

**T.C.**  
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ**  
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**  
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUBUN RASYONEL SAYILARI**  
**SABİTLEYEN ELEMANLARI ÜZERİNE**

**MUSTAFA KARATAŞ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Jüri Üyeleri :** **Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR (Tez Danışmanı)**  
**Doç. Dr. Şaban GÜVENÇ**  
**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN**

**BALIKESİR, OCAK - 2023**

## **ETİK BEYAN**

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “**Genişletilmiş Modüler Grubun Rasyonel Sayıları Sabitleyen Elemanları Üzerine**” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Mustafa KARATAŞ**

(imza)

## ÖZET

**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUBUN RASYONEL SAYILARI SABİTLEYEN  
ELEMANLARI ÜZERİNE  
YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MUSTAFA KARATAŞ  
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI  
(TEZ DANIŞMANI: DR. ÖĞR. ÜYESİ BİLAL DEMİR)**

**BALIKESİR, OCAK - 2023**

Bu çalışmada genişletilmiş modüler grubun rasyonel sayıları sabitleyen elemanları incelenmiştir. Bunun için sürekli kesirler, Farey dizisi ve Farey grafin özellikleri kullanılmıştır. Her rasyonel sayının sonlu sürekli kesir açılımı mevcuttur. Bu sürekli kesir açılımının ardışık yakınsayanları Farey grafta sonsuzdan rasyonel sayıya giden bir yolun köşeleridir.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Giriş bölümü olan birinci bölümde çalışma kısaca tanıtılmıştır.

İkinci bölümde çalışmaya konu olan temel kavram ve teoremler verilmiştir.

Üçüncü bölümde konu ile ilgili yapılan çalışmalarda elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölüm tezin ana bölümüdür. Bu bölümde elde edilen bulgular ispatlarıyla verilmiştir. Öncelikle Farey komşuları yardımıyla verilen bir rasyonel sayıyı sabit bırakan parabolik ve yansıma elemanlarının matris temsilcileri elde edilmiştir. Ardından sürekli kesirler ve Farey graftaki yollar kullanılarak bu elemanlar üreteçlerin bir kombinasyonu olarak ifade edilmiştir. Bu kelimelerin indirgenmiş blok formları de yine aynı bölümde verilmiştir. Son olarak girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerin çarpımı olarak yeni blok formun nasıl elde edilebileceği örneklerle açıklanmıştır.

Beşinci bölüm elde edilen sonuçların tartışıldığı ve gelecek çalışmalar için önerilerin yer aldığı son bölümdür.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Modüler grup, genişletilmiş modüler grup, Farey graf

Bilim Kod / Kodları : 20401

Sayfa Sayısı : 57

## ABSTRACT

### ON THE ELEMENTS OF EXTENDED MODULAR GROUP THAT FIX RATIONAL NUMBERS

MSC THESIS

MUSTAFA KARATAŞ

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF.DR. BİLAL DEMİR

BALIKESİR, JANUARY - 2023

In this study, the elements of the extended modular group that fix the rational numbers are examined. For this purpose, properties of continued fractions, the Farey sequence, and the Farey graph are used. Every rational number has a finite continued fraction expansion. The successive convergences of this continued fraction expansion are the vertices of a path from infinity to the rational number in the Farey graph.

This study consists of five chapters.

In the first chapter, which is the introduction, the study is briefly introduced.

In the second chapter, the basic concepts and theorems that are related to the subject of the study are given.

In the third chapter, the results obtained from the studies about the subject are given.

The fourth chapter is the main part of the thesis. In this section, the results are given with their proofs. First, with the help of Farey neighbors, matrix representatives of parabolic and reflection elements that fix a given rational number are obtained. Then, using continued fractions and paths in the Farey graph, these elements are expressed as a word of generators. The block reduced forms of these words are also given in the same section. Finally, it is explained with examples of how the new block reduced form can be obtained as the product of matrices whose entries are Fibonacci numbers.

**KEYWORDS:** Modular group, extended modular group, Farey graph

Science Code / Codes : 20401

Page Number : 57

# İÇİNDEKİLER

## Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT .....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ.....	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER .....	5
2.1 Modüler Grup ve Genişletilmiş Modüler Grup.....	5
2.2 Sürekli Kesirler .....	13
2.3 Farey Dizisi .....	21
2.4 Graflar.....	23
2.5 Farey Ağacı .....	25
3. YAPILAN ÇALIŞMALAR .....	31
4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA RASYONEL SAYILARIN SABİTLEYENLERİ.....	35
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	52
6. KAYNAKLAR.....	54
ÖZGEÇMİŞ .....	57

## ŞEKİL LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Şekil 2.1: Farey ağacı. ....	26
Şekil 2.2: Üst yarı düzlemde Farey ağacı. ....	27
Şekil 2.3: Farey grafta $\infty$ ' dan $14/9$ ' a giden bir yol. ....	29
Şekil 4.1: Farey grafta $\infty$ ' dan $-10/3$ e giden bir yol. ....	49

## SEMBOL LİSTESİ

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$	:Basit sürekli kesir
$\varphi(n)$	:Euler fonksiyonu
$\mathcal{F}$	:Farey graf
$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$	:Farey grafta $x_0$ dan $x_n$ e giden yol
$\overline{\Gamma}$	:Genişletilmiş modüler grup
$\mathbb{Q}_\infty$	:Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$H(\lambda)$	:Hecke grubu
$\mathbb{H}$	:Hiperbolik üst yarı düzlem
$F(\lambda)$	: $H(\lambda)$ nın temel bölgesi
$\mathbb{C}$	:Karmaşık sayılar kümesi
$\Gamma$	:Modüler grup
$PSL(2, \mathbb{Z})$	:Modüler grup
$F_n$	: $n$ . Fibonacci sayısı
$F_n$	: $n$ . Farey dizisi
$\mathbb{R}$	:Reel sayılar kümesi
$[b_1, b_2, \dots, b_n]_q$	:Rosen sürekli kesir
$C_k$	:Sürekli kesrin $k$ . yakınsayını
$\mathbb{Z}$	:Tam sayılar kümesi
$[b_0, b_1, \dots, b_n]$	:Tam sayı sürekli kesir
$U$	:Üst yarı düzlem
$PSL(2, \mathbb{R})$	: $\left\{V(z) \mid V(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\right\}$
$G_0$	: $\left\{U(z) \mid U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1\right\}$

## ÖNSÖZ

Üniversite kariyerim boyunca her zaman yanımda olan bana güvenen, yaptığım çalışmada bana çok büyük desteği olan yardımını hiç bir zaman esirgemeyen hocam ve danışmanım Sayın Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR'e çok teşekkür ederim.

Bu çalışma aşamasında bilgi ve birikimini bana aktaran, bilgi ve tecrübesi ile her zaman yoluma ışık tutan Sayın Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Üniversite ve yüksek lisans dönemimde yardımını esirgemeyen Sayın Dr. Öğr. Üyesi Mevhibe KOBAK DEMİR'e çok teşekkür ederim.

Yüksek Lisans serüvenimde tanıştığım, matematiksel açıdan bana farklı bakış açıları kazandıran Sayın Prof. Dr. Nihal ÖZGÜR'e teşekkürler sunarım.

Üzerimde büyük emekleri olan, Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü hocalarıma bana kattıkları her bilgi için ne kadar teşekkür etsem azdır.

Her zaman yanımda olan aileme, arkadaşlarıma çok teşekkür ederim. Eğitim hayatım boyunca bu yola çıkmamda destek olan bütün öğretmenlerime bana kattıkları her şey için minnettarım.

Bu çalışmayı yaptığım süreçte bana her türlü kolaylığı sağlayan başta kurucu üyelerimiz Üstün KAPLAN ve Ali İrfan MIDİK olmak üzere bütün BKM Okulları ailesine çok teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2023**

**Mustafa KARATAŞ**



# 1. GİRİŞ

Karmaşık düzlemde tanımlı;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda \quad (1.1)$$

kesirli lineer dönüşümlerinin ürettiği gruba Hecke grubu adı verilir. Hecke grupları  $H(\lambda)$  sembolü ile gösterilir. Burada  $\lambda$  değeri pozitif bir reel sayıdır. Erick Hecke [1] çalışmasında  $\lambda \geq 2$  bir reel sayı veya  $q \geq 3$  bir tamsayı olmak üzere  $\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}$  değerlerine karşılık  $H(\lambda)$  Hecke gruplarının ayrık olacağını ispatlamıştır. Bu durumda  $H(\lambda)$  Hecke grubu  $PSL(2, \mathbb{R})$ ' nin ayrık bir alt grubu olduğundan Fuchsian gruptur. Alanyazında en çok  $q = 3$  değerine karşılık elde edilen  $H(\lambda_3)$  Hecke grubu çalışılmıştır. Bu gruba özel olarak modüler grup denir ve  $PSL(2, \mathbb{Z})$  grubundan başka bir şey değildir. Şu halde modüler grup;

$$z \rightarrow w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (1.2)$$

şeklindeki fonksiyonların grubudur. Burada  $a, b, c$  ve  $d$  sayıları tam sayılardır ve  $ad - bc = 1$  dir.

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + 1 \quad (1.3)$$

üreteçleri ile üretilir. Bu kesirli lineer dönüşümler üst yarı düzlemin otomorfizmalarıdır.

Modüler gruba 2 mertebeli yansıma dönüşümü olan;

$$R(z) = \frac{1}{z} \quad (1.4)$$

eklenirse;

$$G = \left\{ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = -1 \right\} \quad (1.5)$$

olmak üzere;

$$PGL(2, \mathbb{Z}) = PSL(2, \mathbb{Z}) \cup G \quad (1.6)$$

genişletilmiş modüler grup elde edilir. Modüler grup genişletilmiş modüler grubun 2 indeksli bir alt grubudur. Genişletilmiş modüler grupta üst-yarı düzlemin otomorfizmaları ile anti-otomorfizmaları yer almaktadır.

Genişletilmiş modüler grubun üst-yarı düzlemdeki hareketinin topolojik birçok sonucu olmasının yanı sıra rasyonel sayılar üzerindeki hareketi de ilgi çekicidir. Eğer  $\infty = \frac{1}{0}$  şeklindeki bir gösterimle  $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  göz önüne alınırsa bir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  ve bir  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d}$  için;

$$w\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{ap+bq}{cp+dq} \quad (1.7)$$

elde edilir. Bu bir grup etkisi olup geçişlidir.

Matematiğin en temel konularından olan Euclides algoritması basit olarak verilen iki tamsayıya ardışık olarak kalanlı bölme teoreminin uygulanmasıdır. Bu sayede bir  $\frac{p}{q}$  rasyoneli verildiğinde,

$$p = r_0q + r_1 \quad (1.8)$$

$$q = r_1q_1 + r_2 \quad (1.9)$$

$$\dots \quad (1.10)$$

$$r_{n-1} = r_nq_n \quad (1.11)$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada  $r_i$  lerin her biri birer tamsayı olup

$$\frac{p}{q} = r_0 + \frac{1}{r_1 + \frac{1}{r_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{r_n}}}} \quad (1.12)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu gösterime basit sürekli kesir açılımı denir.

$$r_0\lambda_q + \frac{-1}{r_1\lambda_q + \frac{-1}{r_2\lambda_q + \frac{-1}{\ddots + \frac{-1}{r_n\lambda_q}}} \quad (1.13)$$

ifadesine  $\lambda_q$  reel sayısına bağlı Rosen sürekli kesirleri denir [2]. Hecke grupları için  $T$  ve  $U$  üreteçlerinin  $U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T$  şeklindeki bir eleman ile Rosen sürekli kesirleri arasındaki

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]_q \quad (1.14)$$

eşitliği [2] numaralı çalışmada gösterilmiştir. Bu sayede, Hecke grubunun elemanlarının cusp noktalarını belirleme ve Hecke grubunun elemanlarının belirlenmesi açısından oldukça önemlidir.

Modüler grupta bir eleman üreteçler cinsinden;

$$U^{r_0}TU^{r_1}T \dots U^{r_n}T \quad (1.15)$$

verilmiş bir elemanın gösterimi bir sürekli kesir açılımı olarak ifade edilebilir. Bu ifadeye tamsayı sürekli kesir açılımı denir ve Rosen sürekli kesrinin  $\lambda_q = 1$  halidir.

Farey dizisi  $[0,1]$  aralığında kapsanan indirgenmiş rasyonel sayıların artan bir şekilde sıralanmasıyla elde edilen kümelerdir. İlk birkaç terim aşağıdaki gibidir.

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \quad (1.16)$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \quad (1.17)$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \quad (1.18)$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \quad (1.19)$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \quad (1.20)$$

Farey dizisinin elemanları rasyonel sayılar olup tamsayı miktarı kadar öteleme yaparak tüm rasyonel sayılara genişletilebilir. O halde rasyonel sayılar  $\infty$ 'u kök kabul eden ve her bir basamakta o basamağa karşılık gelen Farey dizisi bulunan bir ağaçla gösterilebilir. Daha açık olarak, köşeleri  $\mathbb{Q}_\infty$  olan ve  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_\infty$  elemanlarını  $ad - bc = \pm 1$  şartıyla birbirine bağlayan yapıya Farey graf denir. Farey graf bir ağaçtır. Bu ağaçtaki yollar ile

sürekli kesirler arasında yakından bir ilişki vardır. Şöyle ki  $\infty$ ' dan  $\frac{a}{b}$  ye giden her bir yolun ardışık köşeleri  $\frac{a}{b}$ ' nin tamsayı sürekli kesir açılımının ardışık yakınsayanlarıdır.

Bu çalışmada verilen bir rasyonel sayıyı sabitleyen genişletilmiş modüler gruptaki elemanları elde etmek amaçlanmıştır. Bunun için sürekli kesirler ve Farey grafitan yararlanılmıştır.

Bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm olan giriş bölümünde çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde çalışma için gerekli kavramlar anlatılmıştır. Öncelikle modüler grup ve genişletilmiş modüler grup tanıtılmış ardından sürekli kesirler çalışma çerçevesinde tanıtılmıştır. Graf teoriye dair çalışmada bahsi geçen terimler tanımlandıktan sonra Farey dizisi ve Farey graf verilmiştir.

Üçüncü bölüm literatür taraması olarak bu çalışmaya esin kaynağı olan çalışmaların özetlendiği bir bölümdür.

Dördüncü bölüm çalışmada elde edilen bulguların sunulduğu ana bölümdür. Bu bölümde problem durumu ve yöntem açıklanmıştır. Bu bölüm tezin orijinal bölümü olup [3] kaynakta yayınlanmıştır.

Beşinci bölümde tezdeki sonuçlar tartışılmış sonraki çalışmalar için öneriler bulunmaktadır.

## 2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin ilerleyen aşamaları için gerekli olan bazı kavramlar tanıtılıp ilgili sonuçlar verilecektir.

### 2.1 Modüler Grup ve Genişletilmiş Modüler Grup

Modüler grup elemanları kesirli lineer dönüşümler veya daha bilinen ismiyle Möbius dönüşümleri olan fonksiyonların bilinen bileşke işlemi altındaki gruptur. Daha açık olmak gerekirse  $z \in \mathbb{C}_\infty$  olmak üzere,

$$z \rightarrow w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.1)$$

şeklindeki fonksiyonların grubudur. Burada  $a, b, c$  ve  $d$  sayıları tam sayılardır ve  $ad - bc = 1$  dir. Şu durumda modüler grup literatürde alışlageldik biçimde  $\Gamma$  ile temsil edilirse,

$$\Gamma = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \quad (2.2)$$

şeklinde tanımlanabilir. Modüler grupta kapsanan fonksiyonlar kompleks düzlemi kendi üzerine birebir ve örten olarak resmeder. Ayrıca bir  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in \Gamma$  ve  $y > 0$  olmak üzere üst yarı düzlemde bir  $z = x + iy \in H$  noktası için;

$$\begin{aligned} w(x + iy) &= \frac{a(x+iy)+b}{c(x+iy)+d} \\ &= \frac{ax+b+iaiy}{cx+d+icy} \\ &= \frac{(acx^2+adx+bcx+bd+acy^2)+iy(ad-bc)}{(cx+d)^2+(cy)^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

elde edilir. Burada  $ad - bc = 1$  eşitliği gereği  $z = x + iy \in H$  üst yarı düzlemdeki noktanın görüntüsü yine üst yarı düzlemde olacaktır. Ek olarak bu fonksiyonlar yön koruyan otomorfizmalardır. Möbius dönüşümlerine ait daha detaylı bilgiler için [4]-[7] kaynakları incelenebilir.

Modüler grup ile  $2 \times 2$  tam sayı girdili matrislerin özel lineer grubu arasında yakın bir ilişki vardır.

$$SL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\} \quad (2.4)$$

Bu grup  $GL(2, \mathbb{Z})$  grubunun iki indeksli bir alt grubudur.

$$SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \Gamma \quad (2.5)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.6)$$

şeklinde tanımlanan dönüşümün bir grup epimorfizması olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda modüler grup  $SL(2, \mathbb{Z})$  grubunun projektivizasyonundan başka bir şey değildir. Daha açık olarak gruplar için 1. izomorfizma teoremi gereği;

$$SL(2, \mathbb{Z}) / \{\pm I\} \cong PSL(2, \mathbb{Z}) = \Gamma \quad (2.7)$$

Böylelikle modüler gruptaki her bir,

$$w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.8)$$

elemanı  $SL(2, \mathbb{Z})$  grubunda,

$$w = \pm \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

iki matrisle temsil edilebilir. Bu durumda matrislerdeki çarpma işlemi fonksiyonlardaki bileşke işlemine tekabül edecektir.

Modüler grup elemanlarını geometrik sınıflandırmak mümkündür. Bunun için bir Möbius dönüşümünün sabit noktası kavramına ihtiyaç duyulacaktır.

**2.1. Tanım :** Birimden farklı bir  $w(z) \in PSL(2, \mathbb{Z})$  için,

$$w(z) = z \quad (2.10)$$

denkleminin çözümlerine  $w(z)$  elemanının sabit noktaları denir.

Burada keyfi bir  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  nin sabit noktaları (2.10) denklemi çözülerek hesaplanabilir.

$$\frac{az+b}{cz+d} = z \quad (2.11)$$

$$cz^2 + (d - a)z - b = 0 \quad (2.12)$$

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(d-a)^2 + 4bc}}{2c} \quad (2.13)$$

Son denklemdede  $(d - a)^2 = (a + d)^2 - 4ad$  ve  $ad - bc=1$  kullanılırsa;

$$z_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad (2.14)$$

elde edilir. Karekök içerisindeki  $a + d$  tamsayısının  $w(z)$  fonksiyonunu temsil eden

$w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  matrisinin izi olduğu dikkate alınırsa birimden farklı her bir  $w(z)$

fonksiyonunun en az bir en çok iki sabit noktası olduğu sonucuna varılır. Modüler grup elemanları sabit bıraktıkları nokta sayıları üzerinden sınıflandırılırlar:

**2.2. Tanım :** [4] Modüler grupta birimden farklı bir  $w(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  elemanı verilsin.

- i.  $|a + d| > 2$  ise  $w(z)$  elemanının  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  üzerinde iki farklı sabit noktası vardır. Bu durumda  $w(z)$  elemanına hiperbolik eleman denir.
- ii.  $|a + d| = 2$  ise  $w(z)$  elemanının  $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$  üzerinde bir sabit noktası vardır. Bu durumda  $w(z)$  elemanına parabolik eleman denir.
- iii.  $|a + d| < 2$  ise  $w(z)$  elemanının  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  üzerinde iki farklı sabit noktası vardır. Bu durumda  $w(z)$  elemanına eliptik eleman denir.

Hiperbolik ve parabolik elemanlar sonsuz mertebeli olup eliptik elemanlar sonlu mertebelidir. Modüler grup iki mertebeli eliptik eleman

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad (2.15)$$

ve sonsuz mertebeli parabolik eleman

$$U(z) = z + 1 \quad (2.16)$$

elemanları tarafından üretilir. Bu elemanları temsil eden matrisler sırasıyla;

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

şeklinde olup izleri  $trT = 0$  ve  $trU = 2$  dir. Bu iki üreticinin çarpımından,

$$TU = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

üç mertebeli eliptik elemanı elde edilir. Böylece modüler grup için bir grup sunuşu;

$$PSL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, U : T^2 = (TU)^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 \quad (2.19)$$

biçimindedir. Burada  $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ , iki mertebeli devirli grup ile üç mertebeli devirli grubun serbest çarpımı anlamındadır.

**2.3. Sonuç:** [5] Modüler gruptaki sonlu mertebeli bir elemanın mertebesi iki ya da üçtür. Ayrıca mertebesi iki olan herhangi bir eleman  $T$  ye, mertebesi üç olan bir eleman da  $TU$  ya veya  $(TU)^2$  ye konjugedir.

**İspat:** Modüler grup  $PSL(2, \mathbb{R})$  nin ayrık bir alt grubudur. Sonlu mertebeli elemanlar eliptik elemanlardır. Ayrıca bunun tersi de doğrudur. Yani modüler gruptaki tüm eliptik elemanlar sonlu mertebelidir. Krosh alt grup teoremine göre bir serbest çarpım grubundaki sonlu mertebeli elemanlar çarpımı oluşturan gruplardan birindeki sonlu mertebeli bir elemana konjugedir.

$$G_1 = \langle T : T^2 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_2 \quad (2.20)$$

$$G_2 = \langle TU : (TU)^3 = 1 \rangle \cong \mathbb{Z}_3 \quad (2.21)$$

olup  $PSL(2, \mathbb{Z}) \cong G_1 * G_2$  olduğu görülebilir. Bu durumda  $G_1$  grubunda tek sonlu mertebeli eleman iki mertebeli eliptik eleman  $T$  dir. Ayrıca  $G_2$  grubunda da 3 mertebeli birbirine konjuge olmayan iki eleman vardır, bunlar  $TU$  ve  $(TU)^2$  dir.

$$G = \left\{ \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = -1 \right\} \quad (2.22)$$

kümesini göz önüne alalım.  $G$  kümesi bir grup olmamakla birlikte elemanlarına anti-otomorfizma adı verilir. Bu dönüşümler de üst yarı düzlemi yine üst yarı düzleme resmeder.  $G$  kümesinden alınan herhangi iki elemanın bileşkesinin modüler grupta olduğu



görülebilir. Ayrıca modüler gruptaki bir eleman ile  $G$  kümesindeki bir elemanın bileşkesinin yine  $G$  de olacağı açıktır. Bu durumda;

$$\bar{\Gamma} = \Gamma \cup G \quad (2.23)$$

kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre kapalıdır. Grup aksiyomlarının diğerleri de sağlandığından  $\bar{\Gamma}$  kümesi de bir grup olur. Üstelik modüler grup bu grubun iki indeksli bir alt grubudur. Dolayısıyla modüler grup  $\bar{\Gamma}$ 'nin bir normal alt grubudur. Bu yeni gruba genişletilmiş modüler grup denir.

$SL(2, \mathbb{Z})$  ile modüler grup arasında tanımlanan epimorfizmaya benzer olarak  $GL(2, \mathbb{Z})$  den genişletilmiş modüler gruba da bir epimorfizma tanımlanabilir.

$$GL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow \bar{\Gamma} \quad (2.24)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \rightarrow \frac{az+b}{cz+d} \quad (2.25)$$

Bu epimorfizmanın çekirdeği yine birim matris ve negatifinden  $\{\mp I\}$  oluşur. O halde genişletilmiş modüler grup  $\bar{\Gamma}$ ,  $GL(2, \mathbb{Z})$  nin kesirli lineer dönüşümlere projektivizasyonundan yani  $PGL(2, \mathbb{Z})$  'den başka bir şey değildir.

$$\mathbf{2.4. Sonuç:} \bar{\Gamma} \cong PGL(2, \mathbb{Z}) = PSL(2, \mathbb{Z}) \cup G = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} : a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = \mp 1 \right\}$$

Genişletilmiş modüler grupta kapsanan anti-otomorfizmaları üretmek için modüler grubun üreteçlerine  $R(z) = \frac{1}{z}$  elemanını eklemek yeterlidir. Gerçekten bir  $w(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$  anti-otomorfizması için,

$$\begin{aligned} w(z) &= \frac{bz+a}{dz+c} \circ \frac{1}{z} \\ &= \frac{b\frac{1}{z}+a}{d\frac{1}{z}+c} = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \end{aligned} \quad (2.26)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $ad - bc = -1$  eşitliğine dikkat ederek  $\frac{bz+a}{cz+d}$  dönüşümünün modüler grupta bir eleman olduğuna dikkat edilmelidir. Böylece genişletilmiş modüler gruptaki her bir elemanın  $T(z), U(z)$  ve iki mertebeli  $R(z)$  elemanları ile elde edilebileceği başka bir deyişle genişletilmiş modüler grubun  $T(z), U(z)$  ve  $R(z)$  elemanları ile

üretilebileceği ispatlanmıştır. Bu üreteçlerin birbirleri ile ilişkileri aşağıdaki sonuçta verilmiştir.

**2.5. Sonuç:**  $T(z) = -\frac{1}{z}$ ,  $U(z) = z + 1$  ve  $R(z) = \frac{1}{z}$  olmak üzere;

i)  $TR = RT$

ii)  $UR = RUTU$

Burada  $T(z)$ ,  $U(z)$  ve  $R(z)$  dönüşümleri yerine onların matris temsilcileri olan;

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$

kullanılırsa eşitliklerin sağlandığı kolayca görülebilir. Ayrıca  $TR = RT$  eşitliği kullanılarak

$$(TR)^2 = TRTR = TRRT = TT = 1 \quad (2.28)$$

$$(TUR)^2 = TURTUR = TUTRUR = TUTRRUTU = (TU)^3 = 1 \quad (2.29)$$

elde edilir. 1.3. Sonuç ispatındaki  $G_1$  ve  $G_2$  gruplarını bu sefer;

$$G_1 = \langle T, R: T^2 = R^2 = (TR)^2 = 1 \rangle \cong D_2 \quad (2.30)$$

$$G_2 = \langle TU, R: (TU)^3 = R^2 = (TUR)^2 = 1 \rangle \cong D_3 \quad (2.31)$$

şeklinde göz önüne alınıp her iki gruptaki  $R'$  nin aynı olmasından hareketle genişletilmiş modüler grubun, dört mertebeli dihedral grup  $D_2$  ile altı mertebeli dihedral grup  $D_3$  ün iki mertebeli devirli grup ile karışımli serbest çarpıma izomorf olduğu söylenebilir. Böylelikle aşağıdaki teorem ispatlanmış olur.

**2.6. Teorem:** Genişletilmiş modüler grup için bir grup sunuşu;

$$PGL(2, \mathbb{Z}) = \langle T, U, R: T^2 = (TU)^3 = R^2 = (TR)^2 = (TUR)^2 = 1 \rangle \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_3 \quad (2.32)$$

Genişletilmiş modüler gruptaki anti-otomorfizmalar da modüler gruptaki elemanlara benzer olarak sabit bıraktığı noktalara göre geometrik olarak sınıflandırılabilir. Bir

$$w(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in G \quad (2.33)$$

için  $w(z) = z$  denklemi;

$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} = z \quad (2.34)$$

$$cz\bar{z} + dz - a\bar{z} - b = 0 \quad (2.35)$$

Bu denklem  $c \in \mathbb{Z}$  sayısı ile bölünüp  $x, y \in \mathbb{R}$  olmak üzere  $z = x + iy$  yazılırsa;

$$x^2 + \frac{d-a}{c}x - \frac{b}{c} + y^2 + iy\frac{a+d}{c} = 0 \quad (2.36)$$

halini alır. Eşitliğin sağ tarafı  $0 \in \mathbb{R}$  olduğu için  $y = 0$  veya  $a + d = 0$  olmak üzere iki durum vardır.

Eğer  $y = 0$  ve  $a + d \neq 0$  ise denklem;

$$x^2 + \frac{d-a}{c}x - \frac{b}{c} = 0 \quad (2.37)$$

şeklinde olacaktır. Bu denklemin kökleri ise;

$$x_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 + 4}}{2c} \quad (2.38)$$

olur. Sonuç olarak izi  $a + d \neq 0$  olan bir anti-otomorfizma reel ekseninde iki sabit noktaya sahiptir.

Eğer  $a + d = 0$  ise;

$$x^2 + \frac{d-a}{c}x - \frac{b}{c} + y^2 = 0 \quad (2.39)$$

halini alır. Burada  $d = -a$  yazılıp eşitliğe  $\left(\frac{a}{c}\right)^2$  terimi eklenip çıkarılırsa;

$$x^2 + \frac{-2a}{c}x + \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \frac{b}{c} + y^2 = 0 \quad (2.40)$$

elde edilir. Şimdi  $d = -a$  eşitliği  $w(z)$  elemanının determinantı olan  $ad - bc = -1$  de kullanırsa  $a^2 + bc = 1$  olur ki son durumda;

$$\left(x - \frac{a}{c}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{c^2} \quad (2.41)$$

denklemini elde edilmiş olur. Bu ise merkezi  $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$  da olan ve yarıçapı  $r = \frac{1}{c}$  olan bir çember denklemdir. Sonuç olarak izi sıfır olan bir anti-otomorfizma reel eksene dik bir çember üzerindeki tüm noktaları sabit bırakır. Bu durumlar aşağıdaki özetlenmiştir:

Bir  $w(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in G$  antiotomorfizması;

i.  $a + d \neq 0$  ise reel ekseninde iki sabit noktası vardır. Bu durumda  $w(z)$  elemanına kayan yansıma denir.

ii.  $a + d = 0$  ise  $w(z)$  elemanının sabit noktalar kümesi merkezi  $\left(\frac{a}{c}, 0\right)$  da olan ve yarıçapı  $r = \frac{1}{c}$  olan bir çemberin üzerindeki tüm noktalardır. Bu durumda  $w(z)$  elemanına yansıma denir [4].

Bu çalışmanın konusu münasebetiyle genişletilmiş modüler grubun rasyonel sayılar kümesi üzerindeki hareketi dikkate alınacaktır.  $w(x) = \frac{ax+b}{cx+d} \in PGL(2, \mathbb{Z})$  için;  $x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$  kullanılırsa

$$w\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{ap+bq}{cp+dq} \quad (2.42)$$

elde edilir. Ayrıca  $(p, q) = 1$  aralarında asal olduklarından  $(ap + bq, cp + dq) = 1$  olur ki bu durum  $w\left(\frac{p}{q}\right) \in \mathbb{Q}$  olduğu anlamına gelir. Burada  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$  şeklinde bir sütun vektör ile temsil edilirse  $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  için;

$$w\left(\frac{p}{q}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

yazılabilir. Özel olarak  $\infty = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  ile gösterilirse;

$$w\left(\frac{1}{0}\right) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

elde edilir. Çalışmanın ilerleyen bölümlerinde de sıklıkla kullanılacak sonsuzun görüntüsü olan bu  $\frac{a}{c}$  sayısına  $w$  elemanının cusp noktası denir.

$\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$  şeklinde tanımlansın. Bir  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_\infty$  ve  $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in PGL(2, \mathbb{Z})$  birim eleman olmak üzere;

$$I \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

olduğu açıktır. Ek olarak  $w_1, w_2 \in PGL(2, \mathbb{Z})$  ve  $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}_\infty$  için;

$$w_1(w_2) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = (w_1 \cdot w_2) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (2.46)$$

sağlandığı da görülebilir. Özetle genişletilmiş modüler grubun  $\mathbb{Q}_\infty$  üzerindeki;

$$PGL(2, \mathbb{Z}) \times \mathbb{Q}_\infty \rightarrow \mathbb{Q}_\infty \quad (2.47)$$

$$\left( \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} ap + bq \\ cp + dq \end{pmatrix} \quad (2.48)$$

şeklindeki hareketi bir grup hareketidir.

Genişletilmiş modüler grubun üreteçleri  $T, U$  ve  $R$  olduğu için bir  $w \in PGL(2, \mathbb{Z})$  elemanı  $T, U$  ve  $R$  nin bir kelimesi olarak yazılabilir. Örnek olarak,  $w = U^2TU^5RURU^3T$  elemanının temsil ettiği dönüşüm;

$$w(x) = 2 - \frac{1}{5 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 - \frac{1}{x}}}}} \quad (2.49)$$

şeklinindedir. Görüleceği üzere genişletilmiş modüler grup ile sürekli kesirler arasında ilginç bir ilişki vardır. Bu durum detaylı olarak sonraki bölümde işlenecektir.

## 2.2 Sürekli Kesirler

Bu bölümde sürekli kesirler ile ilgili temel bilgiler verilecektir. Ardından genişletilmiş modüler grup ile ilişkilerine değinilecektir. Sürekli kesirler ile ilgili daha detaylı bilgiler için [8]-[11] kaynakları incelenebilir.

Sürekli kesirler Euclid algoritmasına dayanan matematiğin antik çağlardan beri ilgi çekici kavramlarından biridir. Bir örnek ile başlamak için 49 ve 22 sayılarına Euclid algoritması uygulanırsa;

$$49 = 22 \cdot 2 + 5 \quad (2.50)$$

$$22 = 5 \cdot 4 + 2 \quad (2.51)$$

$$5 = 2 \cdot 2 + 1 \quad (2.52)$$

eşitlikleri elde edilir. Yukarıdaki eşitlikler yardımıyla  $\frac{49}{22}$  rasyonel sayısı şu şekilde ifade edilebilir:

$$\frac{49}{22} = 2 + \frac{5}{22} \quad (2.53)$$

$$= 2 + \frac{1}{\frac{22}{5}} \quad (2.54)$$

$$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{2}{5}} \quad (2.55)$$

$$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{\frac{5}{2}}} \quad (2.56)$$

$$= 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} \quad (2.57)$$

Bu yazımı  $[2,4,2,2]$  şeklinde bir gösterimle temsil etmek de mümkündür. İşte elde edilen bu gösterime  $\frac{49}{22}$  rasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı denir.

**2.7. Tanım:** [8]  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  reel sayılar ve  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}} \quad (2.58)$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denilir ve  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  ile gösterilir. Eğer bir sonlu sürekli kesirde  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sayılarının hepsi tamsayı ise sürekli kesre sonlu basit sürekli kesir denir.

**2.8. Tanım :** [8]  $a_0, a_1, a_2, \dots$  reel bayılar ve  $a_1, a_2, \dots, a_n$  pozitif olmak üzere;

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}} \quad (2.59)$$

ifadesine sonsuz sürekli kesir denir ve  $[a_0, a_1, a_2, \dots]$  ile gösterilir. Eğer  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  sayılarının hepsi tamsayı ise sürekli kesre sonsuz basit sürekli kesir denir.

Verilen iki tamsayı için Euclid algoritması sonsuza dek devam etmeyeceğinden her rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesir temsili vardır. Bu durumun tersi de doğrudur. Yani her  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_n]$  basit bonlu sürekli kesir bir rasyonel sayıyı temsil eder. Matematik induksiyon ile gösterilmek istenirse;

$n = 0$  için  $[a_0] = a_0 \in \mathbb{Z}$  olup bir rasyonel sayıdır.  $0, 1, 2, \dots, n - 1$  sayıları için  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}]$  sürekli kesrinin bir rasyonel sayı olduğu varsayımıyla

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]} \quad (2.60)$$

şeklinde yazılabilir. İndüksiyon hipotezi gereği  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$  bir rasyonel sayı olup  $r, s \in \mathbb{Z}, s \neq 0$  olmak üzere  $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_n] = \frac{r}{s}$  olur. Böylelikle;

$$[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n] = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = \frac{a_0 r + s}{r} \in \mathbb{Q} \quad (2.61)$$

olur ki bu da aşağıdaki teoremin ispatıdır.

**2.9. Teorem:** [8] Bir  $\alpha \in \mathbb{R}$  nin rasyonel sayı olması için gerek ve yeter koşul  $\alpha$ 'nın sonlu basit sürekli kesir açılımına sahip olmasıdır.

Dikkat edilmesi gereken bir başka nokta da bir rasyonel sayının basit sürekli kesir açılımının tek türlü olmadığıdır. Bir örnekle göstermek gerekirse,

$$\frac{49}{22} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = [2, 4, 2, 2] \quad (2.62)$$

$$\frac{49}{22} = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = [2, 4, 2, 1, 1] \quad (2.63)$$

Bunun gibi farklı gösterimleri elde etmek de mümkündür.

**2.10. Tanım:** [8]  $\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$  sürekli kesir açılımı verilsin.  $\forall k \leq n, k \in \mathbb{Z}^+$  için  $C_k = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$  rasyonel sayısına sürekli kesrin  $k$ . yakınsayanı veya  $k$ . kısmi oranı denir.

Örneğin  $\frac{49}{22} = [2,4,2,2]$  sayısının yakınsayanları;

$$C_0 = [2] = 2 \quad (2.64)$$

$$C_1 = [2,4] = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} \quad (2.65)$$

$$C_2 = [2,4,2] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}} = \frac{20}{9} \quad (2.66)$$

$$C_3 = [2,4,2,2] = 2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}} = \frac{49}{22} \quad (2.67)$$

Görüleceği üzere  $n + 1$  tane sayı olarak ifade edilebilen bir  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$  sürekli kesir,  $n + 1$  tane  $C_k$  yakınsayan ile,  $2n + 2$  tane bu yakınsayanların pay ve paydaları olan  $p_k$  ve  $q_k$  sayıları ile ilişkilidir. Özellikle bu  $p_k$  ve  $q_k$  sayılarını bir iterasyon eşitliğiyle göstermek de mümkündür. Bu iterasyon eşitlikleri aşağıdaki teoremde açıklanmıştır.

**2.11. Teorem:** [8]  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$  sürekli kesir açılımı verilsin.  $\forall k \leq n, k \in \mathbb{Z}^+$  için  $C_k = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$  olsun. Buradaki  $p_k$  ve  $q_k$  sayıları aşağıdaki bağıntıları sağlar:

$p_0 = a_0$  ve  $p_1 = a_0 a_1 + 1$  olmak üzere  $k \geq 2$  için;

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2} \quad (2.68)$$

ve  $q_0 = 1$  ve  $q_1 = a_1$  olmak üzere  $k \geq 2$  için;

$$q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2} \quad (2.69)$$

**İspat :** Teoremin doğruluğu induksiyon ile gösterilecektir.

$k = 0$  için;

$$C_0 = [a_0] = \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1} \quad (2.70)$$

elde edilir.  $1 \leq k < n$  için iddianın doğru olduğu varsayımıyla;

$$C_{k+1} = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k, a_{k+1}] = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \quad (2.70)$$

yazılabilir. Bu sürekli kesrin en altındaki iki basamak  $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$  şeklinde ifade edilirse;



$$C_{k+1} = \left[ a_0, a_1, a_2, \dots, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right] \quad (2.71)$$

elde edilir. Tümevarım hipotezi gereği;

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= \frac{\left( a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) p_{k-1} + p_{k-2}}{\left( a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right) q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} \\ &= \frac{a_{k+1}(p_k) + p_{k-1}}{a_{k+1}(q_k) + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \end{aligned} \quad (2.72)$$

olur ki ispat biter.

Bir sürekli kesir verildiğinde  $p_k$  ve  $q_k$  sayılarının birbirleri ile ilişkisi aşağıdaki teoremden verilmiştir.

**2.12. Teorem :** [8]  $[a_0, a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n]$  sürekli kesir açılımı verilsin.  $\forall k \leq n, k \in \mathbb{Z}^+$  için  $C_k = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$  olsun. Buradaki  $p_k$  ve  $q_k$  sayıları için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \quad (2.73)$$

**İspat :** İspat için yine induksiyon kullanılırsa;

$k = 1$  için;  $p_1 q_0 - p_0 q_1 = (a_0 a_1 + 1)1 - a_0 a_1 = 1$  olup önerme doğrudur. İddianın  $1 \leq k < n$  eşitsizliğini gerçekleyen tüm  $k$  pozitif tamsayıları için gerçekleşeceği varsayımıyla,

$$p_k q_{k-1} - p_{k-1} q_k = (-1)^{k-1} \quad (2.74)$$

yazılabilir. Son olarak  $k + 1$  için;

$$\begin{aligned} p_{k+1} q_k - p_k q_{k+1} &= (a_{k+1} p_k + p_{k-1}) q_k - p_k (a_{k+1} q_k + q_{k-1}) \\ &= p_{k-1} q_k - p_k q_{k-1} \\ &= -(-1)^{k-1} = (-1)^k \end{aligned} \quad (2.75)$$

olur ki istenendir.

Buraya kadar basit sürekli kesirlerin bazı özellikleri gösterildi. Şimdi ise bir rasyonel sayının basit sürekli kesir açılımını elde etmeye yarayan algoritma tanıtılacaktır.

Bir  $\alpha$  rasyonel sayısı verildiğinde sürekli kesir açılımını elde etmek için çok farklı algoritmalar olmakla birlikte temeli  $\alpha$ 'nın pay ve paydasına Euclid algoritması uygulamaya dayanır.

$$1. \text{ Adım: } [\alpha] = r_0$$

$$2. \text{ Adım: } \frac{1}{\alpha - r_0} = \alpha_1$$

$$3. \text{ Adım: } [\alpha_1] = r_1$$

$$4. \text{ Adım: } \frac{1}{\alpha_1 - r_1} = \alpha_2$$

...

$$i. \text{ Adım: } [\alpha_n] = r_n$$

adımıyla algoritma sonlanır. Böylelikle  $\alpha = [r_0, r_1, \dots, r_n]$  sürekli kesir açılımını elde edilir.

Burada birinci adımda yapılan işlem  $\alpha$ 'yı geçmeyen en yakın sayıyı elde etmektir. Bu sebeple sonraki adımlarda elde edilen  $r_i$  sayıları negatif olmayacaktır.

**2.13. Örnek:**  $\frac{-22}{19}$  rasyonel sayısının sürekli kesir açılımını hesaplanmak istenirse;

$$\left[ \frac{-22}{19} \right] = -2 \tag{2.76}$$

$$\frac{1}{\frac{-22}{19} - (-2)} = \frac{19}{16} \tag{2.77}$$

$$\left[ \frac{19}{16} \right] = 1 \tag{2.78}$$

$$\frac{1}{\frac{19}{16} - 1} = \frac{16}{3} \tag{2.79}$$

$$\left[ \frac{16}{3} \right] = 5 \tag{2.80}$$

$$\frac{1}{\frac{16}{3}-5} = 3 \quad (2.81)$$

Böylelikle  $\frac{-22}{19}$  rasyonel sayısının basit sürekli kesir açılımı;

$$\frac{-22}{19} = -2 + \frac{1}{1+\frac{1}{5+\frac{1}{3}}} = [-2,1,5,3] \quad (2.82)$$

şeklinde elde edilir. Bu algoritma  $\alpha_i$  sayılarını geçmeyen en büyük tamsayılara yuvarlayarak çalışır. Benzer fikri  $\alpha_i$  sayılarını geçip de geri gelerek kullanılabilir. Bu durumda tam sayı sürekli kesri veya sonraki kat sürekli kesri olarak adlandırılan yeni bir sürekli kesir açılımı tanımı ile karşılaşılır.

**2.14. Tanım :** [12]  $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$  tamsayılar olmak üzere;

$$a_0 - \frac{1}{a_1 - \frac{1}{a_2 - \frac{1}{\ddots a_{n-1} - \frac{1}{a_n}}}} \quad (2.83)$$

ifadesine tamsayı sürekli kesir açılımı veya sonraki kat sürekli kesir açılımı denir.

Bölme algoritmasının aksine bir reel sayıyı geçen en küçük tamsayıdan geri gelme mantığına dayanır. Örneğin  $\frac{-22}{19}$  sayısı tekrar göz önüne alınırsa;

$$\begin{aligned} \frac{-22}{19} &= -1 - \frac{3}{19} \\ &= -1 - \frac{1}{\frac{19}{3}} = -1 - \frac{1}{7-\frac{2}{3}} \\ &= -1 - \frac{1}{7-\frac{1}{\frac{3}{2}}} = -1 - \frac{1}{7-\frac{1}{2-\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (2.84)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu durumda  $\frac{-22}{19} = [-1,7,2,2]$  olur. Tamsayı sürekli kesir algoritması literatürde sonraki kat algoritması olarak adlandırılır. Bu algoritma şu şekildedir:

1. Adım:  $[\alpha] = r_0$

2. Adım:  $\frac{1}{r_0 - \alpha} = \alpha_1$

3. Adım:  $[\alpha_1] = r_1$

4. Adım:  $\frac{1}{r_1 - \alpha_1} = \alpha_2$

...

i. Adım:  $[\alpha_n] = r_n$

**2.15. Örnek:**  $\frac{8}{5}$  rasyonel sayısına sonraki kat sürekli kesir algoritması uygulanırsa;

$$\left[ \frac{8}{5} \right] = 2 \quad (2.85)$$

$$\frac{1}{2 - \frac{8}{5}} = \frac{5}{2} \quad (2.86)$$

$$\left[ \frac{5}{2} \right] = 3 \quad (2.87)$$

$$\frac{1}{3 - \frac{5}{2}} = 2 \quad (2.88)$$

olup  $\frac{8}{5}$  sayısının tamsayı sürekli kesir açılımı;

$$\frac{8}{5} = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} = [2, 3, 2] \quad (2.89)$$

şeklinde elde edilir.

Sürekli kesirlerin genişletilmiş modüler grupla yakından ilişkisi vardır. Bu kapsamda literatürde var olan sonuçlara yapılan çalışmalar bölümünde yer verilecektir. Örnek olarak modüler gruptaki bir  $w = U^2TU^5TU^3T$  elemanın cusp noktası  $w(\infty)$  hesaplanmak istenirse;

$$w(\infty) = 2 - \frac{1}{5 - \frac{1}{3 - \frac{1}{\infty}}} = [2, 5, 3] = \frac{25}{14} \quad (2.90)$$

sayısı elde edilir. Görüleceği üzere cusp noktasının sürekli kesir açılımı ile kelimeyi oluşturan üreteçlerin kuvvetleri arasında bir eşleme vardır. O halde verilen bir rasyonel sayıyı cusp noktası kabul eden modüler grup elemanını bulmak için verilen rasyonel sayının tamsayı sürekli kesir açılımına ihtiyaç duyulacaktır. Bu sürekli kesir açılımı sonraki kat algoritmasından elde edilebileceği gibi özel bir graftaki yollar yardımıyla da elde edilebilir.

### 2.3 Farey Dizisi

Bu bölümde rasyonel sayılar kümesinin bir nevi listeleme yöntemi olan Farey dizisinden bahsedilecektir. Bu bölümdeki tanımlar [9] kaynaktan alınmıştır.

Matematiğe ilgili bir jeolog olan John Farey 1816 yılında Farey dizisini tanımlamış, yeni elemanların nasıl elde edilebileceğini ispatını vermeden yayımlamıştır. Bu sonuçları ispatlayan kişi ise Fransız matematikçi Augustin Louis Cauchy olmuştur. Temel olarak Farey dizisi bir kümeler dizisidir.

**2.16. Tanım:**  $n$ . mertebe Farey dizisi  $[0,1]$  aralığında kapsanan paydası  $n$ ' yi geçmeyen indirgenmiş rasyonel sayıların artan şekilde sıralamasıdır. Bu durumda 1. mertebe Farey dizisi paydası 1' i geçmeyen  $[0,1]$  aralığında kapsanan rasyonel sayılar olup sadece 0 ve 1'den ibaret olacaktır.

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.91)$$

Devam edilecek olursa 2. mertebe Farey dizisinde paydası 2' i geçmeyen  $[0,1]$  aralığında kapsanan rasyonel sayılar,  $F_1$  kümesinde kapsanan sayılara ek olarak  $\frac{1}{2}$  rasyoneli bulunacaktır.

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.92)$$

Aynı yöntem tekrarlanarak elde edilen diğer birkaç terim aşağıda verilmiştir.

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.93)$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.94)$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\} \quad (2.95)$$

Burada bu kümeleri yazarken elemanların artan bir sıralamayla yazılması önemlidir. Bu yazımda herhangi bir merteye Farey dizisinde yan yana gelen iki rasyonel sayıya Farey komşular denir.

John Farey  $(n + 1)$ . merteye Farey dizisine  $F_n$  deki sayılara ek olarak  $F_n$  deki sayıların medyanının geleceğini söylemiştir.

**2.17. Tanım:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  indirgenmiş rasyonel sayıları bir  $n \in \mathbb{N}$  için  $F_n$  kümesinde Farey komşusu olsun. Bu durumda;

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} \quad (2.96)$$

şeklinde tanımlanan toplamaya Farey toplamı denir.  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  indirgenmiş indirgenmiş kesirler olduğu için  $a + c$  sayısı ile  $b + d$  sayısı da aralarında asaldır. Yani  $\frac{a+c}{b+d}$  indirgenmiş bir rasyonel sayıdır. Bu  $\frac{a+c}{b+d}$  sayısına  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  nin medyanı denir.

Yukarıdaki tanımdan da anlaşılacağı üzere eğer  $b + d \leq n + 1$  eşitsizliği sağlanıyorsa  $(n + 1)$ . merteye Farey dizisinde  $F_n$  ' deki sayılar tamamen yazıldıktan sonra  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  nin arasına  $\frac{a+c}{b+d}$  yazılır. Burada  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarına  $\frac{a+c}{b+d}$  sayısının Farey ebeveynleri,  $\frac{a+c}{b+d}$  sayısına da  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarının Farey çocuğu denir.

Örneğin  $F_3$  ' te  $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{1}{2}$  nin Farey komşusu olduğu görülmektedir.  $\frac{1}{3}$  ve  $\frac{1}{2}$  nin medyanı

$$\frac{1}{3} \oplus \frac{1}{2} = \frac{1+1}{3+2} = \frac{2}{5} \quad (2.97)$$

sayısı paydası 4' ten büyük olduğu için  $F_4$  ' te yer almamakla birlikte  $F_5$  te yazılır. O halde  $F_{n+1}$  kümesi  $F_n$  deki tüm elemanlarına, paydası  $n + 1$  olan ve payı  $n + 1$  ' den küçük  $n + 1$  ile aralarında asal bir doğal sayı olan basit kesirlerin eklenmesiyle elde edilir. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

**2.18. Sonuç:**  $(n + 1)$ . merteye Farey dizisinin eleman sayısı;

$$|F_{n+1}| = |F_n| + \varphi(n + 1) \quad (2.98)$$

eşitliği ile verilir. Burada  $\varphi$  Euler' in  $\varphi$  fonksiyonudur.

Farey dizisinin modüler grupla bağıntı kuran aşağıda verilen sonuçtur.

**2.19. Sonuç:**  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  rasyonel sayıları Farey komşusu olması için gerek ve yeter koşul  $ad - bc = \pm 1$  eşitliğinin sağlanmasıdır.

Bir  $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in PGL(2, \mathbb{Z})$  elemanı için  $ad - bc = \pm 1$  olduğundan aşağıdaki sonuç verilebilir.

**2.20. Sonuç:** Bir  $w = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  elemanının genişletilmiş modüler grubun bir elemanı olması için gerek ve yeter koşul  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarının Farey komşusu olmalarıdır.

Farey dizisinin elemanlarını yani rasyonel sayıları bir graf ile temsil etmek de mümkündür. Bunun için öncelikle graf teoriye dair bazı tanımlamaları ihtiyaç duyulacaktır.

## 2.4 Graflar

Graf teori matematiğe 1736 yılında Leonard Euler'in ünlü makalesi "Königsberg'in yedi köprüsü" adlı çalışmayla girmiştir. Graf teori sadece bazı matematiksel problemlerin çözümünde kullanılmayan haricinde ekonomi, bilgi teknolojileri, iletişim, satış ve pazarlama, jeoloji gibi alanlarda da etkin bir şekilde kullanılmaktadır.

Bu bölümde graf teoriyle ilgili temel tanım ve kavramlara yer verilecektir. Bu bölüm [13]-[14] kaynaklarından yararlanılarak hazırlanmıştır.

**2.21. Tanım:** Bir graf bir köşe kümesi olan  $V$  ve bir kenar kümesi olan  $E$  kümelerinden oluşan  $G = G(V, E)$  ikilidir. Burada  $V$  nin elemanlarına köşeler,  $E$  nin elemanlarına ise kenarlar denir.  $E$  kümesine dahil olan her bir kenar  $V$  kümesinden iki köşe ile belirlidir. Bu iki köşeye kenarın uç noktaları adı verilir. Dolayısıyla bir kenar uç noktalarını birleştiren bir ayrıttır.

**2.22. Tanım:**  $G = G(V, E)$  bir graf ve  $u, v \in V$  için  $u$  ile  $v$  birbirine  $E$  kümesinden bir kenarla bağlanmışsa  $u$  ile  $v$  köşelerine komşudur denir. Ortak uç noktası olan iki kenara da komşu kenarlar denir.

**2.23. Tanım:**  $G = G(V_G, E_G)$  ve  $H = H(V_H, E_H)$  iki graf verilsin.  $V_H \subset V_G$  ve  $E_H \subset E_G$  sağlanıyorsa  $H$ ' ye  $G$ 'nin alt grafi denir.

**2.24. Tanım:** Uç noktaları aynı olan kenara yani bir köşeyi yine kendine komşu eden bir kenara bir ilmek denir. Farklı iki köşeyi birbirine bağlayan birden fazla kenar varsa bu duruma çoklu kenar denir.

**2.25. Tanım:** Bir ilmek ya da çoklu kenar barındırmayan grafa basit graf denir.

**2.26. Tanım:**  $G = G(V, E)$  bir graf ve  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  birbirinden farklı köşeleri verilsin. Eğer  $0 \leq i \leq n$  için  $u_{i-1}$  ile  $u_i$  komşu ise  $u_0$ 'dan  $u_n$  de bir yol vardır denir ve bu yol  $\langle u_0, u_1, \dots, u_n \rangle$  ile gösterilir.

**2.27. Tanım:** Bir yolu oluşturan kenarların sayısına yolun uzunluğu denir. İki köşe arasındaki yollardan en kısa olanına iki köşe arasındaki uzaklık denir. Bu en kısa yola da geodezik denir.

**2.28. Tanım:**  $G = G(V, E)$  bir graf ve  $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n \in V$  birbirinden farklı köşeleri verilsin. Eğer  $0 < i \leq n$  için  $u_{i-1}$  ile  $u_i$  komşu ve  $u_n$  ile  $u_0$ 'da komşu ise  $\langle u_0, u_1, \dots, u_n, u_0 \rangle$  yoluna bir döngü denir.

**2.29. Tanım:**  $G = G(V, E)$  bir graf ve her  $u, v \in V$  için  $u$ 'dan  $v$ 'ye bir yol varsa,  $G$  grafına bağlantılı graf denir.

**2.30. Tanım:** Bir grafın bir kenarının uç noktaları başlangıç ve bitiş gibi yön bilgisine sahipse bu kenara yönlendirilmiş kenar denir.

**2.31. Tanım:** Her kenarı yönlendirilmiş olan grafa yönlendirilmiş graf veya digraf denir.



**2.32. Tanım:** Bağlantılı bir grafta hiç döngü yoksa bu grafa bir ağaç denir.

## 2.5 Farey Ağacı

Farey grafi ya da Farey ağacı 1979 yılınra Matula ve Kornerup tarafından tanıtıldıktan sonra 1983'te Colburn tarafından birçok özelliği keşfedilmiştir[15]-[16]. Bu bölümde Farey ağacı ve bazı özelliklerine değinilecektir. Bu bölümdeki tanım ve sonuçlara [9], [17]-[20] kaynaklarından ulaşılabilir.

**2.33. Tanım:** Farey grafi köşe kümesi  $\mathbb{Q}_\infty$  olan bir graftır. Bu grafta iki köşenin bir kenarla bağlanması;

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad - bc = \pm 1 \quad (2.99)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Eğer Farey dizisi birer birim ötelenerek tüm rasyonel sayılar kümesinde tanımlanırsa Farey grafin elemanları Farey dizisinin elemanları olarak düşünülebilir. Böylece Farey dizisinde komşu olan iki rasyonel sayı Farey grafinde da komşu olacaktır.

Bu grafi oluşturmak için  $\infty = \frac{1}{0}$  olarak düşünülürse tüm tamsayılar  $\infty$  ile komşu olacaktır. Gerçekten bir  $a \in \mathbb{Z}$  için  $a = \frac{a}{1}$  ve buradan  $1 \cdot 1 - a \cdot 0 = 1$  olduğu görülebilir. Ayrıca ardışık iki tamsayının da Farey grafta komşudur çünkü  $n$  ve  $n + 1$  tamsayıları için  $n \cdot 1 - (n + 1) \cdot 1 = -1$  olup tanım gereği  $\frac{n}{1} \sim \frac{n+1}{1}$  sağlanır. O halde Farey grafta yeni komşular Farey dizisinde olduğu gibi Farey toplamı yardımıyla elde edilecektir. Şöyle ki  $a \in \mathbb{Z}$  tamsayısı ve ardışığı olan  $a + 1$  tamsayılarının Farey çocuğı olan;

$$\frac{a}{1} \oplus \frac{a+1}{1} = \frac{2a+1}{2} \quad (2.100)$$

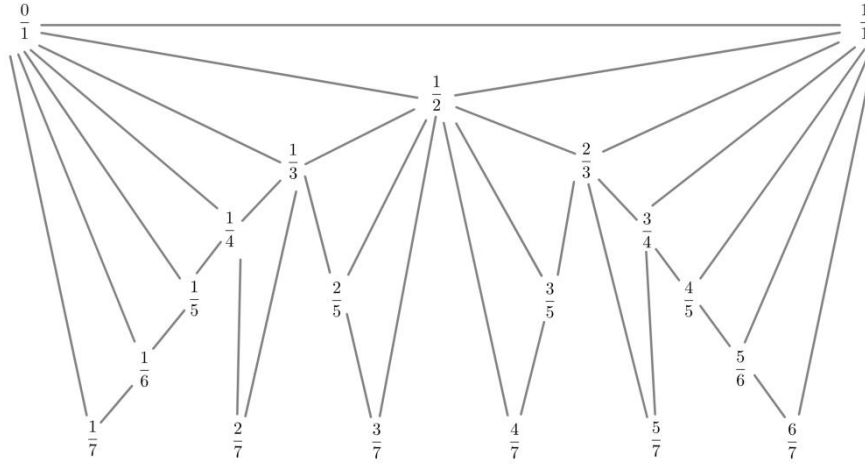
sayısı hem  $a$ 'ya ve hem de  $a + 1$ 'e komşu olur. Yeni komşular Farey toplamı yardımıyla elde edildiğinden bu grafta bir döngü yoktur.

Verilen  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  rasyonel sayıları için  $x \leq \frac{a}{b} \leq x + 1$  ve  $y \leq \frac{c}{d} \leq y + 1$  eşitsizliklerini sağlayan  $x, y$  tamsayıları mevcuttur.  $x$  ve  $x + 1$  arasındaki tüm rasyonel sayılar ardışık Farey toplamı ile elde edildiğinden  $\frac{a}{b}$  den  $x$  e bir yol vardır. Benzer durum  $\frac{c}{d}$  için de

geçerlidir. Yani  $\frac{c}{d}$  den  $y$ ' ye bir yol vardır.  $x$  ve  $y$ ' nin her ikisi de  $\infty = \frac{1}{0}$  ' a komşu olduklarından  $\frac{a}{b}$  den  $\frac{c}{d}$  ye bir yol elde edilmiş olur.

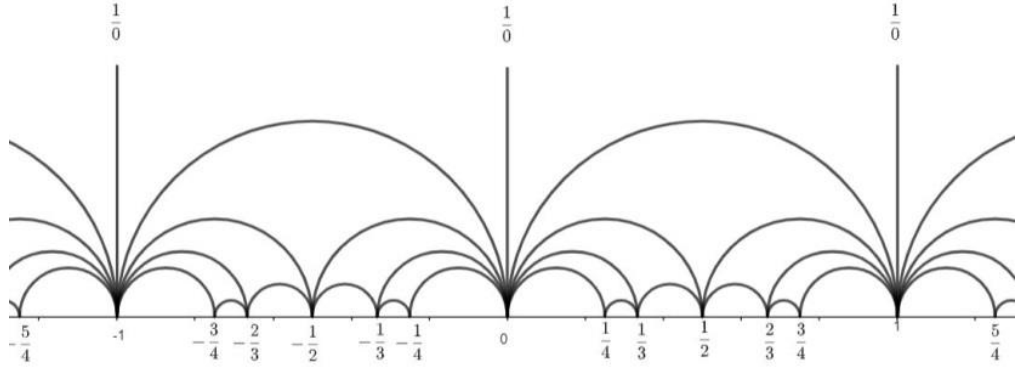
### 2.34. Sonuç: Farey graf bir ağaçtır.

Farey ağacının bir kısmını Şekil 2.1 den görülebilir.



**Şekil 2.1:** Farey ağacı.

Farey ağacının temel amacı rasyonel sayılar kümesinde çalışırken geometrinin avantajlarından yararlanmaktır. Bu bağlamda Farey ağacı hiperbolik üst yarı düzlemde de çizilebilir. Üst yarı düzlem modelinde iki nokta arası geodezikler ya  $x$  eksenine dik doğrular ya da  $x$  eksenine dik yarım çemberlerdir [21]. Rasyonel sayılar üst yarı düzlemin sınırı olan  $x$  ekseninde yerlerini alırken tamsayılar kendilerine  $x$  ekseninde dik birer doğruyla  $\infty$  a bağlanır. Ardından ardışık iki tamsayı bir yarı çemberle birbirine komşu olur. Böylece iki köşesi bu ardışık tamsayılarda diğer köşesi de  $\infty$ ' da olan büyük bir üçgen elde edilir. Ardışık iki tamsayının medyan kuralına göre Farey çocuğu hesaplanarak bu iki tamsayının arasındaki konumunu yarı çemberlerle komşu edilir. Böyle devam ederek üst yarı düzlemde Farey ağacı çizilmiş olur. Bir örneği Şekil 2.2 de görülebilir. Bu modelde  $\infty$  bir yer olarak gösterilmemiştir.



**Şekil 2.2:** Üst yarı düzlemde Farey ağacı.

Farey graf bir ağaç olduğu için üst yarı düzlem modelinde hiçbir yarı çember kesişmez.

Buraya kadar yapılanlar dikkate alınırsa Farey ağacının her bir katmanı bir önceki katmana Farey toplamı uygulanarak oluşturulur. Farey dizisinin de tanımı göz önüne alınırsa aşağıdaki teorem elde edilir.

**2.35. Teorem:** [17]  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_\infty$  verilsin. Bu durumda Aşağıdakiler denktir:

i)  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  Farey grafa komşudur.

ii)  $ad - bc = \pm 1$

iii)  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayıları  $\max\{b, d\} = n$  için  $F_n$  Farey dizisinde ardışık yer alır.

**2.36. Tanım:**  $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_\infty$  için Farey ağacında  $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$  olsun. Bir  $\frac{x}{y} \in \mathbb{Q}_\infty$  için  $\frac{c}{d} \sim \frac{x}{y} \sim \frac{a}{b}$  ise başka bir deyişle  $\frac{x}{y}$  sayısı  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarının Farey toplamı olarak elde edilmiş ise  $\frac{x}{y}$  sayısına  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarının Farey çocuğu,  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarına da  $\frac{x}{y}$  sayısının Farey ebeveynleri denir.

Farey ağacının birbirine komşu  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  iki elemanı için  $ad - bc = \pm 1$  olduğu bilinmektedir. Ayrıca bir  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısının sürekli kesir açılımında  $\frac{p_{i-1}}{q_{i-1}}, \frac{p_i}{q_i}$  ardışık

yakınsayanları iseler  $p_{i-1}q_i - p_iq_{i-1} = \mp 1$  olacağından Farey ağacı ile sürekli kesirler arasında yakından ilişki vardır.

**2.37. Teorem:** Bir  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  rasyonel sayısı verilsin. Farey ağacında  $\infty$ ' dan  $p$ ' ye giden her yol  $p$ ' nin bir Farey ebeveyninden geçer. Ayrıca  $\langle \infty, p_1, p_2, \dots, p_n = p \rangle$  Farey ağacında bir geodezik yol ise  $1 < i \leq n$  için  $p_{i-1}, p_i$ ' nin Farey ebeveynidir.

**İspat:** Eğer  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  bir tamsayı ise  $\infty \sim p$  olup iddia gerçekleşir. Eğer  $p$  tamsayı değil ise  $p$  rasyoneli tanım gereği  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  gibi iki rasyonelin Farey toplamı olarak elde edilir ve  $\frac{c}{d} \sim p \sim \frac{a}{b}$  sağlanır. Bu durumda  $p$  sayısı  $\frac{a}{b}$  ve  $\frac{c}{d}$  sayılarının Farey çocuğudur. Ayrıca  $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$  göz önüne alarak  $\infty$ ' dan  $p$ ' ye giden bir yolun  $\frac{a}{b}$  veya  $\frac{c}{d}$  ye uğramaması bu yolun  $\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}$  kenarı ile kesişmesi anlamına gelir ki bu mümkün değildir.

**2.38. Teorem:** [19] Bir  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  rasyonel sayısı verilsin. Farey ağacında  $\langle \infty, C_1, C_2, \dots, C_n = p \rangle$  nin bir yol olması için gerek ve yeter koşul  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sayılarının  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  rasyonel sayısının tamsayı sürekli kesir açılımında ardışık yakınsayanlar olmasıdır.

**İspat:** Bir  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  rasyonel sayısı için  $\langle \infty, C_1, C_2, \dots, C_n = p \rangle$  Farey ağacında bir yol olsun. İlk olarak  $C_1 \sim \infty$  olduğu için  $C_1 \in \mathbb{Z}$  olup  $C_1 = r_1 = \frac{p_1}{q_1}$  yazılır. Ardından  $C_2$  rasyonel sayısı Farey grafta  $C_1$ ' e komşu olduğundan  $C_2 = \frac{p_2}{q_2}$  için

$$p_2 \cdot q_1 - q_2 \cdot p_1 = p_2 - q_2 \cdot p_1 = \pm 1 \quad (2.101)$$

eşitliği sağlanır. Burada  $\frac{p_2}{q_2} = p_1 \pm \frac{1}{q_2}$  olur.  $r_2 = q_2$  seçilir. Benzer olarak  $1 < i \leq n$  için  $C_i = \frac{p_i}{q_i}$  olmak üzere  $p_i \cdot q_{i-1} - q_i \cdot p_{i-1} = \pm 1$  olacağından; öyle  $r_2, r_3, \dots, r_n$  tam sayıları bulunabilir ki;

$$C_i = \frac{p_i}{q_i} = r_1 - \frac{1}{r_2 - \frac{1}{r_{i-1} - \frac{1}{r_i}}} \quad (2.102)$$

olur ki bu da  $p = [r_1, r_2, \dots, r_n]$  olduğu anlamına gelir.

Karşıt olarak  $C_1, C_2, \dots, C_n$  sayıları bir  $p \in \mathbb{Q}_\infty$  rasyonel sayısının  $p = [r_1, r_2, \dots, r_n]$  tamsayı sürekli kesir açılımında ardışık yakınsayanlar olsun. İlk olarak  $r_1$  tamsayı olduğu için  $\infty \sim r_1$  olur. Ayrıca  $1 < i \leq n$  için  $C_i = \frac{p_i}{q_i}$  olmak üzere  $p_i \cdot q_{i-1} - q_i \cdot p_{i-1} = \pm 1$  olacağından her  $C_i$  yakınsayanı  $C_{i-1}$  ile Farey ağacında komşudur. Sonuç olarak

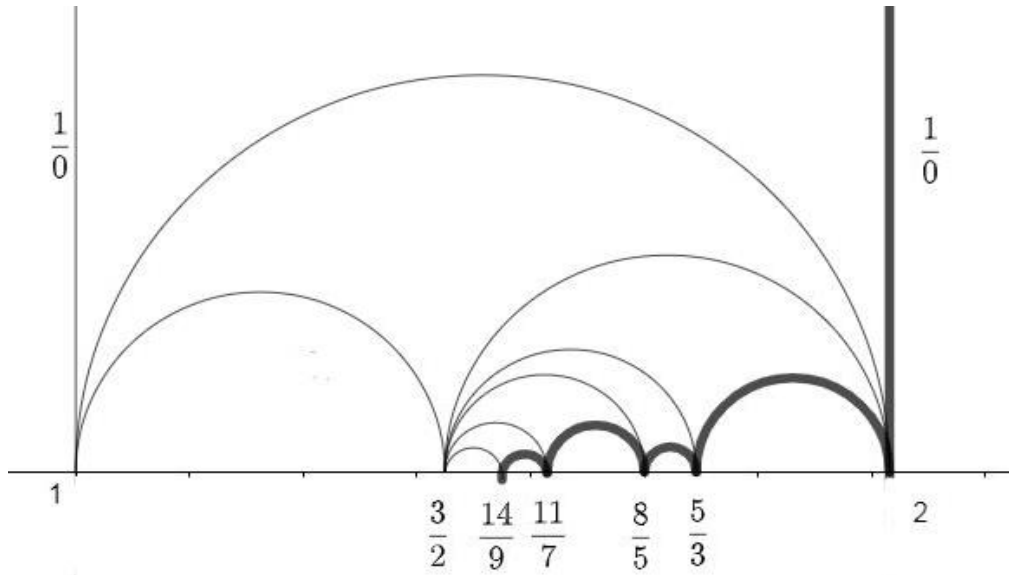
$$\langle \infty, C_1, C_2, \dots, C_n \rangle \quad (2.103)$$

Farey ağacında bir yoldur.

**2.39. Örnek:**  $\frac{14}{9}$  rasyonel sayısı verilsin. Bu sayının tamsayı sürekli kesir açılımı sonraki kat algoritmasına göre hesaplanabileceği gibi, Farey grafta  $\infty$ ' dan  $\frac{14}{9}$  a giden bir yol yardımıyla da elde edilebilir. Bu sebeple Farey grafta;

$$\langle \infty, 2, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{11}{7}, \frac{14}{9} \rangle \quad (2.104)$$

yolu seçilebilir.



**Şekil 2.3:** Farey grafta  $\infty$ ' dan  $\frac{14}{9}$  a giden bir yol.

Burada  $C_0 = 2, C_1 = \frac{5}{3}, C_2 = \frac{8}{5}, C_3 = \frac{11}{7}, C_4 = \frac{14}{9}$  sayıları  $\frac{14}{9}$  rasyonel sayısının tamsayı sürekli kesir açılımındaki ardışık yakınsayanlarıdır. Bu da  $\frac{14}{9}$  un

$$\frac{14}{9} = [r_0, r_1, r_2, r_3, r_4] \quad (2.105)$$

şeklinde bir tambayı sürekli kesir açılımına sahip olduğu anlamına gelir. Böylece;  $r_0 = C_0 = 2$  elde edilir. Ardından;

$$C_1 = \frac{5}{3} = r_0 - \frac{1}{r_1} = 2 - \frac{1}{r_1} \quad (2.106)$$

eşitliğinden  $r_1 = 3$  olur. Devam edilirse;

$$C_2 = \frac{8}{5} = [r_0, r_1, r_2] = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{r_2}} \quad (2.107)$$

olup  $r_2 = 2$  olur. Aynı hesaplama  $r_3$  için yapıldığında;

$$C_3 = \frac{11}{7} = [r_0, r_1, r_2, r_3] = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{r_3}}} \quad (2.108)$$

yazılabilir. Buradan  $r_3 = 2$  elde edilir. Son olarak;

$$C_4 = \frac{14}{9} = [r_0, r_1, r_2, r_3, r_4] = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{r_4}}}} \quad (2.109)$$

eşitliği yardımıyla  $r_4 = 2$  olur. Böylece  $\frac{14}{9} = [2, 3, 2, 2, 2]$  sürekli kesir açılımı elde edilmiş olur.

Genişletilmiş modüler grup ile Farey ağacının kesişme yeri de tam olarak tamsayı sürekli kesirlerdir. Bunu yukarıdaki örnekle göstermek gerekirse genişletilmiş modüler grupta

$$w = U^2TU^3TU^2TU^2TU^2T \quad (2.110)$$

elemanı göz önüne alınırsa;

$$w(x) = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{2 - \frac{1}{x}}}}} = \frac{14x-11}{9x-7} \quad (2.111)$$

olduğu görülür. Buradan,

$$w(\infty) = \frac{14}{9} \quad (2.112)$$

elde edilir.

### 3. YAPILAN ÇALIŞMALAR

Bu bölümde modüler grup ve genişletilmiş modüler grup ile ilgili alan yazında var olan ve bu çalışmayla ilgili olan çalışmalar incelenecektir.

Modüler grup ve genişletilmiş modüler grup matematiğin birçok dalıyla yakından ilgili olup araştırmacıların ilgi odağı olan bir konudur. Elemanları kompleks değişkenli fonksiyonlar olduğundan analiz, bu fonksiyonların karmaşık düzlem üzerindeki hareketi süreksiz olduğundan topoloji ve geometri, bir cebirsel grup yapısı olduğundan ve  $2 \times 2$  matrislerle olan ilişkisinden dolayı cebir, katsayıların ünlü sayı dizileri ile ilişkileri ve modüler formlar ve eliptik eğriler ile ilişkisi nedeniyle da sayılar teorisiyle yakından ilgilidir.

Modüler ve genişletilmiş modüler grubun alt gruplarının cebirsel yapısı [22]-[28] çalışmalarında verilmiştir.

Beardon, Hockman ve Short [18] çalışmada modüler grup elemanlarından;

$$S_{b_i}(z) = b_i + \frac{1}{z} \quad (3.1)$$

elemanlarını göz önüne alarak bir;

$$x = [b_0, b_1, \dots, b_n] \quad (3.2)$$

rasyonel sayısı için;

$$S_{b_0} \cdot S_{b_1} \dots S_{b_n}(\infty) = x \quad (3.3)$$

eşitliğini kullanmışlardır. Söz konusu çalışmada Farey grafta  $\infty$ ' dan  $x$ ' e bir geodezik yol inşa etmenin algoritması verilmiştir. Bunu yapmak için

$$\alpha: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}_\infty \quad (3.4)$$

her bir  $x$  rasyonel sayısını Farey graftaki en küçük paydaya sahip olan komşuya eşleyen birinci Farey ebeveyni fonksiyonunu tanımlamışlardır. Böylece Farey grafta  $\infty$ ' dan  $x$ ' e bir geodezik yolun  $x$ ' in bir geodezik sürekli kesir açılımı ile ilgili olduğunu ispatlamışlardır.

Short ve Walker [20] çalışmada bu tekniği modüler grubun daha genel bir sınıfı olan Hecke grupları için kullanmışlardır. Rosen [2] çalışmasında kendi adıyla anılan sürekli kesir açılımını tanıtmış ve bunu kullanarak Hecke gruplarındaki elemanların bir karakterizasyonunu vermiştir.

Short ve Beardon [19] çalışmalarında sürekli kesirlerle Möbius dönüşümleri arasındaki ilişkiyi Ford çemberleriyle tasvir etmişlerdir.

Short ve Walker [29] çalışmasında modüler grubun;

$$s(z) = -\frac{1}{z}; \quad h(z) = z + 2 \quad (3.5)$$

elemanları tarafından üretilen alt grubunu göz önüne almışlardır. Bu grup modüler grubun 3 indeksli bir alt grubu olup Teta grubu olarak adlandırılır. İlgili çalışmada bileşenleri çift tamsayılar olan çift tamsayı sürekli kesir açılımları Farey graf ve teta grup ilişkilendirilmiştir.

Jones, Singerman ve Wicks [17] çalışmada Farey graftaki yollar ile modüler grup elemanları arasındaki ilişkiyi vermiştir. Böylece modüler grubun cusp nokta kümesinin  $\mathbb{Q}_\infty$  olduğu vurgulanmıştır. Demir [30] çalışmasında genişletilmiş modüler grubun  $\mathbb{Q}_\infty$  üzerindeki geçişli hareketi üzerine çalışmıştır. Bu bağlamda verilen iki rasyonel sayıyı eşleyen modüler grup elemanı bu sayıların sürekli kesir açılımlarından yararlanılarak hesaplanmıştır.

Fine [31] çalışmasında modüler grupta iz sınıflarını belirlemiştir. Bunun için;

$$TS = z + 1, \quad TS^2 = \frac{z}{z+1} \quad (3.6)$$

dönüşümlerini göz önüne almıştır. Bu dönüşümleri blok olarak adlandırıp modüler grupta kapsanan her bir elemanın;

$$w = T^{i_0} S^{j_0} (TS)^{n_0} (TS^2)^{m_0} \dots (TS)^{n_r} (TS^2)^{m_r} T^{i_1} S^{j_1} \quad (3.7)$$

şeklinde temsil edilebileceğini göstermiştir. Ardından verilen bir  $d$  tamsayısı için izi  $d$  olan tüm dönüşümlerin konjuge sınıflarını veren bir algoritma vermiştir.



Koruoğlu ve diğerleri [32] çalışmalarında Fine' in sonuçlarını genişletilmiş modüler gruba genellemişlerdir. Bunun için genişletilmiş modüler gruptaki bir elemanın;

$$w = R^k T^{i_0} S^{j_0} (TS)^{n_0} (TS^2)^{m_0} \dots (TS)^{n_r} (TS^2)^{m_r} T^{i_1} S^{j_1} \quad (3.8)$$

şeklinde indirgenmiş blok forma sahip olacağını ispatlamışlardır. Bu çalışmalarda bahsi geçen blokların kuvvetleri;

$$(TS)^n = z + n, \quad (TS^2)^n = \frac{z}{nz+1} \quad (3.9)$$

şeklinindedir. Bu eşitliklerden hareketle genişletilmiş modüler grup ile basit sürekli kesirler arasında ilişki kurmak mümkündür. Örneğin

$$w = (TS)^3 (TS^2)^2 (TS)^4 (TS^2)^3 = 3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4 + \frac{1}{3 + \frac{1}{z}}}} \quad (3.10)$$

şeklinde ifade edilebilir. Koruoğlu [33] çalışmasında genişletilmiş modüler grupta bir elemanın cusp noktasını basit sürekli kesirler ile hesaplamıştır.

[34] çalışmasında ise bir  $z \in \mathbb{C}$  karmaşık sayısının genişletilmiş modüler gruptaki bir elemanın altındaki görüntüsü basit sürekli kesirler yardımıyla verilmiştir.

Koruoğlu ve Şahin [35] çalışmalarında;

$$f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad h = TSR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.11)$$

elemanlarını kullanarak genişletilmiş modüler gruptaki her elemanın  $f$  ve  $h$ ' nin kuvvetlerinin bir kombinasyonu olarak yazılabileceğini göstermişlerdir. Bu gösterime yeni indirgenmiş blok form ismini vermişlerdir. Burada özel olan bu matrislerin birer Fibonacci üreteç matrisi olmalarıdır. Bu elemanların kuvvetleri;

$$f^n = \begin{pmatrix} f_{n-1} & f_n \\ f_n & f_{n+1} \end{pmatrix}, \quad h^n = \begin{pmatrix} f_n & f_{n-1} \\ f_{n-1} & f_{n-2} \end{pmatrix} \quad (3.12)$$

şeklinindedir. Burada  $f_n$   $n$ . Fibonacci sayısıdır. Böylece genişletilmiş modüler gruptaki bir elemanı girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerin çarpımı olarak yazılmış olur. Örneğin yukarıda örnek olarak verilen  $w = (TS)^3 (TS^2)^2 (TS)^4 (TS^2)^3$  kelimesinde;

$$TS = Rf = hR, \quad TS^2 = Rh = fR \quad (3.13)$$

eşitlikleri kullanılırsa;

$$\begin{aligned} w &= hRRfhRRhfRRfhRRfhRRhfRRh \\ &= hfh^2f^2hfh^2fh \end{aligned} \quad (3.14)$$

yeni indirgenmiş blok formu elde edilebilir. Bu kelimedede blokların girdileri hep Fibonacci sayılarıdır.

Özetlemek gerekirse [31]-[35] çalışmalarında elde edilen sonuçlara göre genişletilmiş modüler grupta  $W = W(U, T, R)$  kelimesi  $TS$  ve  $TS^2$  bloklarının çarpımı olarak ifade edilebilir. Dahası  $W = W(TS, TS^2, R)$  kelimesi tüm girdileri Fibonacci sayıları olan  $W = W(h, f, R)$  halinde yazılabilir. [17]-[20] elde edilen sonuçlarla da bu kelimeleri temsil edecek sürekli kesir açılımları ve Farey graftaki yollar ilişkilendirilebilir.

Demir ve Koroğlu [36] çalışmada verilen bir rasyonel sayının sürekli kesir açılımı ile o rasyonel sayıyı cusp nokta kabul eden parabolik ve eliptik elemanları Farey graftaki yollarla hesaplamışlardır.

Sarıca ve diğerleri [37] çalışmada modüler grubun cusp noktaları ile Fibonacci dizisi arasındaki ilişkiyi Farey graftan yararlanarak açıklamışlardır. Verilen bir rasyonel sayının sürekli kesir açılımından hareketle o sayıyı cusp nokta kabul eden elemanları girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerle elde etmişlerdir.

Birol ve diğerleri modüler grubun;

$$X(z) = -\frac{1}{z-1}, \quad Y(z) = -\frac{1}{z+1} \quad (3.15)$$

elemanları tarafından üretilen  $H_{3,3}$  alt grubunda elemanların Fibonacci sayıları ile ilişkilerini incelemişlerdir. Modüler grupta verilen bir kelimenin girdileri Fibonacci ve Pell sayıları olan matrislerle elde edilmiştir [38], [39].

#### 4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA RASYONEL SAYILARIN SABİTLEYENLERİ

Bu bölümde temel amaç verilen bir rasyonel sayıyı sabit bırakan genişletilmiş modüler grup elemanlarını elde etmektir. Öncelikle Farey komşuluğu tanımını kullanılarak bir rasyonel sayıyı sabit bırakan elemanların matris temsilcileri elde edilecektir. Ardından bu rasyonel sayının sürekli kesir açılımı ve Farey graftaki yollar vasıtasıyla bu elemanların kelime formları elde edilecektir. Bu bölümdeki sonuçlar tamamen orijinal bulgular olup [3] kaynakta yayınlanmıştır.

Bir  $w = \frac{ax+b}{cx+d} \in PSL(2, \mathbb{Z})$  elemanının sabit noktalarının

$$x_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 - 4}}{2c} \quad (4.1)$$

eşitliği ile hesaplandığına önbilgiler bölümünde değinilmiştir. Burada  $x_{1,2}$  sabit noktalarının rasyonel sayı olması için  $(a+d)^2 - 4$  ifadesinin bir tam kare olması gerekir.  $\mu \in \mathbb{Z}$  olmak üzere;

$$(a+d)^2 - 4 = \mu^2 \quad (4.2)$$

eşitliğinden  $\mu = 0$  bulunur. Bu da;

$$trw = a+d = 2, -2 \quad (4.3)$$

olması anlamına gelir. Sonuç olarak bir rasyonel sayı ancak bir parabolik eleman tarafından sabit bırakılabilir. Bu düşünce genişletilmiş modüler grupta kapsanan bir anti otomorfizma için tekrarlanırsa  $ad - bc = -1$  olmak üzere  $w' = \frac{ax+b}{cx+d} \in PGL(2, \mathbb{Z})$  elemanının sabit noktaları;

$$x_{1,2} = \frac{a-d \pm \sqrt{(a+d)^2 + 4}}{2c} \quad (4.4)$$

ile verilmiştir. Bu eşitliğin bir rasyonel sayıyı belirtmesi için

$$trw' = a+d = 0 \quad (4.5)$$

olmalıdır. Bu da bir rasyonel sayıyı sabitleyen anti otomorfizmanın bir yansıma dönüşümü olacağı anlamına gelir.

Aşağıdaki teorem bir rasyonel sayının sabitleyenini bulmak için Farey komşularının basit bir uygulamasıdır.

**4.1. Teorem:** Bir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  verilsin. Eğer elemanı için  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{m}{k}$  sayıları  $\frac{p}{q}$ 'nin Farey komşulukları ise genişletilmiş modüler gruptaki sabit noktası  $\frac{p}{q}$  olan eleman;

$$V = \begin{pmatrix} ps - mq & pm - pr \\ qs - qk & pk - qr \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

şeklindedir.

**İspat:** Bir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  elemanının Farey komşulukları  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{m}{k}$  olsun. Farey komşuluğu tanımından;

$$ps - rq = \pm 1 \quad (4.7)$$

$$pk - mq = \pm 1 \quad (4.8)$$

olur. Böylece;

$$V_1 = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \text{ ve } V_2 = \begin{pmatrix} p & m \\ q & k \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

elemanları genişletilmiş modüler grupta olup her ikisinin de cusp noktası  $\frac{p}{q}$ 'dir. Yani;

$$V_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{p}{q} \quad (4.10)$$

Böylece  $V = V_2 \cdot V_1^{-1}$  elemanı için;

$$V \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = V_2 \cdot V_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (4.11)$$

$$= V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

elde edilir. Gerekli matris çarpımları yapılarak  $V$  elemanı teoremdeki şekilde elde edilir.

Yukarıdaki teoremde elde edilen  $V$  elemanının tipi hakkında yorum yapmak da mümkündür. Bunun için verilen Farey komşularının  $\frac{p}{q}$  ya göre konumu göz önüne

alınacaktır. Daha açık bir ifadeyle  $\frac{r}{s}$  sayısı  $\frac{p}{q}$  nun sol tarafında ise yani  $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$  ise  $ps - qr = 1$  aksi durumda  $ps - qr = -1$  olacaktır. Şu halde 4.1 Teorem de verilen  $V$  elemanın izi  $tr(V) = ps - mq + pk - qr = 0, \pm 2$  olacaktır. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilmiş olur.

**4.2. Sonuç:** Verilen bir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  elemanı için  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{m}{k}$  Farey komşuları olsun.

Eğer  $\frac{r}{s}, \frac{m}{k}$  sayıları  $\frac{p}{q}$  nun aynı tarafında ise 4.1 Teorem de elde edilen  $V$  parabolik eleman aksi taktirde yansıma elemandır.

**4.3. Örnek:**  $\frac{8}{3}$  rasyonel sayısı verilsin. Farey graf yardımıyla  $\frac{5}{2}$  ve  $\frac{13}{5}$  gibi iki Farey komşuluğunu seçilebilir.

4.1 Teorem kullanarak  $\frac{8}{3}$  rasyonel sayısını sabit bırakan  $V$  elemanını oluşturabilir.  $\frac{5}{2}, \frac{13}{5} \in N(\frac{8}{3})$  olup,  $\frac{5}{2} < \frac{13}{5} < \frac{8}{3}$  eşitsizliği gerçekleşir. 4.2 Sonuç gereği elde edilecek olan  $V$  elemanı parabolik eleman olacaktır. Bunun için öncelikle  $\frac{8}{3}$  ü cusp nokta kabul eden iki elemana ihtiyaç duyulacaktır. Bu elemanlar Teoremin ispatındaki yapıldığı gibi;

$$V_1 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \text{ ve } V_2 = \begin{pmatrix} 8 & 13 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

elde edilir. Bu iki eleman da  $\frac{8}{3}$  ü cusp nokta kabul eden matrislerdir. Dikkat edilirse  $\det(V_1) = \det(V_2) = 1$  olduğu görülür. Yani  $V_1$  ve  $V_2$  matrislerinin temsil ettiği dönüşümler birer otomorfizma dönüşümleridir. Şimdi 4.1 Teorem yardımıyla  $\frac{8}{3}$  rasyonel sayısını sabit bırakan  $V$  elemanı

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 16 - 39 & 104 - 40 \\ 6 - 15 & 40 - 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -23 & 64 \\ -9 & 25 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.14)$$

şeklinde oluşturulur. Burada beklendiği gibi  $\det(V) = 1$  ve  $tr(V) = 2$  olup  $V$  bir parabolik elemandır.

İkinci olarak  $\frac{8}{3}$  rasyonel sayısının  $\frac{5}{2}$  ve  $\frac{11}{4}$  gibi iki Farey komşuları göz önüne alınırsa bu iki rasyonel sayının Farey grafta  $\frac{8}{3}$  e göre farklı taraflarda bulunduğu görülebilir. Şu halde  $\frac{8}{3}$  ü cusp nokta kabul eden  $V_1$  ve  $V_2$  elemanları;

$$V_1 = \begin{pmatrix} 8 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 8 & 11 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

şeklinde oluşturulur. Burada Farey komşuların konumundan ötürü  $\det(V_1) = 8 \cdot 2 - 3 \cdot 5 = 1$  ve  $\det(V_2) = 8 \cdot 4 - 11 \cdot 3 = -1$  elde edilir. Sonuç olarak  $\frac{8}{3}$  rasyonel sayısını sabit bırakan  $V$  elemanı,

$$\begin{aligned} V &= \begin{pmatrix} 16 - 33 & 88 - 40 \\ 6 - 12 & 32 - 15 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -17 & 48 \\ -6 & 17 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.16)$$

elde edilmiş olur. Ayrıca  $\text{tr}(V) = 0$  olduğundan  $V$  bir yansıma elemanıdır.

Ek olarak [40] kaynağından  $V$  elemanı  $M(\frac{17}{6}, 0)$  merkezli ve  $r = \frac{1}{6}$  yarıçaplı çemberin üzerindeki noktaların tamamını sabit bırakır.

Buraya kadar elde edilen bulgularda verilen bir rasyonel sayıyı sabit bırakan genişletilmiş modüler grup elemanını bulmak için o rasyonel sayının dışında iki tane Farey komşusuna ihtiyaç duyulmaktadır. Aşağıdaki teorem Farey toplamı yardımıyla elde edilmiş olup Farey komşuya ihtiyaç duymadan verilen rasyonel sayıyı sabit bırakan genişletilmiş modüler grup elemanını elde etmek için kullanılabilir.

**4.4 Teorem:**  $\frac{p}{q}$  indirgenmiş rasyonel sayısı verilsin. Bu durumda  $\frac{p}{q}$  sayısını sabit bırakan modüler grup elemanı;

$$V = \begin{pmatrix} \pm 1 - pq & p^2 \\ -q^2 & \pm 1 + pq \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

şeklinindedir. Dahası bu  $V$  elemanı parabolik bir elemandır.

**İspat.**  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  elemanı verilsin.  $\frac{r}{s}$  elemanı  $\frac{p}{q}$  nun bir Farey komşusu olsun. Ardından  $\frac{p}{q}$  nun bir diğer Farey komşusunu elde edebilmek için Farey toplamından yararlanalım.

$$\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{p+r}{q+s} \quad (4.18)$$

Burada elde edilen  $\frac{p+r}{q+s}$  rasyonel sayısının  $\frac{p}{q}$  ile  $\frac{r}{s}$  arasında olacağına dikkat edilmelidir. Böylece  $\frac{p}{q}$  sayısının iki tane Farey komşusu elde edilmiş olur. Üstelik bu elde edilen Farey komşularının konumu  $\frac{p}{q}$  ya göre aynı taraftadır. Şimdi 4.1 Teorem kullanılarak:

$$V = \begin{pmatrix} \pm 1 - pq & p^2 \\ -q^2 & \pm 1 + pq \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

elemanı elde edilmiş olur. Bu eleman  $\frac{p}{q}$  yu sabit bırakan elemandır. Ayrıca  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{p+r}{q+s}$  Farey komşuları  $\frac{p}{q}$  nun aynı tarafında olduğundan ve 4.2 Sonuçtan elde edilen bu  $V$  elemanının parabolik olduğu açıktır. Bu durum

$$\text{tr}(V) = \pm 1 - pq \pm 1 + pq = \pm 2 \quad (4.20)$$

eşitliğinden de görülebilir.

Yukarıdaki teoremden kullanılan teknikle  $\frac{p}{q}$  rasyonelini sabit bırakan yansıma elemanı da yazılabilir. Bunun için Farey toplamını  $\frac{p}{q}$  nun Farey ebeveynlerini bulmak için kullanmak yeterlidir.

**4.5. Teorem:**  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  elemanı verilsin.  $\frac{r}{s}$  elemanı  $\frac{p}{q}$  nun Farey ebeveyni olsun. Bu durumda;

$$V = \begin{pmatrix} ps - pq + qr & p^2 - 2pq \\ 2qs - q^2 & -qr + qp - ps \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

elemanı  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  'u sabit bırakan yansıma dönüşümüdür.

**İspat.**  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  için,  $\frac{r}{s}$  rasyonel sayısı  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısının Farey ebeveyni olsun. Buradan hareketle  $\frac{p}{q}$  nun  $\frac{r}{s}$  den başka bir ebeveynini Farey dizilerinin medyan kuralı yardımı ile

bulunabilir. Çünkü  $\frac{r}{s}$  rasyonel sayısı  $\frac{p}{q}$  nun Farey ebeveyni olduğundan diğer ebeveyn ile Farey toplamının sonucu olarak  $\frac{p}{q}$  elde edilir. Bu bahsi geçen ebeveyn  $x$  ile gösterilirse;

$$x \oplus \frac{r}{s} = \frac{p}{q} \quad (4.22)$$

olur ve bu eşitlikten ;

$$x = \frac{p-r}{q-s} \quad (4.23)$$

elde edilir. Son durumda elimizde  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısı ve  $\frac{r}{s}$  ile  $\frac{p-r}{q-s}$  Farey ebeveynleri bulunmaktadır. Yani 4.1 Teoremin şartları mevcuttur. Açıkça ifade etmek gerekirse cusp noktası  $\frac{p}{q}$  olan iki elemanı;

$$V_1 = \begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \text{ ve } V_2 = \begin{pmatrix} p & p-r \\ q & q-s \end{pmatrix} \quad (4.24)$$

şeklinde yazmak mümkündür.

Burada Farey ebeveynlerinin konumundan hareketle  $\det(V_1) \cdot \det(V_2) = -1$  olacaktır. Yani  $V_1$  ve  $V_2$  den biri otomorfizma iken diğeri anti otomorfizmadır. Buradan  $V = V_2 \cdot V_1^{-1}$  elemanı  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısını sabit bırakır. Bu ifadeyi matematiksel olarak gösterirsek,

$$\begin{aligned} V \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} &= V_2 \cdot V_1^{-1} \cdot \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \\ &= V_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.25)$$

olur ki ispat biter. Ayrıca

$$V = \begin{pmatrix} ps - pq + qr & p^2 - 2pq \\ 2qs - q^2 & -qr + qp - ps \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

elemanın izi yani  $tr(V) = ps - pq + qr - qr + qp - ps = 0$  eşitiğinden hareketle  $V$  yansımaya elemanı olduğu sonucu ortaya çıkmıştır. Bu durumu 4.2 Sonuç kullanarak da görülebilir.



Ayrıca 4.5 Teoremde elde edilen  $V$  dönüşümü yalnızca verilen  $\frac{p}{q}$  sayısını değil ayrıca merkezi  $\left(\frac{(ps-pq+qr)}{(2qs-q^2)}, 0\right)$  ve yarıçapı  $r = \frac{1}{|2qs-q^2|}$  olan çember üzerindeki noktaların tamamını sabit bırakır.

Buraya kadar bir rasyonel sayıyı sabit bırakan parabolik ve yansıma elemanlarının matris temsilcileri elde edildi. Bunun için Farey komşuluklarından yararlandı. Bu nokta itibarıyla bu elemanlar üreticilerin bir kombinasyonu olarak kelime biçiminde elde edilmeye çalışılacaktır. Bunun için ise sürekli kesirler ve Farey graftaki yollardan yararlanılacaktır.

**4.6. Teorem:** Bir  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  rasyonel sayısının tam sayı sürekli kesir açılımı olsun. Bu durumda modüler gruptaki;

$$U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T \cdot U \cdot TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0} \quad (4.27)$$

elemanı  $\frac{p}{q}$  sayısını sabit bırakan parabolik elemandır.

**İspat.**  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  rasyonel sayısının tam sayı sürekli kesir açılımı verilsin. Tamsayı sürekli kesirler ve modüler grup üreticileri arasındaki ilişki yardımıyla cusp noktası  $\frac{p}{q}$  olan bir eleman yazılabilir. Söz konusu eleman

$$U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T \quad (4.28)$$

şeklinde olur. Bu elemanın cusp noktası  $\frac{p}{q}$  olduğundan;

$$(U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T) \cdot U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{p}{q} \quad (4.29)$$

sağlanır. O halde bu elemanın tersi olan ve  $\frac{p}{q}$  yu sonsuza resmeden eleman;

$$TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0} \quad (4.30)$$

biçiminde yazılabilir. Burada amaç  $\infty$ ' u sabit bırakan  $U$  parabolik üreticine konjuge bir eleman elde etmektir. Ek olarak modüler grubun parabolik üretici olan  $U$  nun sabit noktası sonsuz olup gerekli düzenleme ile aşağıdaki eşitlikler elde edilir.

$$\begin{aligned}
& (U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T).U.(TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \\
& (U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T).U \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \\
& (U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{4.31}
\end{aligned}$$

Böylece  $\frac{p}{q}$  yu sabit bırakan modüler grup elemanı modüler grubun üretçilerinin bir kombinasyonu olarak;

$$W = W(U, T) = U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T . U . TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0} \tag{4.32}$$

şeklinde elde edilir. Teoremin ikinci kısmı bu kelimenin bir parabolik eleman olduğunu ispatlamaktır. Matrislerin izi ile ilgili bilinen  $tr(AB) = tr(BA)$  eşitliğinde yararlanarak

$$\begin{aligned}
& tr(U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T . U . TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}) \\
& = tr(TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T . U.) \\
& = tr(U) = 2 \tag{4.33}
\end{aligned}$$

elde edilir ki teoremde verilen kelime parabolik bir elemandır. Ayrıca bu kelime  $U$  üreticine konjuge olduğu için de parabolik olacağı açıktır.

Yukarıda verilen bir rasyonel sayının tamsayı sürekli kesir açılımını kullanarak o sayıyı sabitleyen parabolik elemanın kelime formu elde edildi. Bu kelime  $U$  üreticine konjuge olduğu için bu elemanın her bir tamsayı kuvveti de  $U'$  ya konjuge olacaktır. Ayrıca modüler grupta bir rasyonel sayıyı sabitleyen elemanlar devirli bir grup olur. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

**4.7 Sonuç:**  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n] \in \mathbb{Q}$  tam sayı sürekli kesri ve  $0 \neq k \in \mathbb{Z}$  olmak üzere

$$(U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T).U^k.(TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}) \tag{4.34}$$

parabolik dönüşümü  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısını sabit bırakır.

Benzer yöntem kullanılarak tamsayı sürekli kesir açılımı verilmiş olan bir  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısını sabitleyen yansıma elemanı da elde edilebilir. Bu durumda  $\infty$ ' u sabit bırakan  $U$  parabolik elemanı yerine;

$$RTU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

yansıma elemanını kullanmak yeteri olacaktır. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

**4.8. Teorem:**  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  tamsayı sürekli kesri ile verilen rasyonel sayı aşağıdaki yansıma dönüşümü yardımıyla sabit kalır.

$$(U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T) . RTU . (TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}) \quad (4.36)$$

**İspat.** Öncelikle  $RTU = -\bar{z} - 1$  dönüşümü  $\infty$ ' u sabit bırakan bir anti otomorfizma olup matris temsilcisi;

$$RTU = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

şeklindedir. Gerçekten;

$$RTU \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

olduğu görülebilir. Burada 4.6 Teorem ispatındaki teknikle

$$(U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T) . RTU . (TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0}) \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} =$$

$$U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T . RTU . \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

eşitlikleri yazılabilir. Böylece

$$U^{r_0}TU^{r_1}TU^{r_2}T \dots U^{r_n}T . RTU . TU^{-r_n}TU^{-r_{n-1}}T \dots U^{-r_1}TU^{-r_0} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \quad (4.40)$$

elde edilir. Ayrıca bu kelimedede sadece bir tane  $R$  olduğundan bu kelimenin temsil ettiği dönüşüm bir anti-otomorfizma olup  $RTU$ ' ya konjuge olduğundan bir yansıma elemanıdır. Buraya kadar elde edilen sonuçların gösterildiği bir örnek aşağıda verilmiştir.

**4.9. Örnek:**  $\frac{8}{5}$  rasyonel sayısı verilsin. Bu rasyonel sayının tamsayı sürekli kesir açılımı sonraki kat algoritması kullanılarak;

$$\frac{8}{5} = 2 - \frac{1}{3 - \frac{1}{2}} = [2; 3, 2] \quad (4.41)$$

şeklinde elde edilebilir. Bu tamsayı sürekli kesir açılımı dikkate alınarak  $\frac{8}{5}$  sayısını sabit bırakan parabolik ve yansıma dönüşümlerini 4.1 Teorem ve 4.2 Teorem yardımıyla hesaplanır.

$\frac{8}{5}$  rasyonel sayısını sabit bırakan parabolik dönüşüm,

$$(U^2TU^3TU^2T).U.(TU^{-2}TU^{-3}TU^{-2}) = \begin{pmatrix} -39 & 64 \\ -25 & 41 \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Ayrıca sıfırdan farklı her  $k$  tamsayısı için;

$$(U^2TU^3TU^2T).U^k.(TU^{-2}TU^{-3}TU^{-2}) \quad (4.43)$$

parabolik elemanlarının hepsinin sabit noktası  $\frac{8}{5}$  tir.

$\frac{8}{5}$  rasyonel sayısını sabit bırakan yansıma dönüşüm,

$$(U^2TU^3TU^2T).RTU.(TU^{-2}TU^{-3}TU^{-2}) \quad (4.44)$$

şeklindedir.

Fine' ın [31] çalışmasından modüler grupta kapsanan elemanların;

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

blokları yardımıyla ifade edileceği ve bu gösterime indirgenmiş blok form dendiği bilinmektedir. Şöyle ki modüler grupta kapsanan bir eleman

$$S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j \quad (4.46)$$

şeklinde bir indirgenmiş kelime olarak ifade edilebilir. Burada  $i = 0,1,2$ ,  $j = 0,1$  ve  $m_0$  ve  $n_k$  sıfır olabilir. Örneğin modüler gruptaki;

$$U^2TU^3TU^2T \quad (4.47)$$

kelimesinde  $U = TS$  yazılırsa;

$$(TS)^2T(TS)^3T(TS)^2T = TSTSTTSTSTSTTSTST \quad (4.48)$$

elde edilir. Burada  $S$ ' nin 3 mertebeli ve  $T$ ' nin 2 mertebeli birer eleman olduğu da göz önüne alınır;

$$TS.TS^2TS.TS^2.TS.T \quad (4.49)$$

indirgenmiş blok formu elde edilir.

Ayrıca Koroğlu' nun [33] çalışmasından genişletilmiş modüler gruptaki bir elemanın

$$S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^jR^p \quad (4.50)$$

formunda yazılabileceği bilinmektedir. Burada  $i = 0,1,2$ ,  $j = 0,1$  ve  $m_0$  ve  $n_k$  sıfır olabilir. Ayrıca  $p = 0$  olursa bu eleman bir otomorfizma  $p = 1$  durumunda ise bir anti-otomorfizma olacaktır. Çünkü  $R$  iki mertebeli bir eleman olup;

$$TR = RT \quad (4.51)$$

$$RS = S^2R \quad (4.52)$$

ilişkilerini sağlar. Özetle bir anti-otomorfizmanın indirgenmiş blok formunda  $R$  ' ler kelimenin sonunda toplanabilir. Örneğin;

$$W = U^2RTRU^3TRU^2T \quad (4.53)$$

kelimesi için yine  $U = TS$  yazılırsa;

$$(TS)^2RTR(TS)^3TR(TS)^2T = TSTSRTSTSTSTRTSTST \quad (4.54)$$

elde edilir. Bu son halde  $R$  ' ler en sona getirilmek istenirse;

$$\begin{aligned} W &= TSTSTRRTSTSTSTTS^2TS^2TR \\ &= TS.TS^2.R \end{aligned} \quad (4.55)$$

en sade haliyle elde edilmiş olur. Bu bilgiler eşliğinde burada verilen bir rasyonel sayıyı sabitleyen elemanın indirgenmiş blok formu elde edilecektir.

**4.10. Teorem:** Bir  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  rasyonelinin tamsayı sürekli kesir açılımı verilsin.

O halde  $\frac{p}{q}$  sayısını sabitleyen parabolik elemanın indirgenmiş blok formu aşağıda verilmiştir.

$$W = (T, S, R) = (TS)^{r_0-1}. (TS^2). (TS)^{r_1-2}. (TS^2) \dots (TS)^{r_{n-1}-2}. (TS^2). (TS)^{r_n-1}. (TS^2)^{-1}. (TS)^{-r_n-1}. (TS^2). (TS)^{-r_{n-1}-2}. (TS^2) \dots (TS)^{-r_1-2}. (TS^2). (TS)^{-r_0-1} \quad (4.57)$$

**İspat.** 4.6. Teoremden tamsayı sürekli kesir açılımı verilmiş  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  rasyonel sayısı sabitleyen elemanın U ve T üreteçleriyle yazılmış kelimesi

$$W = W(U, T) = U^{r_0} T U^{r_1} T U^{r_2} T \dots U^{r_n} T . U . T U^{-r_n} T U^{-r_{n-1}} T \dots U^{-r_1} T U^{-r_0} \quad (4.58)$$

şeklindedir. Burada  $U = TS$  yazılırsa;

$$W(T, S, R) = (TS)^{r_0}. T. (TS)^{r_1}. T \dots (TS)^{r_{n-1}}. T. (TS)^{r_n}. T. (TS). T. (TS)^{-r_n}. T. (TS)^{-r_{n-1}}. T \dots (TS)^{-r_1}. T. (TS)^{-r_0} \quad (4.59)$$

halini alır. İki mertebeli  $T$  üreteçlerinden yan yana gelenlerin silinmesiyle;

$$W(T, S, R) = (TS)^{r_0-1}. TS. T. TS. (TS)^{r_1-2} .. TS. T. TS. (TS)^{r_{n-1}-2}. TS. T. TS. (TS)^{r_n-1}. T. (TS). T. (TS)^{-r_n-1}. TS. T. TS. (TS)^{r_n-2}. TS. T \dots TS. (TS)^{-r_1-2}. TS. T. TS. (TS)^{-r_0-1} \quad (4.60)$$

olur. Gerekli düzenlemelerin ardından;

$$W(T, S, R) = (TS)^{r_0-1}. (TS^2). (TS)^{r_1-2}. (TS^2) \dots (TS^2). (TS)^{r_{n-1}-2}. (TS^2). (TS)^{r_n-1}. (TS^2)^{-1}. (TS)^{-r_n-1}. (TS^2). (TS)^{-r_n-2}. (TS^2) \dots (TS^2). (TS)^{-r_1-2}. (TS^2). (TS)^{-r_0-1} \quad (4.61)$$

kelimesi elde edilir ve ispat sona erer.

Benzer düşünce tamsayı sürekli kesir açılımı verilmiş bir rasyonel sayıyı sabitleyen yansıma elemanı için uygulanırsa aşağıdaki teorem elde edilmiş olur.

**4.11. Teorem:** Bir  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  rasyonelinin tamsayı sürekli kesir açılımı verilsin.

O halde  $\frac{p}{q}$  sayısını sabitleyen yansıma elemanın indirgenmiş blok formu aşağıda verilmiştir

$$\begin{aligned} W(T, S, R) &= (TS)^{r_0-1}. (TS^2). (TS)^{r_1-2}. (TS^2) \dots (TS^2). (TS)^{r_{n-1}-2}. \\ &(TS^2). (TS)^{r_n}. (TS^2)^{-r_n-2}. (TS). (TS^2)^{-r_{n-1}-2}. (TS) \dots \\ &(TS) (TS^2)^{-r_1-2}. (TS). (TS^2)^{-r_0-1}. R \end{aligned} \quad (4.62)$$

**İspat:** 4.8. Teoremden tamsayı sürekli kesir açılımı  $\frac{p}{q} = [r_0; r_1, r_2, \dots, r_n]$  olan bir rasyonel sayıyı sabitleyen yansıma elemanının U, R ve T üreteçlerinin bir kelimesi olarak;

$$W(U, T, R) = U^{r_0} T U^{r_1} T U^{r_2} T \dots U^{r_n} T . R T U . T U^{-r_n} T U^{-r_{n-1}} T \dots U^{-r_1} T U^{-r_0} \quad (4.63)$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $U = TS$  eşitliği kullanıldığı takdirde;

$$\begin{aligned} W(T, S, R) &= (TS)^{r_0}. T. (TS)^{r_1}. T \dots (TS)^{r_{n-1}}. T. (TS)^{r_n}. T. \\ &(RTTS). T. (TS)^{-r_n}. T. (TS)^{-r_{n-1}}. T \dots (TS)^{-r_1}. T. (TS)^{-r_0} \\ &= (TS)^{r_0-1}. TS. T. TS. (TS)^{r_1-2} .. TS. T. TS. (TS)^{r_{n-1}-2}. \\ &TS. T. TS. (TS)^{r_n-1}. T. (RS). T. TS. (TS)^{-r_n-2}. TS. T. TS. (TS)^{-r_n-2}. \\ &TS. T \dots TS. (TS)^{-r_1-2}. TS. T. TS. (TS)^{-r_0-1} \end{aligned} \quad (4.64)$$

kelimesi elde edilir. Burada genişletilmiş modüler grubun sunuşundaki;

$$(TR)^2 = (SR)^2 = I \quad (4.65)$$

bağıntılardan türetilen;

$$TR = RT \quad (4.66)$$

$$SR = RS^2 \quad (4.67)$$

ilişkileri kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
W(T, S, R) &= (TS)^{r_0-1}. (TS^2). (TS)^{r_1-2}. (TS^2) \dots (TS^2). (TS)^{r_{n-1}-2}. \\
&(TS^2). (TS)^{r_n}. (TS^2)^{-r_n-2}. (TS). (TS^2)^{-r_{n-1}-2}. (TS) \dots \\
&(TS) (TS^2)^{-r_1-2}. (TS). (TS^2)^{-r_0-1}. R
\end{aligned} \tag{4.68}$$

elde edilir ki ispat sona erer.

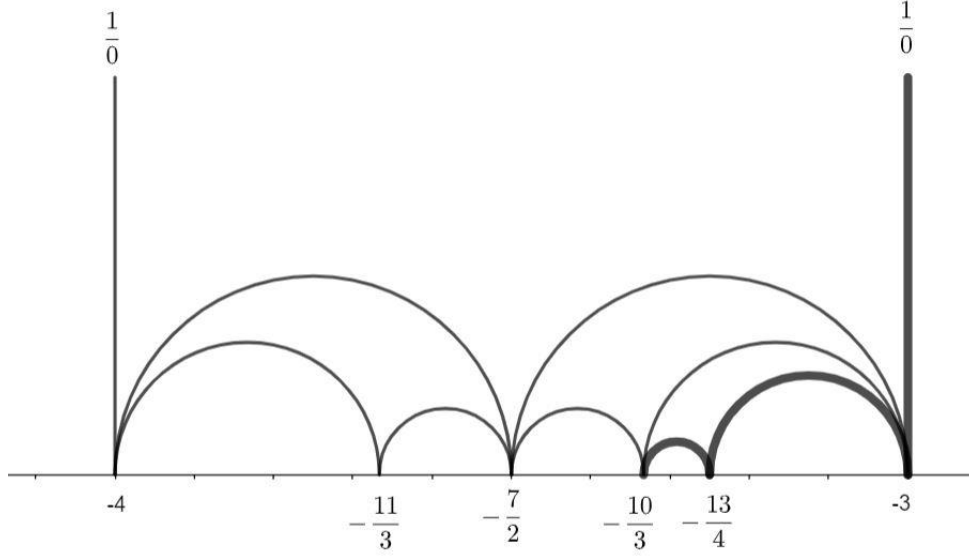
Çalışmanın buraya kadar olan bölümünde özetle bir  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısını sabitleyen parabolik ve yansıma elemanlarının önce matris temsilcileri, ardından U ve T üreteçlerinin bir kombinasyonu olan bir kelime biçiminde ve  $TS$ ,  $TS^2$  bloklarıyla indirgenmiş blok formu elde edildi. Bahsi geçen elemanların elde edilmesinde  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısının tamsayı sürekli kesir açılımı önemli rol oynamıştır. Bu tamsayı sürekli kesir açılımını Farey grafta  $\infty$ ' dan  $\frac{p}{q}$  ya giden yollarla hesaplamanın mümkün olduğu bilinmektedir. Şu durumda verilen bir  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısını sabitleyen elemanların kelime ve indirgenmiş blok formları Farey graftaki yollar vasıtasıyla da elde edilebilir. Bu durumu aşağıdaki açıklamaya çalışacağız.

**4.12. Örnek:** Verilen rasyonel sayı  $\frac{-10}{3}$  olsun. Farey grafta  $\infty$ ' dan  $\frac{-10}{3}$  e giden bir yol

$$\langle \infty, -3, \frac{-13}{4}, \frac{-10}{3} \rangle \tag{4.69}$$

şeklinde seçilsin. Bu yol 4.1 Şekilde görülebilir.





**Şekil 4.1:** Farey grafta  $\infty$ ' dan  $-\frac{10}{3}$  e giden bir yol.

Bu yolun her bir köşesi  $-\frac{10}{3}$ , ün tamsayı sürekli kesir açılımında bir yakınsayandır. Şu halde  $-\frac{10}{3}$ , ün yakınsayanları;

$$C_0 = -3 \quad (4.70)$$

$$C_1 = \frac{-13}{4} \quad (4.71)$$

$$C_2 = \frac{-10}{3} \quad (4.72)$$

şeklindedir. Böylece  $-\frac{10}{3}$ , ün tamsayı sürekli kesir açılımı;

$$-3 - \frac{1}{4-\frac{1}{1}} = [-3; 4, 1] \quad (4.73)$$

elde edilir. O halde bu yola karşılık gelen parabolik ve yansıma elemanlarının indirgenmiş blok formları;

$$W(T, S, R) = (TS)^{-4}. (TS^2). (TS)^2. (TS^2). (TS)^0. (TS^2)^{-1}. (TS)^{-2}.$$

$$(TS^2). (TS)^{-6}. (TS^2). (TS)^2$$

$$W(T, S, R) = S^2. (TS^2)^2. (TS)^2. (TS^2)^4. (TS)^3 \quad (4.74)$$

$$W(T, S, R) = (TS)^{-4}. (TS^2). (TS)^2. (TS^2). (TS)^1. (TS^2)^{-3}. (TS).$$

$$(TS^2)^{-6}. (TS). (TS^2)^2. R$$

$$W(T, S, R) = S^2 \cdot (TS^2)^2 \cdot (TS)^3 \cdot (TS^2)^3 \cdot (TS)^3 (TS^2)^3 \cdot R \quad (4.75)$$

Genişletilmiş modüler grup elemanlarının girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerin çarpımı olarak yazılabileceği [35] kaynaktan bilinmektedir. Bunun için

$$f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4.76)$$

$$h = TSR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (4.77)$$

blokları kullanılmıştır. Bu blokların kuvvetleri;

$$f^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} \quad (4.78)$$

$$h^k = \begin{pmatrix} f_{k+1} & f_k \\ f_k & f_{k-1} \end{pmatrix} \quad (4.79)$$

şeklinde-dir. Burada  $f_k$  sembolü  $k$ . Fibonacci sayısını gösterir. Bu nedenle genişletilmiş modüler grubun her bir elemanı,  $f$  ve  $h$  cinsinden bir kelime ile ifade edilebilir. Bu tanımlanan elemanlar yeni blok form olarak adlandırılır. Burada verilen yeni bloklar ile  $TS$  ve  $TS^2$  blokları arasında;

$$TS = Rf = hR \quad (4.80)$$

$$TS^2 = Rh = fR \quad (4.81)$$

ilişkileri vardır. Bu şekilde her indirgenmiş blok kelime, yeni blok form ile gösterilebileceği ispatlanmıştır. Buradan hareketle 4.10. Teorem ve 4.11. Teoremde verilen elemanı yeni indirgenmiş blok form olarak ifade edilebilir.

Bu verilen bilgileri bir örnekle aşağıda açıklanmıştır.

$\frac{-10}{3}$  ü sabit bırakan parabolik eleman;

$$S^2(TS^2)^2(TS)^2(TS^2)^4(TS)^3 \quad (4.82)$$

4.10. Teorem ve 4.11. Teorem kullanarak  $S^2 = TfR$  eşitliği yazılabilir.

$$TfR \cdot (Rh \cdot fR) \cdot (RfhR) \cdot (Rh \cdot fR \cdot Rh \cdot fR) \cdot (Rf \cdot hR \cdot Rf) \quad (4.83)$$

Böylece  $R^2 = I$  olduğundan  $\frac{-10}{3}$  ü sabit bırakan parabolik elemanın yeni blok formu aşağıda şekilde yazılabilir;

$$T.f.h.f^2.h^2.f.h.f^2.h.f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \quad (4.84)$$

Aynı örnekteki  $\frac{-10}{3}$  ü sabit bırakan yansıyan eleman aşağıdaki gibidir;

$$S^2(TS^2)^2 (TS)^3(TS^2)^3 (TS)^3(TS^2)^3 R \quad (4.85)$$

Yukarıdaki aynı işlemi uygulayarak, bu kelimenin yeni bloğa indirgenmiş biçimi şu şekilde elde edilir:

$$T.f.h.(f^2.h)^4.f = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_1 \\ f_1 & f_0 \end{pmatrix} \right]^4 \begin{pmatrix} 0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \quad (4.86)$$

## 5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışmada elde edilen bulgular tartışılacak ve gelecekte yapılacak çalışmalar için önerilerde bulunulacaktır.

Bir grup etkisinde sabit noktaları tayin etmek ve hangi noktayı hangi elemanın sabit bıraktığını belirlemek önemlidir. Bu bağlamda çalışmada genişletilmiş modüler grubun rasyonel sayılar üzerindeki etkisi göz önüne alınmıştır. Bunun sebebi Farey ağacı ve sürekli kesirler teorisini kullanabilmektir.

Genişletilmiş modüler grubun cusp noktası kümesi  $\mathbb{Q}_\infty$  olup grup etkisi geçişli olduğundan  $\mathbb{Q}_\infty$  kümesindeki her bir eleman genişletilmiş modüler grupta en az bir eleman tarafından sabit bırakılır. Hatta bir sayıyı sabitleyen dönüşümler kümesi sonsuz devirli bir grup olduğu için bir rasyoneli sabitleyen sonsuz tane dönüşüm bulunabilir.

Bu bağlamda dördüncü bölümde bir rasyonel sayının yalnızca parabolik ve yansıma elemanları ile sabit bırakılabileceği gösterilmiştir. Ardından verilen bir  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  için  $\frac{r}{s}$  ve  $\frac{m}{k}$  Farey komşulukları ise;

$$V = \begin{pmatrix} ps - mq & pm - pr \\ qs - qk & pk - qr \end{pmatrix} \quad (5.1)$$

elemanının  $\frac{p}{q} \in \mathbb{Q}_\infty$  yu sabitleyen eleman olduğu ispatlanmıştır. Bu matrisin temsil ettiği dönüşümün türü Farey komşularının konumuna göre belirlenebilir. Ayrıca  $\frac{p}{q}$  rasyonelinin dışında bir bilgiye ihtiyaç duymadan  $\frac{p}{q}$  yu sabitleyen parabolik elemanın matris temsilcisi

$$V = \begin{pmatrix} \pm 1 - pq & p^2 \\ -q^2 & \pm 1 + pq \end{pmatrix} \quad (5.2)$$

şeklinde elde edilmiştir. Benzer sonuç yansıma elemanı için de bulunmuştur.

Aynı bölümün devamında  $\frac{p}{q}$  rasyonel sayısının sürekli kesir açılımından hareketle  $\frac{p}{q}$  yu sabitleyen parabolik ve yansıma elemanları genişletilmiş modüler grubun üreteçleri olan U ve T nin bir kelimesi olarak  $W(U, T, R)$  şeklinde elde edilmiştir.

Literatürde basit sürekli kesirler ile genişletilmiş modüler grup arasındaki ilişki;

$$TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ ve } TS^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.3)$$

blokları ile kurulmuştur. Bu çalışmada tamsayı sürekli kesirlerden yararlanarak elde edilen ve  $\frac{p}{q}$  yu sabitleyen parabolik ve yansıma elemanlarının  $W(U, T, R)$  kelimesi  $W(TS, TS^2, R)$  şeklinde blok form ile de elde edilmiştir. Sürekli kesirler ile kelime arasındaki bu geçişin Farey graftaki yollar ile de yapılabileceği örnekler ile açıklanmıştır.

Son olarak bir  $\frac{p}{q}$  yu sabitleyen parabolik ve yansıma elemanlarının girdileri Fibonacci sayıları olan matrislerin çarpımı olarak ifade edilebileceği açıklanmış örneklendirilmiştir. Gelecekteki çalışmalarda ise diğer ünlü sayı dizileri olan Pell, Lucas, vs dizilerinin üreteç matrisleri gözönüne alınarak bu tezde elde edilen sonuçlar ile bu diziler arasında ilişki kurulabilir.

Rosen sürekli kesirleri yardımıyla elemanları tamamen bilinen  $H(\sqrt{2})$  ve  $H(\sqrt{3})$  grupları için de elde edilebilir. Ayrıca modüler grubun iki indeksli alt grubu olan  $H_{3,3}$  alt grubu için de benzer sonuçlar elde edilebilir.

## 6. KAYNAKLAR

- [1] E. Hecke, “Über die bestimmung dirichleter reihen durch ihre funktionalgleichungen”, *Math. Ann.*, vol. 112, pp. 664-699, 1936.
- [2] D. Rosen, “A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups”, *Duke Math. J.*, vol. 21, pp. 549-563, 1954.
- [3] B. Demir and M. Karataş, “Farey graph and rational fixed points of the extended modular group”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 71, no. 4, pp. 1029-1043, 2022.
- [4] G.A. Jones and D. Singerman, *Complex functions*. Cambridge University Press, 1987.
- [5] J. Lehner, *A short course in automorphic functions*. New York: Dover Publications Inc., 1966.
- [6] A.F. Beardon, *Algebra and geometry*. New York: Cambridge University Press, 2005.
- [7] A.F. Beardon, *The geometry of discrete groups*. Graduate Texts in Mathematics 91, New York: Springer-Verlag, 1983.
- [8] H. Altındış, *Sayılar teorisi ve uygulamaları*. Kayseri: Erciyes Üniversitesi Yayın Komisyonu, 1999.
- [9] A. Hatcher, *Topology of numbers*. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
- [10] T. Koshy, *Elementary number theory with applications*. Elsevier Academic Press, 2002.
- [11] H.S. Wall, *Analytic theory of continued fractions*. Courier Dover Publications, 2018.
- [12] D. Rosen and T.A. Schmidt, “Hecke groups and continued fractions”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, vol. 46, no. 3, pp. 459–474, 1992.
- [13] J.L. Gross and J. Yellen, *Handbook of graph theory*. CRC press, 2003.
- [14] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph theory*. London: Springer-Verlag, 2008.
- [15] P. Kornerup and D.W. Matula, “LCF: A lexicographic binary representation of the rationals”, *In J. UCS The Journal of Universal Computer Science*, vol. 1, no. 7, pp. 484-503, 1996.
- [16] C.J. Colbourn, “Farey series and maximal outerplanar graphs”, *SIAM Journal on Algebraic Discrete Methods*, vol.3, no. 2, pp. 187-189, 1982.
- [17] G.A. Jones, D. Singerman, and K. Wicks, “The modular group and generalized Farey graphs”, *Cambridge: London Math. Soc. Lecture Notes*, vol. 2, pp. 316–338, 1991.

- [18] A.F. Beardon, M. Hockman, and I. Short, “Geodesic continued fractions”, *Michigan Mathematical Journal*, vol. 61, no. 1, pp. 133-150, 2012.
- [19] A.F. Beardon and I. Short, “A geometric representation of continued fractions”, *The American Mathematical Monthly*, vol. 121, no. 5, pp. 391-402, 2014.
- [20] I. Short and M. Walker, “Geodesic Rosen continued fractions”, *The Quarterly Journal of Mathematics*, vol. 67, no. 4, pp. 519-549, 2016.
- [21] L.R. Ford, *Automorphic functions*. New York: Chelsea Publishing Company, 1951.
- [22] M. Newman, “The structure of some subgroups of the modular group”, *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, 1962.
- [23] M. Newman, “Free subgroups and normal subgroups of the modular group”, *Illionis J. Math.*, vol. 8, pp. 262-265, 1964.
- [24] R. Şahin, S. İkikardeş, and Ö. Koruoğlu, “On the power subgroups of the extended modular group  $\bar{\Gamma}$ ”, *Turk. J. Math.*, vol. 28, pp. 143-151, 2004.
- [25] Ö. Koruoğlu, R. Şahin, and S. İkikardeş, “The normal subgroup structure of the extended Hecke groups”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, vol. 38, pp. 51-65, 2007.
- [26] R. Şahin, O. Bizim, and İ.N. Cangül, “Commutator subgroups of the extended Hecke groups  $\bar{H}(\lambda_p)$ ”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, vol. 54, pp. 253-259, 2004.
- [27] R. Şahin, S. İkikardeş, and Ö. Koruoğlu, “Some normal subgroups of the extended Hecke groups  $\bar{H}(\lambda_p)$ ”, *Rocky Mountain J. Math.*, vol. 36, pp. 1033-1048, 2006.
- [28] Ö. Koruoğlu, “ $\bar{H}(\lambda)$  ile  $\bar{H}(\lambda_p)$  genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler”, Doktora tezi, Balıkesir Üniv., Balıkesir, 2005.
- [29] I. Short, and M. Walker, “Even-integer continued fractions and the Farey tree”, *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics*, vol. 159, pp. 287-300, 2014.
- [30] B. Demir, “A note on transitive action of the extended modular group on rational numbers”, *Fundamentals of Contemporary Mathematical Sciences*, vol. 3, no. 2, pp. 160-171, 2022.
- [31] B. Fine, “Trace classes and quadratic forms in the modular group”, *Canad. Math. Bull.*, vol. 37, no. 2, pp. 202-212, 1994.
- [32] Ö. Koruoğlu, R. Şahin, and S. İkikardeş, “Trace classes and fixed Points for the extended modular group”, *Turk. J. Math.*, vol. 32, no. 1, pp. 11-19, 2008.
- [33] Ö. Koruoğlu, “The determination of parabolic points in modular and extended modular group by continued fractions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, vol. 33, no. 2, pp. 439-445, 2010.

- [34] Ö. Koruoğlu, “The images under the modular group and extended modular group”, *Hacet. J. Math. Stat.*, vol. 40, pp. 15-20, 2011.
- [35] Ö. Koruoğlu and R. Şahin, “Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group”, *Turk. J. Math.*, vol. 34, pp. 325-332, 2010.
- [36] B. Demir and Ö. Koruoğlu, “On parabolic and elliptic elements of the modular group,” *Turk. J. Math*, vol. 46, no. 7, 2022.
- [37] Ö. Koruoğlu, Ş. Kaymak Sarıca, B. Demir, and A.F. Kaymak, “Relationships between cusp points in the extended modular group and Fibonacci numbers”, *Honam Mathematical Journal*, vol. 41, no. 3, pp. 569-579, 2019.
- [38] F. Birol, Ö. Koruoğlu, R. Şahin, and B. Demir, “Generalized Pell sequences related to the extended generalized Hecke groups  $\bar{H}_{3,q}$  and an application to the group  $\bar{H}_{3,3}$ ”, *Honam Mathematical Journal*, vol. 41, no. 1, pp. 197-206, 2019.
- [39] F. Birol , Ö. Koruoğlu, and B. Demir , “Genişletilmiş modüler grubun  $\bar{H}_{3,3}$  alt grubu ve Fibonacci sayıları”, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, vol. 20, no. 2, pp. 460-466, Dec. 2018, doi.org/10.25092/baunfbed.485633.
- [40] B. Demir, N. Yılmaz Özgür, and Ö. Koruoğlu, “Relationships between fixed points and eigenvectors in the group  $GL(2,R)$ ”, *Fixed Point Theory Appl.*, vol. 55, 2013, doi.org/10.1186/1687-1812-2013-55.



# ÖZGEÇMİŞ

## Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Mustafa KARATAŞ  
Doğum tarihi ve yeri : 05/11/1996 Balıkesir  
e-posta : mustafa.karatas.9610@gmail.com

## Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Yüksek Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik	
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/ Matematik Eğitimi	2019
Lise	Sedat Karan Anadolu Lisesi	2015

## Yayın Listesi

B. Demir and M. Karataş, “Farey graph and rational fixed points of the extended modular group”, *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, vol. 71, no. 4, pp. 1029-1043, [Tezden türetilmiştir].

