T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

POLİNOMLARIN SIFIRLARI ve DESCARTES METODU

İDRİS TUZCU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Günay ÖZTÜRK
Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU

BALIKESİR, KASIM – 2021

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Polinomların Sıfırları ve Descartes Metodu**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

İdris TUZCU

ÖZET

POLİNOMLARIN SIFIRLARI VE DESCARTES METODU
YÜKSEK LİSANS TEZİ
İDRİS TUZCU

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. NİHAL ÖZGÜR)
BALIKESİR, ARALIK - 2021

Bu tez çalışmasında polinomların sıfır yerleri temel alınmış ve bu konu incelenmiştir. Polinomların sıfır yerlerini bulmaktaki amaç reel katsayılı tek değişkenli bir polinomun sadece bir tek kökünü içeren ayrık aralıkları bulmaktır. Bu tez çalışmasında polinomların sıfır yerlerini bulmakta sıkça kullanılan Descartes işaret kuralı temel alınmıştır ve bazı uygulama alanlarına yer verilmiştir. Yapılan bu yüksek lisans tez çalışması derleme bir çalışmadır.
Bu tez çalışması beş ana bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde tez konusu tanıtılmıştır.
İkinci bölümde tez çalışması boyunca kullanılan temel tanım, teorem ve önermeler verilip örnekler ile desteklenmiştir.
Üçüncü bölümde Descartes işaret kuralı detaylı bir şekilde incelenmiştir. Bu bölümde Descartes işaret kuralı ile polinomların kökleri arasındaki ilişki verilmiştir. Ayrıca bu bölümde teoreme ait iki farklı ispata yer verilerek karşılaştırması yapılmıştır ve örnekler verilerek desteklenmiştir.
Dördüncü bölümde normal polinomlar ile ilgili temel bilgiler verilmiş ve Descartes işaret kuralı ile ilişkisi ele alınmıştır.
Son bölümde ise Descartes işaret kuralı ile ilgili iki farklı uygulama alanına yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Polinomların sıfırları, Descartes işaret kuralı, normal polinomlar.

Bilim Kod: 20404 Sayfa Sayısı: 52

ABSTRACT

ZEROS OF POLYNOMIALS AND DESCARTES METHOD
MSC THESIS
IDRIS TUZCU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. NIHAL OZGUR)

BALIKESİR, NOVEMBER - 2021

This thesis is based on the study of zeros of polynomials and this subject is examined. Our goal in finding the zero locations of polynomials is to find discrete intervals containing only one root of a univariate polynomial with real coefficients. In this thesis, Descartes sign rule, which is frequently used to find zero locations of polynomials, is based on and some application areas are included. This master's thesis is a review on the Descartes sign rule.
This thesis consists of five main chapters.
In the first chapter, the subject of the thesis is introduced.
In the second chapter, the basic definitions, theorems and propositions used throughout the thesis work are given and supported with examples.
In the third chapter, Descartes sign rule is examined in detail. In this section, the relationship between Descartes sign rule and roots of polynomials is given. In addition, two different proofs of the theorem were compared and supported by the given examples.
In the fourth chapter, basic information about normal polynomials is mentioned and its relationship with Descartes sign rule is discussed.
In the last part, two different applications related to Descartes sign rule are given.

KEYWORDS: Zeros of polynomials, Descartes sign rule , normal polynomials.

Science Code: 20404 Page Number: 52

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

A(x) : x değişkenine bağlı reel katsayılı polinom

Var(A) : A(x) polinomunun işaret değişim sayısı

Var (α) : α reel sayıların sonlu bir dizisi olmak üzere, bu dizideki işaret değişim sayısı

Z(A) : A(x) polinomunun pozitif reel kök sayısı

$F_n(x)$: n. dereceden Fibonacci polinomu

$T_n(x)$: n. dereceden Tribonacci polinomu

σ : İşaret fonksiyonu

$\binom{n}{r}$: n'in r'li kombinasyonu

A'(x) : $A(x)$ polinomunun türevi

S[x] : S birimli halkası üzerinde tanımlanmış polinom halkası

ÖNSÖZ

Bu çalışmada, Descartes işaret kuralı detaylı bir şekilde incelenmiş ve farklı uygulama alanlarına yer verilmiştir. Bu tez çalışması konu hakkında bir derleme çalışması olarak hazırlanmıştır. Bu tez çalışmasında verilen bütün örnekler orijinal olarak elde edilmiştir. Ayrıca bazı teoremlerin ispatları incelenen çalışmalardan elde edilen fikirler harmanlanarak yarı orijinal olarak elde edilmiştir.

Bu tez çalışması boyunca ve akademik çalışmalarım boyunca yardımını esirgemeyen ve verdiği fikirler ile bana yol gösteren değerli tez danışmanım Prof. Dr. Nihal Özgür'e, fikir ve yönlendirmeleri için Doç. Dr. Beyza Billur İskender Eroğlu'na ve Doç. Dr. Derya Avcı'ya ve üzerimde emeği geçen bütün değerli hocalarıma teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bu çalışma boyunca beni her zaman destekleyen ve desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen aileme ve arkadaşlarıma şükranlarımı sunarım.

Balıkesir, 2021 İdris TUZCU

1. GİRİŞ

Polinomların sıfırları fizikten kimyaya, ekonomiden geometriye birçok alanda uygulaması olan bir konudur. Özellikle matematik ve mühendislik bilimleri gibi birçok disiplinin de en önemli konulardan biri olmuştur. Polinomların sıfırları mühendisliğin özellikle sinyal işleme, bilgisayar uygulamaları ve otomasyon gibi konularında sıklıkla kullanılmaktadır. Ayrıca grup ve halka cebirleri gibi cebrin birçok alanının yanı sıra nümerik analiz gibi uygulamalı matematiğin birçok alanında da kullanılmaktadır. Polinomların sıfırları ve bunların geometrik yerleri böyle bir öneme sahip olmasından dolayı bu konuda birçok çalışma yapılmış ve halen yapılmaktadır. Yapılan bu tez çalışmasında polinomların sıfırlarının yerlerini bulmakta kullanılan bir yöntem olan Descartes işaret kuralı ele alınmıştır. Bu tez çalışması Descartes işaret kuralı ile ilgili bir derleme çalışmasıdır.

Descartes işaret kuralı ilk olarak Rene Descartes tarafından 1637 yılında yayımladığı La Geometrie [1] adlı eserinde verilmiştir.

İlk olarak Vincent 1836 yılında yaptığı çalışmalarda Descartes işaret kuralına dayanan bir yöntem ile polinomların reel kök ayrışımının yapılabileceğini göstermiştir [2]. Bu test kök olan aralıkları bulmanın yanı sıra kök içermeyen aralıkları elde etmek için de yol göstermektedir. Burada kurala ait koşullar sağlanmıyorsa o aralık ikiye bölünerek alt aralıklarda kural tekrar edilerek polinomların köklerinin bulunduğu aralıklar elde edilebilmektedir.

Vincent tarafından geliştirilen bu yönteme ek olarak Collins ve Akritas (1976) tarafından yeni bir yöntem geliştirilmiştir [3]. Bu yöntem literatürde kullanılan Descartes işaret kuralı olarak bilinmektedir.

1998 yılında Johnson tarafından yapılan bir çalışmada Sturms tarafından geliştirilen reel kök bulma yöntemi ve diğer yöntemler kıyaslanmıştır [4]. Yapılan bu kıyaslama ile Vincent'in yönteminin daha iyi sonuçlar verdiği ispatlanmıştır.

2001 yılında Johnson'un bu bulguları Rouillier ve Zimmerman tarafından yapılan denemeler ile doğrulanmıştır [5].

Descartes işaret kuralı Johnson, Krandick, Rouillier ve Zimmerman, Lane ve Riesenfeld (1981) gibi isimler tarafından yapılan çalışmalarda farklı yöntemler kullanılarak ispatlanmış ve uygulanmıştır [6].

Sonuç olarak matematik tarihi boyunca polinomların sıfır yerleri her zaman önemli bir konu olmuştur. Bu konu ile ilgili literatürde önemli bir yeri olan Descartes işaret kuralı farklı kullanım ve uygulama alanlarına sahiptir. Polinomların sıfır yerlerini bulmak için birçok yöntem bulunmasına rağmen Descartes işaret kuralı birçok yönteme göre daha iyi sonuçlar verdiğinden dolayı güncelliğini ve geçerliliğini korumaktadır.

Bu tez çalışmasında konu ile ilgili farklı bakış açıları ele alınmıştır ve uygulama alanlarına yer verilmiştir. Ayrıca bu yöntem ve uygulamaların daha net anlaşılması için orijinal örneklere yer verilmiştir.

2. ÖNBİLGİLER

2.1 Genelleştirilmiş Fibonacci Polinomları

2.1.1 Tanım :

$f_1(x) = 1$, $f_2(x) = x$ başlangıç şartları altında $f_{n+2}(x) = xf_{n+1}(x) + f_n(x)$ ($n \geq 3$) şeklinde tanımlanan fonksiyonlara genelleştirilmiş Fibonacci polinomları denir [7].

2.1.2 Tanım :

$T_{-1}(x) = T_0(x) = 0$, $T_1(x) = 1$, $T_2(x) = x^2$ ve başlangıç koşulları altında

$$T_{n+3}(x) = x^2 T_{n+2}(x) + xT_{n+1}(x) + T_n(x) \quad (n \geq 3\ )$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonlara Tribonacci polinomları denir [8].

2.1.3 Örnek :

$$T_1(x) = 1$$

$$T_2(x) = x^2$$

$$T_3(x) = x^4 + x$$

$$T_4(x) = x^6 + 2x^3 + 1$$

$$T_5(x) = x^8 + 3x^5 + 3x^2$$

$$T_6(x) = x^{10} + 4x^7 + 6x^4 + 2x$$

Verilen tanım ve başlangıç koşulları ile birlikte diğer tribonacci polinomları da kolay bir hesaplama ile elde edilebilir. Birçok kullanım ve uygulama alanı bulunan bu polinomlar daha sonra Descartes işaret kuralı ile ilişkilendirilerek örnek üzerinde ele alınacaktır.

2.2 Möbius Dönüşümleri

Möbius dönüşümleri matematiğin birçok alanında kullanım alanına sahip önemli bir konudur. Ayrıca bu dönüşümler önemli özelliklere sahiptir. Bu tez çalışmasının 3. ve 4. bölümünde tanımlanacak ve kullanılacak Möbius dönüşümleri ile normal polinomların reel köklerini içeren bölgelerin bulunmasında önemli bilgiler içeren bazı sonuçlar verilecektir.

2.2.1 Tanım :

z kompleks değişken olmak üzere, $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C}\ ve\ ad - bc \neq 0)$ olarak tanımlanan rasyonel fonksiyonlara Möbius dönüşümü veya kesirli lineer dönüşüm denir [9].

2.2.2 Teorem :

Möbius dönüşümler bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Yani iki Möbius dönüşümün bileşkesi yine bir Möbius dönüşümdür. Bu bileşke işlemi fonksiyonlarda kullanılan bileşke işlemi ile aynı özellikte olup aynı şekilde uygulanır [10].

İspat :

$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ ve $U(z) = \frac{a'z+b'}{c'z+d'}$ tanımda verilen şartları sağlayan iki Möbius dönüşüm olsun.

$U \circ T(z) = \frac{(a'a+b'c)z+(a'b+b'\,d)}{(c'a+d'c)z+(c'b+d'd)}$ elde edilir. Burada

$(a'a + b'c)(c'b + d'd) - (a'b + b'\,d)(c'a + d'c) = (a'd' - b'd)(ad - bc) \neq 0$ elde edilir ve verilen tanım gereğince $U \circ T(z)$ bir Möbius dönüşümüdür.

2.2.3 Sonuç :

$f(z) = z$ dönüşümü birim dönüşüm olarak adlandırılır. Ayrıca $T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ Möbius dönüşümünün tersi yine bir Möbius dönüşümüdür ve $T^{-1}(z) = \frac{dz-b}{-cz+a}$ olarak tanımlanmaktadır [11].

2.2.4 Tanım :

Bütün kompleks sayıların kümesi ve bu küme içinde bulunmayan ∞ ifadesinin birleşimi ile oluşan $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ küresi Riemann küresi olarak adlandırılır [11].

3. POLİNOMLARIN REEL KÖKLERİ İÇİN DESCARTES İŞARET KURALI

Bu bölümde ilk olarak Descartes işaret kuralına ait temel bilgiler verilecektir. Daha sonra ise Descartes işaret kuralı ile tek değişkenli reel katsayılı polinomlar arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Ayrıca pozitif reel kök sayısı ile ilgili iki farklı ispata yer verilecek ve negatif köklerin durumundan bahsedilecektir.

3.1. Temel Tanım ve Kavramlar

Bu bölümde, ilerleyen bölümlerde sıkça kullanacağımız Descartes işaret kuralının temelini oluşturan kavramlardan bahsedilecektir.

3.1.1. Tanım:

$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ reel sayıların sınırlı bir dizisi olsun.

$(\boldsymbol{i})$ $0 \leq i < j \leq n$

$(\boldsymbol{ii})$ $a_i a_j < 0$

$(\boldsymbol{iii})$ $a_{i+1} = \cdots = a_{j-1} = 0$

Verilen bu üç koşulu sağlayan tüm (i, j) ikililerinin sayısı α dizisinin işaret değişim sayısı olarak tanımlanır ve $\mathrm{Var}\,\alpha$ ile gösterilir [12].

Bir reel sayı dizisi olarak verilen bu tanım alt kısımda verilen tanım ile polinomların katsayılar dizisi olarak kullanılacaktır.

3.1.2 Tanım:

$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ polinomunun katsayılar dizisi $\alpha = (a_0, a_1, \cdots, a_n)$ olacaktır. Burada $A(x)$ polinomunun işaret değişim sayısı $\mathrm{Var}(A)$ olarak gösterilir. Ayrıca $\mathrm{Var}(A)$ ile $\mathrm{Var}\,\alpha$ birbirine eşit olarak tanımlanmaktadır [12].

3.1.3. Örnek:

$A(x) = -3x^5 + 4x^4 - 5x^3 - 6x^2 + 7x + 1$ polinomu ele alınsın. Burada, katsayılar dizisinin $\alpha = (1,7,-6,-5,4,-3)$ olduğu görülmektedir. Ayrıca görüldüğü gibi

$(7,-6)$, $(-5,4)$ ve $(4,-3)$ ikilileri arasında işaret değişimi gerçekleşmektedir. O halde $A(x)$ polinomunun işaret değişim sayısı 3 olarak bulunur.

3.2. Descartes İşaret Kuralı

3.2.1. Teorem: (Pozitif Reel Kökler İçin Descartes İşaret Kuralı)

$A(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ sıfırdan farklı reel katsayılı bir polinom olsun. Bu polinomun pozitif köklerinin sayısı ya polinomun katsayıları arasındaki işaret değişim sayısı kadardır ya da işaret değişim sayısının bir çift tam sayı eksiği kadardır.

Verilen bu teoremde katlıkların sayılması hususuna dikkat edilmelidir [12].

İspat:

$A(x)$ sıfırdan farklı bir reel polinom olsun. Eğer x^k, $A(x)$ polinomunu bölen en büyük dereceli terim ise $A(x)\,/\,x^k$ polinomu ile $A(x)$ polinomu aynı işaret değişim sayısına ve eşit sayıda pozitif reel köke sahiptir. Çünkü böyle bir işlem işaret değişim sayısını ve pozitif reel kök sayısını etkilemeyecektir. Ayrıca $A(x)\,/\,x^k$ polinomunun sabit terimi sıfırdan farklıdır. Aksi halde, x^k; $A(x)$'i bölen en büyük dereceli terim olmayacaktır. Öyleyse $A(x)$ sabit terimi sıfırdan farklı olan bir polinom olarak alınabilir. Verilen bir $A(x)$ polinomu için a_0; $A(x)$'in sabit terimi, n; $A(x)$'in derecesi, a_n; $A(x)$'in baş katsayısı olarak ele alınsın.

$\mathrm{Var}(A)$ ve $Z(A)$ ifadelerinin birbirinin çift tam sayı eksiği ya da fazlası olduğunu göstermek için Conkwright (1941) tarafından verilen görüş temel alınmıştır.

$z_1, z_2, \cdots z_n$; $A(x)$ polinomunun kökü olan kompleks sayılar olsun. Bu durumda

$$A(x) = a_n(x - z_1)\cdots(x - z_n) \text{ yazılabilir.} \qquad \textbf{(3.1)}$$

Öyleyse $a_0 = A(0) = (-1)^n a_n z_1 \cdots z_n$ ifadesi elde edilir.

Kompleks kökler birbirinin eşleniği olacağı için ve bir z kompleks sayısının eşleniği ile çarpımı z kompleks sayısının boyu olarak tanımlandığı için kompleks köklerin çarpımı pozitif olacaktır. Pozitif köklerin çarpımı yine pozitif olacaktır. Ayrıca $a_0 \neq 0$ olduğu için $z = 0$ polinomun kökü değildir. Öyleyse, negatif köklerinin çarpımının işareti $(-1)^{n-p}$ olacaktır. Ayrıca ${a_0}/{a_n}$ ifadesinin işareti $(-1)^p$ olacaktır. Burada bahsedilen p değişkeni pozitif reel kök sayısıdır. Sonuç olarak $\mathrm{Var}(A)$ ile $Z(A)$ birbirinin çift tamsayı fazlası olacağı sonucu elde edilecektir.

Gauss (1828), $B(x) \neq 0$ ve pozitif reel a sayısı için $\mathrm{Var}(A) \geq Z(A)$ olduğunu ispatlamak için

$$\mathrm{Var}(B) < \mathrm{Var}\big((x-a)B\big) \tag{3.2}$$

eşitsizliğini kullanmaktadır.

(3.1) gereğince $A(x)$'in her pozitif kökünün en az bir işaret değişimi sağladığı sonucuna ulaşılabilir. Öyleyse, (3.2) nolu ifadenin gösterilmesi gerekmektedir.

$B(x) = b_m x^m + \cdots + b_0$, $a > 0$ ve $C = (x-a)B = c_{m+1}x^{m+1} + \cdots + c_0$ olsun. Eğer $\mathrm{Var}(B) > 0$ iken (i,j) ikilisi $\mathrm{Var}(B)$ ifadesinin elemanı olan bir ikili olsun. Buradan,

$0 \leq i < j \leq m, b_i b_j < 0$ olacaktır. Ayrıca ya $j = i+1$ ya da $b_{i+1} = 0$ olacaktır.

$\sigma: \mathbb{R} \to \{-1,0,1\}$ fonksiyonu işaret fonksiyonu olarak tanımlansın. Bilindiği gibi

$\sigma(c_{i+1}) = \sigma(b_i - ab_{i+1}) = \sigma(b_i)$ olacaktır. $(i_1, j_1), \cdots, (i_k, j_k)$ ikilileri $\mathrm{Var}(B)$'yi oluşturan ikililer olsun. Eğer, $0 \leq i_1 < j_1 \leq \cdots \leq i_k < j_k \leq m$ ise $\mathrm{var}\big(c_{i_1+1} \cdots 0, c_{i_k+1}, c_{m+1}\big) = \mathrm{Var}\big(b_i, \cdots, b_{i_k}, b_m\big) = \mathrm{Var}(B)$ olacaktır.

Şimdi i indeksi $b_i \neq 0$ olacak şekilde en küçük eleman olsun. Buradan, $0 \leq i \leq i_1$ ve $\sigma(c_i) = \sigma(-ab_i) = -\sigma(b_i) = -\sigma\big(b_{i_1}\big) = -\sigma(c_{i^{+1}})$ elde edilir. Yani,

$\mathrm{Var}(c) \geq \mathrm{Var}\big(c_i, c_{i_1+1}, \cdots, c_{i_k+1}, c_{m+1}\big) = 1 + \mathrm{Var}(B)$. Burada, eğer $Var\ (B) = 0$ ise $\mathrm{Var}(c) \geq \mathrm{Var}(c_i, c_{m+1}) = \mathrm{Var}(ab_i, b_m) \geq 1$ olacaktır.

3.2.2 .Örnek:

$A(x) = x^4 - x^3 + 7x^2 - 3x + 20$ polinomu ele alınsın. Bu polinomun katsayılar dizisinin $\alpha = (20, -3, 7, -1, 1)$ olduğu görülmektedir. O halde $(20, -3)$, $(-3, 7)$, $(7, -1)$ ve $(-1, 1)$ ikililerinden dolayı 4 tane işaret değişimi vardır. Diğer yandan $A(x)$ polinomu

$A(x) = (x^2 - 2x + 5)(x^2 + x + 4)$ olarak yazılabilir.

Buradan $A(x)$ polinomunun reel kökü olmadığı, dolayısıyla pozitif reel kökünün olmadığı görülmektedir. O halde $Var(A) = 4$ ve pozitif reel kök sayısı 0 olarak bulunur. Sonuç olarak, işaret değişiminin sayısı pozitif reel kök sayısının 4 fazlası olmaktadır. Yani bu örnekte Descartes işaret kuralının gerçekleştiği görülmektedir.

3.2.3. Teorem:

$A(x)$ sıfırdan farklı bir polinom olsun.

(i) Eğer $\mathrm{Var}(A) = 0$ ise $A(x)$ polinomu pozitif reel köke sahip değildir.

(ii) Eğer $\mathrm{Var}(A) = 1$ ise $A(x)$ polinomu kesinlikle bir tane pozitif reel köke sahiptir [12].

İspat:

$A(x) \neq 0$ bir polinom olsun ve $\mathrm{Var}(A) = 0$ kabul edilsin. Teorem 3.2.1. den dolayı $\mathrm{Var}(A)$ ifadesi pozitif reel kök sayısından büyük veya eşit olduğundan en fazla sıfır tane pozitif reel kök olabilir. Haliyle $A(x)$'in pozitif reel kökü yoktur. Benzer şekilde $\mathrm{Var}(A) = 1$ verilsin. Teorem 3.2.1. den dolayı pozitif reel kök sayısı 1 olacaktır.

3.2.4. Örnek:

$T_{10}(x) = x^{18} + 8x^{15} + 28x^{12} + 50x^9 + 45x^6 + 16x^3 + 1$ polinomu ele alınsın. Görüldüğü gibi $T_{10}(x)$ polinomunun işaret değişim sayısı bulunmamaktadır. Descartes işaret kuralı gereğince $T_{10}(x)$ polinomunun pozitif reel kökünün bulunmadığı görülmektedir. Bu polinomun kökleri araştırıldığında alttaki gibi bulunur :

$$0.9278 + 1.0236i$$

$$0.9278 - 1.0236i$$

$$0.4226 + 1.3153i$$

$$0.4226 - 1.3153i$$

$$0.7436 + 0.9309i$$

$$0.7436 - 0.9309i$$

$$0.4344 + 1.1094i$$

$$0.4344 - 1.1094i$$

$$-1.3504 + 0.2916i$$

$$-1.3504 - 0.2916i$$

$$-1.1779 + 0.1785i$$

$$-1.1779 - 0.1785i$$

$$0.4314 + 0.7472i$$

$$0.4314 - 0.7472i$$

$$-0.8628 + 0.0000i$$

$$0.2139 + 0.3705i$$

$$0.2139 - 0.3705i$$

$$-0.4278 + 0.0000i$$

Görüldüğü gibi verilen polinomun pozitif kökü bulunmamaktadır.

3.3. Descartes Kuralının Bir Diğer İspatı

3.3.1. Teorem:

$A(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \cdots + a_nx^{b_n}$ sıfırdan farklı katsayılara sahip ve

$0 \leq b_0 < b_1 < \cdots < b_n$ koşulunu sağlayan bir polinom olsun. $A(x)$ polinomunun pozitif reel kök sayısı ya $A(x)$ polinomunun işaret değişim sayısına eşittir ya da işaret değişim sayısının çift tam sayısı eksiği kadardır [13].

Bu bölümde $\mathrm{Var}(A)$ ifadesi işaret değişim sayısı olarak, $Z(A)$ ifadesi pozitif reel kök sayısı olarak düşünülsün.

3.3.2. Uyarı:

$A(x) = a_0x^{b_0} + a_1x^{b_1} + \cdots + a_nx^{b_n}$ üstteki teoremde verilen polinom olsun. Eğer

$a_0a_n > 0$ ise $Z(A)$ çift bir tamsayıdır, eğer $a_0a_n < 0$ ise $Z(A)$ tek bir tamsayıdır [13].

İspat:

İlk olarak $a_0a_n > 0$ ele alınsın. Bunun sağlanması için $a_n > 0$ ve $a_0 > 0$ olduğu düşünülsün. $A(0) \geq 0$ ve $x \to \infty$ iken $A(x) \to \infty$ olacağı için, $A(x)$'in grafiği x eksenini pozitif kısımda çift sayı adedince kesecektir. Eğer $x = a$ noktası $A(x)$ polinomunun grafiğinin x eksenine teğet olduğu nokta ise $x = a$ çift katlı kök olacaktır. Eğer $A(x)$'in grafiği $x = a$ noktasında x eksenini birden fazla kez kesiyorsa bu tek sayı adedinde olmak zorundadır. Yani a_0 ve a_n pozitif ise $Z(A)$ çifttir.

Diğer taraftan, $a_0 < 0$ ve $a_n < 0$ durumu ele alınsın. Yani $a_0 a_n > 0$, $a_0 = A(0) < 0$ ve $n \to \infty$ iken $A(x) \to -\infty$ olduğu için $A(x)$' in grafiği x eksenini pozitif tarafta çift tamsayı kadar kesmek zorundadır. Yani bu durumda da $Z(A)$ çifttir.

İkinci olarak $a_0 a_n < 0$ durumu ele alınsın. Üst kısımda olduğu gibi $a_0 < 0$ ve $a_n > 0$ ile $a_0 > 0$ ve $a_n < 0$ durumları vardır. Üst kısımdakine benzer şekilde eğer $a_0 > 0$ ve $a_n < 0$ ise $n \to \infty$ iken $A(x) \to -\infty$ olacaktır. Buradan $Z(A)$ ifadesinin tek olduğu görülmektedir.

Teoremin İspatı:

Genellemeyi bozmaksızın $b_0 = 0$ kabul edilebilir. Bu ispatta tümevarım kullanılmıştır.

$n = 1$ için $Var(A) = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli koşulun $Z(A) = 0$ olduğu aşikardır. $n \leq k - 1$, $Var\ (A) \geq Z(A)$ ve $Z(A) \equiv Var(A)\ (mod 2)$ kabul edilsin ve $n = k$ durumu düşünülsün.

İlk olarak $a_0 a_1 > 0$ durumu düşünülsün. Bu durumda $Var(A) = \mathrm{Var}(A')$ olacaktır. Üstteki uyarıdan dolayı $Z(A) = Z(A')$(mod2) denilebilir. Tümevarım hipotezinden dolayı

$Z(A') \equiv Var(A')$(mod2) ve $Z(A') \leq Var(A')$ olacaktır. Ayrıca, $Z(A) \equiv Var(A)\ (mod 2)$ sonucuna ulaşılabilir. Rolle teoreminden dolayı $Z(A') \geq Z(A) - 1$ olduğu görülecektir. Öyleyse, $Var(A) = Var(A') \geq Z(A') \geq Z(A) - 1 > Z(A) - 2$. Sonuç olarak

$Z(A) \leq Var(A)$ gerçekleşir.

İkinci olarak $a_0 a_1 < 0$ durumunu düşünülsün. Bu durumda $Var(A') + 1 = Var(A)$ ve $Z(A) - Z(A') \equiv 1 (mod 2)$ olacaktır. Tümevarım hipotezinden dolayı

$Z(A') \equiv Var(A')(mod 2)$ sonucu çıkmaktadır. Tekrar Rolle teoremi kullanılarak

$Z(A') \geq Z(A) - 1$ ifadesine ulaşılabilir. Öyleyse $Var(A) = Var(A') \geq Z(A') + 1 \geq Z(A)$ gerçekleşir.

3.3.3. Örnek:

$A(x) = x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 2x + 3$ polinomu ele alınsın. $A = (3,2,-4,-2,1)$ dizisi bu polinomun katsayılarından oluşan dizidir. Burada sadece $(2,-4)$ ve $(-2,1)$ ikilileri işaret değişim sayısında belirtilen şartı taşır. Yani $A(x)$ polinomunun işaret değişim sayısı 2'dir. Diğer yandan $A(x) = (x^2 - 4x + 3)(x^2 + 2x + 1)$ olarak yazılabilir. Burada kökler;

$x = 3$, $x = 1$ ve $x = -1$ (çift katlı) olduğu görülmektedir. Sonuç olarak pozitif reel kök sayısı = işaret değişim sayısı = 2 olarak elde edilir.

3.3.4. Uyarı:

Descartes metodu negatif reel kök sayısı için de bilgi vermektedir. Bir $A(x)$ polinomunun negatif reel kök sayısı ya $A(-x)$ polinomunun işaret değişim sayısı kadardır ya da bu sayının çift tam sayı eksiği kadardır. Bu ifadenin doğruluğu Teorem 3.3.1 ifadesinin ispatında kullanılan mantık ile kolayca görülebilmektedir.

Bu durum üstte incelenen örnek yardımı ile açıklanabilir. Verilen polinomda $x = -1$ çift katlı köktür. Katlıklar sayılacağı için 2 tane negatif reel kökü vardır. Diğer yandan

$A(-x) = x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 2x + 3$ bulunur. Görüldüğü gibi $A(-x)$ polinomunun işaret değişim sayısı 2'dir.

3.3.5. Sonuç:

Verilen ilk ispatta polinomun kökleri kompleks kökler alınarak olası durumlar irdelenmiş ve teoremin ispatına ulaşılmıştır. Ancak verilen ikinci ispatta ise polinomların köklerinin olası yerlerine ait farklı durumlardan yola çıkılarak ispata ulaşılmıştır. Her iki ispatta da kullanılan anlaşılır ve basit yöntemler bu önemli teoremin kullanımına olanak sağlamaktadır.

3.4. Descartes İşaret Kuralının Algoritması

Bu bölümde Möbius dönüşümleri ile Descartes işaret kuralı arasındaki ilişkiden bahsedilecektir. Ayrıca bu bölümde verilecek olan bazı dönüşümler gelecek kısımların temelini oluşturmaktadır. Bu bölümde tanımı verilecek olan dönüşümler ve fonksiyonlar 4. bölümde normal polinomların köklerinin yerlerinin belirlenmesinde kullanılacaktır.

3.4.1. Tanım:

$A(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ şeklinde bir polinom olsun. S birim elemanı 1 olan bir halka olsun. Burada $S[x] \to S[x]$ olacak şekilde üç tane dönüşüm tanımlanacaktır.

($\boldsymbol{i}$) Homotetik Dönüşüm:

$H(A) = a_n x^n + 2a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + 2^{n-1} a_1 x + 2^n a_0$ olarak tanımlanır.

($\boldsymbol{ii}$) Taylor Öteleme Dönüşümü:

$T(A) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$. Burada, $b_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j \, , k \in \{0, \dots, n\}$ olarak tanımlanır.

($\boldsymbol{iii}$) Ters Dönüşüm:

$R(A) = a_0 x^n + \cdots + a_{n-1} x + a_n$ olarak tanımlanır [12].

Burada $R(A) = 0$ eşitliğinin sağlanması için gerekli ve yeterli şartın $A(x) = 0$ olduğu aşikardır. Çünkü $A(x)$ ve $R(A)$ ifadelerinin katsayıları aynıdır. Ayrıca x, A'yı bölerse $R(A) = R(A \,/\, x)$ olduğu görülmektedir. Verilmiş olan bu dönüşümler gelecek kısımlarda verilecek olan normal polinomlar kısmında sıkça kullanılacaktır.

Alttaki kısımda Descartes metodu kullanılarak geliştirilmiş olan ve polinomların köklerinin yerleri hakkında bilgi veren bir algoritma verilecektir.

3.4.2. Algoritma:

$int\ roots\_in\_I$

$d \leftarrow Var\big(TR(A)\big)$;

$if\ d \leq 1\ return\ d$;

$B \leftarrow H(A): C \leftarrow T(B)$;

$if\ x|C\ m \leftarrow 1\, ; else\ m \leftarrow 0$

$return\ roots\_in\_I(B) + m + roots\_in\_I(C)$

Verilen bu algoritma Descartes işaret kuralının genel algoritmasını göstermektedir. Verilen bu taslak kod yardımı ile algoritma Matlab ve Mapple gibi uygulamalarda çalıştırılabilmektedir [12].

3.4.3. Tanım:

$\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesi Riemann küresi olarak gösterilsin. Burada $\bar{\mathbb{C}}$ den $\mathbb{C}$ ye olacak şekilde üç tane fonksiyon tanımlanacaktır:

$(\boldsymbol{i})\ \ h(z) = \begin{cases} \frac{z}{2} & , z \in \mathbb{C} \\ \infty & , z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanacaktır.

$(\boldsymbol{ii})\ \ t(z) \ = \begin{cases} z+1 & , z \in \mathbb{C} \\ \infty & , z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanacaktır.

$(\boldsymbol{iii})\ r(z) \ = \begin{cases} \frac{1}{z} & , z \in \mathbb{C} \\ \infty & , z = 0 \\ 0 & , z = \infty \end{cases}$ olarak tanımlanacaktır.

Bu kısım dikkatli olarak incelendiğinde $h,\ t,\ r$ fonksiyonlarının birer Möbius dönüşümü olduğu görülmektedir. Çünkü bu üç fonksiyon $\bar{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ olacak şekilde tanımlanmış ve $z \to \frac{az+b}{cz+d}$ $(a, b, c, d \in \mathbb{C}\ )$ olacak şekilde düşünüldüğünde $ad - bc \neq 0$ koşulunu sağlamaktadır [12].

3.4.4. Uyarı:

$A(x) \in R[x]$ olsun ve $A(x)$ polinomunun derecesi n olsun. $deg(0) = 0$ ve sıfır polinomunun baş katsayısı 0 kabul edilsin. Buradan her z kompleks sayısı için alttaki üç eşitlik sağlanacaktır [12].

(**i**) $\mathrm{H(A)(z)} \ = \ 2^{\mathrm{n}}\mathrm{A(h(z))}$

$(\boldsymbol{ii})\ T(A)(z) \ = \ A(t(z))$

$(\boldsymbol{iii})\ R(A)(z) \ = \begin{cases} z^n \cdot A\big(r(z)\big) & e\breve{g}er\ z \neq 0 \\ A'nın\ başkatsayısı & e\breve{g}er\ z = 0 \end{cases}$

Verilen bu üç ifadenin doğruluğu kolaylıkla görülmektedir. Şimdi (i) nolu ifadenin doğruluğu gösterilecektir. (ii) ve (iii) nolu ifadelerin doğrulukları kullanılacak mantık ile kolaylıkla gösterilebilir. Öyleyse, ilk ifadenin doğruluğu gösterilsin:

$A(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ olsun.

$H(A)(z) = a_n z^n + 2a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + 2^{n-1} a_1 z + 2^n a_0$

$= 2^n(2^{-n}a_n z^n + \cdots + 2a_1 z + a_0)$

$= 2^n A\big(h(z)\big)$ olduğundan ifadenin doğruluğu görülmektedir.

Bu ifadelere ek olarak Uyarı 3.4.4 yardımı ve verilen ifadelerin tanımları kullanılarak altta verilecek iki ifadenin doğruluğu da benzer şekilde görülmektedir:

$(i) TH(A)(z) = \ 2^n A\big((h \circ t)(z)\big)$

$$(ii)\ TR(A)(z) = \begin{cases} \big(t(z)\big)^n A\big((r \circ t)(z)\big) & eğer\ z \neq -1 \\ A'nınbaşkatsayısı & eğer\ z = -1 \end{cases}$$

Artık verilen bu ifadeler ile daha kapsamlı bir sonuca ulaşılabilir. Altta verilecek olan uyarı gelecek bölümlerde sıkça kullanılacaktır. Verilecek bu uyarı ile normal polinomların kökleri için yerlerinin belirlenmesi yapılacaktır.

3.4.5. Uyarı:

(1) h fonksiyonu $H(A)$ ifadesinin köklerini birebir ve örten olacak şekilde $A(x)$ polinomunun köklerine resmeder. Ayrıca $H(A)$' nın $(0,1)$ aralığındaki kökleri $A(x)$ polinomunun $(0,1/2)$ aralığındaki köklerine resmeder.

(2) t fonksiyonu $T(A)$'nın köklerini birebir ve örten olacak şekilde $A(x)$ polinomunun köklerine resmeder.

(3) r fonksiyonu $R(A)$'nın sıfırdan farklı köklerini birebir ve örten olacak şekilde $A(x)$ polinomunun sıfırdan farklı köklerine resmeder. Ayrıca $A(x) \neq 0$ olduğu sürece $R(A)$'nın kökleri sıfırdan farklıdır.

(4) $h \circ t$ fonksiyonu $TH(A)$'nın köklerini birebir ve örten olacak şekilde $A(x)$ polinomunun köklerine resmeder. Ayrıca $TH(A)$'nın (0,1) aralığındaki kökleri $A(x)$ polinomunun $(1/2,1)$ aralığındaki kökleri ile eşleşir.

(5) $r \circ t$ fonksiyonu $TR(A)$'nın -1 dışındaki köklerini birebir ve örten olacak şekilde $A(x)$ polinomunun sıfırdan farklı köklerine resmeder. $A(x) \neq 0$ olduğu sürece $TR(A)$'nın kökleri

-1'den farklıdır. $TR(A)$'nın pozitif reel kökleri $A(x)$ polinomunun $(0,1)$ aralığındaki kökleriyle eşleşir [12].

Verilen bu uyarı ile Tanım 3.4.1 ve Tanım 3.4.3 arasındaki ilişki görülmektedir. R, T, H, r, t, h ifadelerinin tanımları kullanılarak bu uyarının doğruluğu görülmektedir. Alttaki örnek yardımı ile bu doğruluk irdelenecektir.

3.4.6. Örnek:

(1) $A(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alınsın. Bu polinomunun kökleri $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ve

$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olarak bulunacaktır. Diğer taraftan $H(A) = x^2 - 2x - 4$ olacaktır. Bu polinomun kökleri ise $x_1 = 1 + \sqrt{5}$ ve $x_2 = 1 - \sqrt{5}$ bulunur. Görüldüğü gibi h fonksiyonu $H(A)$'nın $(0,1)$ aralığındaki kökleri $A(x)$'in $(0,1/2)$ aralığındaki kökleri ile birebir ve örten olarak eşleşmiştir.

(2) $A(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alınsın. Bu polinomun kökleri $\frac{1+\sqrt{5}}{2} ve \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ olacaktır. Ayrıca $a_0 = 1, a_1 = -1$ ve $a_2 = 1$ olduğu görülmektedir. Şimdi, $T(A)$ polinomu bulunacaktır.

$T(A) = b_n x^n + \cdots + b_1 x + b_0$ olduğu bilinmektedir. Ayrıca burada

$b_k = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} a_j$, $\forall k \in \{0,1,\dots,n\}$ olarak tanımı verilmiştir. Öyleyse, verilen bu tanım yardımı ile

$$b_0 = \sum_{j=0}^{2} \binom{j}{0} a_j = \binom{0}{0} a_0 + \binom{1}{0} a_1 + \binom{2}{0} a_2 = a_0 + a_1 + a_2 = -1$$

$$b_1 = \sum_{j=1}^{2} \binom{j}{1} a_j = \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{I} a_2 = a_1 + 2a_2 = 1$$

$b_2 = \sum_{j=2}^{2} \binom{j}{2} a_j = \binom{2}{2} a_2 = a_2 = 1$ olarak hesaplanır. Öyleyse $T(A) = x^2 + x - 1$ ve $T(A)$ ifadesinin kökleri $\frac{-1\mp\sqrt{5}}{2}$ olarak elde edilir. Yani verilen uyarı gerçekleşmektedir.

(3) $A(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alınsın. Burada $R(A) = -x^2 - x + 1$ olduğu R'nin tanımından açıkça görülmektedir. Ayrıca burada kökler $\frac{1\mp\sqrt{5}}{2}$ olarak elde edilir. Yani uyarı gerçekleşmiştir.

(4) $A(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alınsın. Burada $TH(x^2 - x - 1) = T(x^2 - 2x - 4)$ olarak bulunur. Buradan, 2. örnekte yapılan işlemler yapıldığında;

$b_0 = \sum_{j=0}^{2} \binom{j}{0} a_J = \binom{0}{0} a_0 + \binom{1}{0} a_1 + \binom{2}{0} a_2 =$ -5

$b_1 = \sum_{j=1}^{2} \binom{j}{1} a_j = \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{1} a_2 = 0$ olarak bulunur.

Öyleyse $T(x^2 - 2x - 4) = x^2 - 5$ elde edilir ve kökleri $\mp\sqrt{5}$ olarak elde edilir. Yani uyarı gerçekleşmiştir.

(5) $A(x) = x^2 - x - 1$ polinomu ele alınsın. $TR(A) = T(-x^2 - x + 1)$ olduğu açıktır. Önceki bölüme benzer şekilde;

$b_0 = \sum_{j=0}^{2} \binom{j}{0} a_j = \binom{0}{0} a_0 + \binom{1}{0} a_1 + \binom{2}{0} a_2 = -1$

$b_1 = \sum_{j=1}^{2} \binom{j}{1} a_j = \binom{1}{1} a_1 + \binom{2}{1} a_2 =$ -3

$b_2 = \sum_{j=2}^{2} \binom{j}{2} a_j = \binom{2}{2} a_2 =$ -1 olarak bulunur. Sonuç olarak

$T(-x^2 - x + 1) = -x^2 - 3x + 1$ bulunur ve kökleri $\frac{-3\mp\sqrt{5}}{2}$ elde edilir. Yani uyarı gerçekleşmiştir.

Görüldüğü gibi r, t, h Möbius dönüşümleri ve T, R, H fonksiyonları yardımıyla polinomların köklerinin bulunduğu aralıklar birebir ve örten olacak şekilde başka aralıklara taşınabilmektedir. Dönüşümlerin bu özelliğinden dolayı Descartes metodu ile köklerin yerleri tespit edilebilmektedir.

4. NORMAL POLİNOMLAR VE UYGULAMALARI

4.1. Ostrowski'nin Teorisi

4.1.1. Tanım:

$(\boldsymbol{i})$ Her k reel sayısı için, $(a_k)^2 \geq a_{k-1}a_{k+1}$

$(\boldsymbol{ii})$ $a_{h+1}, \cdots, a_{j-1} > 0$ şartını sağlayan her $h < j$ reel sayısı için , $a_h > 0$ ve $a_j > 0$

şartları sağlanıyorsa negatif olmayan reel katsayılara sahip $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k\, z^k$ kuvvet serisine normaldir denir [12].

Bu tanım 1939 yılında Ostrowski tarafından verilmiştir. Ostrowski çalışmalarında polinomların normalliği ile Descartes işaret kuralını ilişkilendirmiştir. İlk olarak katsayıları pozitif olan polinomlar için sonuçlar elde etmiş, sonrasında ise baş katsayının pozitif olması şartının sağlandığında çalışmalarının gerçekleştiğini göstermiştir ve genel sonuçlara ulaşmıştır.

4.1.2.Tanım:

Reel katsayılı bir polinomun en büyük dereceli teriminin katsayısı pozitif ise bu polinoma pozitiftir denir [12].

4.1.3. Teorem:

Pozitif bir $A(x)$ polinomunun normal olması için gerekli ve yeterli şart $\forall u \in \mathbb{R}^+$ için $Var\big((x-u)A(x)\big) = 1$ olmasıdır [12].

İspat:

$A(x)$ pozitif ve normal olan bir polinom, α pozitif bir reel sayı olsun. Burada negatif olmayan bir m tamsayısı bulunabilir öyle ki $A(x) = B(x) \cdot x^m$ olup $B(x)$ de normaldir ve $B(x)$ polinomunun katsayıları da pozitiftir. Bu durumda

$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ olsun. Buradan $\frac{b_{n-1}}{b_n} \geq \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} \geq \cdots \geq \frac{b_0}{b_1}$ ifadesi elde edilir. Ayrıca $\frac{b_{n-1}}{b_n} - \alpha \geq \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} - \alpha \geq \cdots \geq \frac{b_0}{b_1} - \alpha$ yazılabilir. Yani $b_n > 0$ ve

$-ab_0 < 0$ olduğu için

$$(x-\alpha)B(x) = b_n x^{n+1} + b_n\left(\frac{b_{n-1}}{bn} - \alpha\right)x^n + \cdots + b_1\left(\frac{b_0}{b_1} - \alpha\right)x - \alpha b_0$$

ifadesinin yalnızca bir tane işaret değişimi bulunmaktadır. Sonuç olarak,

$$1 = Var\big((x-a)B(x)\big) = \mathrm{Var}\big((x-\alpha)B(x)x^m\big) = \mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x)\big)$$

eşitliği elde edilir ve teoremin bir tarafı gösterilmiştir.

Şimdi de teorem diğer yönden ele alınsın. $A(x)$ polinomu pozitif ve normal olmayan bir polinom olarak kabul edilsin. Burada $A(x) = x^m \cdot B(x)$ olacak şekilde pozitif olmayan bir m tamsayısı ve sabit terimi sıfır olan bir $B(x)$ polinomu bulanabilir. Burada $B(x)$ pozitif ve normal olmayacağı için sabit polinom olamaz çünkü sabit polinomlar normalliğin şartlarını sağlamaktadır. Herhangi bir α reel sayısı için, $C^{(\alpha)}(x) = (x-\alpha)B(x)$ tanımlansın. Burada $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x)\big) = \mathrm{Var}\left(C^{(\alpha)}(x)\right)$ denilebilir çünkü $A(x) = B(x)x^m$ denilmişti. Şimdi ise $\mathrm{Var}\left(c^{(\alpha)}(x)\right) \neq 1$ olacak şekilde α pozitif tamsayısı bulunup bulunamayacağı araştırılacaktır:

$B(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$ olsun. $n \geq 1, b_n > 0$ ve $b_0 \neq 0$ olacaktır. $c^{(\alpha)}(x) = c_{n+1}^{(\alpha)}x^{n+1} + \cdots + c_1^{(\alpha)}x + c_0^{(\alpha)}$ olsun. Burada $c_0^{(\alpha)} = -\alpha b_0$, $c_k^{(\alpha)} = b_{k-1} - \alpha b_k$ $\forall k \in [1,n]$ ve $c_{n+1}^{(\alpha)} = b_n$ elde edilecektir. Bu kısım üç bölümde incelenecektir.

Eğer $\mathrm{Var}\big(B(x)\big) \geq 2$ ise α yeterince küçük seçildiğinde, $\forall k \in [1,n]$ için $C_k^{(\alpha)}$ ve b_{k-1} polinomlarının işaretleri $b_{k-1} \neq 0$ sağlandığında eşit olacaktır. Bu durumda $Var\left(C^{(\alpha)}(x)\right) \geq Var\big(B(x)\big) \geq 2$ olacaktır.

Eğer $\mathrm{Var}\big(B(x)\big) = 1$ ise Descartes işaret kuralı gereğince $B(x)$ sadece bir tane pozitif reel köke sahiptir. Bu yüzden $\alpha > 0$ için $C^{(\alpha)}(x)$ polinomu iki tane pozitif reel köke sahiptir. Tekrar Descartes işaret kuralı gereğince $Var\left(C^{(\alpha)}(x)\right) \geq 2$ olacaktır.

Son olarak $\mathrm{Var}\big(B(x)\big) = 0$ durumu ele alınsın. Burada $b_n > 0$ olduğu için $B(x)$ polinomunun bütün katsayıları negatiften farklıdır. Eğer $B(x)$ polinomunun tüm katsayıları pozitif ve $B(x)$ normal değilse $1 \leq k \leq n-1$ aralığında $0 < \frac{b_k}{b_{k+1}} < \frac{b_{k-1}}{b_k}$ koşulunu sağlayacak bir k indeks sayısı bulunabilir. $\alpha, \frac{b_k}{b_{k+1}} < a < \frac{b_{k-1}}{b_k}$ olacak şekilde seçilsin. Bu durumda, $\alpha > 0$; $c_{n+1}^{(\alpha)} = b_k > 0$; $c_{k+1}^{(\alpha)} = b_k - \alpha b_{k+1} < 0$; $c_k^{(\alpha)} = b_{k-1} - \alpha b_k > 0$ ifadeleri elde edilir. Sonuç olarak bu durumda da $Var\left(C^{(\alpha)}(x)\right) \geq 2$ sağlanacaktır.

Eğer $B(x)$ polinomunun bütün terimleri pozitif katsayılı değilse, katsayısı 0 olan terimler vardır. b_k en büyük dereceli katsayısı 0 olan terim olsun. Buradan herhangi bir pozitif α için $C_{k+1}^{(\alpha)} < 0$ olacaktır. $b_0 > 0$ olduğu için $j < k$ olacak şekilde j indeksi vardır. Bu j indeksi $b_{j+1} = 0$ ve $b_j > 0$ ifadelerini sağlar. Bu ifadeler yardımı ile

$C_{j+1}^{(\alpha)} < 0 \Rightarrow \text{var}\left(C^{(\alpha)}(x)\right) \geq 2$ sonucuna ulaşılır.

Sonuç olarak incelenen bütün durumlarda verilen şartlara uygun bir α bulunmamaktadır. Elde edilen bu çelişki ispatı tamamlar.

Verilen teoremin her iki tarafının da doğruluğu gösterilmiştir. Verilen bu teorem Descartes işaret kuralı ile normal polinomlar arasındaki ilişkiyi göstermektedir. Bu teorem yardımıyla ilerleyen bölümlerde farklı sonuçlar elde edilecektir.

4.1.4. Örnek:

$A(x) = 2x^3 + 3x^2 + 4x + 1$ polinomu ele alınsın. $A(x)$ polinomunun normal olduğu normalliğin tanımı ile açıkça görülmektedir. $(x-1)A(x) = 2x^4 + x^3 + x^2 - 3x - 1$ polinomu elde edilir. Görüldüğü gibi oluşan bu polinomun işaret değişim sayısı yani $\text{Var}\big((x-1)A(x) = 1$ olduğu açıktır.

4.1.5. Teorem:

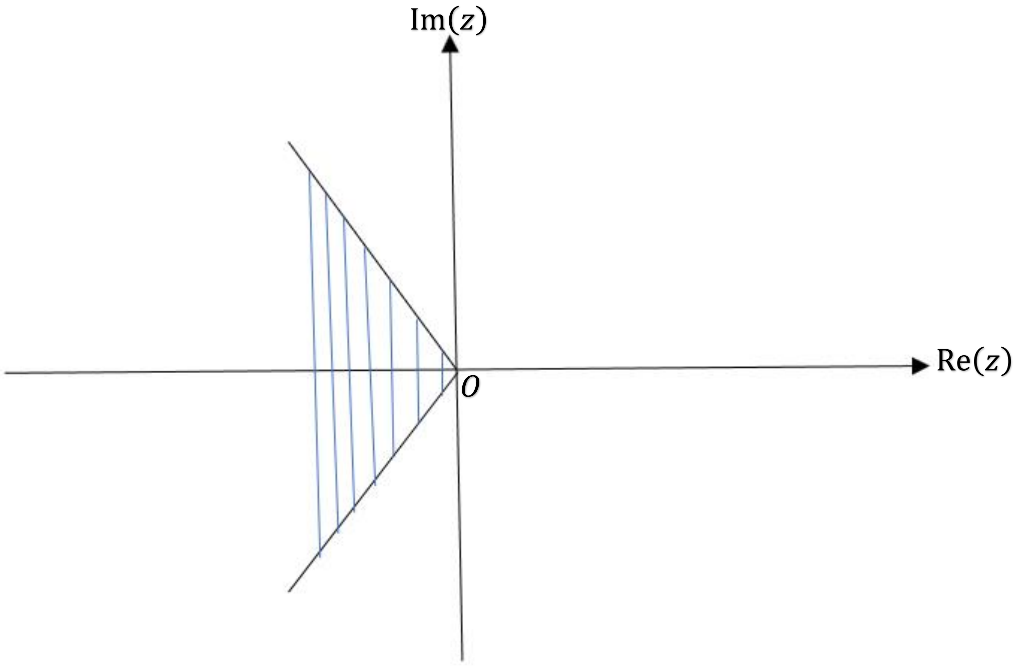
Pozitif bir lineer polinomun normal olması için gerekli ve yeterli şart polinomun kökünün negatif veya sıfır olmasıdır [12].

İspat:

$A(x)$ pozitif lineer bir polinom olsun. $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısı $A(x)$ polinomunun kökü olsun. Öyle bir $\lambda \in \mathbb{R}^+$ sayısı için $A(x) = \lambda \cdot (x - \alpha) = \lambda x - \lambda\alpha$ yazılabilir. Buradan $A(x)$ polinomunun normal olması için gerekli ve yeterli şart $-\lambda\alpha \geq 0$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır. Çünkü Teorem 4.1.4 gereğince $\text{Var}\big((x-\alpha)A(x)\big) = 1$ olmalıdır. Buradan $\lambda\alpha \leq 0$ elde edilir. Sonuç olarak $\alpha \leq 0$ elde edilir.

4.1.6. Tanım:

$C = \left\{a + bi: a \leq 0 \ ve|b| \leq |a|\sqrt{3}\right\}$ bölgesi karmaşık düzlemde bir koni belirtmektedir [12]. Alttaki şekilde bu koninin resmi görülmektedir.



Şekil 4.1: C konisinin belirttiği bölge.

4.1.7. Teorem:

Pozitif ikinci dereceden bir polinomun normal olması için gerekli ve yeterli şart polinomun köklerinin C konisinin içerinde bulunmasıdır [12].

İspat :

$A(x)$ pozitif ikinci dereceden bir polinom ve $c > 0$ reel sayısı bu polinomun baş katsayısı olsun.

Eğer $A(x)$ polinomunun kökleri kompleks eşlenik $a + bi$ ve $a - bi$ $(a, b \in R)$ sayıları ise $A(x) = c\big(x - (a + bi)\big)\big(x - (a - bi)\big)$ yazılabilir. Burada

$A(x) = cx^2 - 2acx + c(a^2 + b^2)$ polinomu normaldir

$$\Leftrightarrow -2ac \geq 0 \; ve \; (-2ac)^2 \geq cc(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow \; a \leq 0 \; ve \; 4a^2 \geq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow 3a^2 \geq b^2$$

$$\Leftrightarrow |b| \leq a\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \ a + bi \in C \text{ olacaktır.}$$

Ayrıca $A(x)$ polinomunun kökleri reel α ve β sayıları olursa

$A(x)c(x-\alpha)(x-\beta) = cx^2 - c(\alpha+\beta)x + c\beta x$ yazılabilir. Bu durumda verilen A(x) polinomu normaldir $\Leftrightarrow -c(\alpha+\beta) \geq 0 \; ve \; c\alpha\beta \geq 0$ ve $\left(-c(\alpha+\beta)\right)^2 \geq cc\alpha\beta$

$\Leftrightarrow \alpha+\beta \leq 0, x\beta \geq O \; ve \; (\alpha+\beta)^2 \geq \alpha\beta$

$\Leftrightarrow \alpha, \beta \leq 0$ elde edilir. Bu durumda da köklerin C konisi içerisinde olduğu görülmektedir.

İkinci dereceden bir polinomun kökleri için bu iki durum dışında farklı bir durum oluşmayacaktır. Görüldüğü gibi her iki durum için de normal polinomun kökleri verilen koninin içerisinde kalmaktadır.

4.1.8. Örnek:

$A(x) = x^2 + 2x + 2$ polinomu ele alınsın. Görüldüğü gibi $A(x)$ polinomu normaldir. Ayrıca $A(x)$ polinomunun kökleri $x_{1,2} = -1 \mp i$ olarak bulunur. Burada $x_{1,2} \in C$ olduğu açıkça görülmektedir.

4.1.9 Teorem :

İki normal polinomun çarpımı normaldir [12].

İspat

$A = \sum_{h=0}^{m} a_h x^h$ ve $B = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$ normal olan iki polinom olsun. Her normal polinom $p_{(x)} x^k$ olarak yazılabilir. Burada k negatif olmayan bir tamsayı ve $p(x)$ bütün katsayıları pozitif olan bir normal polinom olacaktır. Yani $A(x)$ ve $B(x)$ polinomları katsayıları pozitif olan birer polinom olarak düşünülebilir.

$C(x) = A(x)B(x) = \sum_{k=0}^{m+n} C_k x^k$ olarak ele alınsın. Burada $c_k = \sum_h a_h b_{k-h}$, h ve k ise tamsayılar olacaktır. Ancak $a_h$ve b_j ifadeleri için $h \notin \{0, \cdots, m\}$ ve $j \notin \{0, \cdots, n\}$ sağlanmalıdır. Bütün k indeksleri için ;

$\{(h,j) \in \mathbb{Z}^2 : h > j\} = \{(j+1, h-1) \in \mathbb{Z}^2 : h \leq j\} \cup \{(h, h-1) \in \mathbb{Z}^2\}$ kümesi ele alınsın ve normal olma tanımı ile teoremin doğruluğu gösterilecektir. Ayrıca istenen h tamsayısını sağlayan kümeye H denilsin.

$$C_k^2 - C_{k-1}C_{k+1}$$

$$= \sum_{h \leq J} a_n a_j b_{k-h} b_{k-j} + \sum_{h>j} a_h a_j b_{k-h} b_{h-j} - \sum_{h \leq j} a_h a_j b_{k-h} b_{k-j+1}$$
$$- \sum_{h>j} a_h a_j b_{k-h+1} b_{k-j-1}$$

$$= \sum_{h \leq j} a_h a_j b_{k-h} b_{k-h+1} + \sum_{h \leq j} a_{j+1} a_{h-1} b_{k-j-1} b_{k-h+1} +$$
$$\sum a_h a_{h-1} b_{k-h} b_{k-h+1} - \sum_{h \leq j} a_h a_j b_{k-h+1} b_{k-j-1} -$$
$$\sum_{h \leq j} a_{j+1} a_{h-1} b_{k-j} b_{k-h} - \sum a_h a_{h-1} b_{k-h+1} b_{k-h}$$

$$= \sum_{h \leq j} \left(a_h a_j - a_{h-1} a_{j+1}\right)\left(b_{k-j} b_{k-h} - b_{k-j-1} b_{k-h+1}\right)$$ elde edilir.

$A(x)$ normal olduğu için $a_0, \cdots, a_m$ pozitiftir. Ayrıca $\frac{a_{m-1}}{a_m} \geq \frac{a_{m-2}}{a_{m-1}} \geq \cdots \geq \frac{a_0}{a_1}$ eşitsizliği elde edilir.

Sonuç olarak, $a_h a_i - a_{h-1} a_{j+1} \geq 0, \forall h \leq j$ sağlanır. Bu ifadenin doğruluğu $B(x)$'in katsayıları için de söylenebilir. Ayrıca eşitsizliğin sağ tarafı negatif ve sonuç olarak her k için $C_k^2 - C_{k-1}C_{k+1} \geq 0$ elde edilir.

4.1.10. Teorem :

Eğer pozitif bir polinomun kökleri C konisinin içinde ise polinom normaldir [12].

İspat:

$A(x)$ bütün kökleri C konisinin elemanı olan pozitif bir polinom olsun. $A(x)$ polinomu birinci ve ikinci dereceden polinomların çarpımı şeklinde yazılabilir. Bütün kökleri C

konisinin içinde bulunacağı için Teorem 4.1.5 ve 4.1.7 gereğince bütün birinci dereceden ve ikinci dereceden çarpanlar normal olacaktır. Sonuç olarak Teorem 4.1.9 gereğince $A(x)$ polinomu normaldir.

4.1.11. Örnek:

$A(x) = x^4 + 6x^3 + 18x^2 + 24x + 16$ polinomu ele alınsın. Bu polinomun kökleri

$x_1 = -1 + i\,, x_2 = -1 - i\,, x_3 = -2 + 2i\,, x_4 = -2 - 2i$ bulunur. Görüldüğü gibi bulunan bütün kökler C konisinin elemanıdır. Ayrıca verilen polinom normalliğin şartlarını sağlamaktadır.

4.1.12. Teorem:

Eğer sıfırdan farklı bir $A(x)$ polinomunun kökleri C konisinin elemanı ise her α pozitif reel sayısı için $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x) = 1$ olur [12].

İspat:

$A(x)$ bütün kökleri C konisinin elemanı olan sıfırdan farklı bir polinom olsun. Eğer $A(x)$ pozitif ise Teorem 4.1.10 gereğince $A(x)$ normaldir. Ayrıca Teorem 4.1.3 gereğince $\forall\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x) = 1$ sağlanır. Eğer $A(x)$ pozitif değilse $-A(x)$ polinomu pozitiftir ve $-A(x)$ polinomunun kökleri C konisinin elemanıdır. Bu durumda

$\mathrm{Var}\big((x-\alpha)(-A)(x) = 1$ elde edilir. Ancak buradan

$\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x)$ = $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)(-A)(x)$ elde edilir. Bu yüzden $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x) = 1$ olmalıdır.

4.1.13. Örnek:

$A(x) = x^2 + 2x + 2$ polinomu ele alınsın. Bu polinomun kökleri $x_{1,2} = -1 \mp i$ olarak bulunur ve köklerin C konisinin elemanı olduğu açıktır. Öyleyse $\alpha = 1$ ele alınsın. Böylece $(x-1)(x^2+2x+2) = x^3 + x^2 - 2$ elde edilir. Burada $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x) = 1$ bulunur.

4.2. Üç Çember

Teorem 4.1.12 gereğince Algoritma 1 tam olarak bir tane pozitif kökü olan ve diğer kökleri C konisinin elemanları olan bir polinom $A(x)$'in, $TR(A)$ altında kendini çağırmayı durduracaktır. Bu durum $A(x)$ polinomunun kökleri için incelenmek istenmektedir. $A(x)$

sıfırdan farklı olduğunda Uyarı 3.4.5 (5) gereğince $r \circ t$ fonksiyonu $TR(A)$'nın köklerini $A(x)$ polinomunun sıfırdan farklı köklerine eşlediği açıklanmıştır. Ancak $r \circ t$ ifadesi bir Möbius dönüşümü olduğu için daha fazlası elde edilebilir. Bu bölümde bu ilişki incelenecektir.

4.2.1. Uyarı:

Anderson (1999), Möbius dönüşümlerinin bazı özelliklerini incelemiştir. Bu dönüşümlerin, Riemann küresini ($\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$) $\mathbb{C}$ içindeki çemberlere resmeden homeomorfizmalar olduğunu göstermiştir. Anderson ilk olarak $f(z) = az + b(a, b \in \mathbb{R})$ ve $f(z) = \frac{1}{z}$ Möbius dönüşümlerini ele almıştır. Bu iki dönüşümün çember ve doğruları yine çember ve doğrulara resmettiğini incelemiştir. Daha sonra elde ettiği sonuçları $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}(ad - bc \neq 0)$ şeklindeki Möbius dönüşümlere genellemiştir. Anderson dönüşümlerin resimlerini araştırırken alışılmış yöntemlerden farklı bir yöntem izlemiştir. Verilen bir Möbius dönüşümü altında K çemberinin veya doğrusunun resmini üzerindeki üç farklı nokta seçip, seçilen bu noktaların görüntüsünü birleştirerek K'nın görüntüsü olan L'ye karar vermiştir.

$\mathbb{C} - K$ ve $\mathbb{C} - L$ kümelerinin her ikisi de kesinlikle iki bağlantılı bileşene sahip olmaktadır. Möbius dönüşümleri $\mathbb{C}$'nin homeomorfizmaları olduğu için, $\mathbb{C} - K$'nın her bileşeni

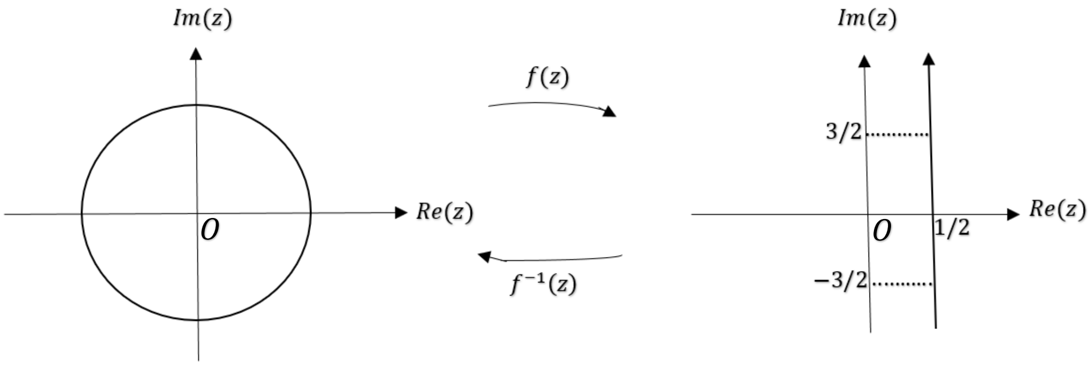
$\mathbb{C} - L$'nin farklı bileşenleri ile eşleşmektedir. Bu mantık ile $\mathbb{C} - K$'nın tek noktasına dönüşüm uygulanarak $\mathbb{C} - K$'nın her bileşeninin resmine ulaşılabilir [12].

Bu durum altta verilen örnek ile açıklanacaktır.

4.2.2. Örnek:

$f(z) = \frac{2z-1}{z+1}$ Möbius dönüşümü ve $|z| = 1$ birim çemberi ele alınsın. Bu çember üzerinde bulunan $1 + 0i$, $\frac{1}{2} + 0i$ ve $0 + i$ noktaları sırasıyla $\frac{3}{2}i + \frac{1}{2}$, $0 - 1i$ ve $\frac{-3}{2}i + \frac{1}{2}$ noktalarına resmedilmektedir. Elde edilen bu üç nokta birleştirildiğinde bir doğru oluşmaktadır.

Diğer yandan, Möbius dönüşümlerinin tersinin de bir Möbius dönüşümü olduğu bilinmektedir. Öyleyse oluşan doğru $f^{-1}(z)$ dönüşümü altında $|z| = 1$ birim çemberine resmedilecektir.



Şekil 4.2 : $f(z) = \frac{2z-1}{z+1}$ dönüşümü altında birim çemberin resmi.

4.2.3. Tanım:

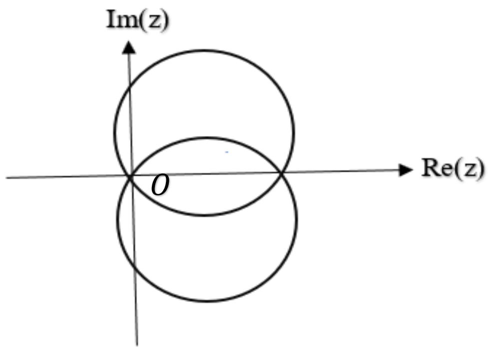
$\underline{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

$\overline{C} = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{6} \right) \right| < \frac{\sqrt{3}}{3} \right\}$

$C' = \left\{ z \in \mathbb{C} : \left| z - \left(\frac{1}{2} \right) \right| < \frac{1}{2} \right\}$ diskleri tanımlansın [12].

4.2.4 Uyarı:

$r \circ t$ dönüşümü C konisini birebir ve örten şekilde $\overline{\mathbb{C}} - (\overline{C} \cup \underline{C})$ bölgesine resmeder [12] .



Şekil 4.3 : $\overline{C} \cup \underline{C}$ *kümesinin sınırı.*

İspat:

Eğer z kompleks sayısı C'nin sınırında 1'den 0'a doğru saat yönünde ilerlerse, r(z) 1'den başlayarak$\{1 - s + \sqrt{3}si : s \geq 0\}$ yönünde ilerler. Benzer şekilde, z C'nin sınırında saatin tersi yönünde 1'den 0'a doğru ilerlerse, r(z) 1'den başlayarak $\{1 - s - \sqrt{3}si : s \geq 0\}$ yönünde ilerler. z = 0 noktası $r(0) = \infty \notin \mathbb{C}$ olarak resmedilir.

Sonuç olarak $t^{-1} \circ r = (\mathrm{r} \circ \mathrm{t})^{-1}$ dönüşümü $\overline{\mathbb{C}} - (\bar{C} \cup \underline{C})$ bölgesini birebir ve örten olarak C konisine resmeder.

4.3 Normal Kübik Polinomlar

Teorem 4.1.10 gereğince kökleri C konisinin içinde bulunan bütün polinomların normal polinom olduğu bilinmektedir. Teorem 4.1.5 ve 4.1.7 gereğince birinci ve ikinci dereceden polinomlar için bu ifadenin tersinin de doğru olduğu bilinmektedir. Ancak kübik polinomlar için bu ifadenin doğruluğu ispatlanmış değildir. Bu durum bir polinom ile incelenecektir. Örneğin $A(x) = x^3 + 5x^2 + 16x + 30$ polinomu ele alınsın. Bu polinomun normal olduğu açıktır. Ayrıca $A(x) = \big(x - (1+3i)\big)\big(x - (1-3i)\big)(x+3)$ yazılabilir. $1 + 3i$ ve $1 - 3i$ olarak bulunan iki kökün C konisinin elemanı olmadığı görülmektedir. Haliyle polinom normal olmasına rağmen köklerin hepsi C konisinin elemanı olmamaktadır. Bu durumda önceki bölümde gerçekleşen iddia doğru olmayacaktır. Alt kısımda verilecek iki teorem ile bu durum açıklanacaktır.

4.3.1 Teorem:

$A(x)$ bütün kökleri reel olan pozitif bir polinom olsun. $A(x)$ polinomunun normal olması için gerekli ve yeterli şart bütün köklerinin pozitiften farklı olmasıdır [12].

İspat:

Eğer $A(x)$ polinomun bütün kökleri pozitiften farklı ise Teorem 4.1.10 gereğince $A(x)$ polinomunun normal olduğu açıktır. Diğer yandan $A(x)$ normal bir polinom ve bir tane pozitif reel köke sahip ise Teorem 3.2.1 gereğince $\mathrm{Var}\big((x-1)A(x)\big) > 1$ olacaktır. Ancak bu durum Teorem 4.1.11 ile çelişecektir. Haliyle bu şartlar altında pozitif bir kök bulunamaz.

4.3.2. Teorem:

$A(x)$ üçüncü dereceden pozitif bir polinom olsun. $A(x)$ polinomunun kökleri $a, b+ci$, $b-ci$ $(a,b,c \in \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda $A(x)$ polinomunun normal olması için gerekli ve yeterli şart

$$a \leq 0$$

$$b \leq 0$$

$$c^2 - 3b^2 - 2ab - a^2 \leq 0$$

$$c^4 + 2b^2c^2 + 2abc^2 - a^2c^2 + b^4 + 2ab^3 + 3a^2b^2 \geq 0$$

ifadelerinin sağlanmasıdır [12].

İspat:

$A(x)$ polinomu baş katsayısı 1 olan bir polinom olarak düşünülebilir çünkü polinom en büyük dereceli terimin katsayısı parantezine alındığında polinomun normalliği değişmeyecektir.

Öyleyse $A(x) = (x-a)\big(x-(b+ci)\big)\big(x-(b-ci)\big)$

$= x^3 + (-2b+a)x^2 + (b^2+c^2+2ab)x + (-ab^2 - ac^2)$ polinomu ele alınsın.

▪ $-ab^2 - ac^2 = -a(b^2+c^2) \geq 0 \Rightarrow a \leq 0$

▪ $(-2b-a)^2 = 4b^2 + 4ab + a^2 \geq b^2 + c^2 + 2ab \Rightarrow c^2 - 3b^2 - 2ab - a^2 \leq 0$

▪ $(b^2+c^2+2ab)^2 \geq (-2b-a)(-ab^2-ac^2)$

$$b^4 + 2b^2c^2 + 4ab^3 + 4a^2b^2 + 4abc^2 + c^4 \geq 2ab^3 + 2abc^2 + a^2b^2 + a^2c^2 \Rightarrow$$

$$c^4 + 2b^2c^2 + 2abc^2 - a^2c^2 + b^4 + 2ab^3 + 3a^2b^2 \geq 0$$

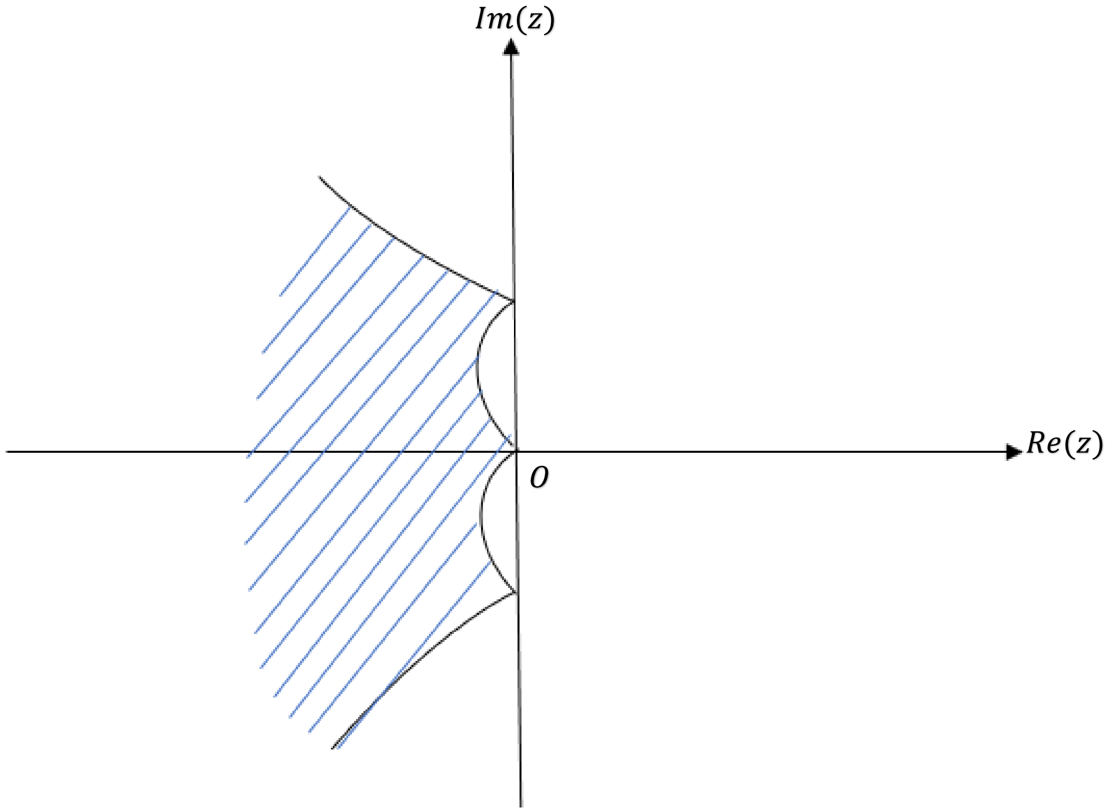
▪ Son olarak $b \leq 0$ eşitsizliği gösterilmelidir. $a \leq 0$ olduğu gösterilmiştir ayrıca $a = 0$ iken $-a - 2b \geq 0$ sağlanacağından $b \leq 0$ sonucu elde edilir. $a < 0$ durumu ele alınsın. Burada $a = -1$ durumu ele alınırsa $-a - 2b \geq 0$ ifadesinden $b \leq 1\,/\,2$ elde edilir. Ancak bu durum doğru olmayacaktır :

$b = 1/2$ kabul edildiğinde $-a - 2b = 0$ ve $a = 0$ sonucu elde edilir ve bir çelişki oluşur.

$b < 1/2$ kabul ederek $b \leq 0$ olması gerektiği sonucuna ulaşılacaktır. $a = -1$ kabulü ile $c^2 - 3b^2 + 2b - 1 \leq 0$ ve $-2b + b^2 + c^2 \geq 0$ eşitsizlikleri elde edilir. Bu ifadelerin çarpılması ile $(c^2 - 3b^2 + 2b - 1)(-2b + b^2 + c^2) \leq 0$ oluşacaktır. Ayrıca

$2b^2c^2 + 2abc^2 - a^2c^2 + b^4 + 2ab^3 + 3a^2b^2 \geq 0$ olduğu bilinmektedir. Bu iki ifade birleştirildiğinde $-2b(2b-1)((b-1)^2 + c^2) \leq 0$ eşitsizliği elde edilir. Ancak buradan $-2b(2b-1) \leq 0$ ve $2b > 1$ son olarak da $b > {}^1/_2$ sonucuna ulaşılır. Yani tekrar çelişki elde edilmiştir.

Sonuç olarak kübik bir polinomun normal olması için gerekli ve yeterli şart bu polinomun verilen dört şartı sağlamasıdır. Bu durum [12] numaralı kaynakta detaylı olarak incelenmiş ve oluşan bölge alttaki şekilde görülmektedir :



Şekil 4.4 : Normal kübik polinomların köklerini içeren bölge

Verilen bu ispat normal polinomların tanım ve özellikleri kullanılarak bu tez çalışmasında elde edilmiş bir ispattır. [12] numaralı kaynaktaki ispat mantığı incelenmiş ve semi orijinal bir ispat verilmiştir. Ayrıca Şekil 4.4 ile ilgili detaylı bilgi [12] numaralı makalede bulunabilir. Elde edilmiş bu sonuç örnek üzerinde incelenecektir.

4.3.3. Örnek:

$A(x) = x^3 + 6x^2 + 11x + 6$ polinomu ele alınsın. Normal polinomların tanımı gereği bu polinomun normal olduğu açıktır. Ayrıca $A(x) = (x+1)(x+2)(x+3)$ olarak yazılabilir. Burada polinomun kökleri $-1, -2\ ve\ -3$ olacaktır. Görüldüğü gibi kökler verilen bölgenin içine düşmektedir.

4.3.4. Örnek:

Şimdi ise bu durumun gerçekleşmediği bir örnek ele alınsın. Bunun için

$A(x) = x^3 - 3x^2 + 9x + 13$ polinomu ele alınsın. Görüldüğü gibi $A(x)$ polinomu normal değildir. Ayrıca bu polinom,

$A(x) = (x+1)(x^2 - 6x + 13) = (x+1)\big(x-(2+3i)\big)\big(x-(2-3i)\big)$ olarak çarpanlarına ayrılır. Görüldüğü gibi kökler verilen bölgeye düşmemektedir.

4.3.5 Teorem:

$A(x) = B(x)C(x)$ şeklinde yazılabilen sıfırdan farklı bir polinom olsun. Burada $B(x)$ tüm kökleri C konisi içinde bulunan bir polinom ve $C(x)$ kökleri Teorem 4.3.2 de verilen şartları sağlayan kübik polinomların çarpımı şeklinde yazılabilen bir polinom olsun. Bu durumda herhangi bir $\alpha \in \mathbb{R}^+$ için $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x)\big) = 1$ sonucuna ulaşılır [12].

İspat :

$B(x)$ polinomunun bütün kökleri C konisinin içinde olduğu için Teorem 4.1.12 gereğince $B(x)$ polinomu normaldir. Ayrıca $C(x)$ polinomunun çarpanları olan kübik polinomların her biri Teorem 4.3.2 gereğince normaldir. Böylece Teorem 4.1.9 gereğince $A(x)$ polinomu da normaldir. Sonuç olarak, Teorem 4.1.12 gereğince $\mathrm{Var}\big((x-\alpha)A(x)\big) = 1$ sonucuna ulaşılır.

5. DESCARTES İŞARET KURALININ UYGULAMA ALANLARI

Bu kısımda Descartes işaret kuralının iki farklı kullanım alanından bahsedilecektir. Bu kısımda verilmiş olan farklı kullanım alanları Descartes işaret kuralının kapsamı geniş bir teorem olduğunu göstermektedir. İlk olarak Descartes işaret kuralının kompleks fonksiyonlar üzerinde bir uygulama alanından bahsedilecektir. Burada konu ile ilgili bazı temel teoremler verilmiş ve daha güncel bir teorem incelenmiştir. Bölümün sonunda ise elde edilen örnekler ile bu teoremlerin kıyaslaması yapılmıştır. İkinci uygulama alanında ise güncel bir uygulamaya yer verilmiştir. Bu kısımda Covid19 salgınına dair bir uygulamadan bahsedilmiştir. İncelenmiş olan makalede elde edilmiş olan matematiksel modelleme ve modellemenin çözümlenmesinde kullanılan Descartes işaret kuralına dair adımlardan bahsedilmiştir.

5.1. Descartes İşaret Kuralının Kompleks Polinomlarda Bir Uygulaması

Bu bölümde Descartes işaret kuralının kompleks polinomlarda bir uygulamasına yer verilmiştir. Aşağıda verilen uygulamada Descartes işaret kuralı ile kompleks bir polinomun en büyük köküne ait sınır bulunabileceği görülmektedir.

5.1.1. Teorem: (Cebirin Temel Teoremi)

$f(z) = z^n + A_1 z^{n-1} + \cdots + A_n$ şeklinde verilen bir polinomun belli bir $|z| = R$ çemberi dışında herhangi bir kökü yoktur [14].

Verilen bu teorem cebirin temel teoremi ya da Gauss Lucas teoremi olarak bilinir. Bu teorem matematik literatürünün birçok alanında sıklıkla kullanılan temel bir teoremdir. Ayrıca bu teorem daha sonra elde edilen birçok teoremin de dayanağı konumundadır.

Eğer, A_i'lerin tümü reel sayı ise Gauss (1799), S pozitif A_i'lerin toplamı olmak üzere

$R = \max\left(1, 2^{1/2}S\right)$ olduğunu ispatlamıştır. Ayrıca A_i'lerin reel veya kompleks olması durumunda ise Gauss (1816) $k = 1,2,\ldots,n$ için $R = \max\left(2^{1/2}n|A|\right)^{1/k}$ olduğunu ispatlamıştır. Daha sonra ise Gauss (1849) R'nin $z^n - 2^{1/2}(|A_1|z^{n-1} + \cdots + |An|) = 0$ denkleminin pozitif kökü olarak alınabileceğini göstermiştir [14].

5.1.2. Teorem: (Cauchy Teoremi)

$a_n \neq 0$ iken $f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ şeklinde verilen bir polinomun bütün kökleri $|z| \leq r$ çemberinin içinde yer alır. Burada bahsedilen r,

$|a_0| + |a_1|z + \cdots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n = 0$ denklemin pozitif kökü olarak tanımlanmıştır [14].

Verilen bu iki teorem polinomların sıfırları konusunda en temel teoremlerdendir. Bu iki teorem ve kullanılan ispat yöntemleri bu konuda yapılan daha sonraki çoğu çalışmada bir yol haritası olmuştur. Aşağıda verilecek olan teorem bu çalışmalardan birini içermektedir.

5.1.3. Teorem:

$f(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ şeklinde yazılabilen reel katsayılı kompleks bir polinom olsun. Burada fonksiyonun katsayılar dizisi $\{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$ olacaktır. Bu durumda, $f(z)$ fonksiyonunun pozitif reel kök sayısı ya işaret değişim sayısı kadardır ya da işaret değişim sayısının çift tamsayı eksiği kadardır [15].

5.1.4 Teorem:

$a_1, a_0 > 0$ ve $n \geq 2$ koşulları altında verilen bir $f(z) = z^n - a_1 z + a_0$ polinomu iki tane pozitif köke sahip ise bu polinomun en büyük pozitif kökü δ olmak üzere;

$$\delta < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4a_1 + 1}}{2}$$

eşitsizliği sağlanır [16].

İspat:

$a_1, a_0 > 0$ olduğu için, Teorem 5.1.3 gereğince $f(z)$ polinomunun ya 2 tane pozitif köke sahip olduğu ya da pozitif köke sahip olmadığı görülmektedir. Burada $f(0) = a_0 > 0$, $f(1) = 1 - a_1 + a_0$ ve $\lim_{z\to\infty} f(z) = +\infty$ ifadelerinin sağlandığı görülmektedir. $f(1) \geq 0$ sağlandığı için $f(z)$ fonksiyonu iki tane pozitif köke sahip olacaktır. Bu köklerden en büyük olan δ olarak gösterilsin. Burada $f(0) > 0$ ve $f(1) > 0$ olduğu için $\delta > 1$ olduğu gözlemlenebilir. δ ile ilgili bir tahmin vermek için

$$f(\delta) = \delta^n - a_1 \delta + a_0 = 0$$

denklemi düşünülsün. Buradan,

$$\frac{\delta^{n+1}-\delta^{n}}{\delta-1}-a_1\delta+a_0=0$$

elde edilir. Ayrıca $a_0>0$ olduğu için,

$$\frac{\delta^{n+1}-\delta^{n}}{\delta-1}-a_1\delta<0$$

elde edilir. Bu eşitsizlik,

$$\delta(\delta^{n}-\delta^{n-1}-a_1\delta+a_1)<0$$

eşitsizliğini ortaya çıkarmaktadır. Ve sonuç olarak,

$$\delta(\delta^{n-1}-\delta^{n-2}-a_1)<-a_1$$

eşitsizliği elde edilir. δ ve a_1 ifadelerinin pozitif sayılar olmasından dolayı,

$$\delta^{n-1}-\delta^{n-2}-a_1<0$$

eşitsizliği yazılabilir. Bu eşitsizlikte $n=3$ verilirse,

$$\delta^{2}-\delta-a_1<0$$

sonucuna ulaşılır. Bu eşitsizlik δ değişkenine bağlı bir denklem olarak çözülürse,

$$\delta_{1,2}=\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}$$

kökleri elde edilir. Sonuç olarak,

$$\delta_1=\delta=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}>1$$

ifadesi elde edilmiştir. Bu aşamada,

$$f_1(\delta)\coloneqq\delta^{n-1}-\delta^{n-2}-a_1$$

$$f_2(\delta)\coloneqq\delta^{2}-\delta-a_1$$

olarak tanımlansın. $f_1(\delta)$ fonksiyonun $\left[0,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right]$ kapalı aralığının dışında herhangi bir pozitif reel kökünün bulunmayacağının gösterilmesi ile ispat bitirilecektir. Bu aşamada

$f_1$fonksiyonunun verilen bir aralıkta daima monoton artan bir fonksiyon olduğu gösterilmelidir.

$f_1(\delta)$ fonksiyonuna Descartes işaret kuralının uygulanması ile $f_1(\delta)$ fonksiyonun yalnız bir tane pozitif köke sahip olduğu görülmektedir. Ayrıca $f_1(0) = f_1(1) = -a_1$ ve

$\lim_{\delta \to +\infty} f_1(\delta) = +\infty$ ifadelerinin doğruluğu görülmektedir. Monotonluğu ispatlamak için $f_1(\delta)$ fonksiyonunun türevi kullanılacaktır:

$$f_1'(\delta) = (n-1)\delta^{n-2} - (n-2)\delta^{n-3} > 0$$

Bu denklem ,

$$\delta > \frac{n-1}{n-2}$$

sonucunu vermektedir. Yani $\delta > 1$ iken $f_1(\delta)$ fonksiyonu daima monoton artan bir fonksiyondur.

İspatın tamamlanması için,

$$0 = f_2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right) < f_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)$$

diğer bir ifadeyle,

$$f_1\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right) > 0$$

ifadesi kullanılacaktır. Son olarak elde edilen bu eşitsizliğin doğruluğu gösterilecektir.

Monotonluk ile beraber bu eşitsizlik $f_1(\delta)$ fonksiyonunun pozitif kökünün $\left[0, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right]$ kapalı aralığının dışında kalmayacağı anlamına gelmektedir. Bu kısımda,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)^{n-2} - a_1 > 0$$

eşitsizliği ilk olarak ele alınsın. Bu eşitsizlik,

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2} > \frac{a_1}{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)^{n-2}} + 1$$

ifadesini verecektir. Ayrıca bu eşitsizlik kullanılarak,

$$n > \frac{\log\left(\dfrac{a_1}{\dfrac{\sqrt{1+4a_1}}{2}-\dfrac{1}{2}}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)}+2$$

ifadesi elde edilir. Burada yapılacak son şey eşitsizliğin sağ tarafının 4 ten küçük olduğunu göstermek olacaktır. Yani,

$$\frac{\log\left(\dfrac{a_1}{\dfrac{\sqrt{1+4a_1}}{2}-\dfrac{1}{2}}\right)}{\log\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)}+2<4$$

Buradan,

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)^3-\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{1+4a_1}}{2}\right)^2-a_1 > 0$$

Sonucuna ulaşılır. Ancak elde edilen sonuç $a_1 > 0$ koşulu altında gerçekleşecektir.

5.1.5. Örnek:

$f(z) = z^4 - 6z + 9$ fonksiyonu ele alınsın. Bu fonksiyon $f(z) = (z^2 - 3)^2$ olarak yazılabilir ve buradaki en büyük pozitif kök $z = \sqrt{3}$ olarak bulunur. Burada $a_1 = 6$ ve $a_0 = 9$ olup teoremde verilen şartlar sağlanmaktadır. Ayrıca $\sqrt{3} < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{6\cdot 4+1}}{2}$ sağlandığı görülmektedir. Sonuç olarak teorem sağlanmaktadır.

5.1.6. Örnek:

$f(z) = z^{10} - 6z + 9$ fonksiyonu ele alınsın. Bu örnek, Gauss Lucas teoremi ve Cauchy teoremi için incelenecektir.

İlk olarak örnek Gauss Lucas Teoremi için incelensin. Verilen fonksiyonda bütün katsayılar reeldir. Bu yüzden teorem gereğince $R = max\left(1, 2^{1/2} \cdot 10\right)$ olacağından, fonksiyonun en büyük kökünün mutlakdeğeri $10\sqrt{2}$'den küçük olacaktır.

Aynı örnek Cauchy teoremi ele alınarak incelensin. Burada teorem gereğince

$9+6z-z^{10}=0$ denkleminin pozitif kökü bulunması gerekmektedir. Bu denklemin kökleri araştırıldığında kökler alttaki gibi bulunmaktadır.

$$1.3272 \; + \; 0.0000i$$

$$1.0432 \; + \; 0.8081i$$

$$1.0432 \; - \; 0.8081i$$

$$0.3254 \; + \; 1.2537i$$

$$0.3254 \; - \; 1.2537i$$

$$-0.4850 \; + \; 1.1505i$$

$$-0.4850 \; - \; 1.1505i$$

$$-1.0006 \; + \; 0.6006i$$

$$-1.0006 \; - \; 0.6006i$$

$$-1.0933 \; + \; 0.0000i$$

Öyleyse teorem gereğince $f(z)$ fonksiyonunun en büyük kökünün mutlak değeri

1.3272' den küçük olmalıdır.

Son olarak bu örnek Teorem 5.1.4 için ele alınamaz çünkü bu teoremin kullanılabilmesi için fonksiyonun iki tane pozitif köke sahip olması gerekmektedir. Ancak fonksiyonun kökleri :

$$-1.2540 \; + \; 0.4290i$$

$$-1.2540 \; - \; 0.4290i$$

$$-0.7206 \; + \; 1.0937i$$

$$-0.7206 \; - \; 1.0937i$$

$$0.0937 \; + \; 1.2718i$$

$$0.0937 \; - \; 1.2718i$$

$$0.7998 \; + \; 0.9120i$$

$$0.7998 \; - \; 0.9120i$$

$$1.0811 + 0.2818i$$

$$1.0811 - 0.2818i$$

olarak bulunur ve pozitif reel kökü yoktur.

5.1.7. Örnek:

$f(z) = z^5 - 31z + 30$ fonksiyonu ele alınsın. Verilmiş olan bu fonksiyonda $z = 1$ ve $z = 2$ fonksiyonun kökleri olduğu aşikardır. Verilen bu örnek yukarıda verilmiş olan üç teorem için incelenecektir.

İlk olarak, Gauss Lucas teoremi ele alınsın. Teorem gereğince $R = \max\left(1, 2^{1/2}31\right)$ olarak bulunacaktır. Öyleyse bu fonksiyonun en büyük pozitif kökü $2^{1/2}31$'den küçük olacaktır.

İkinci olarak, Cauchy teoremi ele alınsın. Teorem gereğince $z^5 - 31z - 30 = 0$ denkleminin köklerine ihtiyaç duyulacaktır. Burada kökler ;

$$2.5568 + 0.0000i$$

$$0.2216 + 2.4120i$$

$$0.2216 - 2.4120i$$

$$-2.0000 + 0.0000i$$

$$-1.0000 + 0.0000i$$

olarak bulunacaktır. Öyleyse teorem gereğince, verilmiş olan fonksiyonun en büyük reel kökü 2.5568 sayısından daha küçük olacaktır.

Üçüncü olarak, Teorem 5.1.4 ele alınsın. Teorem gereğince $\delta < \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{4 \cdot 31 + 1}}{2}$ olarak bulunur. Bu durumda verilen fonksiyonun en büyük pozitif reel kökü $\frac{\sqrt{129}+1}{2}$ sayısından daha küçük olacaktır.

Görüldüğü gibi fonksiyonun en büyük kökü $z = 2$ olarak bulunur. Bu kök verilmiş olan üç farklı sınırın da içinde kalmaktadır.

5.2. Descartes İşaret Kuralının Güncel Bir Uygulama Alanı

Bu bölümde Descartes işaret kuralının Covid19 ile ilgili bir uygulamasına yer verilecektir. Verilen bu uygulama Descartes işaret kuralının farklı kullanım alanlarının da bulunduğunu göstermektedir ve bu kuralın önemini vurgulamaktadır.

5.2.1. Uyarı:

Ɛ enfeksiyon oranı; $1/\gamma$ bulaşma periyodu; $1/\rho$ karantina periyodu; δ ölüm oranı; α ölüm olasılığı; μ doğal ölüm oranı; β sıcaklık fonksiyonu olarak adlandırılsın. Ayrıca bu kısımda S sağlıklı olan ve enfeksiyona hiç yakalanmayan toplam nüfus; E enfeksiyona maruz kalan toplam nüfusun oranı; I virüsün bulaştığı ve tespit edilmeyen toplam nüfus olarak temsil edilsin.

Bu kısımda [17] numaralı kaynakta elde edilmiş bir modelleme incelenecektir. İncelenen bu çalışmada matematiksel modelleme sonucu ulaşılmış olan Jakobiyen matris yardımı ile Covid19 virüsünün yayılma hızının ne zaman denge haline geleceği konusundan bahsedilmiştir. Bu kısımda bu uygulama incelenecektir. [17] nolu kaynakta elde edilen Jacobiyen matris aşağıda verilmiştir:

$$J[E] = \begin{bmatrix} -\beta I - \mu & 0 & -\beta S & 0 & 0 & 0 \\ \beta I & \mu - \mathcal{E} & \beta S & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathcal{E} & \gamma - \mu - pe^{-\gamma\tau} \cdot e^{-\lambda\tau} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pe^{-\gamma\tau} \cdot e^{-\lambda\tau} & -\rho(1-\alpha)e^{-\kappa\lambda} - \delta\alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\rho(1-\alpha)e^{-\kappa\lambda} & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta\alpha & 0 & -\mu \end{bmatrix}.$$

Elde edilmiş olan bu Jakobiyen matris ile elde edilen karakteristik denklem

$$x(\lambda) = (\lambda+\mu)^2\left(\lambda+\mu+\delta\alpha+\rho(1-\alpha)e^{-\kappa\lambda}\right)\left(\lambda^3+a_1\lambda^2+a_2\lambda+a_3e^{-\lambda\tau}(b_0\lambda^2+b_1\lambda+b_2)\right)$$

olarak bulunur. Burada,

$$a_1 = 3\mu + \varepsilon + \gamma + \beta I$$

$$a_2 = (\gamma+\mu)(\varepsilon+\mu) + (\gamma+\varepsilon+2\mu)(\beta I+\mu) - \varepsilon\beta S$$

$$a_3 = (\gamma+\mu)(\varepsilon+\mu)(\,\beta I+\mu) - \beta\varepsilon\mu S$$

$$b_0 = pe^{-\gamma\tau}$$

$$b_1 = pe^{-\gamma\tau}(2\mu+\ \varepsilon+\beta I)$$

$$b_2 =\ pe^{-\gamma\tau}(\varepsilon+\mu)(\beta I+\mu)$$

olarak ifade edilsin.

5.2.2 Uyarı: (Enfeksiyon İçermeyen Durumun Kararlılığı)

$$x(\lambda) = (\lambda+\mu)^3\big(\lambda+\mu+\delta\alpha+\rho(1-\alpha)e^{-\kappa\lambda}\big)(\lambda^2 + +d_1\lambda + d_2 + e^{-\lambda\tau}(e_1\lambda+e_2))$$

karakteristik denklemi E_0 (enfeksiyon içermeyen durum) için elde edilmiştir [17]. Ayrıca,

$$d_1 = 2\mu+\varepsilon+\gamma$$

$$d_2 = (\gamma+\mu)(\varepsilon+\mu) - \beta\varepsilon$$

$$e_1 = pe^{-\gamma\tau}$$

$$b_2 =\ pe^{-\gamma\tau}(\varepsilon+\mu)$$

olarak elde edilmiştir. Burada $\tau = 0$, $\kappa = 0$ olarak alınsın. Bu durumda,

$$x(\lambda) = (\lambda+\mu)^3\big(\lambda+\mu+\delta\alpha+\rho(1-\alpha)\big)(\lambda^2 + +d_1\lambda + d_2 + (e_1\lambda+e_2))$$

denklemi oluşacaktır. Elde edilmiş bu denklemde $\alpha < 1$ ve $(\gamma+\mu)(\varepsilon+\mu) >\ \beta\varepsilon$ şartlarının sağlanması durumunda işaret değişim sayısı bulunmamaktadır. Yani Descartes işaret kuralı gereğince bu denklemin pozitif kökü bulunmayacaktır. Diğer bir deyişle verilmiş olan denklemin bütün kökleri negatif olacaktır. Elde edilmiş bu sonuç E_0 (enfeksiyon içermeyen durum) için asimptotik olarak yerel bir kararlılık sağlanması anlamına gelmektedir.

Aynı inceleme $\tau = 0$, $\kappa = 0$ şartı aranmaksızın ele alınacaktır.

$$x(\lambda) = (\lambda+\mu)^3\big(\lambda+\mu+\delta\alpha+\rho(1-\alpha)e^{-\kappa\lambda}\big)(\lambda^2 + +d_1\lambda + d_2 + e^{-\lambda\tau}(e_1\lambda+e_2))$$

denklemi ele alınsın.

İlk olarak $(\lambda+\mu)^3 = 0$ denkleminden $\lambda_{1,2,2} = -\mu$ olarak elde edilir.

İkinci olarak $\left(\lambda + \mu + \delta\alpha + \rho(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\kappa\lambda}\right) = 0$ denklemi ele alınsın. Bu kısımda kökleri elde etmek için $\lambda = iw$ eşitliği kullanılıp denklemde yerine koyulursa,

$$w = \rho(1 - \alpha cos\kappa w)$$

$$\mu + \delta\alpha = \rho(1 - \alpha sin\kappa w)$$

denklemleri elde edilir. Bu iki denklem kullanılarak,

$$w^2 + (\delta\alpha + \mu)^2 - \rho^2(1-\alpha)^2 = 0$$

denklemi elde edilir. Burada $(\delta\alpha + \mu)^2 > \rho^2(1-\alpha)^2$ olması durumunda bu kısımda incelenen bütün kökler kompleks olacaktır. Bu durumda denklem pozitif kök içermeyecektir.

Sonuç olarak,

$$(\lambda + \mu)^3\left(\lambda + \mu + \delta\alpha + \rho(1-\alpha)\mathrm{e}^{-\kappa\lambda}\right)$$

denkleminin reel kökleri $(\delta\alpha + \mu)^2 > \rho^2(1-\alpha)^2$ şartı sağlandığı sürece negatif olacaktır.

Bu kısımda yapılan açıklamalar ile birlikte [17] kaynakta yer verilmiş olan ve E_0 ile ilgili net bir sonuçtan bahsedilecektir.

5.2.3. Teorem:

$(\delta\alpha + \mu)^2 > \rho^2(1-\alpha)^2$, $f_1 > 0$ şartları altında E_0 enfeksiyon içermeyen durum olarak temsil edilsin. Burada iki durum söz konusudur :

$(\boldsymbol{i})$ Eğer $d_2^2 < e_2^2$, $\gamma^2 > w^2$, $d_2 < w^2$ ve $x > y$ koşulları sağlanması durumunda, enfeksiyon içermeyen durumun denge noktası E_0^* $\tau < \tau^*$ olması durumunda asimptotik olarak denge haline gelecektir. Aksi halde yani $\tau > \tau^*$ durumunda ise denge haline gelmeyecektir.

$$\tau^* = \frac{1}{w_0}\arccos\left[\frac{(e_2 - d_1 e_1)w^2 - d_2 e_2}{e_1^2 w^2 + e_2^2}\right]$$

olarak ele alınmaktadır.

$(\boldsymbol{ii})$ Eğer $d_2^2 > e_2^2$ şartının sağlanması durumunda ise bütün τ değerleri için E_0 yerel olarak asimptotik bir denge halinde olacaktır [17].

SONUÇ ve TARTIŞMA

Bu yüksek lisans tez çalışmasında polinomların sıfırlarına ait en önemli yöntemlerden biri olan Descartes işaret kuralı temel alınmıştır. Beş ana bölümden oluşan bu tez çalışması Descartes işaret kuralına ait farklı kaynakların incelenmesi ve orijinal örneklerin eklenmesi ile konu hakkında bir yol haritası olması amacıyla hazırlanmıştır. Bu çalışmada teoreme ait farklı ispatlar kullanılarak yöntemin farklı açılardan ele alınabileceği gösterilmek istenmiştir. Tezin son bölümünde verilen farklı uygulama alanları ile farklı disiplinler için de faydalı bir çalışma olması amaçlanmıştır. Tez çalışması boyunca verilmiş bütün örnekler orjinaldir. Bu örnekler ile konunun daha iyi anlaşılması amaçlanmıştır.

KAYNAKLAR

[1] Descartes, R. (1886). La géométrie. Hermann.

[2] Vincent, M[onsieur], 1836. Sur la résolution des équations numériques. Journal de mathématiques pures et appliquées 1,341–372.

[3] Collins, G.E., Akritas, A.G., 1976. Polynomial real root isolation using Descartes' rule of signs. In: Jenks, R.D. (Ed.), Proceedings of the 1976 ACM Symposium on Symbolic and Algebraic Computation. ACM Press, pp. 272–275.

[4] Johnson, J.R., 1998. Algorithms for polynomial real root isolation. In: Caviness, B.F., Johnson, J.R. (Eds.), Quantifier Elimination and Cylindrical Algebraic Decomposition. Springer-Verlag, pp. 269–299.

[5] Rouillier, F., Zimmermann, P., 2001. Efficient isolation of a polynomial real roots. Rapport de recherche 4113, InstitutNational de Recherche en Informatique et en Automatique.

[6] Lane, J.M., Riesenfeld, R.F., 1981. Bounds on a polynomial. BIT 21 (1), 112–117.Mahler, K., 1964. An inequality for the discriminant of a polynomial. The Michigan Mathematical Journal 11 (3),257–262.

[7] V. E. Hoggatt Jr. and M. Bicknell, Generalized Fibonacci polynomials, Fibonacci Quart. 11 (1973), 457–465.

[8] Ramirez, J. L., & Sirvent, V. F. (2014). Incomplete tribonacci numbers and polynomials. Journal of Integer Sequences, 17(2), 3.

[9] Atılgan, K. (2009). Möbius dönüşümleri ve elipsler (Master's thesis, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü).

[10] Jones, G. A., & Singerman, D. (1987). Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint. Cambridge university press.

[11] Anderson, J.W., 1999. Hyperbolic Geometry. Springer-Verlag, London.

[12] Krandick, W., & Mehlhorn, K. (2006). New bounds for the Descartes method. Journal of Symbolic Computation, 41(1), 49-66.

[13] Wang, X. (2004). A simple proof of Descartes's rule of signs. The American Mathematical Monthly, 111(6), 525.

[14] Marden, M. 1966, Geometry of Polynomials, Mathematical Surveys, No. 3 American Mathematical Society, Providence, R.I., (1966).

[15] Supplement. Location of Zeros of Polynomials, Mar 2018. [Online]. Available: https://faculty.etsu.edu/gardnerr/5510/notes/Cauchys-Location-Zeros-Theorem.pdf

[16] Dehmer, M., & Tsoy, Y. R. (2014). Numerical Evaluation and Comparison of Kalantari's Zero Bounds for Complex Polynomials. Plos one, 9(10), e110540.

[17] Prakash, D. B., Chhetri, B., Vamsi, D. K. K., & Sanjeevi, C. B. (2020). The Impact of Temperature and Isolation on COVID-19 in India: A Mathematical Modelling approach. arXiv preprint arXiv:2012.11239.