T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

CÜNEYT DUMAN

BALIKESİR, OCAK - 2023

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARI İLE İLGİLİ BAZI SONUÇLAR

CÜNEYT DUMAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Prof. Dr. Recep ŞAHİN (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN

BALIKESİR, OCAK - 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Genelleştirilmiş ve Genişletilmiş Hecke Grupları İle İlgili Bazı Sonuçlar**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Cüneyt DUMAN

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ VE GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUPLARINDA BAZI SONUÇLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
CÜNEYT DUMAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR.RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, OCAK - 2023

Tez çalışmamızda genelleştirilmiş ve genelleştirilmiş genişletilmiş Hecke grupları incelenmiştir. Çalışmamız beş bölümden oluşmuştur.
Tezin birinci kısmında genelleştirilmiş ve genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları açıklanmıştır.
Tezin ikinci kısmında tezde kullanılan tanımlara, teoremlere, kavramlara, açıklamalara yer verilmiştir.
Tezin üçüncü kısmında, genelleştirilmiş ve genişletilmiş Hecke gruplarındaki sonlu dereceli elemanların eşlenik sınıflarını içeren bir teorem bulunmuş ve bu eşlenik sınıfların temsilcileri örneklerle incelenmiştir.
Tezin dördüncü kısmında genelleştirilmiş Hecke gruplarının cinsi sıfır olan normal alt grupları incelenmiş ve örnekler verilmiştir.
Tezin beşinci kısmında, bulunan sonuçlara yer verilmiş ve yapılacak çalışmalara yönelik önerilerde bulunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Genelleştirilmiş Hecke grup, genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grup, eşlenik sınıfı, sıfır cinsli alt gruplar

Bilim Kod / Kodları :20401 Sayfa Sayısı : 38

ABSTRACT

SOME RESULTS RELATED WITH THE GENERALIZED AND THE EXTENDED HECKE GROUPS
MSC THESIS
CÜNEYT DUMAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF.DR.RECEP ŞAHİN)

BALIKESİR, JANUARY - 2023

In our thesis, generalized and generalized extended Hecke groups were examined. Our work consists of five parts.
In the first part of the thesis, generalized and extended generalized Hecke groups are explained.
In the second part of the thesis, the definitions, theorems, concepts and explanations used in the thesis are given.
In the third part of the thesis, a theorem containing the conjugate classes of the finite order elements in the generalized and extended Hecke groups was found and the representatives of these conjugate classes were examined with examples.
In the fourth part of the thesis, the normal subgroups of generalized Hecke groups with zero genus are examined and examples are given.
In the fifth part of the thesis, the results are given and suggestions are made for the studies to be done.

KEYWORDS: Generalized Hecke group, extended generalized Hecke group, conjugate class, subgroups of genus zero

Science Code / Codes :20401 Page Number : 38

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\mathbf{Z}$	: Tamsayılar Kümesi
$\mathbf{Z_q}$	: q Mertebeli Devirli Grup
$\mathbf{C}$	: Karmaşık Sayılar Kümesi
C_∞	: Genişletilmiş Karmaşık Sayılar Kümesi
$\mathbf{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbf{Aut}(\mathbf{C}_\infty)$	: Genişletilmiş Karmaşık Sayılar Kümesinin Otomorfizmaları
$\mathbf{GL}(\mathbf{2},\mathbf{C})$	: Karmaşık Sayılar Üzerinde Genel Lineer Grup
$\mathbf{PSL}(\mathbf{2},\mathbf{C})$	: Karmaşık Sayılar Üzerinde Projektif Özel Lineer Grup
$[\mathbf{H}:\mathbf{K}]$	: K alt grubunun H Grubu İçindeki İndeksi
$\mathbf{C_n}$	: Devirli Grup
$\mathbf{D_n}$	: Dihedral Grup
$\mathbf{S_n}$	: Simetrik Grup
$\mathbf{A_n}$	: Alterne Grup
C x D	: Direkt Çarpım Grubu
$\mathbf{C} * \mathbf{D}$	: Serbest Çarpım Grubu
$\mathbf{C} *_{\mathbf{E}} \mathbf{D}$	: Birleştirilmiş Serbest Çarpım Grubu
g'	: Bir Grubun Cinsi
$(\mathbf{p},\mathbf{q},\mathbf{r})$	: Üçgen grup

ÖNSÖZ

Üniversite hayatım boyunca ve çalışmamda desteklerini benden esirgemeyen ve her zaman yanımda olan kıymetli danışmanım sevgili hocam Prof.Dr.Recep Şahin'e,
Yüksek lisans başlama aşamasında bana bir ilham verip yol gösteren Prof.Dr.Özden KORUOĞLU hocama,
Yüksek Lisans boyunca derslerinden ve çalışmalarından faydalandığım Prof.Dr.Sebahattin İKİKARDEŞ hocama,
Yüksek lisans eğitimim boyunca beni TÜBİTAK 2211 Yurtiçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında destekleyen TÜBİTAK'a.
Çalışmam boyunca bana büyük sabır ve fedakarlık gösteren ,hayat arkadaşım aynı zamanda meslektaşım olan eşim Berna ŞAHİN DUMAN'a ve değerli aileme
teşekkür etmeyi kendime bir borç bilirim.

Balıkesir, 2023 **Cüneyt DUMAN**

1. GİRİŞ

Bu bölümde çalışmamın içerisinde yer alan bölümler tanıtılacaktır.

Hecke grupları Eric Hecke'nin [1] nolu çalışması ile literatüre kazandırılmıştır. λ pozitif bir sabit sayı olmak koşuluyla;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümleri kullanılarak Hecke grupları elde edilmiştir.

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\left(\frac{\pi}{q}\right)$$

eşitliği $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ olması halinde Hecke Grubunun Fuchsian olduğu gösterilmiştir. [1] Bu gruplar hakkında Cangül , Şahin, Koruoğlu, Yılmaz, Bizim, İkikardeş'in çalışmaları mevcuttur. [2-5]

p ve q tamsayı olmak üzere $2 \leq p \leq q$, $p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ koşulları altında

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p} \; ve \; V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

dönüşümleri yardımıyla Genel Hecke Grupları elde edilmiştir. Bu gruplar [6] nolu çalışmada Lehner ve Newman tarafından incelenmiştir. $H_{p,q}$ şeklinde gösterilen Genel Hecke Gruplarında $Y(z) = X(z).V(z)$ dönüşümü uygulanırsa bu grupların sunuşları;

$$H_{p,q} =< X, Y \mid X^p = Y^q = I > \cong Z_p * Z_q$$

şeklinde oluşur. Bu Genel Hecke Grupları [7] nolu çalışmada Demir tarafından incelenmiştir.

Huang [8] nolu çalışmada Genelleştirilmiş Hecke gruplarını tanıtmış ve bu grupları $\mathrm{H}_{(p_1,p_2,\ \dots\ ,p_n)}$ şeklinde göstermiştir. Bu gruplarla ilgili çalışmalara [8-9] nolu çalışmalarda ulaşılabilir.

Hecke gruplarına;

$$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

antiotomorfizmasının eklenmesiyle genişletilmiş Hecke grupları oluşturulmuştur. Bu grupları Bizim ve Şahin [10] nolu çalışmasında tanıtmıştır.
Genelleştirilmiş Hecke gruplarına da;

$$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

antiotomorfizmasının eklenmesiyle de genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grupları oluşmuştur.[8]

Tezin ikinci bölümünde bu çalışmada bahsedilen kavramlara, teoremlere ve açıklamalara yer verilmiştir.

Tezin üçüncü kısmında genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke gruplarında sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları incelenmiştir.

Tezin dördüncü bmlümünde genelleştirilmiş Hecke gruplarının sıfır cinsli normal altgrupları incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde ise bulunan sonuçlar özetlenmiş ve daha sonra yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

Tez çalışmamızın içerisinde yardımcı olacak tanımlar, teoremler ve açıklamalar bu bölümde anlatılacaktır.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Tanım 2.1.1: Bir z kompleks değişkeni için $m, n, k, t, \in \mathbb{C}$, $mt - kn \neq 0$ koşulları altında bir Möbiüs Dönüşümü ;

$$f(z) = \frac{mz + n}{kz + t} \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır. Bu dönüşümün kümesi $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ şeklinde gösterime sahiptir.[11]

Teorem 2.1.1 : Möbiüs Dönüşümler kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup belirtir.[11]

Tanım 2.1.2: $m, n, k, t, \in \mathbb{C}$, $\Delta = mt - kn \neq 0$ koşulları altında $\begin{pmatrix} m & n \\ k & t \end{pmatrix}$ şeklindeki 2x2 matrislerinin kümesine $\mathbb{C}$ üzerinde genel lineer grup denir ve $GL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.[11]

Tanım 2.1.3: Möbiüs dönüşümlerinin bir alt grubu olan gerçek sayılar üzerinde tanımlı projektif özel lineer grup ;

$$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ \frac{mz + n}{kz + t} \ \mid \ m, n, k, t \in \mathbb{R}, \ mt - kn = 1 \right\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.4: Gerçek katsayılı antiotomorfizmalardan oluşan küme de

$$G^* = \left\{ \frac{m\bar{z} + n}{k\bar{z} + t} \ \mid \ m, n, k, t \in \mathbb{R}, \ mt - kn = -1 \right\}$$

şeklinde ifade edilebilir. [12]

Teorem 2.1.2: $\vartheta : GL(2,\mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}_\infty)$ olacak şekilde

$$\begin{pmatrix} m & n \\ k & t \end{pmatrix} \to \frac{mz+n}{kz+t}$$

Bir epimorfizma dönüşümü tanımlanabilir.[7]

Teorem 2.1.2: $Aut(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C})$ yazılabilir.

Teorem 2.1.2: $G = PSL(2,\mathbb{C}) \cup G^*$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemi altında bir gruptur. [12]

2.2 Fuchsian Grubu

Tanım 2.2.1: $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun her bir ayrık alt grubu Fuchsian gruptur.

Tanım 2.2.1: Bir Fuchsian grubunun ;

Hiperbolik üreteçlerini	$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$
Eliptik üreteçlerini	$x_1, x_2, \dots, x_r$
Parabolik üreteçlerini	$p_1, p_2, \dots, p_t$
Hiperbolik sınır elemanlarını	$h_1, h_2, \dots, h_u$

üreteçleri yukarıdakiler gibi verildiğinde bu üreteçler için;

$$x_j{}^{m_j} = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1 \tag{2.2}$$

bağıntıları sağlanıyorsa bu Γ Fuchsian grubunun simgesi

$$(g; m_1, m_2, \dots, m_r; t; u)$$

olarak gösterilir.[13]

Lemma 2.1.1: Bir Fuchsian grubun her alt grubuda bir Fuchsian gruptur.

2.3 Riemann – Hurwitz Formülü

Tanım 2.3.1: $(g; m_1, m_2, \dots, m_r; t; u)$ simgesine sahip bir Γ Fuchsian grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanı $2\pi\mu(\Gamma)$ olarak verilsin. Bu durumda

$$\mu(\Gamma) = 2\mathrm{g} - 2 + \sum_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u \tag{2.3}$$

eşitliği yazılır. Buradan Γ Fuchsian grubunun cinsini veren g sayısı hesaplanabilir.

Γ_λ , Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olarak verilsin. Bu durumda

$$\left|{}^{\Gamma}/_{\Gamma_\lambda}\right| = \frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_\lambda)} \tag{2.4}$$

eşitliği yazılabilir ve bu eşitliğe Riemann – Hurwitz Formülü denir.[9]

2.4 Hecke Grubu

Eric Hecke 1936 yılında [1] numaralı çalışmasında Hecke gruplarını tanıtmıştır.

Tanım 2.4.1 : Sabit ve pozitif bir λ reel sayısı için ;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + \lambda$$

lineer dönüşümlerle oluşan bu gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir. Bu üreteçler sayesinde

$$(ToU)(z) = S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümüne ulaşılabilir.

Burada T üreteci 2 mertebeli eliptik bir elemandır. Eğer $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ alınırsa S üreteci de q mertebeli eliptik bir eleman olur.

Teorem 2.4.1: $\lambda \geq 2$ bir reel sayı veya q, 2 den büyük bir tam sayı olmak üzere ;

$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ biçiminde tanımlandığında $H(\lambda)$ bir Fuchsian grup olur.

Teorem 2.4.2 : $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu ;

$$H(\lambda_q) =< T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong Z_2 * Z_q$$

biçimindedir.

Açıkca görüldüğü gibi bu grup mertebesi 2 ve mertebesi q olan iki sonlu devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Bu grubun simgesi $(0; 2, q, \infty)$ ‘ dur.

Teorem 2.4.2 : [3] $\lambda \geq 2$ reel sayısı için $H(\lambda)$ Hecke grubunun sunuşu ;

$$H(\lambda) =< T, S \mid T^2 = S^\infty = I > \cong Z_2 \, x \, Z$$

biçimindedir.[2]

Açıkca görüldüğü gibi bu grup mertebesi 2 ve mertebesi sonsuz iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Bu grubun simgesi $(0; 2, \infty, \infty)$ ‘ dur.

2.5 Genişletilmiş Hecke Grubu

Tanım 2.5.1 : [14] $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ üretecinin Hecke gruplarına eklenmesiyle elde edilen bu gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir ve λ saysının aldığı değerlere göre $\overline{H}(\lambda)$ veya $\overline{H}(\lambda_q)$ ile gösterilir.

R dönüşümü ile T ve S üreteçleri arasında bağıntılar incelenirse;

$$TR = RT$$

ve

$$SR = RS^{q-1}$$

bağıntıları bulunur.

Teoremi 2.5.2 : : $\overline{H}(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu ;

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I > \cong D_2 *_{Z_2} D_q$$

biçimindedir.

Açıkca görüldüğü gibi bu grup mertebesi 2 ve mertebesi q olan iki dihedral devirli grubun mertebesi 2 olan devirli grup altındaki birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.

Teoremi 2.5.2 : : $\overline{H}(\lambda)$ Hecke grubu ;

$$H(\lambda) =< T, S, R \mid T^2 = S^\infty = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I > \cong D_2 *_{Z_2} D_\infty$$

biçimindedir.

Açıkca görüldüğü gibi bu grup mertebesi 2 ve mertebesi sonsuz olan iki dihedral devirli grubun mertebesi 2 olan devirli grup altındaki birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.

2.6 Genel Hecke Grubu

Lehner ve Newman tarafından 1965 yılında Genel Hecke grupları literatüre katılmıştır.[14]

Tanım 2.6.1 : $2 \leq p \leq q$, $p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ koşullarını sağlayan p ve q tam sayıları için;

$$X(z) = -\frac{1}{z - \lambda_p} \qquad ve \qquad V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q \tag{2.5}$$

dönüşümleri ile elde edilen gruplara Genel Hecke grupları denir ve $H_{p,q}$ şeklimde gösterilir.

Genel Hecke gruplarında $X(z)$ ve $V(z)$ üreteçleri arasında

$$Y(z) = XV(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

dönüşü elde edilir.

Teorem 2.6.1 : $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p + q > 4$ koşullarını sağlayan p ve q tam sayıları için Genel Hecke gruplarının sunuşu;

$$H_{p,q} =< X, Y \mid X^p = Y^q = I > \cong Z_p \; x \; Z_q$$

şeklindedir. Bu grupların simgesi de $(0; p, q, \infty)$ şeklinde gösterilir.

Burada görüldüğü gibi $H_{p,q}$ grubu mertebesi p ve q olan iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

2.7 Genişletilmiş Genel Hecke Grubu

Tanım 2.7.1 : $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti otomorfizmasının Gene Hecke gruplarına eklenmesiyle oluşan bu yeni gruplara genişletilmiş genel Hecke grupları denir ve $\overline{H}_{p,q}$ şeklimde gösterilir.

Teorem 2.7.1 : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,q} =< X,Y,R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I > \cong D_p *_{Z_2} D_q$$

Açıkca görüldüğü gibi bu grup mertebesi p ve mertebesi q iki dihedral devirli grubun mertebesi 2 olan devirli grup altında birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.[7]

2.8 Genelleştirilmiş Hecke Grubu

Tanım 2.8.1 : $p_1, p_2, \ \dots \ , p_n$ birer tamsayı ve $\forall \ p_t \geq 2$ koşulu altında $n \geq 2$ olsun.

$\lambda_t = 2\cos\left(\frac{\pi}{p_t}\right)$, $p_t \geq 2$ koşulları altında ;

$$X_i(z) = -\frac{1}{z+\lambda_i} \qquad ve \qquad X_j(z) = -\frac{1}{z-\lambda_j} \tag{2.6}$$

dönüşümleri ile genelleştirilmiş Hecke grupları oluşturulur. Bu genelleştirilmiş Hecke grupları $H_{(p_1,p_2, \ \dots \ ,p_n)}$ ile gösterilir. [18]

2.9 Permütasyon Metodu

Singerman permütasyon metodu ile ilgili çalışmalarını [13] nolu çalışmasında tanıtarak bu yöntem sayesinde bir Fuchsian grubunda indeksi sonlu olan normal alt grupların simgelerinin bulunabileceğini açıklamıştır.

Teorem 2.9.1: Bir Γ Fuchsian grubunun simgesi $(g; m_1, m_2, \dots \ , m_r; t; u)$ olmak üzere Γ grubunun N indeksli ve

$$\left(g';\ n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1p_1}, \dots, n_{r1}, n_{r2}, \dots, n_{rp_r}; s'; t'\right)$$

simgesine sahip bir Γ_1 alt grup olabilmesi için gerekli ve yeterli şart aşağıdaki şartların gerçekleşmesidir.

1) Γ grubundan N nokta üzerinde geçişli bir permütasyon grubu olan G grubuna tanımlı $\theta: \Gamma \to G$ epimorfizması aşağıda verilen koşulları sağlar.

a) $\theta(x_i)$ permütasyon, uzunluğu m_j ‘den kısa verilen p_j devirden oluşur. Ayrıca bu devirlerin uzunluğu ;

$$\frac{m_j}{n_{j_1}}, \frac{m_j}{n_{j_2}}, \dots, \frac{m_j}{n_{j p_j}}$$

şeklinde olur.

b) $\theta(\psi)$ permütasyonundaki devirlerin sayısı $\delta(\psi)$ olmak üzere;

$$\boldsymbol{s}' = \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{s} \delta(p_k) \quad ; \quad t' = \sum_{k=1}^{t} h_1$$

eşitlikleri yazılır.

2) $2\pi\mu(\Gamma)$ hiperbolik alan olmak şartıyla ;

$$\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)} = N$$

eşitliği yazılır. [13]

2.9.1 Sonuç : Γ ; $(g; m_1, m_2, \dots, m_k)$ simgeli bir Fuschsian grup olsun ve Γ_1 , Γ ‘ nın N indeksli bir normal alt grubu olarak verilsin. x_h $(h = 1,2, \dots, k)$ üreteçlerinin bölüm grubunda oluşan mertebe değerleri d_h olmak üzere Γ_1 grubu;

$$\left(g'; \left(\frac{m_1}{d_1}\right)^{N/d_1}, \left(\frac{m_2}{d_2}\right)^{N/d_2}, \dots, \left(\frac{m_k}{d_k}\right)^{N/d_k} \right)$$

biçimde simgeye sahiptir.

Buradaki g' sayısı Riemann-Hurwitz formülü ile hesaplanır.

2.10 Çarpım Grupları

C ve D iki grup olmak üzere direkt çarpım $C\ x\ D$ ile gösterilir.

Teorem 2.10.1: C ve D gruplarının sunuşları;

$$C = \{\ X_1|M_1\} \text{ ve } D = \{\ X_2|M_2\}$$

şeklinde verilsin. Bu iki grubun direkt çarpımı olan grup sunuş gösterimi;

$$C\ x\ D = \{X_1\ , X_2\ |M_1\ , M_2\ , M_3\}$$

şeklindedir. Burada $M_3 = \{cdc^{-1}d^{-1} : c \in\ X_1\ ve\ d \in\ X_2\}$ şeklinde tanımlanır.[15]

Teorem 2.10.2: : C ve D gruplarının sunuşları;

$$C = \{\ X_1|M_1\} \text{ ve } D = \{\ X_2|M_2\}$$

şeklinde verilsin. Bu iki grubun serbest çarpımı olan grup sunuş gösterimi;

$$C *\ D = \{X_1\ , X_2\ |M_1\ , M_2\ \}$$

şeklindedir. [15]

C ve D iki grup olmak üzere $E \leq D$ alt grubu verilsin. $\theta : E \to D$ monomorfizması tanımlansın.

Teorem 2.10.3: C ve D gruplarının sunuşları;

$$C = \{\ X_1|M_1\} \text{ ve } D = \{\ X_2|M_2\}$$

şeklinde verilsin. C ve D gruplarının E alt grubu yardımıyla tanımlanan birleştirilmiş serbest çarpım grubu $C\ *_e D$ ile gösterilir. Bu çarpım;

$$C\ *_e D = \ \{X_1\ , X_2\ |M_1\ , M_2\ , M_3\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada yer alan M_3 kümesi de ;

$$M_3 = \{\ \theta(x)x^{-1}\ |x, E\ altgrubunun\ \text{ü}reteci\}$$

biçiminde tanımlanır. [15-16]

2.11. Sonlu Mertebeli Üçgen Grupları

Teorem.2.11.1 : (p, q, r) bir üçgen grup olmak üzere ;

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}+\frac{1}{r}>1$$

koşulunu sağlayan gruplar sonlu mertebeli gruplardır.[17]

Bu bölümde çalışmamızın bir bölümünde geçecek olan bazı sonlu üçgen grupları tanıtılacak ve grup sunuşları verilecektir.

a) C_n Devirli Gruplar

Sonlu mertebeli olan ve bir tek eleman ile üretilen bu gruplar $\boldsymbol{C_n}$ ile gösterilir. Bu gruplar;

$$C_n =< a|\, a^n = I >$$

biçiminde grup sunuşlarına sahiptir.

Devirli grupların üçgen gösterimleri $n \in N$ için;

$$(1, n, n), (n, 1, n), (n, n, 1)$$

biçimine sahiptir.

b) D_n Dihedral Gruplar

Mertebesi 2 olan ve mertebesi n olan iki eleman tarafından üretilen bu sonlu üçgen grupları D_n ile gösterilir. Dihedrall gruplar düzgün n- genlerin simetri gruplarıdır. Bu grupların sunuşları ;

$$D_n =< a, b|\, a^n = b^2 = (ab)^2 = I > \cong (n,2,2)$$

$$D_n =< a, b|\, a^2 = b^n = (ab)^2 = I > \cong (2, n, 2)$$

$$D_n =< a, b|\, a^2 = b^2 = (ab)^n = I > \cong (2,2, n)$$

şeklindedir. D_n gruplarının mertebesi $2n$ ‘ dir.

c) Simetrik ve Alterne Gruplar

Sonlu ve eleman sayısı n olan bir kümenin tüm permütasyonlarını içeren küme fonksiyonların bileşke işlemi altında bir grup belirtir. Bu grup simetrik grup olarak isimlendirilir. Simetrik gruplar S_n şeklinde gösterime sahip olup mertebeleri $n!$ ‘ dir.

Çift permütasyonların kümesi de kendi içlerinde bir grup oluştururlar ve bu gruplara da alterne grup denir. Alterne gruplar A_n ile gösterilir ve mertebeleri $\frac{n!}{2}$ ‘dir.

Şimdi de çalışmamızda yer alan bazı simetrik ve alterne grupların sunuşlarını verelim.

$$A_4 =< x, y|\ x^2 = y^3 = (xy)^3 = I > \cong (2,3,3) \cong (3,2,3) \cong (3,3,2)$$

$S_4 =< x, y|\ x^3 = y^2 = (xy)^3 = I > \cong (3,2,4) \cong (2,3,4) \cong (4,3,2) \cong (2,4,3) \cong$ $(4,2,3) \cong (3,4,2)$

$A_5 =< x, y|\ x^3 = y^2 = (xy)^5 = I > \cong (3,2,5) \cong (3,5,2) \cong (2,5,3) \cong (2,3,5) \cong (5,2,3)$

$\cong (5,3,2)$

Hecke gruplarının üçgen gösterimi $(2, q, \infty)$ iken genel hecke gruplarının gösterimi ise (p, q, ∞) şeklindedir.

2.12. Konjuge Sınıfları

x, y bir G grubunun iki elemanı olmak üzere $x = zyz^{-1}$ eşitliğini sağlayan bir $z \in G$ varsa x ve y elemanlarına birbirlerine konjuge elemanlar denir.

Konjuge olma bir denklik bağıntısıdır. Bu bağıntıdan meydana getirdiği her bir denklik sınıfına ise konjuge sınıfları denir. Bu konjuge sınıflarını belirlemek çalışılan grubun daha iyi bilinmesi için önemlidir.

3. GENİŞLETİLMİŞ VE GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUBUNDA MERTEBESİ SONLU OLAN ELEMANLARIN KONJUGE SINIFLARI

Bu bölümde $\overline{H}_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke gruplarında sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarının sayısını hesaplayacağız.[7] nolu çalışmada Demir tarafından $\overline{H}_{(p,q)}$ gruplarının sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları incelenmiştir.

Çalışmamızda konjuge sınıflarının sayısını içeren teoremi vermeden önce ispatımıza bize yardımcı olacak iki lemmayı ifade ederek başlayalım.

3.1 Lemma : Genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarında;

$$X_i^{t_i}R = RX_i^{pi-t_i} \quad \text{ve } (i = 1,2,\ldots,n)$$

eşitliği $1 \leq t_i \leq p_i - 1$ olmak üzere yazılabilir.

İspat: Genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunun;

$$\overline{H}_{(p_1,p_2,\ \ldots\ ,p_n)} =< X_i, R \mid X_i^{p_i} = R^2 = (X_iR)^2 = I\,, X_iR = RX_i^{p_i-1}, i = 1,2,\ldots,n >$$

grup sunuşu verildiğinde sonda yer alan bağıntılar yardımıyla

$$X_i^{t_i}R = RX_i^{pi-t_i}$$

eşitliği elde edilebilir.

3.2 Lemma: $\overline{H}_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarında;

$1 \leq t_i \leq p_i - 1$ olmak koşuluyla aşağıda yazılan önermeler doğrudur.

1) p_i çift ve t_i tek tamsayı olduğunda $X_i^{t_i}R \sim X_iR$ olur . Diğer aksi durumlarda $X_i^{t_i}R \sim R$ olur.

2) $1 \leq u_i \leq \frac{p_i - 1}{2}$ olmak şartıyla $X_i^{u_i} \sim X_i^{p_i - u_i}$ olur.

İspat:

1) p_i çift ve t_i tek bir tamsayı olarak verilsin.

$w_i = \frac{p_i k_i + t_i + 1}{2}$ olmak üzere k_i sayısı w_i değerini tamsayı yapan özel bir tamsayı olsun.

Lemma 1 de yer alan eşitlikleri kullarak;

$$(X_i^{w_i} R)(X_i^{t_i} R)(X_i^{w_i} R)^{-1} = X_i^{w_i} R . X_i^{t_i} R . R X_i^{p_i - w_i}$$

$$= X_i^{w_i + p_i - t_i - p_i + w_i} . R$$

$$= X_i^{2w_i - t_i} . R$$

$$= X_i^{2\left(\frac{p_i k_i + t_i + 1}{2}\right) - t_i} . R$$

$$= X_i^{p_i k_i + 1} . R$$

$$= (X_i^{p_i})^{k_i + 1} . R$$

$$= (X_i^{p_i})^{k_i} . X_i . R$$

$$= I . X_i . R = X_i . R$$

eşitliği yazılabilir.

p_i'nin çift tamsayı ve t_i'nin tek tamsayı olarak verilmediği durumlarda $w_i = \frac{p_i k_i + t_i}{2}$ olacak biçimde en az bir tane k_i tam sayısı vardır. Lemma 1 yardımıyla;

$$(X_i^{w_i} R)(X_i^{t_i} R)(X_i^{w_i} R)^{-1} = X_i^{w_i} R . X_i^{t_i} R . R X_i^{p_i - w_i}$$

$$= X_i^{w_i + p_i - t_i - p_i + w_i} . R$$

$$= X_i^{2w_i - t_i} . R$$

$$= X_i^{2\left(\frac{p_i k_i + t_i}{2}\right) - t_i} . R$$

$$= X_i^{p_i k_i}.R$$

$$= (X_i^{p_i})^{k_i}.R$$

$$= I.R = R$$ eşitliği bulunur.

2) $1 \leq u_i \leq \frac{p_i-1}{2}$ olmak şartıyla ;

$$R.X_i^{u_i}.R = X_i^{p_i-u_i}.R.R = X_i^{p_i-u_i}$$

eşitliği bulunur.

Böylece $X_i^{u_i} \sim X_i^{p_i-u_i}$ denkliği sağlanır.

$\overline{H}_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunda tek mertebeli olan üreteçleri A_i , mertebelerini q_i ve sayılarını da $0 \leq t \leq n$ olmak üzere t ile ; çift mertebeli olan üreteçlerini B_j , mertebelerini r_j , sayılarını da $0 \leq k \leq n$ olmak üzere k ile gösterelim. $(t + k = n)$ Bu bilgileri göz önüne olarak genelleştirilmiş ve genişletilmiş Hecke grubuna ait grup sunuşunu;

$$\overline{H}_{(p_1,p_2,\ \dots\ ,\ p_n)} =< A_i, B_j, R \mid A_i^{q_i} = B_j^{r_j} = R^2 = I\ ,\ RA_i = A_i R\ , RB_j = (B_j)^{-1}R >$$

şeklinde gösterebiliriz.

Şimdi $\overline{H}_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke gruplarında sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarının sayısını veren teoremimizi verebiliriz.

3.1 Teorem: $\overline{H}_{(q_1,q_2,\dots,q_t,r_1,r_2,\dots,r_k)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunda $0 \leq k,t \leq n$ ve $(t + k = n)$ olmak üzere toplam;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{t} q_i - t + 2k + 2}{2}$$

tane mertebesi sonlu olan konjuge sınıfı vardır.

İspat:

$\overline{H}_{(q_1,q_2,\dots,q_t,r_1,r_2,\dots,r_k)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubumuzda bulunan $A_1, A_2, \dots, A_t, B_1, B_2, \dots, B_k$ üreteçlerimiz aynı anda mertebesi sonlu olan bir elemanı bulunduramaz. Burada her bir üreteç için konjuge sınıflarını tek tek hesaplayacağız.

Öncelikle tek mertebeli olan gruplarda konjuge sınıflarını bularak ispatımıza başlayalım.

İlk olarak biliyoruz ki bu grupta q_i mertebeli üreteçlerin sayısı $\varphi(q_i)$ tanedir. Lemma 1 ve Lemma 2 'den dolayı bu elemanlar ikişer ikişer birbirlerine konjuge olacaklarından bu sayı $\frac{\varphi(q_i)}{2}$ tane olur.

Grubumuzdaki bir g elemanının mertebesi q_i ve $1 \leq i \leq t$ ve t sayısı tek sayı olsun.

$1 \leq l \leq \frac{\varphi(q_i)}{2}$, $(m_l, q_i) = 1$ olmak üzere bu konjuge sınıfları; $A_i^{m_1}, A_i^{m_2}, \dots, A_i^{m_{\left(\frac{\varphi(q_i)}{2}\right)}}$ elemanları olarak bulunur.

Grubumuzda ki bu g elemanı eğer yansıma dönüşümü olursa $g = R.A_i^{q_i}$ şeklinde olacağından $g \sim R$ olur.

q_i mertebeli gruplarda mertebesi q_i ' yi bölen sayılar içinde konjuge sınıfları vardır.

$(a_i, q_i) = 1$ olmak üzere $A_i^{s_i.\frac{q_i}{a_i}}$; $s \in Z$, $s_i \frac{q_i}{a_i} < q_i$ olacak biçimde mertebesi a_i olan konjuge sınıfları vardır. Lemma 2 'den dolayı konjuge sınıfları yarıya düşer. Böylece konjuge sınıflarının sayısı $\frac{q_i - 1 - \varphi(q_i)}{2}$ olur.

Toplamda her bir tek mertebeli üreteç için konjuge sınıflarının sayısı ;

$$\frac{\varphi(q_i)}{2} + \frac{q_i - 1 - \varphi(q_i)}{2}$$

olacaktır.

Ayrıca tek mertebeli elemanların hepsinde ortak bir R konjuge sınıfı olacağından toplama 1 eklenir. Böylece tek mertebeli üreteçlerden toplam ;

$$\frac{\varphi(q_i)}{2}+\frac{q_i-1-\varphi(q_i)}{2}+1=\frac{\sum_{i=1}^{t}(q_i-1)}{2}+1=\frac{\sum_{i=1}^{t}q_i-t+2}{2}$$

tane konjuge sınıfı elde edilir. (*)

Bir çift mertebeli olan gruplarda konjuge sınıflarını bulalım.

Öncelikle bu grupta da az önceki grupta olduğu gibi r_j mertebeli üreteçlerin sayısı $\varphi(r_j)$ tanedir. Lemma 1 ve Lemma 2'den dolayı bu elemanlar ikişer ikişer birbirlerine konjuge olurlar. Bu sayı böylece $\frac{\varphi(r_j)}{2}$ olur.

Ayrıca bu gruplarda 2 mertebeli $B_j^{\frac{r_j}{2}}$ şeklinde bir konjuge sınıfı daha vardır. Bunların sayısı k tanedir.

Burada $(b_j,r_j)\neq 1$ olmak üzere $B_j^{c_j.\frac{r_j}{b_j}}$; $c_j\in Z$, $c_j.\frac{r_j}{b_j}<b_j$ olacak biçimde mertebesi b_j olan bir konjuge sınıfı daha vardır. Bu konjuge sınıflarının sayısı ;

$$\frac{r_j-1-\varphi(r_j)-1}{2}=\frac{r_j-2-\varphi(r_j)}{2}$$

olarak bulunur.

Ayrıca çift mertebeli elemanlarda $B_j{\sim}R$ komjuge sınıfı da vardır. Bu konjuge sınıflarında sayısı da k tanedir.

Böylece bu konjuge sınıflarının sayısı;

$$\frac{\varphi(r_j)}{2}+\frac{r_j-2-\varphi(r_j)}{2}+k+k=\frac{\sum_{j=1}^{k}r_j-2k+4k}{2}=\frac{\sum_{j=1}^{k}r_j+2k}{2}$$

şeklinde bulunur. (**)

Sonuç olarak (*) ve (**) durumları toplanırsa $\overline{\overline{H}}_{(q_1,q_2,\dots,q_t,r_1,r_2,\dots,r_k)}$ genişletilmiş genelleştirilmiş Hecke grubunda $0\leq k,t\leq n$ ve $(t+k=n)$ olmak üzere

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{t} q_i - t + 2k + 2}{2}$$

tane mertebesi sonlu olan konjuge sınıfının varlığı bulunur.

3.1 Örnek: $\overline{H}_{(2,3,6,7,9)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubundaki indeksi sonlu olan konjuge sınıflarının sayısını ve sınıf temsilcilerini bulalım.

$\overline{H}_{(2,3,6,7,9)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşu;

$\overline{H}_{(2,3,6,7,9)} =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, R \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^6 = X_4^7 = X_5^9 = R^2 = (X_1R)^2 = (X_2R)^2 = (X_3R)^2 = (X_4R)^2 = (X_5R)^2 = I \ >$

şeklinde gösterilebilir.

Mertebesi tek olan üreteçler ; X_2, X_4, X_5 olup, mertebeleri sırasıyla 3,7,9 ve bu üreteçlerin sayısı 3 tanedir.($t = 3$)

Mertebesi çift olan üreteçler ; X_1, X_3 olup, mertebeleri sırasıyla 2,6 ve bunların sayısı 2 tanedir. ($k = 2$)

Yukarıdaki teoremi uygularsak;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{t} q_i - t + 2k + 2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{2} r_i + \sum_{i=1}^{3} q_i - 3 + 2.2 + 2}{2} =$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{2} r_i + \sum_{i=1}^{3} q_i - 3 + 2.2 + 2}{2} = \frac{2+6+3+7+9-3+4+2}{2} = 15$$

tane sonlu mertebeli konjuge sınıfı bulunur.

Bu grubumuzun sınıf temsilcilerini ve mertebelerini aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

Tablo 3.1: $\overline{H}_{(2,3,6,7,9)}$ grubundaki sonlu mertebeli konjuge sınıf temsilcileri.

Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi
Eliptik	2	X_1
Eliptik	2	X_3^3
Eliptik	3	X_2
Eliptik	3	X_3^2
Eliptik	3	X_5^2
Eliptik	6	X_3
Eliptik	7	X_4
Eliptik	7	X_4^2
Eliptik	7	X_4^3
Eliptik	9	X_5
Eliptik	9	X_5^2
Eliptik	9	X_5^3
Yansıma	2	R
Yansıma	2	X_1R
Yansıma	2	X_3R

3.2 Örnek: $\overline{H}_{(4,5,10,12,13)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubundaki indeksi sonlu olan konjuge sınıflarının sayısını ve sınıf temsilcilerini bulalım.

$\overline{H}_{(4,5,10,12,13)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{(4,5,10,12,13)} =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, R \mid X_1^4 = X_2^5 = X_3^{10} = X_4^{12} = X_5^{13} = R^2 = (X_1R)^2 = (X_2R)^2 = (X_3R)^2 = (X_4R)^2 = (X_5R)^2 = I >$$

şeklinde gösterilebilir.

Mertebesi tek olan üreteçler ; X_2, X_5 olup, mertebeleri sırasıyla 5,13 ve bu üreteçlerin sayısı 2 tanedir.($t = 2$)

Mertebesi çift olan üreteçler ; X_1, X_3, X_4 olup, mertebeleri sırasıyla 4,10,12 ve bu üreteçlerin sayısı 3 tanedir. ($k = 3$)

Yukarıdaki teoremi uygularsak;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i+\sum_{i=1}^{t} q_i-t+2k+2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{3} r_i+\sum_{i=1}^{2} q_i-2+2.3+2}{2}$$

$$= \frac{4+10+12+5+13-2+6+2}{2} = 25$$

tane sonlu mertebeli konjuge sınıfı bulunur.

Bu grubumuzun sınıf temsilcilerini ve mertebelerini aşağıdaki tabloda belirtildiği gibi gösterebiliriz.

Tablo 3.2: $\overline{H}_{(4,5,10,12,13)}$ grubundaki sonlu mertebeli konjuge sınıf temsilcileri.

Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi
Eliptik	2	X_1^2
Eliptik	2	X_3^5
Eliptik	2	X_4^6
Eliptik	3	X_4^4
Eliptik	4	X_1
Eliptik	4	X_4^3
Eliptik	5	X_2
Eliptik	5	X_2^2
Eliptik	5	X_3^2
Eliptik	5	X_3^4
Eliptik	6	X_4^2
Eliptik	10	X_3
Eliptik	10	X_3^3
Eliptik	12	X_4
Eliptik	12	X_4^5
Eliptik	13	X_5
Eliptik	13	X_5^2
Eliptik	13	X_5^3
Eliptik	13	X_5^4
Eliptik	13	X_5^5

Tablo 3.2 (devamı)

Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi
Eliptik	13	X_5^6
Yansıma	2	R
Yansıma	2	$X_1\ R$
Yansıma	2	$X_3\ R$
Yansıma	2	$X_4\ R$

3.3. Örnek: $\overline{H}_{(4,6,8,9,14,15)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubundaki indeksi sonlu olan konjuge sınıflarının sayısını ve sınıf temsilcilerini bulalım.

$\overline{H}_{(4,6,8,9,14,15)}$ genişletilmiş ve genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşu;

$\overline{H}_{(4,6,8,9,14,15)} =< X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, R \mid X_1^4 = X_2^6 = X_3^8 = X_4^9 = X_5^{14} = X_6^{15} = R^2 = (X_1R)^2 = (X_2R)^2 = (X_3R)^2 = (X_4R)^2 = (X_5R)^2 = (X_6R)^2 = I\ >$

şeklinde gösterilebilir.

Mertebesi tek olan üreteçler ; X_4, X_6 olup, mertebeleri sırasıyla 9,15 ve bu üreteçlerin sayısı 2 tanedir.($t = 2$)

Mertebesi çift olan üreteçler ; X_1, X_2, X_3, X_5 olup, mertebeleri sırasıyla 4,6,8,14 ve bu üreteçlerin sayısı 4 tanedir. ($k = 4$)

Yukarıdaki teoremi uygularsak;

$$\frac{\sum_{i=1}^{k} r_i + \sum_{i=1}^{t} q_i - t + 2k + 2}{2} = \frac{\sum_{i=1}^{4} r_i + \sum_{i=1}^{2} q_i - 2 + 2.4 + 2}{2}$$

$$= \frac{4+6+8+9+14+15-2+8+2}{2} = 32$$

tane sonlu mertebeli konjuge sınıfı bulunur.

Bu grubumuzun sınıf temsilcilerini ve mertebelerini aşağıdaki tabloda belirtildiği gibi gösterebiliriz.

Tablo 3.3: $\overline{H}_{(4,6,8,9,14,15)}$ grubundaki sonlu mertebeli konjuge sınıf temsilcileri.

Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi
Eliptik	2	X_1^2
Eliptik	2	X_3^2
Eliptik	2	X_3^4
Eliptik	2	X_5^7
Eliptik	3	X_2^2
Eliptik	3	X_4^3
Eliptik	3	X_6^5
Eliptik	4	X_1
Eliptik	4	X_3^2
Eliptik	5	X_6^3
Eliptik	5	X_6^6
Eliptik	6	X_2
Eliptik	7	X_5^2
Eliptik	7	X_5^4
Eliptik	7	X_5^6
Eliptik	8	X_3
Eliptik	8	X_3^3
Eliptik	9	X_4
Eliptik	9	X_4^2
Eliptik	9	X_4^4
Eliptik	14	X_5
Eliptik	14	X_5^3
Eliptik	14	X_5^5
Eliptik	15	X_6
Eliptik	15	X_6^2
Eliptik	15	X_6^4
Eliptik	15	X_6^7
Yansıma	2	$X_5\ R$

Tablo 3.3: (devam)

Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi
Yansıma	2	$X_1 \; R$
Yansıma	2	$X_2 \; R$
Yansıma	2	$X_3 \; R$
Yansıma	2	$X_5 \; R$

4. GENELLEŞTİRİLMİŞ HECKE GRUBUNDA CİNSİ SIFIR OLAN NORMAL ALTGRUPLAR

[7] nolu çalışmada Demir tarafından $H_{p,q}$ grupların da genelleştirilmiş Hecke grupların da sıfır cinsli normal alt gruplar incelenmiştir.

Çalışmamızın bu kısmında genelleştirilmiş Hecke gruplarında 0 cinsli sonlu indeksli alt grupları ile ilgili teoremler verilecek ve bu alt grupların simgeleri permütasyon metodu yardımıyla bulunacaktır.

4.1 Teorem: $p_1, p_2, \dots, p_n$ birer tamsayı ve $n \geq 2$ olmak üzere ; $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ genelleştirilmiş Hecke grunundan C_n devirli grubuna homomorfizma tanımlayarak oluşturulacak cinsi 0 olan normal alt gruplar aşağıda gösterilmiştir. Bu 0 cinsli normal alt grupları "K_{n_a}" şeklinde gösterilmiştir.

1) i , $A = \{1,2,3, \dots , n\}$ kümesinin elemanlarından yalnızca bir tanesi ve $j \in A - \{i\}$ olsun. $j \neq i$ olmak üzere ve p_j ‘ler birim elemana eşleşmek koşulu ile; p_i ‘ nin her bir n tamsayı böleni için ; $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} \big/ K_{n_1} \cong (1, n, n)$ olacak biçimde

$K_{n_1} \cong (0\,; (p_j)^n, \left(\frac{p_i}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$ simgeli normal altgrubu vardır.

2) j , $A = \{1,2,3, \dots , n\}$ kümesinin elemanlarından yalnızca bir tanesi ve $i \in A - \{j\}$ olsun. $j \neq i$ olmak üzere ve p_i ‘ler birim elemana eşleşmek koşulu ile; p_j ‘ nin her bir n tamsayı böleni için ; $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} \big/ K_{n_2} \cong (n, 1, n)$ olacak biçimde

$K_{n_2} \cong (0\,; (p_i)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$ simgeli normal altgrubu vardır.

3) i, j ; $A = \{1,2,3, \dots , n\}$ kümesinin $j \neq i$ olmak koşulu ile birer elemanları olsun. p_i ve p_j‘nin her bir ortak n tam sayı böleni için $x \neq i, j$ ve $t \in A - \{i, j\}$ olmak üzere ;

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} \big/ K_{n_2} \cong (n, n, 1)$ olacak biçimde

$K_{n_3} \cong (0\,; (p_t)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)},\ \infty^{(n)})$ simgeli normal altgrubu vardır.

İspat:

1) i , $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ kümesinin yalnızca bir elemanı ve $j\ \in A - \{i\}$ olmak üzere ; p_i'nin her n böleni için $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}\ \rightarrow C_n \cong (1, n, n)$ devirli grubuna $j \neq i$ olmak ve her p_j elemanını birim elemenla eşlemek şartıyla bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu homomorfizmanın çekirdeğinin de $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}$ grubunun bir normal alt grubu olduğu görülür. Bu grubun simgesi permütasyon metodu ile

$K_{n_1} \cong (0\,; (p_j)^n, \left(\frac{p_i}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$ şeklinde bulunur.

2) j , $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ kümesinin yalnızca bir elemanı ve $i\ \in A - \{j\}$ olmak üzere ; p_j'nin her n böleni için $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}\ \rightarrow C_n \cong (n, 1, n)$ devirli grubuna $j \neq i$ olmak ve her p_i elemanını birim elemanla eşlemek şartıyla bir homomorfizma tanımlanabilir. Burada edilecek normal alt grubun simgesi permütasyon metodu ile

$K_{n_2} \cong (0\,; (p_i)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$ şeklinde bulunur.

3) i, j ; $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ kümesinin $j \neq i$ olmak koşulu ile birer elemanları olsun. p_i ve p_j'nin her bir ortak n tam sayı böleni için $x \neq i, j$ ve $t \in A - \{i, j\}$ olmak üzere ; $H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}\ \rightarrow C_n \cong (n, n, 1)$ devirli grubuna, her p_i ve p_j elemanınlarını birim elemanla eşlemek koşuluyla bir homomorfizma tanımlanabilir. Buradan da permütasyon metodu yardımıyla; $K_{n_3} \cong (0\,; (p_t)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)},\ \infty^{(n)})$ simgeli normal alt grubun elde edileceği görülür.

Bundan sonra ifade edilen teoremlerin ispatları önceki teoremin ispatı ile aynı tarzda yapıldığından ayrıca ispatları yazılmayacaktı.

4.2.Teorem:

1) p_i çift tamsayı ve i sayısı $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ elemanlarından sadece bir tanesi olsun. $i \neq j$ ve $j \in A - \{i\}$ olmak şartıyla p_j'nin her bir ortak n tam sayı böleni için ;

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun $t \in A - \{i,j\}$ olmak şartıyla

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} / L_{n_k} \cong (2,n,2) \cong$ olmak ve p_t elemanlarının birim elemanla

eşleşmek koşuluyla 0 cinsli $L_{n_1} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(2)}, (p_t)^{2n},\ \infty^{(n)})$ simgeli bir normal alt grubu vardır.

2) p_j çift tamsayı ve j sayısı $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ elemanlarından sadece bir tanesi olsun. $i \neq j$ ve $i \in A - \{j\}$ olmak şartıyla p_j'nin her bir ortak n tam sayı böleni için ;

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun $t \in A - \{i,j\}$ olmak şartıyla

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} / L_{n_k} \cong (n,2,2)$ olmak ve p_t elemanlarının birim elemanla eşleşmek koşuluyla 0 cinsli $L_{n_2} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{n}\right)^{(2)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(n)}, (p_t)^{2n},\ \infty^{(n)})$ simgeli bir normal alt grubu vardır.

3) p_i ve p_j çift tamsayı ve $i \neq j$ ve $i,j \in A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ elemanlarından sadece birer tanesi olsun. $p_t \neq p_i$ ve $p_t \neq p_j$, p_t elemanlarının birim elemanla eşleşmesi koşuluyla;

$H_{(p_1,p_2,\dots,p_i,\dots,p_j,\dots,p_n)} / L_{n_k} \cong (2,2,n)$ olacak şekilde 0 cinsli;

$L_{n_3} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(n)}, (p_t)^{2n},\ \infty^{(2)})$ simgeli bir normal alt grubu vardır.

4.3.Teorem: p_i çift tamsayı ve i sayısı $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$ elemanlarından sadece bir tanesi olsun. $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun 0 cinsli alt grupları aşağıda belirtilmiştir.

1) $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'lerin birim elemanla eşleşsin. $3 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun homomorfjik görüntüleri A_4, S_4, A_5 grupları olurlar.

1.1) $A_4 \cong (2,3,3)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_1 \cong \left(0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(4)}, (p_t)^{12},\ \infty^{(4)}\right)$ simgeli alt grup bulunur.

1.2) $S_4 \cong (2,3,4)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_2 \cong \left(0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(8)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(6)}\right)$ simgeli alt grup bulunur.

1.3) $A_5 \cong (2,3,5)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_3 \cong \left(0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(20)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(12)}\right)$ simgeli alt grup bulunur.

2) $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'lerin birim elemanla eşleşsin. $4 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$ Hecke grubu için $S_4 \cong (2,4,3)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda $M_4 \cong \left(0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{4}\right)^{(8)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(8)}\right)$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

3) $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'lerin birim elemanla eşleşsin. $5 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$ Hecke grubu için $A_4 \cong (2,5,3)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda $M_5 \cong \left(0\,;\ \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{p_j}{5}\right)^{(12)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(20)}\right)$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

4.4.Teorem: p_j çift tamsayı ve j sayısı $A = \{1,2,3,\ldots,n\}$ elemanlarından sadece bir tanesi olsun. $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'ler birim elemanla eşleşsin. $3 \mid p_i$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\ldots,p_n)}$ Hecke grubunun homomorfjik görüntüleri A_4, S_4, A_5 grupları olurlar.

1) $A_4 \;\cong (3,2,3)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_6 \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(6)}, (p_t)^{12},\ \infty^{(4)})$ simgeli alt grup bulunur.

2) $S_4 \;\cong (3,2,4)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_7 \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(12)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(6)})$ simgeli alt grup bulunur.

3) $A_5 \;\cong (3,2,5)$ üçgen grubu için yapılan eşlemeler sonucunda

$M_8 \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(30)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(12)})$ simgeli alt grup bulunur.

4.5.Teorem: $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$, $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'ler birim elemanla eşleşsin. $3 \mid p_i$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun 0 cinsli alt grupları aşağıda belirtilmiştir.

1) $3 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $A_4 \cong (3,3,2)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda $M_9 \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(4)}, (p_t)^{12},\ \infty^{(6)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

2) $4 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $S_4 \cong (3,4,2)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda $M_{10} \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{p_j}{4}\right)^{(6)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(12)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

4) $5 \mid p_j$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $A_5 \cong (3,5,2)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda $M_{11} \cong (0\,;\, \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{p_j}{5}\right)^{(12)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(30)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

4.6.Teorem: $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$, $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'ler birim elemanla eşleşsin. $4 \mid p_i$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun 0 cinsli alt grupları aşağıda belirtilmiştir.

1) p_j 'nin çift olduğu durumlarda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $S_4 \cong (4,2,3)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda ;

$M_{12} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(12)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(10)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

2) $3 \mid p_j$ olduğu durumlarda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $S_4 \cong (4,3,2)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda;

$M_{13} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(8)}, (p_t)^{24},\ \infty^{(12)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

4.7.Teorem: $A = \{1,2,3, \dots ,n\}$, $\exists j \neq i$ ve $j \in A$ olmak üzere ve $t \in A - \{i,j\}$ için p_t'ler birim elemanla eşleşsin. $5 \mid p_i$ olduğu durumda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubunun 0 cinsli alt grupları aşağıda belirtilmiştir.

1) p_j 'nin çift olduğu durumlarda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $A_5 \cong (5,2,3)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda;

$M_{14} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(30)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(20)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

2) $3 \mid p_j$ olduğu durumlarda $H_{(p_1,p_2,\dots,p_n)}$ Hecke grubu için $A_5 \cong (5,3,2)$ grubuna bir homomorfizma tanımlama sonucunda;

$M_{15} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(20)}, (p_t)^{60},\ \infty^{(30)})$ simgeli bir normal alt grup bulunur.

Burada olabilecek bütün durumlar incelenmiş ve oluşan bütün normal alt gruplar tablodaki gibi gösterilmiştir.

Tablo 4.1: Genelleştirilmiş Hecke gruplarında olası 0 cinsli normal altgruplar.

Normal Alt Grup Simgesi	**Bölüm Grubu**
$K_{n_1} \cong (0\,;(p_j)^n, \left(\frac{p_i}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$	$C_n \cong (1,n,n)$
$K_{n_2} \cong (0\,;(p_i)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(1)})$	$C_n \cong (n,1,n)$
$K_{n_3} \cong (0\,;(p_t)^n, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(1)}, \infty^{(n)})$	$C_n \cong (n,n,1)$
$L_{n_1} \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{p_j}{n}\right)^{(2)}, (p_t)^{2n}, \infty^{(n)})$	$D_n \cong (2,n,2)$
$L_{n_2} \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{n}\right)^{(2)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(n)}, (p_t)^{2n}, \infty^{(n)})$	$D_n \cong (n,2,2)$
$L_{n_3} \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(n)}, (p_t)^{2n}, \infty^{(2)})$	$D_n \cong (2,2,n)$
$M_1 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(4)}, (p_t)^{12}, \infty^{(4)})$	$A_4 \cong (2,3,3)$
$M_2 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(8)}, (p_t)^{24}, \infty^{(6)})$	$S_4 \cong (2,3,4)$
$M_3 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(20)}, (p_t)^{60}, \infty^{(12)})$	$A_5 \cong (2,3,5)$
$M_4 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{4}\right)^{(8)}, (p_t)^{24}, \infty^{(8)})$	$S_4 \cong (2,4,3)$
$M_5 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{p_j}{5}\right)^{(12)}, (p_t)^{60}, \infty^{(20)})$	$A_5 \cong (2,5,3)$
$M_6 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(6)}, (p_t)^{12}, \infty^{(4)})$	$A_4 \cong (3,2,3)$
$M_7 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(12)}, (p_t)^{24}, \infty^{(6)})$	$S_4 \cong (3,2,4)$
$M_8 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(30)}, (p_t)^{60}, \infty^{(12)})$	$A_5 \cong (3,2,5)$
$M_9 \cong (0\,; \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(4)}, (p_t)^{12}, \infty^{(6)})$	$A_4 \cong (3,3,2)$

Tablo 4.1: (devam)

Normal Alt Grup Simgesi	Bölüm Grubu
$M_{10} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{p_j}{4}\right)^{(6)}, (p_t)^{24}, \infty^{(12)})$	$S_4 \cong (3,4,2)$
$M_{11} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{p_j}{5}\right)^{(12)}, (p_t)^{60}, \infty^{(30)})$	$A_5 \cong (3,5,2)$
$M_{12} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(12)}, (p_t)^{24}, \infty^{(10)})$	$S_4 \cong (4,2,3)$
$M_{13} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(8)}, (p_t)^{24}, \infty^{(12)})$	$S_4 \cong (4,3,2)$
$M_{14} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{2}\right)^{(30)}, (p_t)^{60}, \infty^{(20)})$	$A_5 \cong (5,2,3)$
$M_{15} \cong (0\,;\ \left(\frac{p_i}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{p_j}{3}\right)^{(20)}, (p_t)^{60}, \infty^{(30)})$	$A_5 \cong (5,3,2)$

4.1 Örnek: $H_{(2,3,4)}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun 0 cinsli indeksi sonlu olan alt gruplarının simgelerini bulalım.

Öncelikle $H_{(2,3,4)}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun grup sunuşunu ve grup simgesini yazalım. Grubumuzun sunuşu;

$H_{(2,3,4)} =< X_1, X_2, X_3 \mid X_1^2 = X_2^3 = X_3^4 = I >$,

$H_{(2,3,4)}$ grubumuzun simgesi ise $(0\,; 2,3,4,\infty)$ şeklindedir.

1) İlk olarak grubumuzda $X_1 = I$ eşlemesi yapıldığında oluşan 0 cinsli sonlu indeksli alt grupların simgeleri ve bölüm gruplarının simgeleri permütasyon metodu yardımıyla aşağıdaki tabloda bulunmuştur.

Tablo 4.2: $H_{(2,3,4)}$ Genelleştirilmiş Hecke gruplarında olası 0 cinsli normal altgruplar.

Normal Alt Grup Simgesi	**Bölüm Grubu**
$K_1 \cong (0\,; 2,3,4\ \infty)$	I
$K_2 \cong (0\,; 2^{(2)}, 3^{(2)}, 2, \infty)$	$C_2 \cong (1,2,2)$
$K_3 \cong (0\,; 2^{(3)}, 4^{(3)}, \infty)$	$C_3 \cong (3,1,3)$
$K_4 \cong (0\,; 2^{(4)}, 3^{(4)}, \infty)$	$C_4 \cong (1,4,4)$
$L_1 \cong (0\,; 2^{(6)}, 2^{(3)}\ \ , \infty^{(3)})$	$D_3 \cong (3,2,2)$
$M_1 \cong (0\,; 2^{(12)}, 2^{(6)}\ \ , \infty^{(4)})$	$A_4 \cong (3,2,3)$
$M_2 \cong (0\,; 2^{(24)}, 2^{(12)}\ \ , \infty^{(6)})$	$S_4 \cong (3,2,4)$
$M_3 \cong (0\,; 2^{(24)}\ , \infty^{(4)})$	$S_4 \cong (3,4,2)$
$M_4 \cong (0\,; 2^{(60)}, 2^{(30)}\ \ , \infty^{(4)})$	$A_5 \cong (3,2,5)$

2) İkinci olarak $X_2 = I$ eşlemesi yapıldığında oluşan 0 cinsli sonlu indeksli alt grupların simgeleri ve bölüm gruplarının simgeleri permütasyon metodu yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 4.2 (devam)

Normal Alt Grup Simgesi	**Bölüm Grubu**
$K_5 \cong (0\,; 3^{(2)}, 4^{(2)}, \infty)$	$C_2 \cong (2,1,2)$
$K_6 \cong (0\,; 2^{(2)}, 3^{(2)}, 2, \infty)$	$C_2 \cong (1,2,2)$
$K_7 \cong (0\,; 2\ \ , 3^{(2)}, \infty^{(2)})$	$C_2 \cong (2,2,1)$
$K_8 \cong (0\,; 2^{(4)}, 3^{(4)}, \infty)$	$C_4 \cong (1,4,4)$
$L_2 \cong (0\,; 3^{(2n)}, 2^{(n)}\ \ , \infty^{2})$	$D_n \cong (2,2,n)$
$L_3 \cong (0\,; 3^{(8)}\ , \infty^{(4)})$	$D_4 \cong (2,4,2)$
$M_5 \cong (0\,; 3^{(24)}, \infty^{(8)})$	$S_4 \cong (2,4,3)$

3) $X_3 = I$ eşlemesi yapıldığında oluşan 0 cinsli sonlu indeksli alt grupların simgeleri ve bölüm gruplarının simgeleri permütasyon metodu yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 4.2 (devam)

Normal Alt Grup Simgesi	Bölüm Grubu
$K_9 \cong (0\,;3^{(2)},4^{(2)},\infty)$	$C_2 \cong (2,1,2)$
$K_{10} \cong (0\,;2^{(3)},4^{(3)},\infty)$	$C_3 \cong (1,3,3)$
$L_4 \cong (0\,;4^6,,\infty^{(3)})$	$D_3 \cong (2,3,2)$
$M_6 \cong (0\,;4^{(12)},\infty^{(4)})$	$A_4 \cong (2,3,3)$
$M_7 \cong (0\,;4^{(60)}\ ,\infty^{(12)})$	$A_5 \cong (2,3,5)$
$M_8 \cong (0\,;4^{(24)}\,,\infty^{(6)})$	$S_4 \cong (2,3,4)$

4) Son birim eleman eşlemesi yapıldığında oluşan 0 cinsli sonlu indeksli alt grupların simgeleri ve bölüm gruplarının simgeleri permütasyon metodu yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 4.2 (devam)

Normal Alt Grup Simgesi	Bölüm Grubu
$K_{11} \cong (0\,;3^{(2)},2,\infty^{(2)})$	$C_2 \cong (2,1,2)$
$L_5 \cong (0\,;2^{(3)},,\infty^{(6)})$	$D_3 \cong (2,3,2)$
$M_9 \cong (0\,;\infty^{(24)})$	$S_4 \cong (2,3,4)$

4.2 Örnek: $H_{(3,5,7,9)}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun 0 cinsli indeksi sonlu olan alt gruplarının simgelerini bulalım.

Öncelikle $H_{(3,5,7,9)}$ genelleştirilmiş Hecke grubunun sunuşunu ve grup simgesini yazalım.

$$H_{(3,5,7,9)} =< X_1, X_2, X_3, X_4 \mid X_1^3 = X_2^5 = X_3^7 = X_4^9 = I >$$

$H_{(3,5,7,9)}$ grubumuzun simgesi $(0\,;\ 3,5,7,9,\infty)$ şeklindedir.

Üreteçlerimizi ikişerli olarak birim elemanla eşleme yaptığımızda oluşan 0 cinsli sonlu indeksli alt grupların simgeleri ve bölüm gruplarının simgeleri permütasyon metodu yardımıyla aşağıdaki gibi bulunmuştur.

Tablo 4.3: $H_{(3,5,7,9)}$ Genelleştirilmiş Hecke gruplarında olası 0 cinsli normal altgruplar.

Normal Alt Grup Simgesi	**Bölüm Grubu**	**Birim Elemanla Eşleme yapılan Üreteçler**
$K_1 \cong (0\,;3{,}5{,}7{,}9,\infty)$	I	
$K_2 \cong (0\,;5^{(3)},7^{(3)},3\ \ ,\infty^{(3)})$	$C_3 \cong (3{,}3{,}1)$	$X_2 = I\,, X_3 = I$
$K_3 \cong (0\,;5^{(3)},7^{(3)},9^{(3)},\infty\ \ )$	$C_3 \cong (3{,}1{,}3)$	$X_2 = I\,, X_3 = I$
$K_4 \cong (0\,;3^{(3)},5^{(3)},7^{3},3,\infty\ \ )$	$C_3 \cong (1{,}3{,}3)$	$X_2 = I\,, X_3 = I$
$K_5 \cong (0\,;3^{(5)},7^{(5)},9^{5},\infty\ \ )$	$C_5 \cong (5{,}1{,}5)$	$X_1 = I\,, X_3 = I$
$K_6 \cong (0\,;3^{(7)},5^{(7)},9^{7},\infty\ \ )$	$C_7 \cong (7{,}1{,}7)$	$X_1 = I\,, X_2 = I$
$K_7 \cong (0\,;3^{(9)},5^{(9)},7^{9},\infty^{(3)})$	$C_9 \cong (1{,}9{,}9)$	$X_1 = I\,, X_2 = I$
$M_1 \cong (0\,;5^{(12)},7^{(12)},3^{4},\infty^{(6)})$	$A_4 \cong (3{,}3{,}2)$	$X_2 = I\,, X_3 = I$
$M_2 \cong (0\,;3^{(60)},7^{(60)},3^{(20)},\infty^{(30)})$	$A_5 \cong (5{,}3{,}2)$	$X_1 = I\,, X_3 = I$
$M_3 \cong (0\,;7^{(60)},9^{(60)},\infty^{(30)})$	$A_5 \cong (3{,}5{,}2)$	$X_3 = I\,, X_4 = I$

Burada farklı ikişerli üreteçlerin ikişerli olarak birim elemanla eşlemesi sonucunda oluşan normal alt grupların simgeleri aynı çıkabildiği durumlar görülmüştür. O durumlardan sadece bir tanesi tabloya yansıtılmıştır.

Örneğin; $X_2 = I\,, X_3 = I$ eşlemesi ve $X_1 = I\,, X_2 = I$ eşlemesi yapıldığında $H_{(3,5,7,9)}$ genelleştirilmiş Hecke grubumuzdan $C_3 \cong (3{,}1{,}3)$ bölüm grubuna bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu iki durumda da oluşacak normal alt grubun simgesi $K_3 \cong (0\,;5^{(3)},7^{(3)},9^{(3)},\infty\ \ )$ olarak bulunmuştur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu kısımda tezimizde bulduğumuz sonuçları belirterek ileriki zamanlar da yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulacaktır.

Tezimizin üçüncü bölümünde genelleştirilmiş ve genişletilmiş Hecke gruplarında sonlu mertebeli elemanların konjuge sayılarını hesapladık ve bununla ilgili genel bir formül geliştirdik.

Tezimizin dördüncü bölümünde genelleştirilmiş Hecke gruplarının cinsi 0 olan sonlu indeksli alt grupları ile ilgili teoremler verildi ve bu alt grupların simgeleri permütasyon metodu yardımıyla bulundu.

İleriki zamanlarda yapılabilecek çalışmalar genelleştirilmiş ve genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının komütatörleri üzerine yapılabilir, ayrıca yine bu grupların denklik alt grupları ve temel denklik alt grupları da çalışılabilir.

6. KAYNAKLAR (IEEE)

[1] Hecke, E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", Math. Ann , 11, 664-699, (1936).

[2] Cangül, I. N., “Normal Subgroups of Hecke Groups”, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Ikikardes, S., Sahin,R. and Koruoglu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups",Rocky J. Math, 36(2), 497-508, (2006).

[4] Sahin, R. and Koruoglu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups", Ramanujan J., 151-159, (2011).

[5] Sahin, R. and Koruoglu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of someHecke groups II", C.R Acad. Sci., Paris, 127-130, (2011).

[6] Lehner, J. and Newman, M., “Real two-dimensional representations of the modulargroup and related groups”, Amer. J. Math., 87, 945-954, (1965).

[7] Demir, “Extended Generalized Hecke groups” PhD. Thesis, Balıkesir University,Balıkesir, (2015).

[8] Huang S. Generalized Hecke groups and Hecke polygons. Ann Acad Sci Fenn Math 1999. 24 (1) : 187-214.

[9] Babadaglı, C., "Genellestirilmis Hecke Grupları", Yüksek Lisans Tezi, BalıkesirÜniversitesi, Balıkesir, (2019).

[10] Şahin, R. and Bizim, O., “Some subgroups of extended Hecke groups ”, Actua Math. Sci., 23, 497-502, (2003).

[11] Jones, G. A. and Singerman, D., Complex functions, Cambridge: Cambridge University Press, (1987).

[12] Koruoglu, Ö., “H(λ_P) ve H(λ) genisletilmis Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri EnstitüsüMatematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[13] Singerman, D., “Finitely maximal Fuchsian groups”, J. London Math. Soc., 2,6, 29-38, (1972).

[14] Lehner, J., "Uniqueness of a class of Fuchsian groups" Illinois J. Math., 19, 2, 308-315, (1975).

[15] Johnson, D.L., Presentation of groups, Cambridge; Camridge University Press, (1990)

[16] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, New

York: Dover Publications, (1976).

[17] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., Generators and relations for discretegroups, second ed., Berlin: Springer-Verlag, (1965).

[18] Dograyıcı, G., "Genelleştirilmiş ve Genişletilmiş Genelleştirilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları", Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir, (2021)

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Cüneyt DUMAN

Doğum tarihi ve yeri : 09.06.1993

e-posta : cuneytduman_93@hotmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2023
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Öğretmenliği	2016
Lise	Biga Atatürk Anadolu Lisesi	2011