \ (c_1 \text{ sabit})$$

bulunarak (5.43) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

Önerme 5.2.10 $x: I \subset R \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı ikinci çeşit Tz-eğrisi olsun. Eğer *x*, *W* eğrisi ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \ \neq 0$ sabitler) ise o zaman

$$m_0 = \frac{k_2}{k_1} c_3 \sin(k_3 s) + \frac{k_2}{k_1} c_4 \cos(k_3 s) - \frac{k_2^2 c_1}{k_1 k_3^2} - \frac{c_1}{k_1}$$

$$m_1 = c_1 s + c_2$$

$$m_2 = c_3 \sin(k_3 s) + c_4 \cos(k_3 s) - \frac{c_1 k_2}{k_3^2}$$

$$m_3 = c_3 \cos(k_3 s) - c_4 \sin(k_3 s) + (c_1 s + c_2) \frac{k_2}{k_3} \tag{5.45}$$

olmalıdır. Burada c_1, c_2, c_3, c_4 integral sabitleridir.

İspat (5.26) eşitliklerinin ikinci, üçüncü ve beşincisinin türevleri alınır ve düzenlenirse sırasıyla

$$m_1'' + k_1 m_0' - k_2 m_2' = 0$$

$$m_2'' + k_2 m_1' - k_3 m_3' = 0$$

$$k_1 m_0' - k_2 m_2' = 0 \tag{5.46}$$

bulunur. (5.26) eşitliklerinin birincisinden m_0' çekilip (5.46) nın birincisinde ve üçüncüsünde, (5.26) eşitliklerinin dördüncüsünden m_3' çekilip (5.46) nın ikincisinde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_1'' = k_2 m_2' - k_1(1 + k_1 m_1)$$
$$m_2'' = -k_2 m_1' - k_3^2 m_2$$
$$m_2' = \frac{k_1}{k_2}(1 + k_1 m_1) \tag{5.47}$$

elde edilir. (5.47) nin üçüncüsü birincisinde yerine yazılır ve düzenlenirse

$$m_1'' = k_2 \frac{k_1}{k_2}(1 + k_1 m_1) - k_1(1 + k_1 m_1)$$
$$m_1'' = 0 \Rightarrow m_1' = c_1 \Rightarrow m_1 = c_1 s + c_2 \ \ (c_1, c_2 \ \text{sabit}) \tag{5.48}$$

bulunur. (5.48) den m_1' , (5.47) nin ikincisinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$m_2'' + k_3^2 m_2 = -c_1 k_2$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden c_3, c_4 sabit olmak üzere;

$$m_2 = c_3 \sin(k_3 s) + c_4 \cos(k_3 s) - \frac{c_1 k_2}{k_3^2} \Rightarrow m_2' = k_3 c_3 \cos(k_3 s) - k_3 c_4 \sin(k_3 s) \tag{5.49}$$

bulunur. (5.48) den m_1' nün, (5.49) dan m_2 nin eşitleri, (5.26) eşitliklerinin ikincisinde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0$$
$$c_1 + k_1 m_0 - k_2 \left(c_3 \sin(k_3 s) + c_4 \cos(k_3 s) - \frac{c_1 k_2}{k_3^2} \right) = 0$$
$$m_0 = \frac{k_2}{k_1} c_3 \sin(k_3 s) + \frac{k_2}{k_1} c_4 \cos(k_3 s) - \frac{k_2^2 c_1}{k_1 k_3^2} - \frac{c_1}{k_1}$$

olarak bulunur. (5.48) den m_1 in, (5.49) dan m_2' nün eşitleri, (5.26) eşitliklerinin üçüncüsünde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0$$
$$k_3 c_3 \cos(k_3 s) - k_3 c_4 \sin(k_3 s) + k_2(c_1 s + c_2) - k_3 m_3 = 0$$
$$m_3 = c_3 \cos(k_3 s) - c_4 \sin(k_3 s) + \frac{k_2(c_1 s + c_2)}{k_3}$$

de bulunarak (5.45) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

Örnek 5.2.11 $\mathbb{E}^4$ de $x(s) = (a\cos(cs), a\sin(cs), b\cos(ds), b\sin(ds))$ parametrizasyonuyla verilen regüler W-eğrisi ikinci çeşit Tz-eğrisidir. Burada $0 \leq s \leq 2\pi$, a,b,c,d reel sabitler, $c > 0, d > 0$ dır. Genelliği bozmadan x in birim hızlı olması isteniyorsa $a^2c^2 + b^2d^2 = 1$ alınmalıdır. Böylece $c = d$ halinde x bir çember, $c \neq d$ halinde ise $\mathbb{E}^4$ de bir eğridir [38].

Çözüm [38] numaralı kaynağın 6. sayfasından k_1 eğriliği ve asli birim normal vektör alanı

$$k_1 = \sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}$$

$$N_1 = \frac{1}{k_1}[-ac^2\cos(cs), -ac^2\sin(cs), -bd^2\cos(ds), -bd^2\sin(ds)]$$

dır. N_1 ve x, (5.3) de yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d_{\{T,N_2,N_3\}} &= \langle x, N_1\rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}} \end{aligned}$$

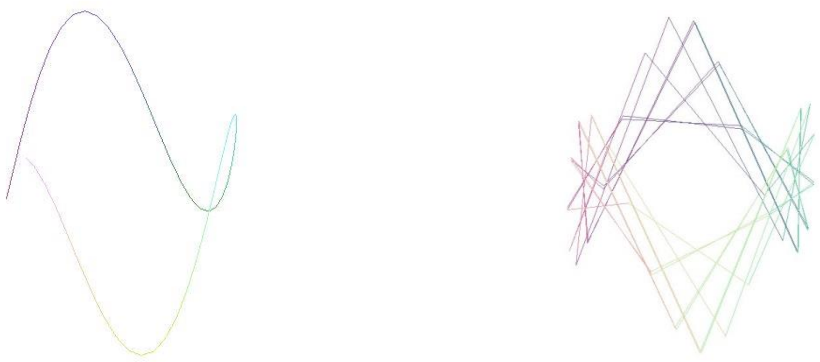
bulunur. $d_{\{T,N_2,N_3\}}$ ve k_1 değeri (5.4) de yerlerine yazılıp düzenlenirse Tz-sabiti de

$$a_2 = (a^2c^4 + b^2d^4)^{\frac{3}{2}} \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur.

$\mathbb{E}^4$ de verilen W eğrisinin $x_4 = 0$ koordinat hiperdüzlemi üzerindeki izdüşümü

$x(s) = (\cos\left({s}/{\sqrt{10}}\right), \sin\left({s}/{\sqrt{10}}\right), \cos\left({3s}/{\sqrt{10}}\right))$ dur. Burada $a = 1, b = 1, c = {1}/{\sqrt{10}}, d = {3}/{\sqrt{10}}$ dur. İzdüşüm eğrisine ait çizimin Maple komutu spacecurve([cos(t/sqrt(10)),sin(t/sqrt(10)),cos(3*t/sqrt(10)], t=m..n, grid=[30,30]); şeklindedir.



(a) (b)

Şekil 5.1: İkinci ve üçüncü çeşit Tz-W eğrisi a) m=0, n=5*pi, b) m=0, n=50*pi

Örnek 5.2.12 $\mathbb{E}^4$ de gömülmüş birim 3-küre $S^3(1)$ üzerindeki $x(s) = (cos\emptyset \cos(as), cos\emptyset \sin(as), sin\emptyset \cos(bs), sin\emptyset \sin(bs))$ parametrizasyonuyla tanımlanan helis eğrisi ikinci çeşit Tz-eğrisidir. Burada $a^2cos^2\emptyset + b^2sin^2\emptyset = 1$ ve $x_1{}^2 + x_2{}^2 = cos^2\emptyset$, $x_3{}^2 + x_4{}^2 = sin^2\emptyset$ dir [38].

Çözüm (2.26), (2.27) ve (2.28) yardımıyla *x(s)* eğrisinin Frenet vektörleri ve k_1, k_2, k_3 eğrilikleri

$$T = (-a\cos\emptyset \sin(as), a\cos\emptyset \cos(as), -b\sin\emptyset \sin(bs), b\sin\emptyset \cos(bs))$$

$$N_1 = \frac{(-a^2\cos\emptyset \cos(as), -a^2\cos\emptyset \sin(as), -b^2\sin\emptyset \cos(bs), -b^2\sin\emptyset \sin(bs))}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

$$N_2 = (b\sin\emptyset \sin(as), -b\sin\emptyset \cos(as), -a\cos\emptyset \sin(bs), a\cos\emptyset \cos(bs))$$

$$N_3 = \frac{(b^2\sin\emptyset \cos(as), b^2\sin\emptyset \sin(as), -a^2cos\emptyset \cos(bs), -a^2\cos\emptyset \sin(bs))}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

$$k_1 = \sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}$$

$$k_2 = \frac{ab(a^2 - b^2)\cos\emptyset\sin\emptyset}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

$$k_3 = \frac{ab}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

olarak bulunur. N_1 ve x, (5.3) de yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d_{\{T,N_2,N_3\}} &= \langle x, N_1\rangle \\ &= \frac{-1}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}} \end{aligned}$$

bulunur. k_1 ve $d_{\{T,N_2,N_3\}}$ değerleri (5.4) de yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılınca

$$a_2 = \left(\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}\right)^3 \in \mathbb{R}$$

bulunarak istenen sonuç elde edilmiş olur.

5.3 Üçüncü Çeşit Tz-Eğrileri

Teorem 5.3.1 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. x in üçüncü çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2 = 0 \tag{5.50}$$

olmasıdır.

İspat (⇒) (5.6) ifadesinin türevi alınırsa

$$k_3'\langle x, N_3\rangle^2 - 2k_3\langle x, N_3\rangle\langle x, N_3\rangle' = 0$$
$$k_3'\langle x, N_3\rangle^2 - 2k_3\langle x, N_3\rangle\{\langle x', N_3\rangle + \langle x, {N_3}'\rangle\} = 0$$

elde edilir. (2.25) Frenet denklemleri göz önünde bulundurulursa

$$k_3'\langle x, N_3\rangle^2 - 2k_3\langle x, N_3\rangle\{-k_3\langle x, N_2\rangle\} = 0$$
$$k_3'\langle x, N_3\rangle^2 + 2{k_3}^2\langle x, N_3\rangle\langle x, N_2\rangle = 0$$

bulunur. (2.26) da göz önüne alınırsa (5.50) elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Önerme 5.3.2 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı küresel bir eğri olsun. *x* in üçüncü çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$k_3'\left(k_1'' - 2\frac{{k_1'}^2}{k_1} - \frac{k_1 k_2'}{k_2} - k_1 k_2^2\right) + 2k_1' k_3^3 = 0 \tag{5.51}$$

olmasıdır.

İspat (⇒) *x*, üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. O zaman (5.8) eşitlikleri (5.50) ifadesinde yerine yazılırsa

$$k_3'\left(\frac{k_1''}{k_1^2 k_2 k_3} - \frac{2{k_1'}^2}{k_1^3 k_2 k_3} - \frac{k_1' k_2'}{k_1^2 k_2^2 k_3} - \frac{k_2}{k_1 k_3}\right) + 2k_3^2\left(\frac{k_1'}{k_2 k_1^2}\right) = 0$$

bulunur. Gerekli ara işlemler ve sadeleştirmeler yapılırsa (5.51) elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Sonuç 5.3.3 Eğer $k_1 \neq 0$ sabit, $, k_2 \neq 0$ sabit olarak alınırsa (5.51) ifadesi

$$-k_3' k_1 k_2^2 = 0 \Rightarrow k_3' = 0 \Rightarrow k_3 = \text{sabit}$$

olur. Bu durumda *x* birim hızlı üçüncü çeşit küresel Tz-eğrisi, *W* eğrisi olur.

Önerme 5.3.4 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, m_0, m_1, m_2, m_3 diferensiyellenebilir fonksiyonlar olmak üzere; yer vektörü (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı bir eğri olsun. *x* in üçüncü çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
&m_0' - k_1 m_1 = 1 \\
&m_1' + k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0 \\
&m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0 \\
&m_3' + k_3 m_2 = 0 \\
&k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.52}$$

eşitliklerinin olmasıdır.

İspat *x*, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı eğri olduğu için (2.28) denklemleri ve eğri üçüncü çeşit Tz-eğrisi olduğu için (5.50) denklemine sahip olur. Sonuç olarak (5.52) denklem sistemi elde edilir.

Önerme 5.3.5 $x: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* in 1. çeşit T-sabit eğrisi ($m_0 = 0$) olması için

$$k_1 = \frac{\mp c k_3}{\sqrt{c^4 k_3^4(-2c_2 s - c_2^2 - s^2) + c_1}}, \quad k_2 = \frac{k_1'}{c k_1^2}, \quad k_3 \neq 0 \text{ (sabit)}$$

olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}, \quad m_2 = c, \quad m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \tag{5.53}$$

olmalıdır. Burada c, c_1, c_2 sıfırdan farklı integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_0 = 0$ dır. m_0 değeri (5.52) eşitliklerinde yerine yazılırsa, bu eşitlikler

$$\begin{aligned}
&-k_1 m_1 = 1\\
&m_1' - k_2 m_2 = 0\\
&m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0\\
&m_3' + k_3 m_2 = 0\\
&k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.54}$$

formunu alır. (5.54) ün birincisinden

$$m_1 = \frac{-1}{k_1} \Rightarrow m_1' = \frac{k_1'}{k_1^2} \tag{5.55}$$

olarak bulunur. (5.54) eşitliklerinin beşincisinin türevi alınır ve (5.54) eşitliklerinin dördüncüsünden ve üçüncüsünden sırasıyla $m_3{}', m_2{}'$ çekilip yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\begin{aligned}
&(k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2)' = 0\\
&k_3'' m_3 + k_3' m_3' + 4k_3 k_3' m_2 + 2k_3^2 m_2' = 0\\
&k_3'' m_3 + 3k_3 k_3' m_2 - 2k_2 k_3^2 m_1 + 2k_3^3 m_3 = 0
\end{aligned}$$

bulunur. (5.55) den m_1 in eşiti de üstteki ifadede yerine yazılıp düzenlenirse

$$m_3(k_3''+2k_3^3)+3k_3k_3'm_2=\frac{-2k_2k_3^2}{k_1}$$

elde edilir. $k_3\neq 0$ sabit alınırsa

$$m_3(2k_3^3)=\frac{-2k_2k_3^2}{k_1}\Rightarrow m_3=\frac{-k_2}{k_1k_3}\Rightarrow m_3'=\frac{-k_2'k_1k_3+k_2k_1'k_3}{k_1^2k_3^2} \tag{5.56}$$

bulunur. (5.55) den m_1 ve (5.56) dan m_3 değerleri (5.54) ün üçüncüsünde yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$m_2'+k_2\left(\frac{-1}{k_1}\right)-k_3\left(\frac{-k_2}{k_1k_3}\right)=0\Rightarrow m_2'=0\Rightarrow m_2=c \tag{5.57}$$

olarak bulunur. (5.57) den m_2 nin ve (5.55) den m_1' nün eşiti (5.54) ün ikincisinde yerlerine yazılırsa

$$k_1'=ck_1^2k_2\Rightarrow k_2=\frac{k_1'}{ck_1^2}\Rightarrow k_2'=\frac{k_1''ck_1^2-2ck_1{k_1'}^2}{c^2k_1^4} \tag{5.58}$$

bulunur. (5.58) den k_1' nün eşiti, (5.56) dan m_3' de yerine yazılırsa

$$m_3'=\frac{-k_2'k_1k_3+k_2ck_1^2k_2k_3}{k_1^2k_3^2} \tag{5.59}$$

elde edilir. (5.59) dan m_3' nün, (5.57) den m_2 nin eşitleri (5.54) ün dördüncüsünde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{-k_2'k_1k_3+k_2ck_1^2k_2k_3}{k_1^2k_3^2}=-ck_3$$

$$-k_2'+ck_1k_2^2=-ck_1k_3^2$$

bulunur. (5.58) den k_2 ve k_2' nün eşitleri üstteki denklemde yerlerine yazılır ve ara işlemler yapılırsa

$$-\left(\frac{k_1''ck_1^2-2ck_1{k_1'}^2}{c^2k_1^4}\right)+\frac{ck_1{k_1'}^2}{c^2k_1^4}=-ck_1k_3^2$$

$$k_1''k_1-3{k_1'}^2-c^2k_1^4k_3^2=0$$

elde edilir. Bu diferansiyel denklemin çözümünden de

$$k_1=\frac{\mp ck_3}{\sqrt{c^4k_3^4(-2c_2s-c_2^2-s^2)+c_1}}$$

bulunarak (5.53) eşitlikleri elde edilmiş olur.

Önerme 5.3.6 $x\colon I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* in 2. çeşit T-sabit eğrisi ($m_0 \neq 0$ sabit) olması için

$$k_1 = \frac{\mp c_1 k_3}{\sqrt{c_1{}^4 k_3^4(-2c_2 s - c_2^2 - s^2) + c_3}}, \quad k_2 = \frac{k_1'}{c_1 k_1^2} + \frac{c}{c_1} k_1, \quad k_3 \neq 0 \text{ (sabit)}$$

olmak üzere;

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}, \quad m_2 = c_1, \quad m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \tag{5.60}$$

olmalıdır. Burada $c \neq 0$ sabit ve c_1, c_2, c_3 integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_0 = c$ sabittir. Bu durumda $m_0' = 0$ olur. (5.52) eşitliklerinde $m_0 = c$ ve $m_0' = 0$ değerleri yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&-k_1 m_1 = 1 \\
&m_1' + k_1 c - k_2 m_2 = 0 \\
&m_2' + k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0 \\
&m_3' + k_3 m_2 = 0 \\
&k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2 = 0
\end{aligned} \tag{5.61}$$

elde edilir. Bu kısımdan itibaren m_1, m_2, m_3 lerin çıkarılışları yine $k_3 = c$ (sabit) alınmak kaydıyla bir önceki Önerme 5.3.5 in ispatıyla aynıdır. Dolayısıyla

$$m_1 = \frac{-1}{k_1}, \quad m_2 = c_1 \text{ (sabit)}, \quad m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \tag{5.62}$$

tür. (5.62) eşitliklerinin ayrı ayrı türevleri alınırsa

$$m_1' = \frac{k_1'}{k_1^2}, \qquad m_2' = 0, \qquad m_3' = \frac{-k_2' k_1 k_3 + k_2 k_1' k_3}{k_1^2 k_3^2} \tag{5.63}$$

olarak bulunur. (5.63) den m_1' nün, (5.62) den m_2 nin eşitleri, (5.61) in ikincisinde yerlerine yazılırsa

$$\frac{k_1'}{k_1^2}+k_1c-k_2c_1=0\Rightarrow k_1'=-ck_1^3+c_1k_1^2k_2 \tag{5.64}$$

bulunur. (5.64) ifadesinde k_2 yalnız bırakılıp türevi alınırsa

$$k_2=\frac{k_1'+ck_1^3}{c_1k_1^2}\Rightarrow k_2'=\frac{-1}{c_1}\left(\frac{k_1''k_1^2-2k_1{k_1'}^2}{k_1^4}+ck_1'\right) \tag{5.65}$$

şeklinde bulunur. Diğer taraftan (5.63) ten m_3' ve (5.62) den m_2 değerleri, (5.61) in dördüncüsünde yerlerine yazılırsa

$$\frac{-k_2'k_1k_3+k_2k_1'k_3}{k_1^2k_3^2}+k_3c_1=0$$

$$-k_2'k_1k_3+k_2k_1'k_3+c_1k_1^2k_3^3=0$$

elde edilir. (5.65) ten k_2 ve k_2' değerleri üstteki ifadede yerlerine yazılır ve sadeleştirmeler yapılırsa

$$\frac{k_1}{c_1}\left(\frac{k_1''k_1^2-2k_1{k_1'}^2}{k_1^4}+ck_1'\right)+k_1'\left(\frac{k_1'+ck_1^3}{c_1k_1^2}\right)+c_1k_1^2k_3^2=0$$

$$k_1k_1''-3{k_1'}^2-c_1^2k_1^4k_3^2=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden de

$$k_1=\frac{\mp c_1k_3}{\sqrt{{c_1}^4k_3^4(-2c_2s-c_2^2-s^2)+c_3}}$$

bulunarak (5.60) eşitliklerinin tamamı elde edilmiş olur.

Önerme 5.3.7 $x\colon I\subset\mathbb{R}\to\mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. x in 1. çeşit N-sabit eğrisi ($m_1^2+m_2^2+m_3^2=0$) veya 2. çeşit N-sabit eğrisi ($m_1^2+m_2^2+m_3^2=c$) olması için $k_3\neq 0$ (sabit), $k_2\neq 0$ (sabit) ve $k_1=\frac{-k_2}{c_1k_3}$ (sabit) olmak üzere;

$$m_0=0,\ \ m_1=\frac{c_1k_3}{k_2},\ \ m_2=0,\ \ m_3=c_1\ \text{(sabit)} \tag{5.66}$$

olmalıdır. Böylece eğri $\{N_1,N_3\}$ düzleminde yatan *W* eğrisi olur.

İspat Tanımdan

$$m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = 0 \tag{5.67}$$

dır. Bu ifadenin türevi alınırsa

$$m_1 m_1{}' + m_2 m_2{}' + m_3 m_3{}' = 0 \tag{5.68}$$

bulunur. (5.52) eşitliklerinin beşincisinin karesi alınır ve (5.67) den m_2^2 çekilip eşiti bu ifadede yerine yazılır ve düzenlenirse

$$k_3'^2 m_3^2 + 4k_3^2 k_3' m_2 m_3 + 4k_3^4 m_2^2 = 0$$
$$m_3^2\left(k_3'^2 - 4k_3^4\right) + 4k_3^2 k_3' m_2 m_3 - 4k_3^4 m_1^2 = 0$$

elde edilir. Bulunan bu ifadenin türevi alınırsa

$$2m_3 m_3{}'\left(k_3'^2 - 4k_3^4\right) + m_3^2(2k_3' k_3'' - 16k_3^3 k_3') + \left(8k_3 k_3'^2 + 4k_3^2 k_3''\right)m_2 m_3$$
$$+4k_3^2 k_3'(m_2 m_3)' - 16k_3^3 k_3' m_1^2 - 8k_3^4 m_1 m_1{}' = 0$$

bulunur. Buradan itibaren $k_3 \neq 0$ sabit kabul edilirse üstteki ifade

$$-m_3 m_3{}' - m_1 m_1{}' = 0 \tag{5.69}$$

olur ve (5.68) de göz önüne alınırsa

$$m_2 m_2{}' = 0$$

formunu alır. Buradan da

$$m_2 = 0 \ \vee \ m_2{}' = 0 \Rightarrow m_2 = c \text{ (sabit)} \tag{5.70}$$

elde edilir. $m_2 = 0$ kabul edilirse (5.52) eşitlikleri

$$m_0' - k_1 m_1 = 1$$
$$m_1' + k_1 m_0 = 0$$
$$k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0$$
$$m_3' = 0 \tag{5.71}$$

formunu alır. (5.71) in dördüncüsünden

$$m_3' = 0 \Rightarrow m_3 = c_1 \text{ (sabit)} \tag{5.72}$$

bulunur. m_3 ün eşiti (5.71) in üçüncüsünde yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_2 m_1 - k_3 c_1 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{c_1 k_3}{k_2} \Rightarrow m_1' = -\frac{c_1 k_3 k_2{}'}{k_2{}^2} \tag{5.73}$$

şeklini alır. m_1' nün eşiti, (5.71) in ikincisinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$-\frac{c_1 k_3 k_2{}'}{k_2{}^2} + k_1 m_0 = 0 \Rightarrow m_0 = \frac{c_1 k_2{}' k_3}{k_1 k_2{}^2} \tag{5.74}$$

$$m_0{}' = c_1 k_3 \frac{\left(k_2{}'' k_1 k_2{}^2 - k_2{}'\left(k_1{}' k_2{}^2 + 2k_1 k_2 k_2{}'\right)\right)}{\left(k_1{}^2 k_2{}^4\right)} \tag{5.75}$$

bulunur. (5.75) den $m_0{}'$ nün ve (5.73) den m_1 in eşitleri, (5.71) in birincisinde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$c_1 k_3 \frac{\left(k_2{}'' k_1 k_2{}^2 - k_2{}'\left(k_1{}' k_2{}^2 + 2k_1 k_2 k_2{}'\right)\right)}{\left(k_1{}^2 k_2{}^4\right)} - k_1 \frac{c_1 k_3}{k_2} = 1$$

$$c_1 k_3 \left(k_1 k_2{}^2 k_2{}'' - k_1{}' k_2{}^2 k_2{}' - 2k_1 k_2 k_2{}'^2\right) = k_1{}^2 k_2{}^4 + c_1 k_1{}^3 k_2{}^3 k_3$$

olur. Bu kısımdan itibaren $k_2 \neq 0$ sabit kabul edilirse $k_2{}' = 0$ olur. Üstteki ifadenin sol tarafı sıfıra eşit olur ve

$$k_1{}^2 k_2{}^4 + c_1 k_1{}^3 k_2{}^3 k_3 = 0 \Rightarrow k_1{}^2 k_2{}^3 (k_2 + c_1 k_1 k_3) = 0$$

elde edilir. $k_1 \neq 0$ sabit ve $k_2 \neq 0$ sabit olduğundan

$$k_2 + c_1 k_1 k_3 = 0$$

ve buradan da

$$k_1 = \frac{-k_2}{c_1 k_3} (= \text{sabit})$$

bulunur.

Öte yandan (5.70) den $m_2 = c$ (sabit) alınırsa (5.52) nin beşinci eşitliği $2k_3^2 c = 0$ şeklini alır. $k_3 \neq 0$ sabit olduğundan $c = 0 = m_2$ olur ve (5.70) in ilk koşuluyla yapılmış olan işlemler geçerli olur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.3.8 $x: I \subset R \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* eğrisinin 2. çeşit oskülatör eğri olması ($m_1 = 0$) için

$$k_1 = \frac{c_3(c_2+s)}{[c_1^2(c_2+s)^2+16]^{\frac{1}{2}}(s+c)}, \quad k_2 \neq 0 \text{ sabit}, \quad k_3 = \frac{4c_1}{c_1^2 s^2 + 2c_2 c_1^2 s + c_2^2 c_1^2 + 16}$$

olmak üzere;

$$m_0 = s+c, \quad m_2 = \frac{(s+c)k_1}{k_2}, \quad m_3 = \frac{-2(s+c)k_1 k_3^2}{k_2 k_3'} \tag{5.76}$$

olmalıdır. Burada c, c_1, c_2, c_3 integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_1 = 0$ dır. Bu durumda (5.52) denklemleri

$$\begin{aligned} &m_0' = 1 \\ &k_1 m_0 - k_2 m_2 = 0 \\ &m_2' - k_3 m_3 = 0 \\ &m_3' + k_3 m_2 = 0 \\ &k_3' m_3 + 2k_3^2 m_2 = 0 \end{aligned} \tag{5.77}$$

formunu alır. (5.77) eşitliklerinin birincisinden

$$m_0' = 1 \Rightarrow m_0 = s + c \tag{5.78}$$

bulunur. m_0 ın eşiti (5.77) eşitliklerinin ikincisinde yerine yazılırsa

$$k_1(s+c) - k_2 m_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{(s+c)k_1}{k_2} \Rightarrow m_2' = \frac{\big(k_1 + k_1'(s+c)\big)k_2 - k_2'(s+c)k_1}{k_2^2} \tag{5.79}$$

olarak bulunur. (5.79) dan m_2 nin eşiti (5.77) eşitliklerinin beşincisinde yerine yazılıp düzenlenirse

$$k_3' m_3 + 2k_3^2 \frac{(s+c)k_1}{k_2} = 0 \Rightarrow m_3 = -\frac{2(s+c)k_1 k_3^2}{k_2 k_3'} \tag{5.80}$$

$$m_3' = \frac{k_2 k_3' \Big(-2k_1 k_3^2 - 2(s+c)({k_1}' k_3^2 + 2k_1 k_3 k_3')\Big) + 2(s+c)k_1 k_3^2({k_2}' k_3' + k_2 k_3'')}{{k_2}^2 {k_3'}^2} \tag{5.81}$$

eşitlikleri elde edilir. (5.79) dan m_2' nün ve (5.80) den m_3 ün eşitleri, (5.77) eşitliklerinin üçüncüsünde yerlerine yazılır ve düzenlenirse

$$\frac{\big(k_1+k_1'(s+c)\big)k_2-k_2'(s+c)k_1}{k_2^2}-k_3\left(-\frac{2(s+c)k_1k_3^2}{k_2k_3'}\right)=0$$

$$k_2k_3'(k_1+k_1's+ck_1')-k_1k_2'k_3's-ck_1k_2'k_3'=-2(s+c)k_1k_2k_3^3$$

olur. Buradan itibaren $k_2 \neq 0$ sabit kabul edilirse $k_2' = 0$ olur ve üstteki ifade düzenlenirse

$$k_3'(k_1+k_1's+ck_1')=-2(s+c)k_1k_3^3$$

$$\frac{1}{(s+c)}+\frac{k_1'}{k_1}=\frac{-2k_3^3}{k_3'} \tag{5.82}$$

şeklini alır. (5.81) den m_3' nün ve (5.79) dan m_2 nin eşitleri, (5.77) eşitliklerinin dördüncüsünde yerlerine yazılır ve eşitliğin her iki tarafı k_1 e bölünürse

$$\frac{k_2k_3'\Big(-2k_1k_3^2-2(s+c)({k_1}'k_3^2+2k_1k_3k_3')\Big)+2(s+c)k_1k_3^2({k_2}'k_3'+k_2k_3'')}{{k_2}^2{k_3'}^2}$$

$$+k_3\frac{(s+c)k_1}{k_2}=0$$

$$\frac{1}{k_1}\Big(-2k_1k_3^2k_3'-2(s+c){k_1}'k_3^2k_3'-3(s+c)k_1k_3{k_3'}^2+2(s+c)k_1k_3^2k_3''\Big)=0$$

$$-2k_3^2k_3'-2(s+c)\frac{{k_1}'}{k_1}k_3^2k_3'-3(s+c)k_3{k_3'}^2+2(s+c)k_3^2k_3''=0$$

bulunur. (5.82) den $\frac{k_1'}{k_1}$ çekilip üstteki ifadede yerine yazılıp düzenlenirse

$$-2k_3^2k_3'-2(s+c)\left(\frac{-2k_3^3}{k_3'}-\frac{1}{(s+c)}\right)k_3^2k_3'-3(s+c)k_3{k_3'}^2+2(s+c)k_3^2k_3''=0$$

ve $k_3 \neq 0$ olduğundan

$$4k_3^4-3{k_3'}^2+2k_3k_3''=0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Bu denklemin çözümünden

$$k_3=\frac{4c_1}{{c_1}^2s^2+2c_2{c_1}^2s+{c_2}^2{c_1}^2+16},\ (c_1, c_2 \text{ integral sabitleri})$$

$$k_3'=\frac{-4c_1(2{c_1}^2s+2c_2{c_1}^2)}{({c_1}^2s^2+2c_2{c_1}^2s+{c_2}^2{c_1}^2+16)^2} \tag{5.83}$$

bulunur. (5.83) den k_3 ün ve k_3' nün eşitleri, (5.82) de yerlerine yazılıp düzenlenirse

$$\frac{1}{(s+c)}+\frac{k_1'}{k_1}=\frac{-2\left(\frac{4c_1}{c_1{}^2s^2+2c_2c_1{}^2s+c_2{}^2c_1{}^2+16}\right)^3}{\frac{-4c_1(2c_1{}^2s+2c_2c_1{}^2)}{(c_1{}^2s^2+2c_2c_1{}^2s+c_2{}^2c_1{}^2+16)^2}}$$

$$\int\frac{k_1'}{k_1}ds=\int\frac{16}{(c_1{}^2s^2+2c_2c_1{}^2s+c_2{}^2c_1{}^2+16)(c_2+s)}ds-\int\frac{ds}{(s+c)}$$

$ln\,k_1=ln(c_2+s)-\frac{1}{2}ln(c_1{}^2(c_2+s)^2+16)-ln(s+c)+ln\,c_3$, (c_3 integral sabiti)

$$ln\,k_1=ln\left(\frac{c_3(c_2+s)}{(c_1{}^2(c_2+s)^2+16)^{\frac{1}{2}}(s+c)}\right)$$

$$k_1=\frac{c_3(c_2+s)}{(c_1{}^2(c_2+s)^2+16)^{\frac{1}{2}}(s+c)}$$

bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Önerme 5.3.9 $x: I\subset R\to\mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* eğrisinin 1. çeşit oskülatör eğri olması ($m_2=0$) için

$$k_1\neq 0 \text{ (sabit)},\qquad k_2=\frac{cc_1}{c_2\cos(k_1s)-c_3\sin(k_1s)},\qquad k_3=c_1 \tag{5.84}$$

olmak üzere;

$$\begin{aligned}m_0&=c_2\sin(k_1s)+c_3\cos(k_1s)\\m_1&=c_2\cos(k_1s)-c_3\sin(k_1s)\\m_3&=c\end{aligned}\tag{5.85}$$

sağlanmalıdır. Burada c, c_1, c_2, c_3 sıfırdan farklı integral sabitleridir.

İspat Tanımdan $m_2=0$ dır. Bu durumda (5.52) eşitlikleri

$$\begin{aligned}m_0'-k_1m_1&=1\\m_1'+k_1m_0&=0\\k_2m_1-k_3m_3&=0\\m_3'&=0\\k_3'm_3&=0\end{aligned}\tag{5.86}$$

formunu alır. (5.86) eşitliklerinin dördüncüsünden

$$m_3' = 0 \Rightarrow m_3 = c \; (\neq 0 \text{ sabit}) \tag{5.87}$$

bulunur. (5.87) den m_3 ün değeri, (5.86) eşitliklerinin beşincisinde yerine yazılırsa

$$k_3' c = 0 \Rightarrow k_3' = 0 \Rightarrow k_3 = c_1 \; (\neq 0 \text{ sabit}) \tag{5.88}$$

olarak bulunur. (5.87) den m_3 ün ve (5.88) den k_3 ün eşitleri, (5.86) eşitliklerinin üçüncüsünde yerlerine yazılırsa

$$k_2 m_1 - c c_1 = 0 \Rightarrow k_2 m_1 = c c_1 \tag{5.89}$$

elde edilir. Öte yandan (5.86) eşitliklerinin birincisinin türevi alınırsa

$$(m_0' - k_1 m_1)' = 0$$

$$m_0'' - m_1' k_1 - m_1 k_1' = 0 \tag{5.90}$$

bulunur. (5.86) nın ikincisinden m_1' çekilip, (5.90) da yerine yazılırsa

$$m_0'' - (-k_1 m_0) k_1 - m_1 k_1' = 0$$

$$m_0'' + m_0 k_1^2 - m_1 k_1' = 0 \tag{5.91}$$

elde edilir. Buradan itibaren $k_1 \neq 0$ sabit alınırsa $k_1' = 0$ olur ve (5.91) ifadesi

$$m_0'' + m_0 k_1^2 = 0 \tag{5.92}$$

formunu alır. (5.92) difarensiyel denklemi çözülürse

$$m_0 = c_2 \sin(k_1 s) + c_3 \cos(k_1 s) \tag{5.93}$$

bulunur. Burada $c_2 \neq 0$ ve $c_3 \neq 0$ integral sabitleridir. Ayrıca (5.93) den m_0 ın eşiti, (5.86) eşitliklerinin ikincisinde yerine yazılırsa m_1 de

$$m_1' + k_1(c_2 \sin(k_1 s) + c_3 \cos(k_1 s)) = 0$$

$$m_1' = -c_2 k_1 \sin(k_1 s) - c_3 k_1 \cos(k_1 s)$$

$$\int m_1' ds = \int (-c_2 k_1 \sin(k_1 s) - c_3 k_1 \cos(k_1 s)) ds$$

$$m_1 = c_2 \cos(k_1 s) - c_3 \sin(k_1 s) \tag{5.94}$$

olarak bulunur. (5.94) den m_1 in eşiti, (5.89) da yerine yazılıp k_2 yalnız bırakılırsa

$$k_2 = \frac{c c_1}{c_2 \cos(k_1 s) - c_3 \sin(k_1 s)}$$

bulunarak (5.84) ve (5.85) e ait tüm eşitlikler elde edilmiş olur.

Önerme 5.3.10 $x: I \subset R \to \mathbb{E}^4$, (2.27) parametrik denklemini sağlayan birim hızlı üçüncü çeşit Tz-eğrisi olsun. *x* eğrisi, *W* eğrisi ($k_1 \neq 0, k_2 \neq 0, k_3 \neq 0$ sabitler) ise

$$m_0 = 0, \qquad m_1 = \frac{-1}{k_1} \text{ (sabit)}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \text{(sabit)} \tag{5.95}$$

olmalıdır. Böylece *W* eğrisi $\{N_1, N_3\}$ düzleminde yatar.

İspat Tanımdan $k_3 \neq 0$ sabit ise $k_3{}' = 0$ olur. Bu durumda (5.52) eşitliklerinin beşincisi

$$2k_3^2 m_2 = 0 \tag{5.96}$$

formunu alır. $k_3 \neq 0$ olduğundan (5.96) dan

$$m_2 = 0 \tag{5.97}$$

bulunur. (5.97) den m_2 nin eşiti (5.52) eşitliklerinin dördüncüsünde yerine yazılırsa

$$m_3' = 0 \Rightarrow m_3 = c \text{ (sabit)} \tag{5.98}$$

olarak bulunur. Yine (5.97) den m_2 nin eşiti, (5.52) eşitliklerinin üçüncüsünde yerine yazılırsa

$$k_2 m_1 - k_3 m_3 = 0 \Rightarrow m_1 = \frac{m_3 k_3}{k_2} \text{ (sabit)} \Rightarrow m_1' = 0 \tag{5.99}$$

bulunur. (5.99) dan m_1' nün, (5.97) den m_2 nin eşitleri, (5.52) eşitliklerinin ikincisinde yerlerine yazılır ve $k_1 \neq 0$ sabit de göz önüne alınırsa

$$k_1 m_0 = 0 \Rightarrow m_0 = 0 \tag{5.100}$$

olarak bulunur. (5.100) den m_0 ın eşiti, (5.52) eşitliklerinin birincisinde yerine yazılır ve (5.99) dan m_1 in eşiti de düşünülürse

$$-k_1 m_1 = 1$$

$$m_1 = \frac{-1}{k_1} \tag{5.101}$$

$$m_1 = \frac{-1}{k_1} = \frac{m_3 k_3}{k_2}$$

$$m_3 = \frac{-k_2}{k_1 k_3} \tag{5.102}$$

eşitlikleri de bulunarak ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 5.3.11 $\mathbb{E}^4$ de bir W eğrisinin üçüncü çeşit Tz-eğrisi olması için gerek ve yeter şart $m_2 = 0$ olmasıdır.

İspat (⇒) Eğri W eğrisi olduğundan $k_3 \neq 0$ sabit ve ${k_3}' = 0$ olur. Bu durumda (5.50), üçüncü çeşit Tz-eğrisi olma şartından

$$2k_3^2 m_2 = 0 \Rightarrow m_2 = 0$$

bulunur.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Örnek 5.3.12 Örnek 5.2.11 de $\mathbb{E}^4$ de $x(s) = (a\cos(cs), a\sin(cs), b\cos(ds), b\sin(ds))$ parametrizasyonuyla verilen regüler W-eğrisi üçüncü çeşit Tz-eğrisidir [38].

Çözüm [38] numaralı kaynağın 6. sayfasından Frenet eğrilik ve vektörlerinden, k_1eğriliği ve k_3 eğriliği ile ikinci binormal vektör alanı

$$k_1 = \sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}$$
$$k_3 = \frac{cd}{\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}}$$
$$N_3 = \frac{1}{k_1}[bd^2\cos(cs), bd^2\sin(cs), -ac^2\cos(ds), -ac^2\sin(ds)]$$

dır. N_3 ve x, (5.5) de yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} d_{\{T,N_1,N_2\}} &= \langle x, N_3 \rangle \\ &= \frac{ab(d^2 - c^2)}{\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}} \end{aligned}$$

bulunur. $d_{\{T,N_1,N_2\}}$ ve k_3 değeri (5.6) da yerlerine yazılıp düzenlenirse Tz-sabiti de

$$a_3 = \frac{cd\sqrt{a^2c^4 + b^2d^4}}{a^2b^2(d^2 - c^2)^2} \in \mathbb{R}$$

olarak bulunur.

Örnek 5.3.13 Örnek 5.2.12 de $\mathbb{E}^4$ de gömülmüş birim 3-küre $S^3(1)$ üzerindeki

$x(s) = (cos\emptyset \cos(as), cos\emptyset \sin(as), sin\emptyset \cos(bs), sin\emptyset \sin(bs))$ parametrizasyonuyla tanımlanan helis eğrisi üçüncü çeşit Tz-eğrisidir [38].

Çözüm (2.26), (2.27) ve (2.28) yardımıyla *x(s)* eğrisinin k_3 eğriliği ve ikinci binormal vektör alanı

$$N_3 = \frac{(b^2\sin\emptyset \cos(as), b^2\sin\emptyset \sin(as), -a^2cos\emptyset \cos(bs), -a^2\cos\emptyset \sin(bs))}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

$$k_3 = \frac{ab}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

olarak bulunur. N_3 ve *x*, (5.5) de yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$d_{\{T,N_1,N_2\}} = \langle x, N_3 \rangle$$
$$= \frac{\cos\emptyset\sin\emptyset(b^2 - a^2)}{\sqrt{a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset}}$$

bulunur. (5.6) da k_3 ve $d_{\{T,N_1,N_2\}}$ değerleri yerlerine yazılıp gerekli işlemler yapılınca

$$a_3 = \frac{ab(a^4\cos^2\emptyset + b^4\sin^2\emptyset)^{\frac{1}{2}}}{\cos^2\emptyset\sin^2\emptyset(b^2 - a^2)^2} \in \mathbb{R}$$

bulunarak istenen sonuç elde edilmiş olur.

6. TZITZEICA HİPERYÜZEYLERİ

Yüzeyin herhangi bir keyfi noktasındaki teğet düzlemin orjinden uzaklığı d_{tan} ve Gauss eğriliği K olmak üzere; $K/{d_{tan}}^4 = a$ sıfırdan farklı sabit bir sayı oluyorsa bu durumda yüzey Tz-yüzey olarak adlandırılmıştı. Hem fizikte hem matematikte yüzeylerin bu sınıflandırması önemli uygulamalara sahiptir [3,4]. Ayrıca negatif Gauss eğrilikli Tz-yüzeylerinin asimptotik çizgilerinin de Tz-eğrileri olduğu gösterilmiştir [6].

Vilcu [10] da Cobb-Douglas çarpanlarına ayrılabilir hiperyüzeyin bir Tz-hiperyüzey olması için gerek ve yeter şartı vermiştir. Ayrıca [11] de yazarlar Tz-şartını sağlayan öteleme hiperyüzeyleri sınıflandırmışlardır.

Genel Tzitzeica hiperyüzeyi, hiperyüzeyin bir *x* noktasındaki teğet hiperdüzlemin orjinden uzaklığı d, Gauss eğriliği *K* ve $a_1 \neq 0$ sabit olmak üzere;

$$K(x) = a_1 . d^{n+2}(x) \tag{6.1}$$

eşitliğiyle tanımlanır [10].

6.1 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Tzitzeica Hiperyüzeyleri

Hiperyüzeyin bir *x* noktasındaki teğet hiperdüzlemin orjinden uzaklığı d, Gauss eğriliği *K* ve $a_1 \neq 0$ sabit olmak üzere; $\mathbb{E}^4$ 4-boyutlu Öklid uzayı için (6.1) ifadesi

$$a_1 = \frac{K(x)}{d^5(x)} \tag{6.2}$$

şekline dönüşür. Bu şartı sağlayan hiperyüzeye $\mathbb{E}^4$ de *Tz-hiperyüzeyi* denir. ζ, hiperyüzeyin o noktadaki birim normal vektör alanı ve X yer vektörü olmak üzere; hiperdüzlemin orjinden uzaklığı

$$d = \langle \zeta, X \rangle \tag{6.3}$$

ile tanımlıdır.

Teorem 6.1.1 $X: M^3 \to \mathbb{E}^4, X(u,v,w) = \big(f(u,v,w), g(u,v,w), h(u,v,w), z(u,v,w)\big)$ parametrizasyonuyla verilen $\mathbb{E}^4$ de bir hiperyüzey olsun. X in Tz-hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart, a_1 sıfırdan farklı sabit olmak üzere;

$$\frac{\begin{vmatrix} L & M & P \\ M & N & T \\ P & T & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F & A \\ F & G & B \\ A & B & C \end{vmatrix}} = a_1 . \frac{1}{W^5} . \begin{vmatrix} f & g & h & z \\ f_u & g_u & h_u & z_u \\ f_v & g_v & h_v & z_v \\ f_w & g_w & h_w & z_w \end{vmatrix}^5$$

olmasıdır. Burada $W = \|X_u \times X_v \times X_w\|$, *A, B, C, E, F, G* (2.32) de tanımlı hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları ve *L, M, N, P, T, V* (2.33) de tanımlı hiperyüzeyin ikinci temel form katsayılarıdır.

İspat (⇒) X in u,v,w ya göre kısmi türevleri (2.31) de yerine yazılıp elde edilen ζ birim normal vektör alanı, X ile iç çarpım yapılırsa $W = \|X_u \times X_v \times X_w\|$ olacak şekilde

$$\begin{aligned} d = \frac{1}{W}\{ & f(g_u h_v z_w - g_u z_v h_w - h_u g_v z_w + h_u z_v g_w + z_u g_v h_w - z_u h_v g_w) \\ & + g(-f_u h_v z_w + f_u z_v h_w + h_u f_v z_w - h_u f_w z_v - f_v z_u h_w + z_u h_v f_w) \\ & + h(f_u g_v z_w - f_u z_v g_w - g_u f_v z_w + g_u f_w z_v + f_v z_u g_w - z_u g_v f_w) \\ & + z(-f_u g_v h_w + f_u h_v g_w + g_u f_v h_w - g_u h_v f_w - h_u f_v g_w + h_u g_v f_w)\} \\ = \frac{1}{W} . & \begin{vmatrix} f & g & h & z \\ f_u & g_u & h_u & z_u \\ f_v & g_v & h_v & z_v \\ f_w & g_w & h_w & z_w \end{vmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. (2.35) den $K = \frac{\begin{vmatrix} L & M & P \\ M & N & T \\ P & T & V \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} E & F & A \\ F & G & B \\ A & B & C \end{vmatrix}}$ idi. Bu eşitlik ve üstteki d değerinin beşinci kuvveti (6.2) de yerine yazılırsa istenen sonuç elde edilir.

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

6.1.1 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Rotasyonel Gömme Tzitzeica Hiperyüzeyleri

Teorem 6.1.1.1 $f: M^2 \to \mathbb{E}^3$, $f(u,v) = \big(f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v)\big)$ izometrik immersiyon ve $g: S^1(1) \to \mathbb{E}^2$, $g(\theta) = (cos\theta, sin\theta)$ biçiminde bir gömme olsun. Bu takdirde $\forall (u,v) \epsilon M^2$; $f_1(u,v) \neq 0$ ve $\theta \epsilon S^1(1)$ için

$X: M^2 \times S^1(1) \to \mathbb{E}^4$

$$(u,v,\theta) \to X(u,v,\theta) = (f_1(u,v), f_2(u,v), f_3(u,v).cos\theta, f_3(u,v).sin\theta) \tag{6.4}$$

şeklinde tanımlanan rotasyonel gömmenin *Tz-hiperyüzey* olması için gerek ve yeter şart

$$a_1 = \frac{(LN - M^2)}{(EG - F^2)} \cdot \frac{-c(a^2 + b^2 + c^2)^2}{f_3(af_1 + bf_2 + cf_3)^5} \tag{6.5}$$

olmasıdır. Burada

$$\begin{aligned} a(u,v) &= f_{2_u} f_{3_v} - f_{3_u} f_{2_v} \\ b(u,v) &= f_{3_u} f_{1_v} - f_{1_u} f_{3_v} \\ c(u,v) &= f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v} \end{aligned} \tag{6.6}$$

şeklindedir.

İspat (⇒) (6.4) ifadesinin u , v ve θ ya göre kısmi türevleri alınıp (2.30) daki üçlü vektörel çarpım kullanılırsa

$$\begin{aligned} X_u \times X_v \times X_\theta = f_3 (& f_{2_u} f_{3_v} - f_{3_u} f_{2_v}, f_{3_u} f_{1_v} - f_{1_u} f_{3_v}, \\ & \big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\big) \cos\theta, \big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\big) \sin\theta) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|X_u \times X_v \times X_\theta\| = f_3 \sqrt{\big(f_{2_u} f_{3_v} - f_{3_u} f_{2_v}\big)^2 + \big(f_{3_u} f_{1_v} - f_{1_u} f_{3_v}\big)^2 + \big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\big)^2}$$

dır. Buradan (2.31) kullanılarak birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{\Big(f_{2_u} f_{3_v} - f_{3_u} f_{2_v}, f_{3_u} f_{1_v} - f_{1_u} f_{3_v}, \Big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\Big) \cos\theta, \Big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\Big) \sin\theta\Big)}{\sqrt{\Big(f_{2_u} f_{3_v} - f_{3_u} f_{2_v}\Big)^2 + \Big(f_{3_u} f_{1_v} - f_{1_u} f_{3_v}\Big)^2 + \Big(f_{1_u} f_{2_v} - f_{2_u} f_{1_v}\Big)^2}}$$

olur. (6.6) eşitlikleri kullanılırsa birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{(a, b, ccos\theta, csin\theta)}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \tag{6.7}$$

olur. Hiperdüzlemin orjine uzaklığı, (6.7) ve X yer vektörü (6.3) de yerine yazılırsa

$$d = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}(af_1 + bf_2 + cf_3) \tag{6.8}$$

olarak bulunur. Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları da (2.32) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} E &= \left(f_{1_u}\right)^2 + \left(f_{2_u}\right)^2 + \left(f_{3_u}\right)^2 & A &= 0 \\ F &= f_{1_u}f_{1_v} + f_{2_u}f_{2_v} + f_{3_u}f_{3_v} & B &= 0 \\ G &= \left(f_{1_v}\right)^2 + \left(f_{2_v}\right)^2 + \left(f_{3_v}\right)^2 & C &= f_3^2 \end{aligned} \tag{6.9}$$

elde edilir. (6.4) ifadesinin u , v ve θ ya göre ikinci mertebeden kısmi türevleri de alınıp (6.7) ile birlikte (2.33) eşitliklerinde yerine yazılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L &= \tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(af_{1_{uu}} + bf_{2_{uu}} + cf_{3_{uu}}\right) & P &= 0 \\ M &= \tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(af_{1_{uv}} + bf_{2_{uv}} + cf_{3_{uv}}\right) & T &= 0 \\ N &= \tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\left(af_{1_{vv}} + bf_{2_{vv}} + cf_{3_{vv}}\right) & V &= \tfrac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(-cf_3) \end{aligned} \tag{6.10}$$

elde edilmiş olur. (6.9) ve (6.10) eşitlikleri (2.35) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{-c(LN - M^2)}{f_3\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}(EG - F^2)} \tag{6.11}$$

Gauss eğriliği elde edilir. (6.8) in beşinci kuvveti alınıp (6.11) ile birlikte (6.2) de yerine yazılırsa (6.5) elde edilir .

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Örnek 6.1.1.2 (6.4) ifadesinde M^2 yerine $S^2(a)$ küresi alınırsa

$f(u, v) = (a\cos u\cos v\,, a\cos u\sin v\,, a\sin u)$ olur ve
$X: S^2(a) \times S^1(1) \to \mathbb{E}^4$,

$$X(u, v, \theta) = (acosucosv, acosusinv, asinucos\theta, asinusin\theta)$$

rotasyonel gömme hiperyüzey elde edilir. Bu hiperyüzey bir *Tz-hiperyüzeydir* ve Tz-sabiti $a_1 = \frac{-1}{a^8}$ dir.

Çözüm $X(u, v, \theta)$ nın u, v ve θ ya göre birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri alınıp (6.6) eşitlikleri kullanılarak

$$a(u,v) = -a^2\cos^2 u \cos v$$
$$b(u,v) = -a^2\cos^2 u \sin v$$
$$c(u,v) = -a^2 \sin u \cos u$$

elde edilir. (6.9) eşitliklerinden birinci temel form katsayıları

$$E = a^2,\ \ F = 0,\ \ G = a^2\cos^2 u,\ \ A = 0,\ \ B = 0,\ \ C = a^2\sin^2 u$$

ve (6.10) eşitliklerinden ikinci temel form katsayıları

$$L = a,\ \ M = 0,\ \ N = a\cos^2 u,\ \ P = 0,\ \ T = 0,\ \ V = a\sin^2 u$$

bulunur. (6.5) eşitliğinden $a_1 = \frac{-1}{a^8}$ sabiti elde edilir.

Teorem 6.1.1.3 $f: M^1 \to \mathbb{E}^2$, $f(\theta) = (f_1(\theta), f_2(\theta))$ izometrik immersiyon ve

$g: S^2(1) \to \mathbb{E}^3$, $g(u,v) = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$

biçiminde bir gömme olsun. Bu durumda $\forall \theta \epsilon M$; $g_1(u,v) = \cos u \cos v \neq 0$ ve $(u,v)\epsilon S^2(1)$ için

$$X: M^1 \times S^2(1) \to \mathbb{E}^4,$$
$$X(\theta,u,v) = (f_1(\theta), f_2(\theta)\cos u \cos v, f_2(\theta)\cos u \sin v, f_2(\theta)\sin u) \tag{6.12}$$

şeklinde tanımlanan rotasyonel gömmenin *Tz-hiperyüzey* olması için gerek ve yeter şart

$$a_1 = \frac{{f_1'}^2(f_1' f_2'' - f_1'' f_2')}{f_2^2(f_1' f_2 - f_1 f_2')^5} \tag{6.13}$$

olmasıdır.

İspat (⇒) (6.12) ifadesinin θ, u ve v ye göre kısmi türevleri alınıp (2.30) daki üçlü vektörel çarpım kullanılırsa

$$X_\theta \times X_u \times X_v = f_2^2(-f_2' \cos u\,, f_1' cos^2 u \cos v\,, f_1' cos^2 u \sin v\,, f_1' \cos u \sin u)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\|X_\theta \times X_u \times X_v\| = f_2^2 \cos u \sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}$$

dır. Buradan (2.31) kullanılarak birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}}(-f_2', f_1' \cos u \cos v\,, f_1' \cos u \sin v\,, f_1' \sin u) \tag{6.14}$$

olur. Hiperdüzlemin orjine uzaklığı, (6.14) ve X yer vektörü (6.3) de yerine yazılırsa

$$d = \frac{f_1' f_2 - f_1 f_2'}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}} \tag{6.15}$$

olarak bulunur. Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları da (2.32) eşitlikleri kullanılarak

$$E = {f_1'}^2 + {f_2'}^2 \qquad A = 0$$
$$F = 0 \qquad B = 0$$
$$G = {f_2}^2 \qquad C = {f_2}^2 cos^2 u \tag{6.16}$$

elde edilir. (6.12) ifadesinin θ, u ve v ye göre ikinci mertebeden kısmi türevleri de alınıp (6.14) ile birlikte (2.33) eşitliklerinde yerine yazılırsa ikinci temel form katsayıları

$$L = \frac{f_1' f_2'' - f_1'' f_2'}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}} \qquad P = 0$$
$$M = 0 \qquad T = 0$$
$$N = \frac{-f_1' f_2}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}} \qquad V = \frac{-f_1' f_2 cos^2 u}{\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}} \tag{6.17}$$

elde edilmiş olur. (6.16) ve (6.17) eşitlikleri (2.35) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{{f_1'}^2 (f_1' f_2'' - f_1'' f_2')}{{f_2}^2 \left(\sqrt{{f_1'}^2 + {f_2'}^2}\right)^5} \tag{6.18}$$

Gauss eğriliği elde edilir. (6.15) in beşinci kuvveti alınıp (6.18) ile birlikte (6.2) de yerine yazılırsa (6.13) elde edilir .

(⇐) İspatın diğer yönü açıktır.

Örnek 6.1.1.4 (6.12) ifadesinde M^1 yerine $S^1(a)$ çemberi alınırsa $f(\theta) = (a\cos\theta\,, a\sin\theta)$ olur ve

$X: S^1(a) \times S^2(1) \to \mathbb{E}^4,$

$X(\theta, u, v) = (a\cos\theta\,, a\sin\theta\cos u\cos v\,, a\sin\theta\cos u\sin v\,, a\sin\theta\sin u)$

rotasyonel gömme hiperyüzeyi elde edilir. Bu hiperyüzey bir *Tz-hiperyüzeydir* ve Tz-sabiti $a_1 = -\frac{1}{a^8}$ dir.

Çözüm $X(\theta, u, v)$ rotasyonel gömmesinde $f(\theta) = (a\cos\theta\,, a\sin\theta)$ izometrik immersiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınıp (6.13) de yerine yazılırsa $a_1 = -\frac{1}{a^8}$ sabiti elde edilir.

Örnek 6.1.1.5 (6.12) ifadesinde M^1 yerine $f(\theta) = (\cosh\theta\,, \sinh\theta)$ alınırsa

$X: M^1 \times S^2(1) \to \mathbb{E}^4,$

$X(\theta, u, v) = (\cosh\theta\,, \sinh\theta\cos u\cos v\,, \sinh\theta\cos u\sin v\,, \sinh\theta\sin u)$

rotasyonel gömme hiperyüzeyi elde edilir. Bu hiperyüzey *Tz-hiperyüzeydir* ve Tz-sabiti $a_1 = 1$ dir.

Çözüm $X(\theta, u, v)$ rotasyonel gömmesinde $f(\theta) = (a\cosh\theta\,, a\sinh\theta)$ izometrik immersiyonunun birinci ve ikinci türevleri alınıp (6.13) de yerine yazılırsa $a_1 = 1$ sabiti elde edilir.

6.1.2 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Dönel Tzitzeica Hiperyüzeyleri

Teorem 6.1.2.1 (2.40) ifadesiyle verilen dönel hiperyüzeyin Tz-hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart $\varphi(u) = \frac{c}{u^3}$ olmasıdır.

İspat (⇒) (2.40) ifadesinin u, v ve w ya göre kısmi türevleri alınır (2.30) daki üçlü vektörel çarpım ve (2.31) kullanılırsa birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}}(\varphi' \cos v \cos w, \varphi' \sin v \cos w, \varphi' \sin w, -1) \tag{6.19}$$

olur. Hiperdüzlemin orjine uzaklığı, (6.19) ve X yer vektörü (6.3) de yerine yazılırsa

$$d = \frac{u\varphi' - \varphi}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \tag{6.20}$$

olarak bulunur. Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları da (2.32) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} E &= 1+\varphi'^2 \qquad & A &= 0 \\ F &= 0 & B &= 0 \\ G &= u^2 cos^2 w & C &= u^2 \end{aligned} \tag{6.21}$$

elde edilir. (2.40) ifadesinin u, v ve w ya göre ikinci mertebeden kısmi türevleri de alınıp (6.19) ile birlikte (2.33) eşitliklerinde yerine yazılırsa ikinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} L &= \frac{-\varphi''}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \qquad & P &= 0 \\ M &= 0 & T &= 0 \\ N &= \frac{-u\varphi' cos^2 w}{\sqrt{1+\varphi'^2}} & V &= \frac{-u\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} \end{aligned} \tag{6.22}$$

elde edilmiş olur. (6.21) ve (6.22) eşitlikleri (2.35) de yerine yazılırsa Gauss eğriliği

$$K = \frac{-\varphi'^2\varphi''}{u^2(1+\varphi'^2)^{\frac{5}{2}}} \tag{6.23}$$

şeklinde elde edilir. (6.20) nin beşinci kuvveti alınıp (6.23) ile birlikte (6.2) de yerine yazılırsa

$$a_1 = \frac{-\varphi'^2\varphi''}{u^2(u\varphi' - \varphi)^5} \tag{6.24}$$

Tz-şartı elde edilir. (6.24) eşitliği sabit olması gerektiğinden her iki tarafın *u* ya göre türevi alınıp gerekli ara işlemler yapılırsa

$$\left(\frac{-\varphi'^2\varphi''}{u^2(u\varphi' - \varphi)^5}\right)' = 0$$

$$u\varphi'(u\varphi' - \varphi)^4(-2u^2\varphi'\varphi''^2 - u^2\varphi'^2\varphi''' + 2u\varphi\varphi''^2 + u\varphi\varphi'\varphi''' + 2u\varphi'^2\varphi'' \\ -2\varphi\varphi'\varphi'' + 5u^2\varphi'\varphi''^2) = 0 \tag{6.25}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin 1. ve 3. terimleri olan *u* ve $(u\varphi' - \varphi)$ terimleri, (6.24) ifadesinin paydasını tanımsız yapacağı için ve 2. terim olan φ' terimi ise $a_1 \neq 0$ şartından dolayı sıfırdan farklı olmalıdır. Bu durumda 4. terim sıfıra eşitlenir ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra

$$3u^2\varphi'\varphi'' + 2u\varphi\varphi'' + 2u\varphi'^2 - 2\varphi\varphi' = 0 \ \wedge \ \varphi''' = 0 \tag{6.26}$$

şartları elde edilir. (6.26) daki birinci eşitliğin *u* ya göre türevi alınırsa

$$6u\varphi'\varphi'' + 3u^2\varphi''^2 + 3u^2\varphi'\varphi''' + 2\varphi\varphi'' + 2u\varphi'\varphi'' + 2u\varphi\varphi''' + 2\varphi'^2 + 4u\varphi'\varphi''$$

$$-2\varphi'^2 - 2\varphi\varphi'' = 0$$

elde edilir. (6.26) nın ikinci eşitliği olan $\varphi''' = 0$ ifadesi son bulunan eşitlikte yerine yazılırsa $4\varphi' + u\varphi'' = 0$ eşitliği elde edilir. Bu diferansiyel denklemin de çözümü yapılırsa $\varphi(u) = \frac{c}{u^3}$ bulunur.

($\Leftarrow$) $\varphi(u) = \frac{c}{u^3}$ fonksiyonu (2.40) ifadesinde yerine yazılırsa

$$X(u, v, w) = \left(u\cos v\cos w\,, u\sin v\cos w\,, u\sin w\,, \frac{c}{u^3}\right)$$

dönel hiperyüzeyi elde edilir. (6.20), (6.23) ve (6.2) eşitlikleri kullanılarak $a_1 = \frac{27}{256c^2}$ sabiti elde edilir. Dolayısıyla dönel hiperyüzey Tz-hiperyüzey olur.

6.1.3 $\mathbb{E}^4$ Öklid Uzayında Çarpanlarına Ayrılabilir Tzitzeica Hiperyüzeyleri

Teorem 6.1.3.1 M, $X(u,v,w) = (u,v,w,f_1(u).f_2(v).f_3(w))$ parametrizasyonuyla verilen çarpanlarına ayrılabilir hiperyüzeyin Tz-hiperyüzey olması için gerek ve yeter şart

$$a_1 = \frac{f_1f_2f_3\left(f_1f_1''f_2'^2f_3'^2 + f_1'^2f_2f_2''f_3'^2 + f_1'^2f_2'^2f_3f_3'' - 2(f_1'f_2'f_3')^2 - f_1f_1''f_2f_2''f_3f_3''\right)}{(uf_1'f_2f_3 + vf_1f_2'f_3 + wf_1f_2f_3' - f_1f_2f_3)^5} \tag{6.27}$$

olmasıdır.

İspat ($\Rightarrow$) $X(u,v,w)$ parametrizasyonunun u, v ve w ya göre kısmi türevleri alınır (2.30) daki üçlü vektörel çarpım ve (2.31) kullanılırsa birim normal vektör alanı

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{1 + (f_1'f_2f_3)^2 + (f_1f_2'f_3)^2 + (f_1f_2f_3')^2}}(f_1'f_2f_3, f_1f_2'f_3, f_1f_2f_3', -1) \tag{6.28}$$

olur. Hiperdüzlemin orjine uzaklığı, (6.28) ve X yer vektörü (6.3) de yerine yazılırsa

$$d = \frac{uf_1'f_2f_3 + vf_1f_2'f_3 + wf_1f_2f_3' - f_1f_2f_3}{\sqrt{1 + (f_1'f_2f_3)^2 + (f_1f_2'f_3)^2 + (f_1f_2f_3')^2}} \tag{6.29}$$

olarak bulunur. Hiperyüzeyin birinci temel form katsayıları da (2.32) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
E &= 1 + (f_1'f_2f_3)^2 & A &= f_1f_1'f_2^2f_3f_3' \\
F &= f_1f_1'f_2f_2'f_3^2 & B &= f_1^2f_2f_2'f_3f_3' \\
G &= 1 + (f_1f_2'f_3)^2 & C &= 1 + (f_1f_2f_3')^2
\end{aligned} \tag{6.30}$$

elde edilir. $X(u,v,w)$ parametrizasyonunun u, v ve w ya göre ikinci mertebeden kısmi türevleri de alınıp (6.28) ile birlikte (2.33) eşitliklerinde yerine yazılırsa ikinci temel form katsayıları

$$L = \frac{-f_1''f_2f_3}{\sqrt{1 + (f_1'f_2f_3)^2 + (f_1f_2'f_3)^2 + (f_1f_2f_3')^2}}$$

$$M = \frac{-f_1'f_2'f_3}{\sqrt{1 + (f_1'f_2f_3)^2 + (f_1f_2'f_3)^2 + (f_1f_2f_3')^2}}$$

$$N = \frac{-f_1f_2''f_3}{\sqrt{1 + (f_1'f_2f_3)^2 + (f_1f_2'f_3)^2 + (f_1f_2f_3')^2}}$$

$$P = \frac{-f_1{}' f_2 f_3{}'}{\sqrt{1 + (f_1{}' f_2 f_3)^2 + (f_1 f_2{}' f_3)^2 + (f_1 f_2 f_3{}')^2}}$$

$$T = \frac{-f_1 f_2{}' f_3{}'}{\sqrt{1 + (f_1{}' f_2 f_3)^2 + (f_1 f_2{}' f_3)^2 + (f_1 f_2 f_3{}')^2}}$$

$$V = \frac{-f_1 f_2 f_3{}''}{\sqrt{1 + (f_1{}' f_2 f_3)^2 + (f_1 f_2{}' f_3)^2 + (f_1 f_2 f_3{}')^2}} \tag{6.31}$$

elde edilmiş olur. (6.30) ve (6.31) eşitlikleri (2.35) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{f_1 f_2 f_3 \left(f_1 f_1{}'' f_2{}'^2 f_3{}'^2 + f_1{}'^2 f_2 f_2{}'' f_3{}'^2 + f_1{}'^2 f_2{}'^2 f_3 f_3{}'' - 2(f_1{}' f_2{}' f_3{}')^2 - f_1 f_1{}'' f_2 f_2{}'' f_3 f_3{}'' \right)}{\left(1 + (f_1{}' f_2 f_3)^2 + (f_1 f_2{}' f_3)^2 + (f_1 f_2 f_3{}')^2\right)^{5/2}} \tag{6.32}$$

Gauss eğriliği elde edilir. (6.29) un beşinci kuvveti alınıp (6.32) ile birlikte (6.2) de yerine yazılırsa (6.27) elde edilir .

($\Leftarrow$) İspatın diğer yönü açıktır.

Örnek 6.1.3.2 $X(u,v,w) = \left(u, v, w, \frac{1}{u.v.w}\right)$ hiperyüzeyi $f(u,v,w) = \frac{1}{u.v.w}$ için hem monge hiperyüzey hem de $f(u,v,w) = \frac{1}{u}.\frac{1}{v}.\frac{1}{w} = f_1(u).f_2(v).f_3(w)$ olduğundan çarpanlarına ayrılabilir hiperyüzey olur. Bu hiperyüzey Tz-hiperyüzeydir ve Tz-sabiti $a_1 = \frac{1}{256}$ dir.

Çözüm $f(u,v,w) = f_1(u).f_2(v).f_3(w) = \frac{1}{u}.\frac{1}{v}.\frac{1}{w}$ fonksiyonunun u, v, w ya göre kısmi türevleri alınır ve (6.27) de yerine yazılırsa $a_1 = \frac{1}{256}$ sabiti elde edilir. Dolayısıyla bu hiperyüzey Tz-hiperyüzey olur.

7. KAYNAKLAR

[1] G. Tzitzeica, "Sur une nouvelle classe de surfaces", *Comptes Rendus des S´eances de l'Acad´emie des Sciences Paris,* vol. 144, no 1, p. 1257-1259, 1907.

[2] G. Tzitzeica, "Sur certaines courbes gauches", *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure,*vol. 28, no 3, p. 9-32, 1911.

[3] A. B. Borisov, S. A. Zykov, M. V. Pavlov, "Tzitzeica equation and proliferation of nonlinear integrable equations", *Theor. Math. Phys.*, vol. 131, no 1, p. 550-557, 2002.

[4] W. G. Boskoff, S. Capozziello, "Recovering the cosmological constant from affine geometry", *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics,* vol. 16, no 10, 1950161, 2019.

[5] A. Bobe, W. G. Boskoff and M. G. Ciuca, "Tzitzeica type centro-affine invariants in Minkowski space", *An. St. Univ. Ovidius Constanta,* vol. 20, no 2, p. 27-34, 2012.

[6] M. Crasmareanu, "Cylindrical Tzitzeica curves implies forced harmonic oscillators", *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, vol. 7, no 1, p. 37-42, 2002.

[7] M. K. Karacan, B. Bükcü, "On the hyperbolic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space", *BAÜ FBE Dergisi*, vol. 10, no 1, p. 46-51, 2009.

[8] M. K. Karacan, B. Bükcü, "On the elliptic cylindrical Tzitzeica curves in Mikowski 3-space", *Scientia Magna*, vol. 5, no 3, p. 44-48, 2009.

[9] N. Bila, "Symmetry reductions for the Tzitzeica curve equation", *Math and Computer Science Working Papers*, vol. 16, 2012.

[10] G. E. Vilcu, "A geometric perspective on the generalized Cobb-Douglas production function", *Applied Mathematics Letters*, vol. 24, no 5, p. 777-783, 2011.

[11] M. E. Aydın, A. Mihai, "Translation hypersurfaces and Tzitzeica translation hypersurfaces of the Euclidean Space", *Proceedings of the Romanian Academy, Series A,* vol. 16, no 4, p. 477-483, 2015.

[12] H. Hacısalihoğlu, "Diferensiyel Geometri 1. Cilt", *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi*, 1998.

[13] H. H. Hacısalihoğlu, "Diferensiyel Geometri", *Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi*, 1993.

[14] H. Gluck, "Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space", *The American Mathematical Monthly,* vol. 73, no 7, p. 243-245, 1966.

[15] A. Gray, "Modern differential geometry of curves and surfaces", *CRC Press*, 1993.

[16] F. Klein, S. Lie, "Uber diejenigen ebenenen kurven welche durch ein geschlossenes system von einfach unendlich vielen vartauschbaren linearen Transformationen in sich übergehen", *The American Mathematical Monthly*, vol. 4, p. 50-84, 1871.

[17] G. Öztürk, K. Arslan, H. Hacısalihoğlu, "A characterization of ccr-curves in $\mathbb{R}^n$", *Proceedings of the Estonian Academy of Sciences*, vol. 57, p. 217-224, 2008.

[18] J. Monterde, "Salkowski curves revisited: A family of curves with constant curvature and non-constant torsion", *Computer Aided Geometric Design*, vol. 26, no 3, p. 271-278, 2009.

[19] E. Salkowski, "Zur Transformion von Raumkurven", *Mathematische Annalen*, vol. 66, p. 517-557, 1909.

[20] B. Y. Chen, "When does the position vector of a space curve always lies in its rectifying plane?", *The American Mathematical Monthly*, vol. 110, p. 147-152, 2003.

[21] K. İlarslan, E. Nesovic, "Some Characterizations of Osculating Curves in the Euclidean Spaces", *Demonstratio Mathematica*, vol. 16, no 4, p. 931-939, 2008.

[22] B. Y. Chen, "Constant-ratio Hypersurfaces", *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 27, no 4, p. 353-362, 2001.

[23] B. Y. Chen, "Convolution of Riemannian manifolds and its applications", *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 66, no 2, p. 177-191, 2002.

[24] S. Gürpınar, K. Arslan, G. Öztürk, "A characterization of Constant-ratio Curves in Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$", *Acta Universitatis Apulensis*, vol. 44, p. 39-51, 2015.

[25] G. Öztürk, K. Arslan, B. Bulca, "A characterization of Involutes and Evolutes of a Given Curve in $\mathbb{E}^n$", *Kyungpook Mathematical Journal*, vol. 58, no 1, p. 117-135, 2018.

[26] B. O'Neill, "Elementary Differential Geometry", *Academic Press*, 1966.

[27] M. P. D. Carmo, "Differential Geometry of Curves and Surfaces", *Instituto de Matematica Pura e Aplicada*, Prentice-Hall Inc., 1976.

[28] L. Verstraelen, J. Walrave, S. Yaprak, "The minimal translation surfaces in Euclidean space", *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 20, no 1, p. 77-82, 1994.

[29] M. Huihui, L. Huili, "Factorable surfaces in 3-Minkowski space", *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, vol. 46, no 1, p. 155-169, 2009.

[30] K. Arslan, B. Bulca, B. (Kılıç) Bayram, G. Öztürk, H. Ugail, "On Spherical Product Surfaces in $\mathbb{E}^3$", *International Conference on CyberWorlds*, 2009.

[31] B. Y. Chen, "Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems", *Soochow Journal of Mathematics*, vol. 28, no 2, p. 125-156, 2002.

[32] B. Y. Chen, "Geometry of position function of totally real submanifolds in complex Euclidean spaces", *Kragujevac Journal of Mathematics*, vol. 37, no 2, p. 201-215, 2013.

[33] B. Y. Chen, "Geometry of Submanifolds", *Marcel Dekker, Inc.*, 1973.

[34] E. Güler, A. Gümüşok Karaalp, "Dini-type helicoidal hypersurface in 4-space", *Ikonion Journal of Mathematics*, vol. 1, no 1, p. 26-34, 2019.

[35] N. H. Kuiper, "Minimal total absolute curvature for immersions", *Inventiones Mathematicae*, vol. 10, p. 209-238, 1970.

[36] E. Güler, "Rotational Hypersurfaces Satisfying $\Delta^{I}\mathrm{R} = \mathrm{AR}$ in the Four-Dimensional Euclidean Space", *Journal of Polytechnic*, vol. 24, no 2, p. 517-520, 2021.

[37] M. Altın, A. Kazan, H. B. Karadağ, "Monge hypersurfaces in euclidean 4-space with density", *Journal of Polytechnic*, vol. 23, no 1, p. 207-214, 2020.

[38] B. Bulca, "$\mathbb{E}^4$ deki yüzeylerin bir karakterizasyonu", *Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi*, 2012.

Yayın Listesi

E. Tunç, E. Özyılmaz, “The Darboux trihedrons of regular curves on a regular surface”, *International Electronic Journal of Geometry*, vol. 7, no 2, p. 61-71, 2014.

B. Bayram, E. Tunç, K. Arslan, G. Öztürk, “On Tzitzeica curves in Euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$”, *Facta Universitatis, Series Mathematics and Informatics*, vol. 33, no 3, p. 409-416, 2018. **[Tezden türetilmiştir]**

B. Bayram, E. Tunç, “On tzitzeica surfaces in euclidean 3-space $\mathbb{E}^3$”, *Journal of Balıkesir University Institute of Science and Technology*, vol. 23, no 1, p. 277-290, 2021. **[Tezden türetilmiştir]**