T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

BATUHAN KOCAMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Ali GÜVEN (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE
Prof. Dr. Burak ORDİN

BALIKESİR, HAZİRAN - 2022

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan “**Altıgensel Fourier Serilerinin Yaklaşım Özellikleri**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Batuhan KOCAMAN

(imza)

ÖZET

ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİNİN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BATUHAN KOCAMAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2022

Altı bölümden oluşan bu tezde altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin ve genelleştirilmiş Nörlund ortalamalarının bazı yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.
Birinci bölüm giriş bölümüdür.
İkinci bölümde tezin sonraki bölümlerinde kullanılacak bazı temel kavramlara yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde kafesler ve kafesler yardımıyla tanımlanan Fourier serileri hakkında bilgi verilmiştir.
Dördüncü bölümde altıgensel kafes ve altıgensel Fourier serileri tanıtılmıştır.
Beşinci bölümde altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin ortalamalarının düzgün normda yaklaşım hızı incelenmiştir.
Altıncı bölümde altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş Nörlund ortalamalarının düzgün normda yaklaşım hızı incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Altıgensel Fourier serileri, altıgensel kafes, genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin ortalamaları, genelleştirilmiş Nörlund ortalamaları.

Bilim Kod / Kodları :20404 Sayfa Sayısı : 34

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF HEXAGONAL FOURIER SERIES
MSC THESIS
BATUHAN KOCAMAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, JUNE - 2022

In this thesis, which consists of six chapters, some approximation properties of generalized de la Vallèe-Poussin means and generalized Nörlund means of hexagonal Fourier series are studied.

The first chapter is the introduction.

In the second chapter, some fundamental concepts, which will be used in the following chapters, are given.

In the third chapter, information about lattices and Fourier series defined by lattices has been given.

In the fourth chapter, the hexagonal lattice and hexagonal Fourier series are introduced.

In the fifth chapter, the degree of approximation of generalized de la Vallèe-Poussin means of hexagonal Fourier series is investigated in the uniform norm.

In the sixth chapter, the degree of approximation of generalized Nörlund means of hexagonal Fourier series is investigated in the uniform norm.

KEYWORDS: Hexagonal Fourier series, hexagonal lattice, generalized de la Vallèe-Poussin means, generalized Nörlund means.

Science Code / Codes :20404 Page Number : 34

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Reel ve Kompleks sayı cismi
A^{tr}	: A matrisinin transpozesi
L_A	: A matrisi ile üretilen kafes
$L_A^{\perp}$	: A matrisi ile üretilen kafesin duali
$\mathcal{V}_n^{\lambda}$	: Genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin ortalaması
$N_n^{p,q}$	: Genelleştirilmiş Nörlund ortalaması
$\mathrm{L}^2(\Omega)$	: Karesi integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayı
$C_{\boldsymbol{H}}(\overline{\Omega})$	: Altıgensel kafese göre periyodik sürekli fonksiyonların uzayı
ω_f	: f fonksiyonun süreklilik modülü
$lip\alpha$	: Lipschitz sınıfı
$S_n(f)$	: f fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi
D_n	: n mertebeli Dirichlet çekirdeği

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanışında ve öncesinde Matematik bilgisi ile büyüleyen, karakteri ile hayran bırakan, öğrencisi olduğum için dünyanın en sanslı insanı hissetiğim danışmanım, büyüğüm, değerli bilim insanı Prof. Dr. Ali GÜVEN'e, karizması ve bilgisi ile aktif eğitmenlik hayatımda büyük rol oynayan Prof. Dr. Fırat ATEŞ'e, güler yüzünü benden hiç eksik etmeyen aynı zamanda bu zor yolda benim için çok büyük yardımları ile yol gösteren Doç. Dr. Nihal TAŞ'a, son olarak irademe ve bilime olan inancıma teşekkürü bir borç bilirim.

Balıkesir, 2022 **Batuhan KOCAMAN**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisi, niteliklileri az bilinen yani çalışılması zor olan fonksiyonlara, nitelikleri daha iyi bilinen yani çalışılması daha kolay olan (örneğin; cebirsel durumda cebirsel polinomlar, periyodik durumda da trigonometrik polinomlar gibi) fonksiyonlarla yaklaşım sağlanabilir mi ve bu yaklaşım en iyi nasıl elde edilir sorularına cevap arayan çalışmaları kapsamaktadır. Yaklaşım teorisi hakkında genel bilgi [1] ve [2] kitaplarında bulanabilir.

Tek reel değişkenli 2π periyotlu periyodik fonksiyonların yaklaşım problemleri çalışılırken trigonometrik ve üstel Fourier serilerinin kısmi toplamları ve bunların Cesàro, Abel-Poisson, Riesz, Nörlund, de la Vallèe-Poussin gibi bazı ortalamaları çok önemli rol oynamaktadır.

Fourier serilerinin ortalamaları ile yaklaşım problemleri özellikle 20. yüzyılın ikinci yarısında bir çok Matematikçi tarafından çalışılmıştır. Özellikle L. Leindler [3-4], P. Chandra, [5-7] ve S. Prössdorf [8] adlı matematikçilerin Fourier serilerinin ortalamalarının yaklaşım hızı ile ilgili önemli çalışmaları bulunmaktadır.

Birden çok reel değişkene sahip fonksiyonların $\mathbb{R}^d$ Euclid uzayının küpleri üzerinde trigonometrik yaklaşım problemleri çalışılırken bu fonksiyonların her bir değişkene göre 2π-periyodik oldukları kabul edilir [2]. Bu durumda katlı Fourier serilerinin ortalamalarının yaklaşım hızları çeşitli yöntemlerle değerlendirilir [9-11].

$\mathbb{R}^d$ uzayının, aralıkların kartezyen çarpımı olmayan alt kümeleri üzerinde trigonometrik yaklaşım problemlerinin çalışılması çok daha güçtür. Bu bölgelerde yaklaşım problemlerinin çalışılabilmesi için başka türlü periyodiklik tanımlamak gereklidir. Klasik periyodiklik kavramından sonra en uygun periyodiklik kafesler yardımı ile tanımlanan periyodikliktir.

$\mathbb{R}^2$ düzleminde standart kafes ve klasik periyodik fonksiyon tanımından sonra en kullanışlı kafes altıgensel kafes ve en kullanışlı periyodiklik de altıgensel kafese göre tanımlanan periyodikliktir. Altıgensel kafes kullanılarak tanımlanan altıgensel Fourier serileri düzlemin altıgensel alt kümeleri üzerinde trigonometrik yaklaşım problemlerinin çalışılmasını sağlamaktadır.

Altıgensel Fourier serileri H. Li, J. Sun ve Y. Xu tarafından tanımlanmıştır [12-13]. Daha sonra Y. Xu sürekli ve altıgensel kafese göre periyodik fonksiyonların altıgensel Fourier serilerinin Cesàro ve Abel-Poisson ortalamalarının bu fonksiyonlara düzgün olarak yakınsadığını kanıtlamıştır [13].

Altıgensel Fourier serilerinin Cesàro ve Abel-Poisson ortalamalarının yaklaşım hızları 2013 yılında A. Güven tarafından çalışılmıştır [14]. A. Güven daha sonra altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin, Riesz, Nörlund ve matris ortalamalarının yaklaşım hızları ile ilgili çalışmalar da yapmıştır [15-18].

Bu tez çalışmasında sürekli ve altıgensel kafese göre periyodik fonksiyonların altıgensel Fourier serilerinin genelleştirilmiş de la Vallèe-Poussin ve genelleştirilmiş Nörlund ortalamalarının yaklaşım hızları ile ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Hilbert Uzayları

$\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ cisimleri birlikte $\mathbb{F}$ ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.1. X $\mathbb{F}$ üzerinde bir vektör uzayı olsun. Bir

$\mathrm{p}: X \to \mathbb{R}, \mathrm{p}(x) = \|x\|$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir norm denir:

$(\mathrm{N}_1) \forall x \in X$ için $\|x\| \geq 0$

$(\mathrm{N}_2) \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0(0_X)$

$(\mathrm{N}_3) \forall x \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\|\lambda x\| \leq |\lambda| \|x\|$

$(\mathrm{N}_4) \forall x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Üzerinde bir norm tanımlanmış olan vektör uzayına bir normlu uzay denir.

Tanım 2.1.2. X bir normlu uzay, (x_n) bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$n \geq N \Rightarrow \|x_n - x\| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisi x noktasına yakınsıyor denir ve $x_n \to x$ yazılır.

Tanım 2.1.3. X normlu bir uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$n, m \geq N \Rightarrow \|x_n - x_m\| < \varepsilon$

olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ varsa (x_n) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Normlu bir uzayda her yakınsak dizi Cauchy dizisidir.

Tanım 2.1.4. X normlu bir uzay olsun. X uzayındaki her (x_n) Cauchy dizisi yakınsak ve $\lim_{n\to\infty} x_n \in X$ ise X normlu uzayına bir Banach uzayı denir.

Teorem 2.1.5. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı $1 \leq p < \infty$ olsun. Ölçülebilir ve

$$\int_X |f|^p d\mu < \infty$$

koşulunu sağlayan $f: X \to \mathbb{F}$ fonksiyonların kümesini $L^p(X)$ ile gösterelim.

$L^p(X)$ kümesi fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır ve

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu $L^p(X)$ üzerinde bir normdur (hemen hemen her yerde eşit olan fonksiyonlar eşit kabul edilmektedir). Ayrıca $L^p(X)$ normlu uzayı bu norma göre bir Banach uzayıdır [19].

Tanım 2.1.6. H bir vektör uzay olsun. Bir

$u: H \times H \to \mathbb{F}, u(x,y) = \langle x,y \rangle$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona H üzerinde bir iç çarpım denir:

(I_1) $\forall x,y \in H$ için $\overline{\langle x,y \rangle} = \langle y,x \rangle$

(I_2) $\forall x, \in H$ için $\langle x,y \rangle \geq 0$

ve

$\langle x,x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0(0_H)$

(I_3) $\forall x,y \in H$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{F}$ için $\langle \lambda x,y \rangle = \lambda \langle x,y \rangle$

(I_4) $\forall x,y,z \in H$ için $\langle x,y+z \rangle = \langle x,y \rangle + \langle x,z \rangle$.

Üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış olan vektör uzayına bir iç çarpım uzayı denir.

Teorem 2.1.7. [19] H bir iç çarpım uzayı olsun.

$\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}, \qquad x \in H$

fonksiyonu H üzerinde bir normdur.

Tanım 2.1.8. H bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer H uzayı $\|x\| = \langle x,x \rangle^{\frac{1}{2}}$ normuna göre bir Banach uzayı ise bu uzaya bir Hilbert uzayı denir.

Teorem 2.1.9. $(X, \mathcal{M}, \mu)$ bir ölçüm uzayı olsun.

$$\langle f,g \rangle = \int_X f\bar{g}\, d\mu$$

fonksiyonu $L^2(X)$ üzerinde bir iç çarpımdır ve $L^2(X)$ bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır [19].

Tanım 2.1.10. H bir iç çarpım uzayı ve $x,y \in H$ olsun. Eğer $\langle x,y \rangle = 0$ ise x ve y birbirine dikeydir denir ve $x \perp y$ yazılır.

Tanım 2.1.11. H bir iç çarpım uzayı ve $A \subset H (A \neq \emptyset)$ olsun. $x \neq y$ biçimindeki her $x,y \in A$ için $x \perp y$ ise A kümesine dikey küme denir.

A dikey bir küme ve her $x \in A$ için $\|x\| = 1$ ise A kümesine ortonormal küme denir.

Tanım 2.1.12. H bir Hilbert uzayı ve $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bu uzayın ortonormal bir alt kümesi olsun. Her $x \in H$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x,e_n \rangle\, e_n$$

ise $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesine H uzayının bir ortonormal tabanı denir.

2.2 Fourier Serileri

H bir Hilbert uzayı ve $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ bu uzayın ortonormal bir alt kümesi olsun. Bir $x \in H$ vektörünün Fourier katsayıları

$\langle x, e_n \rangle, n = 1,2, \ldots$

ve Fourier serisi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

olarak tanımlanır. Eğer $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi H uzayının bir ortonormal tabanı ise her $x \in H$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

olur.

Teorem 2.1.9' den görüleceği gibi

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \overline{g(x)} dx, \qquad f, g \in L^2([-\pi, \pi])$$

fonksiyonu $L^2([-\pi, \pi])$ üzerinde bir iç çarpımdır ve $L^2([-\pi, \pi])$ bu iç çarpıma göre bir Hilbert uzayıdır.

Teorem 2.2.1

$e_k : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$, $e_k(x) = \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$, $k \in \mathbb{Z}$

olmak üzere $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ kümesi $L^2([-\pi, \pi])$ uzayının bir ortonormal tabanıdır.

$L^2([-\pi, \pi])$ Hilbert uzayının $\{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ ortonormal tabanını göz önüne alalım. Bu ortonormal tabana göre bir $f \in L^2([-\pi, \pi])$ fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$\tilde{c}_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-ikx} dx$$

ve Fourier serisi

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \tilde{c}_k \frac{e^{ikx}}{\sqrt{2\pi}}$$

olur. Fakat sadelik açısından f fonksiyonun Fourier katsayıları

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, e^{-ikx} dx$$

ve Fourier serisi

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikx}$$

olarak alınır. Bu seriye f fonksiyonunun kompleks veya üstel Fourier serisi denir.

f Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

tanımlanır. n mertebeli Dirichlet çekirdeği

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt}, \qquad n = 1,2,\ldots$$

olmak üzere kısmi toplamlar dizisinin integral gösterimi

$$S_n(f)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)D_n(t)dt$$

olarak elde edilir [20].

Fourier serileri ile ilgili geniş bilgi [20] kitabında bulanabilir.

3. KAFESLER ve FOURIER SERİLERİ

$d \in \mathbb{N}$ olmak üzere,

$\mathbb{R}^d := \{ \boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_d) : x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R} \}$

kümesini göz önüne alalım. Bu küme

$x = (x_1, \dots, x_d)$, $y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için,

$x + y := (x_1 + y_1, \dots, x_d + y_d)$

ve

$\lambda x := (\lambda\, x_1, \dots, \lambda\, x_d)$

işlemleri ile bir vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^d$ vektör uzayına *d-boyutlu Euclid uzayı* denir.

Bu uzayda standart iç çarpım (Euclid iç çarpımı), $x = (x_1, \dots, x_d)$,

$y = (y_1, \dots, y_d) \in \mathbb{R}^d$ için

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{d} x_k y_k$$

ve standart norm (Euclid normu), $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ için

$$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2} = \left(\sum_{k=1}^{d} {x_k}^2 \right)^{1/2}$$

biçiminde tanımlanır.

$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$ vektörleri için,

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{bmatrix}_{d \times 1}$$

sütun matris gösterimi de kullanılır.

Euclid iç çarpımını artık $\langle x, y \rangle = x^{tr} y$ bu şekilde matris çarpımı olarak düşünebiliriz.

$\mathbb{Z}^d = \{ k = (k_1, \dots, k_d) : k_1, \dots, k_d \in \mathbb{Z} \}$

kümesi $\mathbb{R}^d$ uzayının ayrık bir alt kümesidir.

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_1^{(1)} \\ a_2^{(1)} \\ \vdots \\ a_d^{(1)} \end{bmatrix}_{d \times 1} , a_2 = \begin{bmatrix} a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \vdots \\ a_d^{(2)} \end{bmatrix}_{d \times 1} , \quad \dots \quad , \quad a_d = \begin{bmatrix} a_1^{(d)} \\ a_2^{(d)} \\ \vdots \\ a_d^{(d)} \end{bmatrix}_{d \times 1}$$

lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$A = [\, a_1 \; a_2 \quad \cdots \quad a_d \,]_{d\times d}$

matrisini göz önüne alalım.

Her $k = (k_1, \ldots, k_d) \in \mathbb{Z}^d$ için,

$A.k = k_1\, a_1 + \ldots + k_d\, a_d \in \mathbb{R}^d$

olur.

$L_A \coloneqq A.\mathbb{Z}^d = \{\, A.k : k \in \mathbb{Z}^d \} \subset \mathbb{R}^d$

kümesine A matrisi ile üretilen kafes , A matrisine de L_A kafesinin üreteç matrisi denir.

$$a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{d\times 1}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{d\times 1}, \quad \ldots \quad, \quad a_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}_{d\times 1}$$

alınırsa $A = I_d$ ve $L_A = \mathbb{Z}^d$ elde edilir (standart kafes).

$a_1, a_2, \quad \cdots \quad, a_d \in \mathbb{R}^d$ lineer bağımsız vektörler olmak üzere,

$A = [\, a_1 \; a_2 \quad \cdots \quad a_d \,]_{d\times d}$

matrisini göz önüne alalım. A^{-tr} matrisi ile üretilen kafese L_A kafesinin dual kafesi denir ve $L_A^{\perp}$ ile gösterilir.

$L_A^{\perp} = L_{A^{-tr}} = A^{-tr}\, \mathbb{Z}^d$

olur.

$L_A^{\perp} = \{\, x \in \mathbb{R}^d : \ \forall y \in L_A \ \ için \ \langle x, y \rangle \in \mathbb{Z} \,\}$

olduğu kolayca görülebilir.

A sütunları lineer bağımsız $d \times d$ tipinde bir matris ve $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı ve açık bir küme olsun. Hemen hemen her $x \in \mathbb{R}^d$ için

$$\sum_{\alpha \in L_A} \chi_\Omega\, (x + \alpha) = 1$$

ise Ω kümesi L_A kafesi ile $\mathbb{R}^d$ uzayını döşüyor denir ve

$\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$

yazılır.

$\Omega \subset \mathbb{R}^d$ Lebesgue ölçülebilir ve sınırlı bir küme olsun.

$$\mathrm{L}^2(\Omega) = \left\{ \Omega \xrightarrow{f} \mathbb{C} \ : \ f \ ölçülebilir \ ve \ \int_\Omega |f(x)|^2\, dx < \infty \right\}$$

kümesi fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzaydır. $\mathrm{L}^2(\Omega)$, Teorem 2.1.9' dan

$$\langle f, g\rangle_\Omega \coloneqq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\overline{g(x)}\,dx\,, \quad f, g \in \mathrm{L}^2(\Omega)$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayı olur.

Teorem 3.1. [21] $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ sınırlı ve açık bir küme ve $L_A \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes olsun. $\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\{e^{2\pi i\langle \alpha, x\rangle} : \alpha \in L_A^\perp\}$ kümesinin $\mathrm{L}^2(\Omega)$ Hilbert uzayının bir ortonormal tabanı olmasıdır.

$\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ ise Ω kümesine L_A kafesi için bir spektral küme denir.

$\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ ise $|\Omega| = |\det A|$ olur.

$\varphi_\alpha(x) \coloneqq e^{2\pi i\langle \alpha, x\rangle}, \varphi_\beta(x) \coloneqq e^{2\pi i\langle \beta, x\rangle}$, $\alpha, \beta \in L_A^\perp$ olsun. Ortonormallik bağıntısı

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle = \begin{cases} 1 \ , \alpha = \beta \\ 0 \ , \alpha \neq \beta \end{cases} , \qquad \alpha, \beta \in L_A^\perp$$

biçiminde tanımlanır.

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega \varphi_\alpha \overline{\varphi_\beta}\, dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle \alpha, x\rangle} e^{-2\pi i\langle \beta, x\rangle} dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle \alpha-\beta, x\rangle} dx$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle \alpha-\beta, x\rangle} dx = \begin{cases} 1 \ , \alpha = \beta \\ 0 \ , \alpha \neq \beta \end{cases}$$

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle \alpha, x\rangle} dx = \begin{cases} 1 \ , \alpha = 0 \\ 0 \ , \alpha \neq 0 \end{cases} , \quad \alpha \in L_A^\perp$$

$\alpha \in L_A^\perp \Leftrightarrow \alpha \in L_{A^{-tr}} \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d : \alpha = A^{-tr}\boldsymbol{k}$ $(\alpha = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{k} = 0)$

$\langle \alpha, x\rangle = \alpha^{tr}x = (A^{-tr}\boldsymbol{k})^{tr}x = \boldsymbol{k}^{tr}A^{-1}x$

Böylece ortonormallik bağıntısı

$$\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\langle A^{-tr}\boldsymbol{k}\ , x\rangle} dx = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega e^{2\pi i\boldsymbol{k}^{tr}A^{-1}x} dx = \begin{cases} 1 \ , \boldsymbol{k} = 0 \\ 0 \ , \boldsymbol{k} \neq 0 \end{cases} , (\boldsymbol{k} \in \mathbb{Z}^d)$$

biçimini alır.

$L_A \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes ve $\Omega + L_A = \mathbb{R}^d$ olsun. $f \in L^2(\Omega)$ alalım. f fonksiyonunun $L^2(\Omega)$ uzayının

$\{\varphi_\alpha : \alpha \in L_A^\perp\}$ $\left(\varphi_\alpha(x) = e^{2\pi i\langle \alpha, x\rangle}\right)$

ortonormal tabanına göre Fourier katsayıları

$c_\alpha(f) = \langle f, \varphi_\alpha\rangle_\Omega = \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)\, e^{-2\pi i\langle \alpha, x\rangle} dx$ $(\alpha \in L_A^\perp)$

ve Fourier serisi

$f(x) \sim \sum_{\alpha \in L_A^{\perp}} c_\alpha(f)\ e^{2\pi i \langle \alpha, x \rangle}$

olur.

$\alpha \in L_A^{\perp} \;\Leftrightarrow\; \exists\, k \in \mathbb{Z}^d : \alpha = A^{-tr} k$

olduğundan, $f \in \mathrm{L}^2(\Omega)$ fonksiyonun Fourier katsayıları

$$c_k(f) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(x)\, e^{-2\pi i \langle A^{-tr} k, x \rangle}\, dx \quad (\, k \in \mathbb{Z}^d \,)$$

ve Fourier serisi de

$$f(x) \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}^d} c_k(f)\ e^{2\pi i \langle A^{-tr} k, x \rangle}$$

biçimini alır.

Bir $L_A \subset \mathbb{R}^d$ kafesi için Ω spektral kümesi tek değildir. Ω bir spektral küme ise her $k \in \mathbb{Z}^d$ için $\Omega + A.k$ kümesi de bir spektral kümedir.

Ω spektral kümesi, 0 noktasını iç nokta kabul edecek ve $\mathbb{R}^d$ uzayını üst üste binmeden ve boşluk bırakmadan döşeyecek şekilde şeçilir:

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}^d} X_{\Omega}(\, x + A.k \,) = 1 \quad , \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^d$$

Örneğin, $\mathbb{Z}^d$ standart kafesi için spektral küme olarak

$$\Omega_A = \ [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})^d$$

alınır.

$f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $L_A = A\,\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$ bir kafes olsun.

Her $k \in \mathbb{Z}^d$ için

$f(x + Ak) = f(x)$

ise f fonksiyonu L_A kafesine göre periyodiktir (A – periyodiktir) denir.

$x , y \in \mathbb{R}^d$ olsun. Eğer $x - y \in L_A$ ise x ve y noktaları L_A kafesine göre denktir denir ve

$x \equiv y \ (\, mod A \,)$

yazılır.

4. ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİ

$\mathbb{R}^2$ uzayında

$$\boldsymbol{H} = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

matrisi ile üretilen kafese altıgensel kafes denir:

$\boldsymbol{L_H} = \boldsymbol{H}\mathbb{Z}^{\mathbf{2}} = \{\boldsymbol{H}k : k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^{\mathbf{2}}\}.$

Bu kafesin spektral kümesi

$$\Omega_{\boldsymbol{H}} = \left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x_2, \frac{\sqrt{3}}{2}x_1 \pm \frac{1}{2}x_2 < 1\right\}$$

altıgeni olarak alınır.

$\Omega_{\boldsymbol{H}}$ altıgeninin alanı (Lebesgue ölçümü)

$\det \boldsymbol{H} = |\Omega_{\boldsymbol{H}}| = 2\sqrt{3}$

ve ayrıca

$$\boldsymbol{H}^{-tr} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{2\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

olur.

$\mathbb{R}^3$ uzayında $t_1 + t_2 + t_3 = 0$ düzlemini $\mathbb{R}_H^3$ ile gösterelim:

$\mathbb{R}_H^3 \coloneqq \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3 : t_1 + t_2 + t_3 = 0\}.$

$\mathbb{R}_H^3$ düzleminin elemanlarına homojen koordinatlar denir.

$$t_1 \coloneqq -\frac{x_2}{2} + \frac{\sqrt{3}x_1}{2}, \qquad t_2 \coloneqq x_2, \qquad t_3 \coloneqq -\frac{x_2}{2} - \frac{\sqrt{3}x_1}{2},$$

dönüşümü ile $\Omega_{\boldsymbol{H}}$ spektral kümesi

$\Omega = \{(t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_H^3 : -1 \leq t_1, t_2, -t_3 < 1\}$

kümesine dönüşür.

Bu küme $\mathbb{R}_H^3$ düzlemi ile $[-1,1]^3$ küpünün arakesiti olan altıgendir.

$\mathbb{R}_H^3$ düzleminin bileşenleri tam sayı olan noktalarının kümesi için $\mathbb{Z}_H^3$ gösterimini kullanacağız:

$\mathbb{Z}_H^3 \coloneqq \mathbb{Z}^3 \cap \mathbb{R}_H^3 = \{\mathrm{k} = (k_1, k_2, k_3) \in \mathbb{Z}^3 : k_1 + k_2 + k_3 = 0\}.$

Homojen koordinatlar altında altıgen üzerindeki iç çarpım

$f, g \in L^2(\Omega_{\boldsymbol{H}})$ fonksiyonlarının iç çarpımı homojen koordinatlar altında

$$\langle f,g\rangle_{\Omega_{\boldsymbol{H}}} = \frac{1}{|\Omega_{\boldsymbol{H}}|}\int_{\Omega_{\boldsymbol{H}}} f(x_1,x_2)\overline{g(x_1,x_2)}\,dx_1dx_2 = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(\boldsymbol{t})\overline{g(\boldsymbol{t})}d\boldsymbol{t}$$

olur.

$k=(k_1,k_2)\in\mathbb{Z}^2$ için $\boldsymbol{k}=(k_1,k_2,-k_1-k_2)\in\mathbb{Z}_H^3$ ve $x=(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ noktasına karşılık gelen homojen koordinatlar $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}_H^3$ olmak üzere

$$\langle \boldsymbol{H}^{-tr}k,x\rangle = \frac{1}{3}\langle \boldsymbol{k},\boldsymbol{t}\rangle$$

olur.

Böylece Teorem 3.1'in sonucu olarak

$$\varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t}) \coloneqq e^{\frac{2\pi i}{3}\langle j,t\rangle},\ \boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}_{\boldsymbol{H}}^3$$

olmak üzere $\{\varphi_{\boldsymbol{j}}:\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}_{\boldsymbol{H}}^3\}$ kümesi $L^2(\Omega_{\boldsymbol{H}})$ Hilbert uzayının ortonormal tabanı olur.

$x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2$ noktalarına karşılık gelen homojen koordinatlar sırasıyla $\boldsymbol{t}=(t_1,t_2,t_3)\in\mathbb{R}_H^3$ ve $\boldsymbol{s}=(s_1,s_2,s_3)\in\mathbb{R}_H^3$ olsun. Homojen koordinatlar altında $x\equiv y\ (mod\boldsymbol{H})$ olması için gerekli yeterli koşul $\boldsymbol{t}\equiv\boldsymbol{s}\ (mod3)$, yani

$$t_1-s_1\equiv t_2-s_2\equiv t_3-s_3\ (mod3)$$

olmasıdır [13]. $\varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t})$ fonksiyonlarının $\boldsymbol{H}$-periyodik olduğu açıktır.

f $\boldsymbol{H}$-periyodik bir fonksiyon ise her $\boldsymbol{s}\in\mathbb{R}_H^3$ için

$$\int_{\Omega} f(\boldsymbol{t}+\boldsymbol{s})d\boldsymbol{t} = \int_{\Omega} f(\boldsymbol{t})d\boldsymbol{t}$$

olur [13].

$f:\mathbb{R}_H^3\to\mathbb{C}$ fonksiyonu $\boldsymbol{H}$-periyodik ve $f\in L^2(\Omega)$ olsun.

f fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$c_j = \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} f(\boldsymbol{t})e^{-\frac{2\pi i}{3}\langle j,t\rangle}d\boldsymbol{t},\qquad \boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}_H^3$$

ve Fourier serisi (altıgensel Fourier serisi)

$$f(\boldsymbol{t})\sim\sum_{j\in\mathbb{Z}_H^3} c_j\,\varphi_j(\boldsymbol{t})$$

olur.

Her n doğal sayısı için,

$$\mathbb{H}_n \coloneqq \{\boldsymbol{j}=(j_1,j_2,j_3)\in\mathbb{Z}_H^3: -n\le j_1,j_2,j_3\le n\}$$

kümesi $n\overline{\Omega}$ altıgenine ait ve bileşenleri tamsayı olan noktaların kümesidir.

$f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamları (altıgensel kısmi toplamları)

$$S_n(f)(\boldsymbol{t}) \coloneqq \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_n} c_{\boldsymbol{j}}\, \varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t})\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

olarak tanımlanır.

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere, n mertebeli Dirichlet çekirdeği

$$D_n(\boldsymbol{t}) \coloneqq \sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{H}_n} \varphi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{t})$$

olarak tanımlanır.

$f \in L^2(\Omega)$ fonksiyonunun altıgensel Fourier serisinin kısmi toplamları için

$$S_n(f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) D_n(\boldsymbol{s})\, d\boldsymbol{s}$$

integral gösterimi geçerlidir [13].

Dirichlet çekirdeği,

$$\boldsymbol{\Theta}_n(\boldsymbol{t}) \coloneqq \frac{\sin\frac{(n+1)(t_1-t_2)\pi}{3} \sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3} \sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3} \sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3} \sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}\,, \quad \boldsymbol{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}^3_H \tag{4.1}$$

olmak üzere

$$D_n(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{\Theta}_n(\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\Theta}_{n-1}(\boldsymbol{t})\,, \quad n \in \mathbb{N} \tag{4.2}$$

biçiminde ifade edilebilir [13].

5. ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ DE LA VALLÈE POUSSIN ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIM

$\boldsymbol{H}$-periyodik ve sürekli $f: \mathbb{R}_H^3 \to \mathbb{C}$ fonksiyonlarının kümesini $C_H(\overline{\Omega})$ ile gösterelim:

$C_H(\overline{\Omega}) \coloneqq \left\{\mathbb{R}_H^3 \xrightarrow{f} \mathbb{C}: f\ H-periyodik\ ve\ sürekli\right\}.$

$C_H(\overline{\Omega})$ bir vektör uzaydır ve

$\|f\|_{C_H(\overline{\Omega})} \coloneqq \sup\left\{|f(\boldsymbol{t})|: \boldsymbol{t} \in \overline{\Omega}\right\}$

normu ile (düzgün norm) bir Banach uzayı olur.

$f \in C_H(\overline{\Omega})$ olsun.

$\omega_f(\delta) \coloneqq \sup\limits_{0<\|\boldsymbol{t}\|\leq\delta} \|f - f(.+\boldsymbol{t})\|_{C_H(\overline{\Omega})}$

biçiminde tanımlanan $\omega_f: [0,\infty) \to [0,\infty)$ fonklsiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir. Süreklilik modülü artan bir fonksiyondur ve $c > 0$ için

$$\omega_f(c\delta) \leq (1+c)\omega_f(\delta) \tag{5.1}$$

olur. [16]

$\lambda = (\lambda_n)$ tamsayıların

$\lambda_1 = 1$

ve

$0 \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 1\ , \quad n \geq 1$

biçiminde bir dizisi olsun.

$f \in C_H(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun $\lambda = (\lambda_n)$ dizisine göre genelleştirilmiş de la Vallée-Poussin ortalamalarının dizisi

$$\mathcal{V}_n^\lambda(f)(\boldsymbol{t}) \coloneqq \frac{1}{\lambda_n + 1} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n} S_k\,(f)(\boldsymbol{t})\,, \qquad n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanır.

$$K_n^\lambda(\boldsymbol{t}) \coloneqq \frac{1}{\lambda_n + 1} \sum_{k=n-\lambda_n}^{n} D_k\,(\boldsymbol{t})$$

olmak üzere $\mathcal{V}_n^\lambda(f)$ ortalamaları için

$$\mathcal{V}_n^\lambda(f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{s}) K_n^\lambda(\boldsymbol{s}) d\boldsymbol{s}$$

integral gösterimi geçerlidir.

A ve B nicelikleri için $A \ll B$ ifadesi $A \leq cB$ biçiminde mutlak bir c sabit sayısının bulunduğu anlamına gelecektir.

Teorem 5.1. $\lambda = (\lambda_n)$ tamsayıların

$\lambda_1 = 1$

ve

$0 \leq \lambda_{n+1} - \lambda_n \leq 1$, $n \geq 1$

biçiminde bir dizisi ve $f \in C_H(\overline{\Omega})$ olsun.

$F \geq 0$ fonksiyonu

$$\int_\delta^1 \frac{\omega_f(u)}{u^2} du \ll F(\delta) \qquad (\delta \to 0^+) \tag{5.2}$$

ve

$$\int_0^\delta F(u) du \ll \delta F(\delta) \qquad (\delta \to 0^+) \tag{5.3}$$

koşullarını sağlıyorsa her n doğal sayısı için

$$\left\|f - \mathcal{V}_n^\lambda(f)\right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \ll \frac{1}{\lambda_n} F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^2 (1 + \log \lambda_n) \tag{5.4}$$

olur.

Bu teoremi ispatlamak için aşağıdaki lemmadan yararlanacağız

Lemma 5.2. [7] $f \in C_H(\overline{\Omega})$ ve F fonksiyonu (5.2) ve (5.3) koşullarını sağlıyor olsun. Bu durumda $\delta \to 0^+$ için

$$\frac{\omega_f(\delta)}{\delta} \ll F(\delta) \tag{5.5}$$

ve

$$\int_0^\delta \frac{\omega_f(u)}{u} du \ll \delta F(\delta) \tag{5.6}$$

olur.

Teorem 5.1. in ispatı: (4.2) denkleminden,

$$K_n^\lambda(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{\lambda_n + 1}\left(\Theta_n(\boldsymbol{t}) - \Theta_{n-(\lambda_n+1)}(\boldsymbol{t})\right)$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer $f \in C_{\boldsymbol{H}}(\overline{\Omega})$ den

$$\left|f(\boldsymbol{t}) - \mathcal{V}_n^\lambda(f)(\boldsymbol{t})\right| \leq \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega |f(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})|\left|K_n^\lambda(\boldsymbol{s})\right| d\boldsymbol{s}$$

$$\ll \frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \omega_f(\|\boldsymbol{s}\|)\left|K_n^{\lambda}(\boldsymbol{s})\right|d\boldsymbol{s} = \frac{1}{\lambda_n+1}\frac{1}{|\Omega|}\int_{\Omega} \omega_f(\|\boldsymbol{s}\|)\left|\Theta_n(\boldsymbol{s}) - \Theta_{n-(\lambda_n+1)}(\boldsymbol{s})\right|d\boldsymbol{s}$$

$\omega_f(\|\boldsymbol{t}\|)\left|\Theta_n(\boldsymbol{t}) - \Theta_{n-(\lambda_n+1)}(\boldsymbol{t})\right|$ fonksiyonu değişkenlerine göre simetriktir ve integrali Ω altıgenini oluşturan altı tane eşkenar üçgenden bir tanesi olur.

$\Delta := \{\mathbf{t} = (t_1, t_2, t_3) \in \mathbb{R}_{\boldsymbol{H}}^3 : -1 \le t_1, t_2, -t_3 < 1\} = \{(t_1, t_2) : t_1 \ge 0, t_2 \ge 0, t_1 + t_2 \le 1\}$

üçgeni üzerinde değerlendirmek yeterlidir. (4.1) formülü kullanarak

$$\Theta_n(\boldsymbol{t}) - \Theta_{n-(\lambda_n+1)}(\boldsymbol{t})$$

$$= \frac{\sin\frac{(n+1)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$-\frac{\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$= \frac{(\sin\frac{(n+1)(t_1-t_2)\pi}{3} - \sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3})\sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$+\frac{(\sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3} - \sin\frac{(n-\lambda_n)(t_2-t_3)\pi}{3})\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$+\frac{(\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3} - \sin\frac{(n-\lambda_n)(t_3-t_1)\pi}{3})\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_2-t_3)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$= \frac{2\cos\left(\frac{2n-\lambda_n+1}{2}\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$+\frac{2\cos\left(\frac{2n-\lambda_n+1}{2}\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

$$+\frac{2\cos\left(\frac{2n-\lambda_n+1}{2}\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_2-t_3)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}$$

elde edilir.

$$I_n^{(1)} := \int_{\Delta} \omega_f(\|\boldsymbol{t}\|)\left|\frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n+1)(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}}\right|d\boldsymbol{t}$$

$$I_n^{(2)} := \int_{\Delta} \omega_f(\|\boldsymbol{t}\|) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n+1)(t_3-t_1)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}} \right| d\boldsymbol{t}$$

$$I_n^{(3)} := \int_{\Delta} \omega_f(\|\boldsymbol{t}\|) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}\right)\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(n-\lambda_n)(t_2-t_3)\pi}{3}}{\sin\frac{(t_1-t_2)\pi}{3}\sin\frac{(t_2-t_3)\pi}{3}\sin\frac{(t_3-t_1)\pi}{3}} \right| d\boldsymbol{t}$$

şeklinde tanımlanır. Böylece

$$\int_{\Delta} \omega_f(\|\boldsymbol{t}\|)\left|\Theta_n(\boldsymbol{t}) - \Theta_{n-(\lambda_n+1)}(\boldsymbol{t})\right| d\boldsymbol{t} \ll I_n^{(1)} + I_n^{(2)} + I_n^{(3)}$$

elde edilir.

$$s_1 := \frac{t_1-t_3}{3} = \frac{2t_1+t_2}{3}\ ,\ s_2 := \frac{t_2-t_3}{3} = \frac{t_1+2t_2}{3} \tag{5.7}$$

dönüşümünü ile

$$I_n^{(1)} := 3\int_{\tilde{\Delta}} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_1-s_2)\pi\right)\sin(n+1)(s_2\pi)\sin(n+1)(s_1\pi)}{\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_2\pi)\sin(s_1\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

$$I_n^{(2)} := 3\int_{\tilde{\Delta}} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_2\pi)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(s_1-s_2)\pi\big)\sin\big((n+1)(s_1\pi)\big)}{\sin(s_2\pi)\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_1\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

$$I_n^{(3)} := 3\int_{\tilde{\Delta}} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_1\pi)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(s_1-s_2)\pi\big)\sin(n-\lambda_n)(s_2\pi)}{\sin(s_1\pi)\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_2\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

$\tilde{\Delta} := \{(s_1,s_2): 0 \le s_1 \le 2s_2, 0 \le s_2 \le 2s_1, s_1+s_2 \le 1\}$

İntegrallenen fonksiyonlar s_1 ve s_2 ‘ye göre simetriktir. Bu nedenle

$\Delta^* := \{(s_1,s_2) \in \tilde{\Delta}: s_1 \le s_2\} = \{(s_1,s_2): s_1 \le s_2 \le 2s_1, s_1+s_2 \le 1\}$

üçgeni üzerinde değerlendirmek yeterlidir.

$$I_n^{(1)} := 6\int_{\Delta^*} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_1-s_2)\pi\right)\sin(n+1)(s_2\pi)\sin(n+1)(s_1\pi)}{\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_2\pi)\sin(s_1\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

$$I_n^{(2)} := 6\int_{\Delta^*} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_2\pi)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(s_1-s_2)\pi\big)\sin\big((n+1)(s_1\pi)\big)}{\sin(s_2\pi)\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_1\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

$$I_n^{(3)} := 6 \int_{\Delta^*} \omega_f(s_1+s_2) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(s_1\pi)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(s_1-s_2)\pi\big)\sin(n-\lambda_n)(s_2\pi)}{\sin(s_1\pi)\sin(s_1-s_2)\pi\sin(s_2\pi)} \right| ds_1 ds_2$$

olur.

$$s_1 := \frac{u_1-u_2}{2}, \ s_2 := \frac{u_1+u_2}{2} \tag{5.8}$$

dönüşümünü yapalım. Bu dönüşüm $\tilde{\Delta}$ üçgenini Δ^* üçgenine dönüştürür.

$$\Gamma := \left\{(u_1,u_2): 0 \le u_2 \le \frac{u_1}{3}, 0 \le u_1 \le 1\right\}$$

$$I_n^{(1)} := 3 \int_{\Gamma} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(u_2)\pi\right)\sin(n+1)\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin(n+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)}{\sin(u_2)\pi\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

$$I_n^{(2)} := 3 \int_{\Gamma} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(u_2)\pi\big)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin(u_2)\pi\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

$$I_n^{(3)} := 3 \int_{\Gamma} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)\sin\big((n-\lambda_n)(u_2)\pi\big)\sin(n-\lambda_n)\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)}{\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\sin(u_2)\pi\sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

Γ üçgenini

$$\Gamma_1 := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma: u_1 \le \frac{1}{2\lambda_n}\right\}$$

$$\Gamma_2 := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma: u_1 \ge \frac{1}{2\lambda_n}, u_2 \le \frac{1}{6\lambda_n}\right\}$$

$$\Gamma_3 := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma: u_1 \ge \frac{1}{2\lambda_n}, u_2 \ge \frac{1}{6\lambda_n}\right\}$$

şeklinde üç parçaya ayıralım. İntegralleri değerlendirirken

$$\left|\frac{\sin nt}{\sin t}\right| \le n, \ n \in \mathbb{N} \tag{5.9}$$

ve

$$\sin t \ge \frac{2}{\pi}t, \ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \tag{5.10}$$

eşitsizliklerinden yararlanacağız.

$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ için $\sin x$ monoton artandır ve böylece

$$0 \le \sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}u_2\pi\right) \le \sin(\lambda_n u_2\pi), \qquad (u_1,u_2) \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \tag{5.11}$$

$$0 \leq \sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\right) \leq \sin(\lambda_n \frac{u_1+u_2}{2}\pi), \ (u_1, u_2) \in \Gamma_1 \tag{5.12}$$

$$0 \leq \sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right) \leq \sin(\lambda_n \frac{u_1-u_2}{2}\pi), \ (u_1, u_2) \in \Gamma_1 \tag{5.13}$$

Ayrıca her $(u_1, u_2) \in \Gamma$ için,

$$u_1 + u_2 \geq u_1 \quad \text{ve} \quad u_1 - u_2 \geq \frac{2}{3}u_1 \tag{5.14}$$

olduğu açıktır.

(5.9) ve (5.10) den,

$$\int_{\Gamma_1} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(u_2)\pi\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin(u_2)\pi \sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

$$\leq \lambda_n (n+1)^2 \int_{\Gamma_1} \omega_f(u_1)\, du_1 du_2 = \lambda_n (n+1)^2 \int_0^{\frac{1}{2\lambda_n}} \int_0^{\frac{u_1}{3}} \omega_f(u_1) du_2 du_1$$

$$= \frac{\lambda_n (n+1)^2}{3} \int_0^{\frac{1}{2\lambda_n}} \omega_f(u_1) u_1\, du_1 \leq \frac{\lambda_n (n+1)^2}{3} \omega_f\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right) \int_0^{\frac{1}{2\lambda_n}} u_1\, du_1$$

$$\ll \frac{n^2}{\lambda_n} \omega_f\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right) \ll \frac{n^2}{\lambda_n} F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)$$

$$\int_{\Gamma_2} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(u_2)\pi\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin(u_2)\pi \sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

$$\ll \lambda_n \int_{\Gamma_2} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2} du_1 du_2 = \lambda_n \int_{\frac{1}{2\lambda_n}}^{1} \int_0^{\frac{1}{6\lambda_n}} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2} du_2 du_1$$

$$\leq \int_{\frac{1}{2\lambda_n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2} du_1 \ll F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)$$

$$\int_{\Gamma_3} \omega_f(u_1) \left| \frac{\sin\left(\frac{1+\lambda_n}{2}(u_2)\pi\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\right)\sin\left((n+1)\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)\right)}{\sin(u_2)\pi \sin\left(\frac{u_1+u_2}{2}\pi\right)\sin\left(\frac{u_1-u_2}{2}\pi\right)} \right| du_1 du_2$$

$$\ll \lambda_n \int\limits_{\Gamma_3} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2 u_2} du_1 du_2 = \int\limits_{\frac{1}{2\lambda_n}}^{1} \int\limits_{\frac{1}{6\lambda_n}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2 u_2} du_2 du_1$$

$$\ll \log \lambda_n \int\limits_{\frac{1}{2\lambda_n}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{{u_1}^2} du_1 \ll \log \lambda_n \, F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)$$

Bu değerlendirmeleri bir araya getirirsek

$$I_n^{(1)} \ll \frac{1}{\lambda_n} F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^2 (1 + \log \lambda_n)$$

elde edilir.

Benzer şekilde $k = 2,3$ için

$$I_n^{(k)} \ll \frac{1}{\lambda_n} F\left(\frac{1}{2\lambda_n}\right)\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^2 (1 + \log \lambda_n)$$

olur.

Teorem 5.1. in klasik Fourier serileri için benzeri P.Chandra tarafından ispatlanmıştır [6].

$0 < \alpha \leq 1$ olsun. Fonksiyonların Lipschitz sınıfı

$$Lip\alpha = \left\{f \in C_H(\overline{\Omega}) \colon \omega_f(\delta) \ll \delta^{\alpha}\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

$f \in Lip\alpha$ ise

$$F(u) \coloneqq \begin{cases} u^{\alpha-1}, & \alpha < 1 \\ \log\left(\dfrac{1}{u}\right), & \alpha = 1 \end{cases}$$

fonksiyonu (5.2) ve (5.3) koşullarını sağlar. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 5.3.

$f \in Lip\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ ise

$$\left\|f - \mathcal{V}_n^{\lambda}(f)\right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \ll \begin{cases} \frac{1}{{\lambda_n}^{\alpha}}\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^2 (1 + \log \lambda_n), & \alpha < 1 \\ \frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{n}{\lambda_n}\right)^2 (1 + \log \lambda_n)^2, & \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

6. ALTIGENSEL FOURIER SERİLERİNİN GENELLEŞTİRİLMİŞ NÖRLUND ORTALAMALARI İLE YAKLAŞIM

$p = (p_n)$ ve $q = (q_n)$ pozitif terimli ve azalmayan iki dizi olsunlar. $f \in C_H(\overline{\Omega})$ fonksiyonunun altıgensel Fourier serisinin genelleştirilmiş Nörlund ortalaması

$$R_n^* := \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}$$

olmak üzere

$$N_n^{p,q}(f)(\boldsymbol{t}) := \frac{1}{R_n^*} \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k}\, S_k(f)(\boldsymbol{t}), \qquad n \in \mathbb{N}$$

biçiminde tanımlanır. $N_n^{p,q}(f)$ ortalamaları için

$$N_n^{p,q}(f)(\boldsymbol{t}) = \frac{1}{R_n^*} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s}) \left(\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k(\boldsymbol{s}) \right) d\boldsymbol{s}$$

integral gösterimi geçerlidir.

Teorem 6.1. $f \in C_{\boldsymbol{H}}(\overline{\Omega})$ ve $F \geq 0$ olsun.

$$\int_{\delta}^{1} \frac{\omega_f(u)}{u^2} du \ll F(\delta) \qquad (\delta \to 0^+) \tag{6.1}$$

ve

$$\int_{0}^{\delta} F(u)du \ll \delta F(\delta) \qquad (\delta \to 0^+) \tag{6.2}$$

ise her n doğal sayısı için

$$\left\| f - N_n^{p,q}(f) \right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*} \right) \log(n+1) \tag{6.3}$$

olur.

İspat:

$$\left| f(\boldsymbol{t}) - N_n^{p,q}(f)(\boldsymbol{t}) \right| \leq \frac{1}{R_n^*} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} |f(\boldsymbol{t}) - f(\boldsymbol{t}-\boldsymbol{s})| \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k(\boldsymbol{s}) \right| d\boldsymbol{s}$$

$$\ll \frac{1}{R_n^*} \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \omega_f(\|\boldsymbol{s}\|) \left| \sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k(\boldsymbol{s}) \right| d\boldsymbol{s}.$$

Toerem 5.1. ispatında olduğu gibi bu integrali de Δ üçgeni üzerinde değerlendirmek yeterlidir. (5.7) ve (5.8) değişken dönüşümleri kullanılarak

$$\int_{\Delta} \omega_f(\|\boldsymbol{t}\|)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k(\boldsymbol{t})\right| d\boldsymbol{t} = \int_{\Gamma} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

olduğu görülür. Γ üçgenini

$$\Gamma_1' := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \leq \frac{p_n q_n}{R_n^*(n+1)}\right\}$$

$$\Gamma_1'' := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \geq \frac{p_n q_n}{R_n^*(n+1)}, u_2 \leq \frac{p_n q_n}{3R_n^*(n+1)}\right\}$$

$$\Gamma_1''' := \left\{(u_1,u_2) \in \Gamma_1 : u_1 \geq \frac{p_n q_n}{R_n^*(n+1)}, u_2 \geq \frac{p_n q_n}{3R_n^*(n+1)}\right\}$$

üç bölgeye ayıralım. Böylece

$$I_{n,j}^* := \int_{\Gamma_j} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2\,, \qquad (j = 1,2,3)$$

olmak üzere

$$I_n^* := \int_{\Gamma} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2 = I_{n,1}^* + I_{n,2}^* + I_{n,3}^*$$

olur.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_1'$ için

$\left|D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \ll (k+1)^2, \ (j = 1,2,3)$

elde edilir.

$$\int_{\Gamma_1'} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll (n+1)^2 \int_0^{\frac{1}{3(n+1)}} \int_0^{\frac{u_1}{3}} \omega_f(u_1)\, du_1 du_2 \leq \omega_f\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right)$$

elde edilir.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_1''$ için

$$\left|D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{1}{u_1^2}$$

ve

$$\left|D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{k}{u_1}, \qquad (j=2,3)$$

olur.

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \int_{\frac{1}{(n+1)}}^{\frac{p_n q_n}{R_n^*}} \int_{0}^{\frac{1}{3(n+1)}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_2 du_1 \leq \omega_f(\frac{p_n q_n}{R_n^*})\log(n+1)$$

ve

$$\int_{\Gamma_1''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll n \int_{\frac{1}{(n+1)}}^{\frac{p_n q_n}{R_n^*}} \int_{0}^{\frac{1}{3(n+1)}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_2 du_1 \leq \omega_f\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right)\log(n+1), \qquad (j=2,3)$$

elde edilir.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_1'''$ için

$$\left|D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{1}{u_1^2}$$

ve

$$\left|D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{1}{u_1 u_2}, (j=2,3)$$

olur.

$$\int_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \int_{\frac{1}{(n+1)}}^{\frac{p_n q_n}{R_n^*}} \int_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_2 du_1 \leq \omega_f(\frac{p_n q_n}{R_n^*})\log(n+1)$$

ve

$$\int\limits_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \int\limits_{\frac{1}{(n+1)}}^{\frac{p_n q_n}{R_n^*}} \int\limits_{\frac{1}{3(n+1)}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1 u_2} du_2 du_1 \le \log(n+1) \int\limits_{\frac{1}{(n+1)}}^{\frac{p_n q_n}{R_n^*}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_1, \qquad (j=2,3)$$

(5.2) den

$$\int\limits_{\Gamma_1'''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(n+1)\,, \qquad (j=2,3)$$

elde edilir. Böylece

$$I_{n,1}^* \ll \log(n+1)\left(\omega_f\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) + \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right)\right)$$

olur. (5.5) dan

$$I_{n,1}^* \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(n+1)$$

elde edilir.

$(u_1,u_2) \in \Gamma_2'$ için

$$\left|D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{1}{u_1^2}$$

ve

$$\left|D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| \ll \frac{k}{u_1}, \qquad (j=2,3)$$

olur. (6.1) den

$$\int\limits_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,1}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \int\limits_{\frac{p_n q_n}{R_n^*}}^{1} \int\limits_{0}^{\frac{p_n q_n}{3(n+1)R_n^*}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_2 du_1 \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right)$$

Elde edilir. Diğer taraftan (5.1) eşitsizliğinden

$$\frac{\omega_f(\delta_2)}{\delta_2} \le 2\frac{\omega_f(\delta_1)}{\delta_1}, \qquad (\delta_1 < \delta_2)$$

elde edilir. Bu eşitsizlik ve (5.5) dan

$$\int\limits_{\Gamma_2'} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll n \int\limits_{\frac{p_n q_n}{R_n^*}}^{1} \int\limits_{0}^{\frac{p_n q_n}{3(n+1)R_n^*}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1} du_2 du_1 \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right), \qquad (j = 2,3)$$

elde edilir.

(6.1) den

$$\int\limits_{\Gamma_2''} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_{k,j}^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} \int\limits_{\frac{p_n q_n}{R_n^*}}^{1} \int\limits_{\frac{p_n q_n}{3(n+1)R_n^*}}^{\frac{p_n q_n}{3R_n^*}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2 u_2} du_2 du_1 \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \int\limits_{\frac{p_n q_n}{3(n+1)R_n^*}}^{\frac{p_n q_n}{3R_n^*}} \frac{1}{u_2} du_2$$

$$\ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(\mathrm{n}+1)$$

elde edilir. Böylece

$$I_{n,2}^* \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(n+1)$$

olarak elde edilir.

Benzer şekilde (6.1) den

$$I_{n,3}^* = \int\limits_{\Gamma_3} \omega_f(u_1)\left|\sum_{k=0}^{n} p_k q_{n-k} D_k^*(u_1,u_2)\right| du_1 du_2$$

$$\ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} \int\limits_{\frac{p_n q_n}{R_n^*}}^{1} \int\limits_{\frac{p_n q_n}{3R_n^*}}^{\frac{u_1}{3}} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2 u_2} du_2 du_1 \le \frac{p_n q_n}{R_n^*} \log(n+1) \int\limits_{\frac{p_n q_n}{R_n^*}}^{1} \frac{\omega_f(u_1)}{u_1^2} du_1$$

$$\ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(n+1)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$I_n^* \ll \frac{p_n q_n}{R_n^*} F\left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right) \log(n+1)$$

olur.

Sonuç 6.2.

$f \in Lip\alpha$ $(0 < \alpha \leq 1)$ ise

$$\left\| f - N_n^{p,q} \right\|_{C_H(\overline{\Omega})} \ll \begin{cases} \left(\frac{p_n q_n}{R_n^*}\right)^{\alpha} \log(\mathrm{n}+1), & \alpha < 1 \\ \frac{p_n q_n}{R_n^*} (\log(n+1))^2, & \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

Teorem 6.1. in klasik Fourier serileri için benzeri T. Singh tarafından ispatlanmıştır [23].

7. KAYNAKLAR

[1] R. A. DeVore and G. G. Lorentz, Constructive Approximation, Springer, (1993).

[2] A. F. Timan, “Theory of approximation of functions of a real variable”, *Pergamon Press,* (1963).

[3] L. Leindler, “On sumability of Fourier series”, *Acta Sci. Math. Szeged,* vol.29, pp. 147-162, (1968).

[4] L.Leindler, “Generalizations of Prössdorf’s theorems”, *Studia Sci .Math. Hungarica,* vol.14, pp. 431-439, (1979).

[5] P. Chandra, “On the generalized Fejer means in the metric of Hölder space”, *Math. Nachr.* vol.109, pp. 39-45, (1982).

[6] P. Chandra, “Degree of approximation by generalized de la Vallèe-Poussin operators”, *Indian Journal of Mathematics,* (1987).

[7] P. Chandra, “A note on the degree of approximation of contınuous functions”, *Acta Math. Hung.* vol.62, pp. 21-23, (1993).

[8] S.Prössdorf, “Zur konvergent der fourierreihen hölderstetiger funktionen”, *Math. Nachr.* vol.69, pp. 7-14, (1975).

[9] F. Moricz, B.E. Rhoades, “Approximation by Nörlund means of double Fourier series to continuous functions in two variables”, *Constr. Approx.* vol.3, pp. 281-296, (1987).

[10] F. Moricz, B.E. Rhoades, “Approximation by Nörlund means of double Fourier series for Lipschitz functions”, *Journal of Approx. Theory*. vol.50, pp. 341-358, (1987).

[11] F. Moricz, X. Shi, “Approximation to contınuous functions by Cesaro means of Double Fourier series and conjugate series”, *Journal of Approx. Theory*. vol.49, pp. 346-377, (1987).

[12] H. Li, J. Sun and Y. Xu“Discrete Fourier analysis, cubature and interpolation on a hexagon and a triangle”, *SIAM J. Numer. Anal.* vol.46, pp. 1653-1681, (2008).

[13] Y. Xu, “Fourier series and approximation on hexagonal and triangular domains”,*Constr. Approx.*, vol.31, pp. 115-138, (2010).

[14] A. Guven, “Approximation by $(C, 1)$ and Abel-Poussin means of Fourier series on hexagonal domains”, *Math. Inequal. Appl.,* vol.16, pp. 175-191, (2013).

[15] A. Guven, “Approximation of continuous functions by de la Vallèe-Poussin means of Fourier series on hexagonal domains”, *Jaen J. Approx.,* vol.5, pp. 61-80, (2013).

[16] A. Guven, “Approximation of continuous functions by matrix means of Fourier series”, *Result In. Math.*, vol.73, pp. 4-25, (2018).

[17] A. Guven, “Approximation by Nörlund Means of Hexagonal Fourier Series”, *Anal. Theory Appl.*, vol.33, pp. 384-400, (2017).

[18] A. Guven, “An analogue of Leindler’s theorem for hexagonal Fourier Series”, *Analysis,* vol.34, pp. 283-297, (2014).

[19] W. Rudin, “Real and Complex Analysis”, *Mc Graw-Hill Book Co.,*New York, (1987).

[20] A. Zygmund, “Trigonometric Series”, vol. I-II, 2nd edn. Cambridge University.

[21] B. Fuglede, “Commuting self-adjoint partial differential operators and a group theoretic problem, *J. Funct. Anal.*, vol.16, pp. 101-121, (1974).

[22] T. Singh, “Degree of approximation to functions in the Banach space”, *Math. Student* vol.59, pp. 219-227, (1991).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı :Batuhan KOCAMAN

Doğum tarihi ve yeri : 11/04/1995, Biga/ÇANAKKALE

e-posta :batuhankcmn1@outlook.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2019
Lise	Savaştepe Anadolu Öğretmen Lisesi	2013