T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA DENKLEMİNİN ÜZERİNE BİR İNCELEME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET ÇOBAN

BALIKESİR, TEMMUZ 2023

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA DENKLEMİNİN ÜZERİNE BİR İNCELEME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET ÇOBAN

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR (Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Fırat EVİRGEN

Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

BALIKESİR, TEMMUZ 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Denkleminin Üzerine Bir İnceleme**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Ahmet ÇOBAN

ÖZET

BLACK-SCHOLES OPSİYON FİYATLAMA DENKLEMİNİN ÜZERİNE BİR İNCELEME

YÜKSEK LİSANS TEZİ

AHMET ÇOBAN

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI : PROF. DR. NECATİ ÖZDEMİR)

BALIKESİR, TEMMUZ 2023

Bu tezde finans matematiği ve opsiyon fiyatlama alanında kullanılan Black-Scholes Kısmi Diferansiyel Denkleminin tarihsel gelişimi anlatılmıştır. Tezin ilk bölümünde opsiyon fiyatlama üzerine tarihsel çalışmalar, Brown Hareketinin tanımlanması ve 20. Yüzyılın hemen başında opsiyon fiyatlama tekniklerinde kullanılması yer almaktadır. Daha sonra Black-Scholes öncesi stokastik süreçlerle ilgili ne gibi çalışmalar yapıldığı yer alıyor. 3. Bölümde Black-Scholes Denkleminin stokastik bir diferansiyel denklemden çıkarılışı ve analitik çözümleri yapılmıştır. Dördüncü bölümde Black-Scholes Denklemi sonrasında opsiyon fiyatlama modellerinin gelişimi, Black-Scholes'ün dezavantajları üzerine yapılan çalışmalar, martingal optimal taşıma üzerine çalışmalar ve Black-Scholes Modeli üzerine yapay sinir ağları modellemeleri yer almaktadır. Son bölümde ise Kesirli Black-Scholes Modeli üzerine yapılan çalışmalar, kesirli Brown hareketi ve özellikleri yer almaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Black-Scholes Denklemi, Brown Hareketi, Stokastik Süreçler, Opsiyon Fiyatlama, Optimal Durma Problemi, Kesirli Black-Scholes Modelleri, Yapay Sinir Ağı Modelleri, Martingaller

Bilim Kod/Kodları : 20406 Sayfa Sayısı : 71

ABSTRACT

A REVIEW ON THE BLACK-SCHOLES OPTION PRICING EQUATION

MASTER'S THESIS

AHMET ÇOBAN

BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR : PROF. DR. NECATİ ÖZDEMİR)

BALIKESİR, JULY 2023

In this thesis, a historical survey of Black-Scholes Equation which is used in Financial Mathematic and option pricing has been presented. In the first part we have presented historical developments about option pricing, definition of Brownian Motion and using of Brownian motion for option piricing in the beginning of the 20th century. In the second part we have presented the developments in stochastic processes (the process includes brownian motion) before Black-Scholes Model. In the third part we have presented the definition of Black-Scholes Equation from a stochastic differential equation and the solving of the equation. In the fourth part the developments in option pricing model after Black-Scholes model, the studies about disadvantages of the Black-Scholes model, martingal optimal transport and artificial neural networks about Black-Scholes model have been presented. In the last part we have presented fractional order Black-Scholes Model, fractional Brownian motion and its properties.

KEY WORDS : Black-Scholes Equation, Brownian Motion, Stochastic Processes, Option Pricing, Optimal Stopping Problem, Fractional Black-Scholes Model, Artificial Neural Networks, Martingales

Science Code/Codes : 20406 Page Number : 71

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{B_t}$	Bir boyutlu Brown Hareketi
$\boldsymbol{B_H(t)}$	Hurst Parametresine Bağlı Kesirli Brown Hareketi
$\boldsymbol{conv(a)}$	a'nın dışbükey yüzeyi
${}^{RL}_{0}\boldsymbol{D}_t^{\alpha}$	Riemann Liouville Kesirli Türevi
$\boldsymbol{E[x]}$	x ifadesinin Beklenti Fonksiyonu
$\boldsymbol{Le(x)}$	Leland Modeli
$\boldsymbol{N(d)}$	d değişkeninin Normal Dağılımı
$\boldsymbol{n}!$	n faktöriyel
$\boldsymbol{R_+}$	Pozitif Gerçek Sayılar Kümesi
$\Gamma(.)$	Gamma Fonksiyonu
$(\boldsymbol{\Omega}, \boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$	Olasılık Uzayı
$\boldsymbol{W_t}$	Wiener Süreci
White Noise	Ortalaması 0 olan Normal dağılım gösteren rastlantısal terim

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitim süresi boyunca benden desteklerini esirgemeyen motivasyonu ve bilgi birikimiyle her zaman yoluma ışık tutan değerli hocam ve tez danışmanım Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR'e sonsuz şükranlarımı sunarım.

Özellikle ders döneminde ufuk açıcı tavsiyeleri ile akademik anlamda merakımın artmasına ön ayak olan değerli hocam Doç. Dr. Derya AVCI'ya teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca desteklerini her zaman hissettiğim, bilimle uğraşmanın çok değerli olduğu gerçeğini karakterime işleyen anneme ve babama, sonsuz anlayışını ve manevi desteğini hiç esirgemeyen sevgili eşime, kendilerine yeterli vakti ayıramadığım için sabırlarından dolayı oğlum Mehmet Efe ve kızım İpek'e çok minnettarım.

1. GİRİŞ

Matematik, doğada veya sosyal hayatta var olan birçok durumu veya fenomeni modellemesi, gözlemlenen noktanın özelliklerini, dinamiklerini anlamak açısından oldukça işlevseldir. İnsanlar binlerce yıldır etrafında olan biteni daha iyi anlamak için matematik yapmaktadırlar. Gözlemlenen ve matematiksel modele dökülen nokta bazen bir hastalığın insan vücudundaki seyri, bazen ısının bir metal çubuktaki iletimi, bazen bir difüzyon olayı, bazen en ileri kuantum mekaniği fenomenleri, bazen bir finansal aracının opsiyon fiyatıdır. Matematikçiler burada bahsedilmeyen daha birçok durum ile ilgili modellemeler yapmış, bilinen durumlardan daha ileri durumlara tahminlerde bulunmuş, geçerli olmayan tahminlerini revize etmiş, daha iyi modeller kurmuş sonrasında yine revize etmiştir. Böylelikle bilimin en temel çabası olan yaşadığımız evreni daha iyi anlama adına sonu gelmeyecek bir serüven insanoğlunun dünyadaki ilk anlarından bugüne kadar devam etmektedir.

Matematiksel modelleme gözlemlenen bir fenomen ile onu var eden dinamikler arasındaki ilişkiyi inceleme, analiz etme ve bu dinamikleri matematik dilinde yazma işlemidir. Bu işlem genellikle diferansiyel denklemler veya Fark Denklemleri yardımıyla yapılmaktadır.

Opsiyon fiyatı belirleme üzerine 1973 yılında yayınlanan Black-Scholes Denklemi çığır açıcı bir gelişme olmuştur. Myron Scholes ve Fisher Black tarafından opsiyon fiyatı belirlemek adına yapılan bu çalışma bu alanda yapılacak olan daha birçok çalışmanın ilklerindendir.

1.1 Literatür Taraması

Finansal varlıkların gelecekteki değerlerini tahmin etme üzerine ilk matematiksel modellemeler çok eski tarihlere kadar gitmektedir. Örneğin Thales M.Ö. 5. Yüzyılda yıldızlara ve mevsime bakarak gelecek yıl zeytin hasadının çok olacağı tahmininde bulunmuş ve zeytin hasadında kullanılan aletleri satın almıştır. Tahmininde haklı çıkan Thales zeytin hasat mevsiminde sahip olduğu aletleri komşularına kiralamış ve bu sebeple bu durumdan kar elde etmiştir. Ayrıca Romalılar da ürünlerin fiyatı ile ilgili bu tür tahminler yapmışlardır.

Modern anlamda Finansal opsiyon fiyatları üzerine ilk çalışma 1900 yılında Sorbonne Üniversitesinde bir doktora öğrencisi olan Louis Bachelier tarafından yapılmıştır. Bachelier, hisse fiyatlarının bir Brown hareketi yardımıyla açıklanabileceğini düşünüp çalışmasını buna göre yapmıştır. İşte tam bu noktada Brown hareketinin ne olduğunu bilmek gerekir.

1827 yılında bir botanikçi olan Robert Brown suda yüzen polen parçacıklarını mikroskop altında inceliyordu. Bu sırada polenin su molekülleri arasında rastlantısal hareket ettiğini gözlemledi. Daha sonra bu gözlemin polen haricinde başka durumlarda da olduğunu gözlemledi fakat bu hareketin kaynağını belirleyemedi.

Bu hareketi matematiksel olarak ilk açıklayan kişi 1880 yılında Thorvald N. Thiele olmuştur. En Küçük Kareler Yöntemi üzerine yazdığı bir makalesinde bu hareketin kaynağını açıklamıştır. Bu hareket şöyle açıklanabilir. Bir polen bir su molekülünün yaklaşık olarak 1000 katı büyüklüktedir. Yani aynı anda birçok su molekülü polene bir etki uygular. Bu etki tamamen rastlantısaldır ve ne taraftan daha çok etki gelirse polen diğer tarafa doğru yavaşça hareket eder. Aynı durum ters taraf için de geçerlidir. Sıvıdaki Brown hareketinin sebebi polene uygulanan kuvvetlerdeki anlık dengesizliklerdir.

Bachelier'in çalışması negatif menkul kıymetler ve opsiyon fiyatını hesaba katar fakat paranın zaman değerinin hesaba katmaz Yine de finansal araçların fiyatlarının Brown Hareketi ile açıklanması fikri bu alandaki çalışmaları hızlandıran bir gelişme olmuştur. Bu çalışmadan sonra opsiyon fiyatı belirleme birçok çalışmayla gelişti. Bu çalışmaları yapanlar 1961 yılında Sprenkle, 1963 yılında Ayres, 1964 yılında Boness, 1965 yılında Samuelson, 1967 yılında Thorp ve Kassauf, 1969 yılında Samuelson ve Merton, 1970 yılında Chen gibi araştırmacılardır.

Black–Scholes Formulü matematikçilerin uzun süre üzerinde durdukları opsiyon fiyatlama üzerinde bir devrim etkisi yapmıştır. Çünkü Black-Scholes Formülü Brown hareketiyle oluşan rassal volatilite (fiyatlardaki oynaklık) haricinde sadece gözlemlenebilir değişkenler gerektirir ve bu durum hem piyasa yapıcılar hem de işlem yapanlar için karşılaştırma yapma imkanı verir. Black-Scholes Formülü opsiyon piyasalarının büyümesinde ve yaygınlaşmasında pozitif bir etki yapmıştır. Daha sonra Robert C. Merton modelde çözülemeyen bir problemi çözmüş bu sebeple bu modele Black-Scholes-Merton Modeli de denmektedir. Hatta 1997 yılında Nobel Ödülünü bu modelin yazarları olan Merton ve Scholes bu çalışmaları sebebiyle almıştır. Black 1995 yılında vefat ettiği için bu ödülü alamamıştır.

Fakat her model gibi Black-Scholes ‘un çalışmasının da eksik kalan noktaları vardır. Örneğin bu model Avrupa tipi opsiyonların (sadece vade sonunda işleme konulabilen) fiyatlarını belirlemede etkilidir. Ayrıca bu modelde opsiyonu üzerine işlem yapılan hissenin temettü dağıtması durumu ihmal edilmiştir. Bunun gibi eksiklikler matematikçilerin bu konudaki çalışmalarına da yön vermiştir.

Black-Scholes opsiyon fiyatlama modelinden sonra Cox, Ross ve Rubenstein 1979 yılında ‘Binom Modeli’ni kurmuşlardır. Bu model sayesinde modelin kullanım alanı sadece Avrupa tipi opsiyonlardan daha geniş bir kullanım alanına yönelmiştir. Daha sonra Derman ve Kani 1994 yılında ‘Yorumlanmış Ağaç Modeli’ adını verdikleri yöntemle bu modelin kullanım alanını geliştirmişlerdir. ‘Derman-Kani Modeli’ de denilen bu model Chriss tarafından 1996 yılında daha da geliştirilmiş ve böylece hem Amerikan tipi (vade süresince istenilen zamanda işleme konulabilen) hem de Avrupa tipi opsiyonlara uygulanabilme özelliğine kavuşmuştur.

1.2 Opsiyon Kavramının Gelişimi

***Opsiyon*:** Finansal bir aracın belli bir süre için ve belli bir fiyat üzerinden alış veya satış hakkı demektir. Örneğin, bir lojistik firması sahibisiniz ve petrol fiyatlarındaki artış sizin karınızı olumsuz etkiliyor. Eğer petrol fiyatlarının artacağını düşünüyorsanız opsiyon piyasasında fiyatı petrol fiyatına bağlı olan finansal aracın güncel fiyattan alış hakkını satın alırsınız. Ödeyeceğiniz bir miktar ücret karşılığında belli bir süre için petrol fiyatlarındaki artış sizi etkilemeyecektir. Tabi ki eğer petrol fiyatları tahmin ettiğiniz gibi artarsa (opsiyonu alırken ödediğiniz bedeli karşılayacak kadar) yaptığınız opsiyon alımı karlı bir işlemdir. Bu sebeple fiyatı artacağı düşünülen bir finansal aracın alış opsiyonu, fiyatı azalacağı düşünülen bir finansal aracın satış opsiyonunu almak mantıklıdır.

Alış Opsiyonu (Call Option): Bir finansal aracı belli bir süre için belli bir fiyattan alabilme hakkına alış opsiyonu denir. Eğer bir ürünün fiyatının artacağını düşünüyorsanız ve o ürünün alış opsiyonunu satın alırsanız belli bir süre sonra ürünün fiyatı arttığında siz bu artıştan etkilenmezsiniz.

Satış Opsiyonu (Put Option): Bir finansal aracı belli bir süre için belli bir fiyat üzerinden satabilme hakkına satış opsiyonu denir. Bu durumda da eğer ürünün fiyatının düşeceğini düşünüyorsanız bu ürünün satış opsiyonunu alır, ürünün fiyatı belli bir süre sonra düşmesine rağmen siz yüksek fiyattan satabilirsiniz.

Vadeli işlem borsalarında alış opsiyonlarına long position, Satış opsiyonlarına da short position da denilmektedir.

Opsiyonların tarihsel gelişimi noktasında az önce bahsettiğimiz gibi Thales'in zeytin fiyatları üzerine tahmini opsiyonun ilk örneği sayılabilir. Eski Yunanlılar ve Romalılar da bu konuda çalışmalar yapmışlardır. 17. Yüzyıla gelindiğinde ise Hollanda'da lale soğanı üzerine opsiyonlar yazılmıştır. O zamanlar lale alım satımı çok popüler olduğu için bu iş üzerine opsiyonlar yazılmıştır. Fakat sözleşmelerdeki hükümler yerine getirilmeyince opsiyonlar gündemden uzaklaşmıştır. Daha sonra 1711 yılında North Sea Şirketi hisseleri üzerinde opsiyonlar yazılmış fakat takasta sözleşme hükümlerine uygun davranılmayınca tekrardan gündemden düşmüştür. Amerika'da ise opsiyon kullanımı iç savaş yıllarına kadar uzanmaktadır. Savaş sebebiyle fiyatları değişkenlik gösteren ürünlerin fiyatları üzerine opsiyon sözleşmeleri yazılmıştır. Fakat opsiyonların kullanımı 1973 yılında Chicago Opsiyon Borsası'nın açılması ve 16 hisse senedi için alış opsiyonu düzenlemesiyle hız kazanmıştır. 1977 yılında ise hisse senetleri için satış opsiyonları da aynı borsada düzenlenmeye başlamıştır.

Ülkemizde ise 2005 yılında Vadeli İşlem ve Opsiyon Borsası faaliyete geçmiştir. Fakat bu borsada opsiyonlar işlem görmemiştir. 2012 Borsa İstanbul Vadeli İşlem ve Opsiyon Sözleşmeleri (VİOP) faaliyete girmesiyle ülkemizde de opsiyon alış ve satış işlemleri başlamıştır.

2. BLACK-SCHOLES MODELİ ÖNCESİ STOKASTİK SÜREÇLER VE OPSİYON FİYATLAMA ÜZERİNE ÇALIŞMALAR

1900 yılında Fransız bir doktora öğrencisi olan Louis Bachelier tarafından bir model geliştirilmiştir. Opsiyon fiyatları üzerine modelini kuran Bachelier'in çalışması [1], Brown hareketini ilk defa opsiyon fiyatlama alanında kullanması yönünden bir ilktir.

Bu çalışma analitik formda bir çalışmadır ve normal dağılımı esas alır. Modelin temel özelliği iki parametreye ayrılmasıdır. Bu model, riskten kaçınan bir fiyatlama piyasasındaki önermeyi desteklemektedir. Modelde uygun olan temel varlık getirisidir.

Bachelier'in çalışması olan 'Theory of Speculations' da [1] Brown Hareketi hisse senedi fiyatlarındaki dalgalanmaların modellenmesi olarak ortaya çıkar. Bachelier'e göre hisse senedi fiyatlarında kısa zaman aralıklarında oluşan dalgalanmalar hisse senedi fiyatından bağımsızdır. Örtülü olarak bunların geçmiş hareketlerden de bağımsız olduğunu varsayar. Süreç Merkezi Limit Teoremi ile de birleştirilince bağımsızdır ve Normal dağılım gösterir. Bachelier'in çalışmasının modern zamanlara etkisi Brown Hareketini Rassal yürüyüşün Difüzyon limiti (belirli bir yeniden ölçekleme limiti) olarak belirler.

Bachelier, hisse senedi fiyatlarının bileşenlerini Gauss rasgele değişkenleri olarak tanımlarken 'Hafıza eksikliği(lack of memory)' özelliğini kullanır ve bu özelliği şu an Chapman Kolmogorov Denklemi olarak bildiğimiz denklemi yazmak için kullanır. Bu denklem de Isı Denklemiyle bağlantılıdır [2]. Bu 'Hafıza Eksikliği Özelliği'ni Markov'un 1906 yılında yazdığı makaleyle 'Markov Özelliği (Markov Property)' olarak biliyoruz. Markov, rasgele değişkenlerin sistemini 'bir zircirle bağlı işlemler' olarak tanımladığı için bu işlemlere Markov'un anısına 'Markov Zinciri' diyoruz. Markov ayrıca bu zincirin de Chapman Kolmogorov denklemini yazdı.

2.1 Bachelier Formulü :

$$C(S,T) = S.N\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right) - X.N\left(\frac{S-X}{\sigma\sqrt{T}}\right) + \sigma\sqrt{T}.n(\frac{X-S}{\sigma\sqrt{T}}).$$

Burada ;

S, Hisse fiyatını

X, Opsiyonun işlem fiyatını (strike price)

T, vadeye kalan süreyi

σ, hisse senetlerinin anlık standart sapmasını,

N(.), Kümülatif Normal Yoğunluk Fonksiyonunu,

n(.), Normal dağılım yoğunluk fonksiyonunu kasteder [3].

Bachelier çalışmasını şöyle bitirir ; 'Son bir açıklama belki de gereksiz olmayacaktır. Bu çalışmada ele alınan birkaç soruyla ilgili olarak, gözlem sonuçlarını teorideki sonuçlarla karşılaştırdım. Bu matematiksek yöntemlerle oluşturulan formülleri doğrulamak için değildi. Bunu, yöntemlerin değil, sadece pazarın onu yöneten bir yasaya uyduğunu göstermek için yaptım : 'Olasılık Yasası''[1].

Bu fiyatlandırma modelinin yararlı bir sonucu, beklenen bir fiyatı yani opsiyonun vade sonunda veya beklenen kullanım tarihindeki değerini açıkça tanımlama yeteneğidir [2]. Fakat bu yöntemde paranın zaman değerinin dikkate alınmaması sebebiyle bir dezavantajı olduğu söylenebilir. Ayrıca Bachelier'in tanımladığı Brown Hareketinin de dezavantajı vardır. Bachelier'in modelinde opsiyon fiyatları negatif de olabilmektedir [4]. Bu durum finansal anlamda mantıklı değildir. Bu problemi Samuelson (1965) [5] Geometrik Brown Hareketini tanımlayarak çözmüştür.

$$S(t) = S(0)\exp(at + \sigma W(t))$$

W(t) Brown Hareketi, S(t) varlığın fiyatı, a ve α sabit katsayılar, σ volatilitedir. Burada $W(t) \sim N(0, t)$ *ise* $E\left[e^{\sigma W(t)}\right] = \exp(\frac{1}{2}\sigma^2 t)$

olur. Burada da $a = \alpha - \frac{1}{2}\sigma^2$ alırsak $E[S(t)] = S(0)e^{\alpha t}$ olur. Buradaki E fonksiyonu beklentidir (Expectation). α ise beklenilen büyüme oranıdır. σ, volatiliteyi verir ve standart sapmanın logaritmik dönüşlerini verir. $\log\left[\frac{S(t+h))}{S(t)}\right]$ nin standart sapması ise $\sigma\sqrt{h}$ olur [2]. Bachelier'in çalışması uzun süre çok dikkat çekmemiş finansal araçların fiyatlarını Brown hareketiyle açıklama düşüncesi bir süre sessizliğe bürünmüştür.

1923 yılında Norbert Wiener Brown Hareketini oluşturmak için titiz bir yol üretti [6]. Onun amacı pozitif bölgede sürekli gerçek değerli fonksiyonların uzayı üzerine bir olasılık ölçüsü oluşturmaktı. Aslında integraston ve ölçüme dayalı olasılığın matematiksel bir yapısını kurma fikri Borel'e kadar uzanabilir. Borel, 1909 yılında Büyük sayıların güçlü kuralının Lebesque ölçümü açısından bir versiyonunu kanıtladı. Fakat stokastik bir sürecin bir anlık görüntüsünden ziyade tüm zaman evrimini tartışmak için bazı sabit zaman fonksiyon uzayları üzerinde bir integrasyon ve ölçüm teorisine ihtiyaç vardır. İşte bu Wiener'ın başarabildiği şeydir [2].

Wiener'in ufuk açıcı makalesi olan 'Diferansiyel Uzay (Differential Space)' [6], Brown Hareketi çalışmasını da içeren fonksiyon uzaylarının integrasyonu (sonsuz boyutlu) üzerine bir çalışmadır. Burada Farklar, sürecin Gauss dağılımıyla artışlarıdır. Wiener çalışmasında 'Bu makale varlığını yazarının Profesör Levy ile yaptığı konuşmaya borçludur. Sonsuz boyutlu iki integrasyon sisteminin ilişkisi ile ilgili olarak yazarın ve Levy'nin çalışması birbirine bağlıdır. Wiener'in çalışması Einstein'in Brown hareketi modeliyle başlar ve Perrin'in makalesine de atıfta bulunur.

Oluşturduğu olasılık ölçüsü artık Wiener ölçüsü olarak biliniyor ve Brown hareketinin matematiksel modeli genellikle Wiener Süreci olarak adlandırılır. Bu ölçümü oluştururken herhangi bir sınırlı t zamanında türevlenebilirliğin olasılığını 0 olarak belirtir. Böylelikle herhangi bir aralıkta $\frac{1}{2} - \epsilon$ için Hölder Eşitsizliğini sağlama olasılığının 1 olmasını sağlar.

Hölder Eşitsizliği : Sonlu sayıda hepsi 0 olmayan a_i ve b_i , $i = 1,2,3, \dots , n$ pozitif sayılarını alalım. $p, q > 1$ sayıları $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ koşulunu sağlasın.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliğine Hölder Eşitsizliği denir.

Bu durum yolun pürüzlülüğünü ölçer. Sonunda Wiener, Fourier Katsayılarının kurallarını verir. Bundan (0,2π) aralığında aşağıdaki fonksiyon geliştirilebilir:

$$X_t = \xi_0 \frac{t}{\sqrt{2\pi}} + \sum_1^\infty \frac{\xi_n (1 - \cos \quad) + \xi_n' \sin nt}{n\sqrt{\pi}}$$

$\xi_0, \xi_1, \xi_1', \dots$ N(0,1) rassal değişkenlerinin dizisidir.
Bu formül Fourier-Wiener Serisidir. 1923 yılındaki çalışmada örtük bir şekilde fakat 1933 yılında Paley ve Zygmund işbirliğiyle yazılan makalede açık şekilde ifade edilmiştir [7].
Wiener, Brown Hareketi olarak adlandırdığımız Sürekliliği olan işlemi yapılandırdı. Fakat Bachelier çalışmasında sadece bir bölüm için ayrık zamandan sürekli zamana tanımlama

yapmıştı. Bachelier, Hiperasimptotik teorisini geliştirmek için gerekli matematiksel mekaniğe sahip değildi. Bu durumu da 1931 yılında Kolmogorov ünlü ‘Olasılık Teorisinde Analitik Yöntemler Hakkında’ adlı makalesinde titizlikle ayrık zamandan sürekli zamana Brown Hareketi ile ilgili bir bölüm kaleme aldı [8]. Bunu Merkezi Limit Teoreminin ispatını Lindeberg Metoduna genişleterek yaptı. Kolmogorov kısmi diferansiyel denklemi ayrık zamanlı fark denklemlerinden elde edildi. Bu geçişin var olduğunu gösteren ilk kişi olması sebebiyle Bachelier önem arz etmektedir.

Kolmogorov Eklenti Teoremi (Kolmogorov’s Extension Theorem)

$t_1, t_2, \dots, t_k \in T$, $k \in N$ [0,T] aralığının zaman aralıklar, $v_{t_1,t_2,\dots,t_k}$ ise R^{nk} üzerinde olasılık ölçümleri olsun. $v_{t_{\sigma(1)},t_{\sigma(2)},\dots,t_{\sigma(k)}}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) = v_{t_1,t_2,\dots,t_k}(F_{\sigma^{-1}(1)} \times F_{\sigma^{-1}(2)} \times \dots \times F_{\sigma^{-1}(k)})$

İfadesi tüm $\{1,2,\dots,k\}$ üzerindeki σ permütasyonları için ve $v_{t_1,t_2,\dots,t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) = v_{t_1,t_2,\dots,t_k,t_{k+1},\dots,t_{k+m}}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k \times R^n \times \dots \times R^n)$

$k + m$ elemanlı ve pozitif toplamlı olması durumunda her $m \in N$ için

Ω üzerinde stokastik sürecin X_t olduğu bir (Ω, F, P) olasılık uzayı vardır ki F Borel Kümeleri, $X_t : \Omega \to R^n$ olmak üzere: $v_{t_1,t_2,\dots,t_k}(F_1 \times F_2 \times \dots \times F_k) = P[X_{t_1} \in F_1, \dots, X_{t_k} \in F_k]$

şartını [9] sağlar.

Kolmogorov Süreklilik Teoremi

$T > 0$ ve α, β, D pozitif sabitler olmak üzere $X = X_t$, $t \geq 0$ sürecinin aşağıdaki şartı sağladığını düşünelim.

$E[|X_t - X_s|^\alpha] \leq D.|t - s|^{1+\beta}$, $0 \leq s, t \leq T$

Buna göre X in bir sürekli versiyonu vardır [9].

Bu teoremin ispatı için Stroock ve Varadhan’ın kitabı [10] incelenebilir.

Kolmogorov, Chapman-Kolmogorov denklemlerini sağlayan bir stokastik çekirdek ailesi olarak bir geçiş fonksiyonu tanıttı. Kendisi buna daha önceden bu fonksiyonu yazmış olan Smoluchowski denklemi adını verdi [8]. Makalenin ana fikri, her t zamanda yerel özelliklerin tanıtılması ve bu özellikleri içeren diferansiyel denklemleri çözerek geçiş fonksiyonlarının oluşturulmasıydı. Burada Kolmogorov gerçek değerli geçiş fonksiyonlarını ele alıyor. Biz bunlara ‘drift ‘ ve ‘difüzyon’ katsayıları diyoruz. Drift olarak tanımlanan risksiz faiz oranı, difüzyon olarak tanımlanan da fiyatların oynaklığı (standart sapması) olarak tanımlanabilir. Kolmogorov, bu geçiş fonksiyonlarına ilişkin ek düzenlilik varsayımlarının Fokker-Planck Denklemini sağladığını ispatlar. Kolmogorov’un bu makalesi Olasılık Teorisinde güçlü bir etki yaptı.

Kolmogorov’un hayli etkili çalışmalarından 1933’te yayımlanan ‘Olasılık Teorisinin Temel Kavramları’ isimli çalışması [11] Olasılık hesabının doğasını değiştirdi. Olasılığın temel manipülasyonları ile bu olasılıkların ölçüm teorisinin aynı şey olduğu biliniyordu. Fakat ikisi arasındaki ilişki yeterince iyi formüle edilmemişti. Temel problem koşullu olasılıkların tanımlanmasıydı. Bachelier bu sorunu çok titiz olmadan basit şekilde çözdü. Kolmogorov ise Radon-Nikodym Teoreminden varlığı anlaşılan rassal değişkenler olarak koşullu olasılık ve beklentileri tanımlayarak sağlam bir temele dayandırdı. Sonunda Olasılıklar Hesabı matematiğin daha saygın bir alanına terfi ederek Olasılık Teorisi adını aldı.

Kolmogorov’un çalışmalarının sonuçları sonlu boyutlu dağılımların belirttiği tüm fonksiyonların uzayı hakkında bir ölçümü işaret eder. Halbuki Wiener ölçümünü sürekli fonksiyonlar üzerine tanımlamıştı. Yani Wiener’in Brown Hareketinin sürekli yörüngeleri vardı. Kolmogorov’da ise herhangi bir düzenlilik yoktu. Bu problemin halledilmesi gerekiyordu. Bu yöndeki ilk adım olarak Kolmogorov Süreklilik Kriteri olarak 1936 yılında Aleksandrov’la ortak bir makalede yayınlandı [11].

Hem Kolmogorov hem de Feller için geçişi yöneten İntegrodiferansiyel denklemler süreçlerin olasılıkları çalışmanın ana amacıydı. Bachelier için bu durum farklıydı. Matematiksel tekniği titiz bir şekilde uygulamamış olmasına rağmen Brown Hareketini stokastik bir süreç olarak inşa edebildi ve sonuçlarının çoğu Bernoulli deneme olasılıklarıyla hesaplandı. Bachelier’in yörüngeler açısından düşündüğü çalışma tezinden ve sonraki çalışmalarından anlaşılmaktadır. Tezindeki en çarpıcı ve Poincare’i açıkça etkileyen örnek zarif bir argüman olarak sunduğu yansıma ilkesiydi. Yansıma İlkesi genellikle ispatını bütünsel şekilde yapan Desire Andre’ye atfedilir. Andre, Joseph Bertrand’ın öğrencisidir. Yansıma İlkesi aslında Bertrand’ın 1888’deki kitabındaki (Calcul des Probabilites) Kumar kayıpları bağlamında bulabiliriz.

Bachelier'in çalışması Yansıma İlkesine dayanmıyordu. O, Brown Hareketi için Güçlü Markov Özelliğini önerdi. Fakat bu özellik de 1940'lı yıllarda Doob tarafından [12] formüle edildi ve Brown Hareketi için kurulup yayınlanması Hunt tarafından 1956 yılında oldu [13].

Paley-Wiener-Zygmund'un Fourier-Wiener Serisini açıklığa kavuşturmasıyla aynı zamanda Paul Levy de benzer şekilde düşünüyordu [5]. Gerçekten de Brown Hareketi sorunu zaten 1937'deki kitabında (Theorie de l'addition des variables aleatoires) ortaya çıkıyor. Levy, Wiener sürecinin diğer serilerinin açılımlarını elde etmek için (Trigonometrik) Fourier temel fonksiyonlarını diğer seçeneklerle değiştirilebileceğini gözlemledi [14].

$$X_t(w) = \sum a_n(t).\xi_n(w)$$

1961 Tarihli bir çalışmada Chielski, Haar Esasını seçer. Yani $a_n(t)$ ikili aralıklarla desteklenen Üçgen Fonksiyonlardır (Triangular Functions) ve serinin incelenmesi oldukça basittir. Levy ; '1934'ün başında birdenbire tıpkı Gaussian gibi istikrarlı bir yasanın Rassal fonksiyonları interpolasyon yöntemiyle belirlemede kullanılabileceğini farkettim, sonra ek işlemler ve bağımsız artışlarla X(t) fonksiyonunun genel halini bulmaya karar verdim. Onun interpolasyonu X(t) ve X(t+h) bilinirken X(t+h/2) nin kuralını bulmayı içerir. Bu kural onu bugün 'Levy İşlemleri (Levy Processes)'ni tanımlamaya iter. Bu işlemler bugün Finans Matematiğinin geniş bir alanında kullanılır.

İkinci Dünya Savaşı'nın başında Bachelier bir kitap daha yazar. Levy, 1970 yılında anılarını anlatırken bu kitaptan ancak savaşın bitiminde haberi olduğunu söyler. Bachelier'in çalışmasının temeli Teminatın gerçek değeri olarak tanımladığı değerdir. Tüm hesapları 'Bir spekülatörün matematiksel beklentisinin sıfır olduğu ' durumun gerçek değerini bulmak üzerinedir. Fiyat sürecinin örtük bellek eksikliği ile birleştiğinde Bachelier, gerçek fiyatın bir martingal olduğunu söylüyor. Ayrıca 1934'te martingal kavramını resmileştiren Levy idi. Martingal ismi 1939'da Ville tarafından belirlendi. Kavramı, Büyük Sayılar Yasasını korumak için ortaya attı. (Aynı düşünceler Markov koruması için de düşünülebilir.) Bağımsız rassal değişkenlerin toplamları için elde edilen sonuçların rehberliğinde Martingal araştırması başladı. Fakat Doob martingal kavramını Analiz ve Olasılık için güçlü bir araç haline getirerek konuyu başka bir noktaya taşıdı.

Joseph Doob Olasılık Teorisine Kompleks Analiz alanından geldi. 1932'deki doktora tezi 'Analitik Fonksiyonların Sınır Değerleri' idi. Doob, martingal ve harmonik fonksiyonlar arasındaki ilişkiyi gördü ve buna dayanarak olasılıksal bir potansiyel teori geliştirmeye çalıştı. Martingal Teorisi, şimdiye kadar Olasılık Teorisi üzerine yazılmış en etkili kitaplardan olan Doob'un 1953 yılında yayımlanan 'Stochastic Processes' adlı kitabındaki bölümlerinden birinin odak noktasıdır. Doob bu alanda Bachelier'den oldukça etkilenmiştir. Ekim 2003'te 'Olasılık alanında çalışmaya 1934'te başladım ve Fransızca metinlerde Bachelier'e atıf yapıldığını gördüm. Desire Andre'nin Yasıtma İlkesine yapılan atıflarla beraber Bachelier'in yoğun bir şekilde kullandığını hatırladım. Hem Bachelier'den hem de Andre'den çok şey öğrendim. Sonra Bachelier'in Levy ve diğerleri tarafından yeniden keşfedildiğini öğrendim. Tabiki Bachelier'in Brown Hareketi için vardığı sonuçların kesin kanıtları, Brown Hareketinin kesin matematiksel tanımlarını ve uygun tekniklerin gelişimini beklemekteydi. Bachelier'in çalışmalarından hatırladığım kadarıyla diğer yazarları hor görmüş ve yalnızca yeni sonuçlar elde etmişti. Onun zamanında ve oldukça sonraları Olasılık, matematiğin saygın bir alanı değildi, birinin Olasılık Teorisi diğerinin saçmalığıydı. Bachelier ve Andre'nin fikirleri bende kalıcı bir etki bıraktı ve sonraki çalışmalarımı etkiledi' dedi [2].

Doob ayrıca Stokastik Diferansiyel Denklemleri inceleyen ilk matematikçilerden biriydi. 1942'de yayımladığı bir makalenin giriş bölümünde şöyle der; 'Bir Stokastik Diferansiyel Denklemi titiz bir şekilde tanımlamanın yolu, Langevin Diferansiyel Denklemine Hız fonksiyonu $\frac{dX(s)}{ds}$ için kesin bir tanımlama yapmaktır. Ancak Stokastik Diferaniyel Denklemlerin geliştirilmesindeki asıl figür, Japon Matematikçi Kiyoshi Ito'dur. Ito, şimdiye kadar anlattığımız tüm büyük figürlerden yararlandı [15,16]. Doob, örnek yolların sezgisel yollarını anlamlandırmak için ölçüm teorisini kullanmıştı. Kolmogorov ve Feller, Markov Süreçleri ve Kısmi diferansiyel denklemler arasındaki ilişkiyi daha çok vurgulamıştı. Ito'nun 1944'te Stokastik İntegrasyon üzerine yayınladığı ilk çalışması oldukça kısaydı. Küçük bir önsöz yazmıştı ve Brown Hareketinin tanımı için Levy'nin kitabına ve Doob'un 'Sürekli bir parametreye bağlı olarak stokastik işlemler' adlı makalesine, Stokastik integralin özel durumları(deterministic integrand) için de Paley ve Wiener'in 1934'teki çalışmasına atıfta bulunmuştu. Fakat topladığı çalışmaların yanı sıra Ito asıl motivasyonunu şöyle açıklar; 'Bu çalışmalarda işlemlerin geçiş olasılıklarını çalışmak için adına 'Kolmogorov parabolik denklemi ve Feller tarafından geliştirilmesi' denen güçlü bir analitik yöntem gördüm. Ama

Levy'nin gözlemlediği diferansiyel işlemlerle aynı yolla Markov işlemlerinin yollarını (paths of Markov processes) çalışmayı istedim.' Bir Markov parçacığının sonsuz küçük zaman artışları üzerindeki davranışı hakkında düşünerek Ito, bir Markov işlemini yöneten Stokastik bir Diferansiyel Denklem kavramını formüle etti. Eğer W bir standart Wiener Süreciyse Markov işlemini takip eden bir parçacığın konumu için Ito Denklemi aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

2.2 Ito İntegrali

$V = V(S,T)$ ifadesi $f(t,w): [0,\infty) \times \Omega \to R$ fonksiyonlarının bir sınıfı olsun ve aşağıdaki özelliklerin sağlandığını kabul edelim:

i. $(t,w) \to f(t,w)$ ifadesi B'nin $[0,\infty)$ üzerinde Borel σ-cebiri olmak üzere $B \times F$ ölçülebilirdir,

ii. $f(t,w)$ fonksiyonu F_t uyumludur.

iii. $E[\int_S^T f(t,w)^2 dt] < \infty$.

Şimdi bir $f \in V$ için İto İntegrali olan $I[f](w) = \int_S^T f(t,w)dB_t(w)$ ifadesinin nasıl tanımladığını gösterelim. (B_t bir boyutlu Brown Hareketidir.)

Öncelikle bir $I[\Phi]$ ifadesini Φ fonksiyonunun bir sınıfı olarak tanımlayacağız. Sonrasında Φ fonksiyonlarının her biri bir $f \in V$ fonksiyonuna yaklaşacak yani $\Phi \to f$ için $\int \Phi dB$ ifadesinin limitini $\int f dB$ olarak tanımlıyoruz. Şimdi bir $\Phi \in V$ fonksiyonunu aşağıdaki şekilde bir temel (elementary) olarak tanımlayalım:

$$\Phi(t,w) = \sum_j e_j(w) X_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

(Her e_j fonksiyonu F_{t_j} ölçülebilirdir.) Şimdi bu fonksiyonun integralini alalım:

$$\int_S^T \Phi(t,w)dB_t(w) = \sum_{j \geq 0} e_j(w)[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}](w)$$

Bu noktada Ito İzometrisinden yararlanacağız.

$$E\left[\left(\int_S^T \Phi(t,w)dB_t(w)\right)^2\right] = E[\int_S^T \Phi(t,w)^2 dt] \quad \text{(İto Izometrisi)}$$

(İspatı için Oksendal [9] sayfa 26 incelenebilir.

Şimdi İzometri formülünü Temel fonksiyonlara genişletmek için bazı adımlar izlenir:

1. Adım: $g \in V$ sınırlı ve sürekli bir fonksiyon, $\Phi_n \in V$ de temel fonksiyonlar ailesi olsun.

$\mathrm{E}\left[\int_S^T (\mathrm{g}-\Phi_\mathrm{n})^2 \mathrm{dt}\right] \to 0,\ \mathrm{n}\to\infty$

(Φ_n ailesinin yakınsadığı bir $g \in V$ fonksiyonu olmasını $\Phi_n \in V$ lerin temel fobksiyonlar olmasının ön şartı demiştik.)

2. Adım: $h \in V$ fonksiyonu sınırlı ve $g_n \in V$ de her n ve w için sürekli ve sınırlı fonksiyonlar olsun.

$E[\int_S^T (h-g_n)^2 dt] \to 0$

(İspat için [9])

3. Adım: Benzer mantıkla $f \in V$ ve $\{h_n\} \subset V$ sınırlı fonksiyonlar dizisi olsun.

$E\left[\int_S^T (f-h_n)^2 dt\right] \to 0,\ n \to \infty$

(İspat için [9])

Artık Ito İntegralini tanımlayabiliriz:

Eğer $f \in V$ seçersek $\Phi_n \in V$ temel fonksiyonları için

$E\left[\int_S^T |f-\Phi_n|^2 dt\right] \to 0$ olur ve

$I[f](w) = \int_S^T f(t,w)dB_t(w) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \Phi_n(t,w)dB_t(w)$

Bu limit İto İzometrisi tarafından $L^2(P)$ nin bir Cauchy dizisi olarak oluşur. Böylelikle $f \in V(S,T)$ için S den T ye İto integrali:

$\int_S^T f(t,w)dB_t(w) = \lim_{n\to\infty} \int_S^T \Phi_n(t,w)dB_t(w)$

şeklinde verilir. Burada $\Phi_n \in V$ fonksiyonları için ise

$$E\left[\int_S^T \left(f(t,w)-\Phi_n(t,w)\right)^2 dt\right] \to 0, \qquad n \to \infty$$

olur [104]. Şimdi İto İnteralinin bazı özelliklerini verelim.

i. $\int_S^T f dB_t = \int_S^U f dB_t + \int_U^T f dB_t$

ii. $\int_S^T (cf+g)dB_t = c\int_S^T f dB_t + \int_S^T g dB_t$, c sabit

iii. E[$\int_S^T f dB_t$]=0

iv. $\int_S^T f dB_t$ integrali F_T ölçülebilirdir.

Tanım (Martingal) (Ω, F) üzerinde bir σ-cebiri $M = \{M_t\}_{t\geq 0}$ ailesi için $M_t \subset F$ olsun. $0 \leq s < t \Rightarrow M_s < M_t$ (M_t artan ise) ve M_t nin aşağıdaki şartları sağlaması durumunda $\{M_t\}_{t\geq 0}$ stokastik süreci $\{M_t\}_{t\geq 0}$ filtrelemesine ve P'ye bağlı olan bir Martingal olarak adlandırılır.

i. M_t, her t için M_t-ölçülebilirdir,

ii. Her t için $E[|M_t|] < \infty$,

iii. Her $s \geq t$ için $E[M_s|M_t] = M_t$ dir. Burada $M_s|M_t$ ifadesi bir koşullu olasılıktır. $E[M_s|M_t]$ ifadesi, M_t nin gerçekleştiği bilindiğine göre M_s nin beklentisi olarak tanımlanabilir. [9]

Tanım : (Doob Martingal Eşitsizliği Doob's Martingale Inequality)

M_t bir martingal ve $t \to M_t(w)$ sürekli olsun. Eğer $p \geq 1, T \geq 0, \lambda > 0$ olmak üzere;

$$P[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda] \leq \frac{1}{\lambda^P} E[|M_t|^P]$$

Eşitsizliğine Doob Martingal Eşitsizliği denir. Bu eşitsizlik yardımıyla aşağıdaki teorem ispatlanır.

Teorem : $f \in V(0,T)$ ve bu fonksiyonun t sürekli zamanda bir versiyonu

$\int_0^t f(s,w)dB_s(w),\ \ 0 \leq t \leq T$ olsun.

Burada (Ω, F, P) üzerinde bir $0 \leq t \leq T$ aralığında t parametresine bağlı sürekli zamanda öyle bir öyle bir J_t Stokastik süreci vardır ki

$$P\left[J_t = \int_0^t f dB\right] = 1$$

olur. Bu teoremin ispatı için [9] sayfa 33 incelenebilir. Bu teoremin bir sonucu olarak ise şunu ifade edebiliriz:

Her T için $f(t,w) \in V(0,T)$ ve $M_t(w) = \int_0^t f(s,w)dB_s$ ifadesi F_t filtrelemesine göre bir martingal olsun. Bu durumda $\lambda, T > 0$ için şu eşitsizlik sağlanır:

$$P\left[\sup_{0\leq t\leq T} |M_t| \geq \lambda\right] \leq \frac{1}{\lambda^2} E\left[\int_0^t f(s,w)^2\, ds\right]$$

(Bu eşitsizliğin ispatı Doob Martingal Eşitsizliği ve Ito İzometrisine dayanır.)

Tanım: Bir Boyutlu Ito Süreci (One Dimensional Ito Process)

B_t , bir boyutlu Brown Hareketi (Ω, F, P) Olasılık Uzayı üzerinde tanımlı olsun. Eğer $v \in W_H$, ve H_t uyumlu u fonksiyonları için;

$$P\left[\forall t \geq 0 \text{ } için \int_0^t v(s,w)^2 ds < \infty\right] = 1$$

$$P\left[\forall t \geq 0 \text{ } için \int_0^t |u(s,w)| ds < \infty\right] = 1$$

Şartları sağlanıyorsa aşağıda formülü verilen X_t ifadesi bir Ito süreci (stokastik integral) olarak adlandırılır: [9]

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,w)ds + \int_0^t v(s,w)dB_s$$

Yukarıdaki ifade bir diferansiyel formda daha kısa şekilde şöyle de yazılabilir:

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Teorem (Bir Boyutlu Ito Formülü) :X_t , Ito süreci $dX_t = udt + vdB_t$ denklemini sağlasın ve pozitif yarı düzlemde tanımlı $g(x,t)$ sürekli ve iki defa türevlenebilir bir fonksiyon olsun. $Y_t = (t, X_t)$ ifadesi de bir Ito süreci

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, X_t)(dX_t)^2$$

İfadesi $(dX_t)^2$ =(dX_t).(dX_t), $dt.dt = dt.dB_t = dB_t.dt = 0$ ve $dB_t.dB_t = dt$ kabulleri altında bir boyutlu Ito Formülüdür. İspatı için [9] nolu çalışma sayfa 45-48 incelebilir.

Ayrıca çok boyutlu Ito Formülü için de R^p de $g(t,x) = (g_1(t,x), \ldots, g_p(t,x))$ fonksiyonları için yine $dX_t = udt + vdB_t$ denkleminin sağlandığını varsayalım. Yine

$$Y(t,w) = g\big(t, X(t)\big)$$

$$dY_k = \frac{\partial g_k}{\partial t}(t,X)dt + \sum_i \frac{\partial g_k}{\partial x_i}(t,X)dX_i + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j}(t,X)dX_i dX_j$$

Formülü $dB_i.dB_j = \delta_{ij}dt, dB_i dt = dtdB_i = 0$ kabulleri altında sağlanır.

Örnek : $\frac{dN_t}{dt} = a_t N_t$ popülasyon büyümesini N_0 başlangıç değerini $a_t = r_t + \alpha B_t$ büyüme katsayısını versin. r_t büyüme oranı, α standart sapma, B_t ise Brown Süreci olarak veriliyor. Bu popülasyon büyümesini analiz etmeye çalışalım.

$$\frac{dN_t}{dt} = (r + \alpha B_t)N_t$$

$$\frac{dN_t}{N_t} = rdt + \alpha dB_t$$

Karşılıklı integral alırsak $(B_0 = 0)$

$\int_0^t \frac{dN_t}{N_t} = rt + \alpha B_t$

Bu ifadenin sol kısmındaki integrali için Ito formülünden yararlanalım.

$g(t,x) = lnx\ ,\ x > 0$

$d(lnN_t) = \frac{1}{N_t} dN_t + \frac{1}{2}(-\frac{1}{{N_t}^2})^2 d{N_t}^2$

Brown hareketi kabullerinden $dt \to 0$ ve $dB_t . dB_t \to dt$ olduğu için

$= \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2{N_t}^2} \alpha^2 {N_t}^2 dt^2 = \frac{dN_t}{N_t} - \frac{1}{2}\alpha^2 dt$

buradan da $\frac{1}{2}\alpha^2 dt$ terimi karşıya gönderilince

$\frac{dN_t}{N_t} = \ d(lnN_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt$

olur. Şimdi bu ifadeyi $\int_0^t \frac{dN_t}{N_t} = rt + \alpha B_t$ integralinde yerine yazar ve integralini alırsak

$\int_0^t (\ d(lnN_t) + \frac{1}{2}\alpha^2 dt) = rt + \alpha B_t$

$ln\frac{N_t}{N_0} + \frac{1}{2}\alpha^2 t = rt + \alpha B_t \quad \Rightarrow ln\frac{N_t}{N_0} = \left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t$

$N_t = N_0 \exp(\left(r - \frac{1}{2}\alpha^2\right)t + \alpha B_t)$

olarak bulunur. Bu noktada

i. Eğer $r > \frac{1}{2}\alpha^2$ ise $t \to \infty$ iken $N_t \to \infty$ olur.

ii. Eğer $r < \frac{1}{2}\alpha^2$ ise $t \to \infty$ iken $N_t \to 0$ olur.

iii. Eğer $r = \frac{1}{2}\alpha^2$ ise $t \to \infty$ iken N_t büyük veya küçük oranlarda dalgalanma yapar.

Ito, 1944'te Stokastik İntegrasyon üzerine yazdığı ilk makalesinde bu denklemin çözüm kavramını anlamlandırdı yani Stokastik İntegrale kesin bir anlam verdi. Ayrıca Ito, Brown Hareketinin Fonksiyonları için Kalkülüs'ün Temel Teoremi dediğimiz kuralı da belirtir. 1951'deki ikinci makalesinde Kolmogorov'un Kısmi Diferansiyel Denklemleriyle de bağlantı kurarak bugün Ito Formulü olarak bildiğimiz denklemi yazıp kanıtladı. Oysa Wiener İntegrali White Noise sürecine karşı deterministik bir fonksiyonun integralidir, zamanın bir rolü yoktur fakat Ito İntegralinde zaman çok önemlidir ve integrandın kendisi bile rasgele bir fonksiyon olabilir.

Doob'un 1953 tarihli [12] kitabında Ito'nun Stokastik hesabı ortogonal artışlara sahip süreçlere ve ardından koşullu ortogonal artışlara sahip yeni süreçlere Yani martingallere genişletildi. Ancak Doob bir varsayımda bulunmak zorunda kaldı. Martingal M'ye göre stokastik integrali tanımlayabilmek için $M_t^2 - F(t)$ bir martingal olacak şekilde, rasgele olmayan ve artan bir F(t) fonksiyonu tanımlamayı önerdi. Ayrık parametrelerde martingaller de benzer özelliklerle, 0'dan başlayan ve n zamanındaki sürecin ölçülebilir olması özelliği ile n-1 zamanına kadar mevcut olan bilgiler tarafından üretilen sigma alanına kadar artış gösteren yollarla bir süreç ve bir martingalin toplamı şeklinde bir alt martingal yazılmasını sağlayan Doob Ayrıştırma Teoreminden gelir. Bu sonuçların belirli bir integrallenebilirlik varsayımı altında sürekli zaman versiyonu Meyer'e (1962) bağlıdır [17]. Doob-Meyer Ayrıştırmasının tekliği 1963 yılında Meyer tarafından yazıldı. İlk çalışmasında Meyer, Meyer Ayrıştırma Metodunun bir uygulaması olarak Doob Stokastik İntegralin uzantısını önerir. Bu fikirlerin sistematik gelişimi 1963 yılında Courrege tarafından sağlandı fakat daha genel stokastik integraller için Ito Formulü'nün benzerini sağlayan Kunita ve Watanabe (1967) oldu [18].

Bu noktaya kadar stokastik İntegrasyon Markov Süreçleri Teorisi ile yakından ilgiliydi. Bu durum ölçüm kısıtlama yoluyla ortaya çıktı çünkü σ-cebirinin sol yarı düzlemde sürekli olduğu varsayılmıştı. 1970 yılında Doleans-Dade ve Meyer [19] bu hipotezi kaldırdılar ve stokastik integral tamamen bir Martingal Teorisi haline geldi. Bu, 1979 ve 1981 yılındaki Harrison, Kreps ve Pliska'nın temel makalelerinde matematiksel finans açısından anahtar bileşendi [20,21].

Teorem : (Martingal Gösterim Teoremi, Martingale Represention Theorem)

$B(t) = (B_1(t), \dots, B_n(t))$ ifadesi n boyutlu Brown Hareketi olsun. M_t süreci bir $F_t^{(n)}$ martingal (P'ye bağlı) olsun. $\forall t \geq 0$ için $M_t \in L^2(P)$ olmak üzere tek bir

$g(s,w) \in V^n(0,t)$ vardır ki;

$M_t(w) = E[M_0] + \int_0^t g(s,w)dB(s)$

ifadesini sağlar. Yukarıdaki ifade M_t'nin her zaman martingal olması durumunda sağlanacağı için bu teoreme Martingal Gösterimi Teoremi denir [9].

Tanım Filtreleme Problemi (The Filtering Problem) :

$X_t \in R^n$, t'ye bağlı aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi sağlayan bir sistem olsun.

$\frac{dX_t}{dt} = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)W_t\ ,\ t \geq 0$

$b: R^{n+1} \to R^n$, $\sigma: R^{n+1} \to R^{n+p}$ ve W_t ise p boyutlu Wiener Sürecidir. Yukarıdaki denklem B_t Brown Hareketi olmak üzere şu şekilde de yazılabilir.

$dX_t = b(t, X_t) + \sigma(t, X_t)dB_t$

Şimdi bu diferansiyel denkleme ait gözlemler olan H_t ise $c: R^{n+1} \rightarrow R^m$ $\gamma: R^{n+1} \rightarrow R^{m\times r}$ ve $\hat{W}_t$ ise r boyutlu Wiener Süreci olmak üzere aşağıdaki şekilde verilsin:

$H_t = c(t, X_t) + \gamma(t, X_t)\hat{W}_t$

Şimdi bir $Z_t = \int_0^t H_s ds$ ve V_t r boyutlu Brown Hareketi olmak üzere gözlemlerle ilgili aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemi verelim.

$dZ_t = c(t, X_t) + \gamma(t, X_t)dV_t.$

H_s ve Z_s ifadeleri $0 \leq s \leq t$ için geçerlidir ve gözlemlerle ilgili H_s yerine Z_s de düşünülebilir. Bu durumda Filtreleme Probleminin özü şu sorudur:

'Z_s gözlemlerine göre Hangi $\mathcal{X}_t$ konumu X_t sistemi için en iyi tahmindir?'

Buradaki $\mathcal{X}_t$ bir $G_t$ölçülebilirdir ve $G_t$de $\{Z_s(.): s \leq t\}$ için bir σ-cebiridir. Yani $\mathcal{X}_t$ yi matematiksel olarak şöyle ifade edebiliriz:

$\int |X_t - \mathcal{X}_t|^2 \, dP = E[|X_t - \mathcal{X}_t|^2] = inf\{E[|X_t - Y|^2] \, , Y \in K\}$

$K = K(Z, t) = \{Y: \Omega \rightarrow R^n; Y \in L^2(P) \, , Y \; bir \; G_t \text{ ölçülebilirdir}\}$

Samuelson'un 1965 [7] yılında Brown hareketini Geometrik Brown Hareketine dönüştürerek opsiyonun fiyatının negatif değer almasını problemini çözdüğünü söylemiştik. Bunu şu denklem yardımıyla yapıyor:

$S(t) = S(0)\exp(at + \sigma W(t))$

Bu şekilde yaparak basit bir çözüm buluyor. Fakat bu durum konunun tüm matematiksel gelişimi üzerine derin bir etkisi yapıyor. Bu üstel ifade nonlineer bir ifadedir ve Brown Hareketinin nonlineer dönüşümlerinin analizi Ito Kalkülüsü ile yapılmak zorundadır.

Bu sırada hikayeye dahil olan bir diğer kişi de 1967 yılında MIT (Massachusetts Institute of Technology)den mezun olan Robert C. Merton'du. Merton, muhtemelen Ito İntegralleri ile Finans stratejileri arasındaki ilişkileri kurabilen ilk kişiydi. Merton, hızlıca bir dizi klasik çalışma yayınladı ve bunları Continuous-time Finance isimli kitabında topladı. Bu kitapta finansal ekonominin önemli sorunları Ito Kalkülüsü yöntemleriyle çözüldü[22] .

3. BLACK-SCHOLES MODELİ

Black-Scholes Modeli, Fisher Black ve Myron Scholes'in 1973 yılında geliştirdikleri modeldir. Model, geometrik Brown hareketiyle Avrupa tipi ve temettüsüz opsiyon fiyatlarının belirlenmesi esasına dayanır. Bu model bu alanda geliştirtilmiş en iyi model olup halen kullanılmaktadır [23]. Denklemde $V(S,t)$ dayanak varlığın opsiyon fiyatını, S dayanak varlığın fiyatını, t zamanı, $r(t)$ risksiz faiz oranını, σ volatilite yani fiyatlardaki oynaklığı, E opsiyonun kullanım fiyatı, T vade süresini göstermek üzere lineer, parabolik Black-Scholes Kısmi diferansiyel denklemi aşağıdaki gibidir:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - r(t)V = 0 \qquad (S,t) \in R^2 x(0,T)$$

Denkleminin çözümü de $\quad V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$ dir.

$$N(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

olur. Şimdi bu denklemin çıkarılışına bakalım. Şimdi π bizim portföyümüz olsun ve fiyatı S olan hisseden Δ kadar almış olalım.

$$\pi = V(S,t) - \Delta S$$

Hisse senedindeki fiyat değişimi için μ fiyattaki ortalama değişim, σ fiyatlardaki volatilite ve B_t geometrik Brown hareketi olmak üzere;

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB_t$$

Şeklindedir. Şimdi π nin değişimini alalım ve $V(S,t)$ nin Taylor açılımından $dV(S,t)$ değerini yerine yazalım.

$$d\pi = dV(S,t) - \Delta dS$$

$$V(S,t) = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2$$

Şimdi bu değerleri aynı denklemde yazalım.

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t}dt + \frac{\partial V}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}dS^2 - \Delta dS$$

Bu denklemlerdeki dS ve dS^2 değerlerini bulup yerine yazalım.

$dS^2 = (\mu S dt + \sigma S dB_t)^2 = (\mu S)^2 dt^2 + 2S^2 \mu\sigma dt dB_t + (\sigma S)^2 {dB_t}^2$

Burada Brown hareketi sebebiyle $dt \to 0$ ve ${dB_t}^2 \to dt$ olacağından $dS^2 = (\sigma S)^2 dt$ dir.

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{\partial V}{\partial S} dS + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt - \Delta dS$$

Burada da ilk ve son terimleri sadeleştirme adına $\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$ yazarsak (delta koruması)

$$d\pi = \frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt$$

olur. Sonrasında π portföyünün risksiz faiz oranı r durumundaki değişimi yazıp bunu denklemde yerine koyalım. Yani $d\pi = r\pi dt$ ve $\pi = V - \Delta S$ denklemlerinden yararlanalım.

$$\frac{\partial V}{\partial t} dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 dt = r(V - \frac{\partial V}{\partial S} S) dt$$

Karşılıklı olarak dt ler yok edilirse aşağıdaki gibi lineer, parabolik Black-Scholes kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. [23]

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 + r(t) S \frac{\partial V}{\partial S} - r(t) V = 0$$

$$V(0,t) = 0\,, \qquad S \to \infty \; için \; V(S,t) \sim S\,, \qquad V(S,t) = max\{S - E, 0\}$$

Şimdi bu denklemin çözümlerine ulaşalım. Bunun için de öncelikle S ve t değişkenlerine bağlı $V(S,t)$ fonksiyonunu x ve τ değerlerine bağlı $v(x,\tau)$ fonksiyonuna dönüştürelim.

$$S = Ee^x\,, \qquad t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}\,, \qquad V = Ev(x,\tau)$$

dönüşümlerini yapıp bu ifadenin kısmi türevlerini alalım.

$$\frac{\partial V}{\partial t} = E\frac{\partial v(x,\tau)}{d\tau}\frac{\partial \tau}{dt}$$

$t = T - \frac{2\tau}{\sigma^2}$ ifadesinde iki tarafın da t ye göre türevi alınırsa $\frac{\partial \tau}{dt} = -\frac{\sigma^2}{2}$ bulunur ve yerine yazıldığında

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{1}{2}E\frac{\partial v(x,\tau)}{d\tau}\sigma^2$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = E\frac{\partial v(x,\tau)}{dx}\frac{\partial x}{\partial S}$$

$S = Ee^x$ ifadesinin her iki tarafı da S ye göre türevi alınırsa $1 = Ee^x\frac{\partial x}{\partial S}$ olur ve buradan $\frac{\partial x}{\partial S} = \frac{1}{Ee^x} = \frac{1}{S}$ olarak bulunur ve yerine yazılır.

$$\frac{\partial V}{\partial S} = E\frac{1}{S}\frac{\partial v(x,\tau)}{dx}$$

Son olarak da $\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right) = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = E\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial S}\right)^2 + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial^2 v}{\partial S^2}\right] = E[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{1}{S}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{S^2}]$

ifadeleri ana denklemde yerine yazıldığında

$$-\frac{1}{2}E\frac{\partial v}{d\tau}\sigma^2 + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 E\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}\left(\frac{1}{S}\right)^2 - \frac{\partial v}{\partial x}\frac{1}{S^2}\right] + rSE\frac{1}{S}\frac{\partial v}{dx} - rEv = 0$$

Yukarıdaki denklemde tüm terimlerdeki E katsayıları ve gerekli diğer sadeleştirmeler yapılınca oluşan denklem:

$$-\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{d\tau} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial v}{\partial x} + r\frac{\partial v}{dx} - rv = 0$$

olur. Burada denklem $\frac{\sigma^2}{2}$ ye bölündüğünde

$$\frac{\partial v}{d\tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{2r}{\sigma^2}\frac{\partial v}{dx} - \frac{2r}{\sigma^2}v$$

ifadesinde $k = \frac{2r}{\sigma^2}$ dönüşümü yapıldığında

$$\frac{\partial v}{d\tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$$

denklemine ulaşılır. Sınır değerleri ise $v(x,0) = max\{e^x - 1{,}0\}$ dir. [24]

$$V(x,0) = Ev(x,0) = max\{Ee^x - E, 0\}$$

Şimdi de en son denklemde $v(x,\tau) = e^{\alpha x+\beta}\ u(x,\tau)$ dönüşümü yapalım ve kısmi türevlerini bulalım. [25]

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial \tau} = \beta e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial u(x,\tau)}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial v(x,\tau)}{\partial x} = \alpha e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + e^{\alpha x+\beta}\ \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial^2 v(x,\tau)}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{\alpha x+\beta\tau}u(x,\tau) + 2\alpha e^{\alpha x+\beta}\ \frac{\partial u(x,\tau)}{\partial x} + e^{\alpha x+\beta\tau}\frac{\partial^2 u(x,\tau)}{\partial x^2}$$

Şimdi bu ifadeleri $\frac{\partial v}{d\tau} = \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (k-1)\frac{\partial v}{\partial x} - kv$ denkleminde yazıp her terimi $e^{\alpha x+\beta}$ ifadesine bölünce elde edilen denklem;

$\beta u + \frac{\partial u}{\partial \tau} = \alpha^2 u + 2\alpha\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (k-1)\left(\alpha u + \frac{\partial u}{\partial x}\right) - ku$ elde edilir. Düzenlenince de

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = (-\beta + \alpha^2 + \alpha(k-1) - k)u + (2\alpha + k - 1)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemi tipik bir difüzyon denklemine dönüştürmek için u ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ nin terimlerini 0'a eşitleyelim.

$2\alpha + k - 1 = 0$ ve $\alpha = \frac{1-k}{2}$ olur. $-\beta + \alpha^2 + \alpha(k-1) - k = 0$ olmasıyla da

$\beta = (\frac{1-k}{2})^2 + \left(\frac{1-k}{2}\right)(k-1) - k = -\frac{1}{4}(1+k)^2$ olur. Sınır değerlerini de yerine yazdığımızda $v(x,0) = max\{e^x - 1,0\}$ ve $e^{\alpha x}u(x,0) = max\{e^x - 1,0\}$ olacağından

$$u(x,0) = max\left\{e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{1-k}{2}x}, 0\right\}$$

olur. $\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ denkleminin temel çözümünü (fundamental solution) (Green Fonksiyonu içeren) çözümünü yazalım. [24]

$$u(x,\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} u_0(x + \sqrt{2\tau}x')e^{-\frac{x'^2}{2}}dx'$$

Bu integrali değerlendirmek için başlangıç değerinin pozitif tanımlı olması sebebiyle

$e^{\frac{k+1}{2}x} - e^{\frac{1-k}{2}x} > 0$ ise $\frac{k+1}{2}x > \frac{1-k}{2}x$ dir. Buradan da $x > 0$ gelir. $x + \sqrt{2\tau}x' > 0$ olmasından $x' > -\frac{x}{\sqrt{2\tau}}$ olur. Bu ifadeler integralde yerine yazıldığında

$$u(x,\tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} (e^{\frac{k+1}{2}(x'\sqrt{2\tau}+x)} - e^{\frac{k-1}{2}(x'\sqrt{2\tau}+x)})e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{k+1}{2}(x'\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx' - \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{\frac{k-1}{2}(x'\sqrt{2\tau}+x)}e^{-\frac{1}{2}x'^2}dx'$$

olur. Burada $\eta = -\frac{1}{2}x'^2 + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}x' + \frac{1}{2}(k+1)x$ düzenlemesi yapıp yukarıdaki integralin ilk bölümünde yazıldığında

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(x' - \frac{(k+1)\sqrt{2\tau}}{2}\right)^2} e^{\frac{1}{2}(k+1)x + \frac{1}{4}(k+1)^2\tau}dx'$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau}}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{x}{\sqrt{2\tau}}-\frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\rho^2} d\rho$$

$$= e^{\frac{1}{2}(k+1)x+\frac{1}{4}(k+1)^2\tau} N(d_1)$$

Burada $d_1 = \frac{x}{\sqrt{2\tau}} + \frac{1}{2}(k+1)\sqrt{2\tau}$, $N(d) = \int_{-\infty}^{d} e^{-\frac{1}{2}s^2} ds$ ise Normal dağılım fonksiyonudur. Doğal olarak diğer integralden de d_2 değeri gelir. Bu bulduğumuz u fonksiyonundan v ye ulaşırız ve son olarak $V = Ev$ den asıl çözümümüze ulaşabiliriz. (Bu kısımdaki detaylar için [24] sayfa 35-36 incelenebilir)

$$V(S,t) = SN(d_1) - Ee^{-r(T-t)}N(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln(S/E) + (r + \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S/E) + (r - \frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

4. BLACK-SCHOLES MODELİ SONRASINDA YAPILAN ÇALIŞMALAR

Black-Scholes'ün çalışması yayınlandıktan sonra Merton, 1973 yılında kendi makalesini yayınladı. Bu çalışma bir dizi iyi fikir içerir. Bu çalışmada Merton, Hisse alım satım stratejileri ve kendini finanse eden portföylerin daha genel bir konseptini tanıtır. Belki de bunlardan en önemlisi, stokastik faiz oranlarına izin vererek bir $P(t,T)$ ikinci sıfır kuponlu tahvil tanıtımı yapar ki bu denklemde başka bir Brown hareketi de bulunur.

Bu gelişmenin önemi faiz oranlarında oynaklığın ortaya çıkması dışında fiyatların da bir oran olduğunun fark edilmesidir ve bunlar bazı birimlerle ifade edilmelidir. Böylelikle faiz oranı modellemesi de kısa sürede ilgilenilen bir konu haline geldi ve opsiyon fiyatlandırma literatüründe yaygın bir yere sahip oldu. Daha sonra 1997 yılında Jamshidian tarafından yapılan çalışmalar fiyat fonksiyonlarının homojenlik özellikleri üzerine oldu. Bu fikirlerin tamamı Merton'un makalesinde yer almaktaydı.

Sonraki büyük adım ise Cox ve Ross'un 1976 yılında yayınladıkları makalesiydi. Bu çalışmada bugün birçok ders kitabında bulunan kanıta yakın bir Black-Scholes kanıtı sunarlar. İlginç bir şekilde bununla birlikte, argümanı sınırlı bir jump-difüzyon süreçleri sınıfını kapsayacak şekilde genişletirler. Bunlar girdinin (noise) Brown hareketi ve Poisson benzeri atlama (jump) süreçlerinin toplamından oluşan fiyat süreçleridir. Fiyat süreci bu nedenle süreksizdir fakat Cox ve Ross belli koşullarda çok iyi şekilde riskten kaçınma sağladığını göstermişlerdir. Ayrıca Black-Scholes'ün aksine temettü ödemesi yapan varlıkları da fiyatlandırma sürecine katmaktadırlar. Bununla birlikte Cox-Ross çalışmasının ana önemi 'riske tarafsız değerleme'nin getirilmesinde yatmaktadır. Onlar, değerlemenin tercihten bağımsız olduğunu belirtirler. Yatrımcıların riskten bağımsız olduğunu varsayarsak, o zaman ekonomik denge, tüm varlıkların beklenen getirilerinin risksiz faiz getirisine eşit olmasını gerektirir. Opsiyon fiyatları, bu riskten bağımsız dünyada iskonto edilmiş (indirim yapılmış) beklentiler olarak ifade edilebilir.

1979 yılında Cox ve Ross, Mark Rubinstein [26] ile birlikte Binom modelini yayınladılar. Bu makalede üslup, ekonomiden ayrılıp bugün 'finansal mühendislik' olarak adlandırdığımız hesaplanabilir modellere ve etkili pratiklere vurgulu bir duruma ilerler. Bu açıdan oldukça dikkat çekici bir durum söz konusudur. Bu çalışmada tanıtılan iki terimli ağacın çok geçmeden ve bir ölçüde bugün bile ticaret ortamının yaygın olarak kullanılan yöntemlerinden biri olduğu söylenebilir.

Binom ağacı sıralamanın n bağımsız adımından oluşan ayrık zamanlı bir süreçtir. Herhangi bir düğüm noktasından başlayarak fiyat u>1 kadar artar veya g<1 kadar azalır. D=1/u alarak ve S_0=1 başlangıç fiyatına normalleştirerek düğümlerdeki fiyatlar ile şekilde gösterildiği gibi bir 'yeniden birleşen ağaç' elde ederiz. Dönem başına risksiz faiz oranının 1 olduğunu varsayıyoruz. Arbitrajın bulunmaması koşulu $R = 1 + r$ olacak şekilde $d < R < u$ olacaktır. $h = logu$ yani $u = e^h$ ve $d = e^{-h}$ ayrıca $P[Z_k = 1] = P[Z_k = -1] = q = \frac{R-d}{u-d}$ olacak şekilde $Z_1, Z_2, Z_3, \dots Z_n$ rassal değişkenler olsun. Bu durumda fiyat süreci şu şekildedir;

$$S_k = S_0 exp\left(h\sum_{i=1}^{k} Z_i\right)$$

Burada indirimli fiyat süreci $\check{S}_k = \frac{S_k}{R^k}$ bir martingal olduğundan P risk nötr ölçüsü (risk neutral measure) denen bir olasılık ölçüsüdür. S_k bir çarpımsal rastgele yürüyüştür(random walk). Eğer n anında alış değeri $f(S_n)$ olan bir opsiyonumuz varsa başlangıç anında arbitrajsız değeri indirimli beklenti $w(S_0, 0) = R^{-n}E[f(S_n)]$. Bu, bir dönemlik durumun doğrudan uzatılmasıyla bir riskten korunma portföyü oluşturularak kanıtlanmıştır. Ayrıca Cox ve arkadaşları Black-Scholes modeline bir yaklaşım olarak da binom ağacının kullanmışlardır. Çarpımsal rastgele yürüyüş, uygun şekilde ölçeklendirme, geometrik Brown hareketine yaklaşım özellikleriyle Kısmi Diferansiyel Denklemleri çözmek için basit bir algoritma sağlar. Binom Modelinin pratik opsiyon alım satımı üzerindeki devasa etkisinin nedeni budur.

Binom Modelinin bir diğer etkisi Amerikan opsiyonlarına da uygulanabilmesidir. Yani Binom Modeli sadece vade sonunda değil vade süresince istenilen zamanda opsiyonun kullanılması durumunu da modelleyebilmiştir. Bir f(s) değerinin diğer değerlerden daha büyük olduğunu varsayalım ve $w_a(.,k)$ ile $w_a(.,k+1)$ Amerikan opsiyonları arasındaki ilişkiyi inceleyelim.

$$w_a(s,k) = max\left\{f(s), \frac{1}{R}\{qw_a(us,k+1) + (1-q)w_a(ds,k+1)\}\right\}$$

n zamanı için opsiyonun kullanıldığı zaman diyelim çünkü $w_a(n, s) = f(s)$ maksimum değeridir. Yukarıdaki denklemi geriye doğru özyinelemeli şekilde oluşturup Amerikan opsiyon fiyatlarına genelleyebiliriz. $w_a(s, k) \geq f(s)$ değeri optimal kazancın olduğu açıktır. Binom Modeli bir geometrik Brown modeli yaklaşımıdır ve eğer alış opsiyonu $f(s) = \max(\mathrm{K} - \mathrm{s}, 0)$ Samuelson tarafından ortaya atılan sınır değer probleminin çözümü için de kullanılabilir.

Cox, Ross ve Rubinstein'in çalışması tamamen doğru fakat tam olmaktan uzaktı. Yatırımcı devam değerinin riskten bağımsız beklentisini anlık olarak kullanım değeri (exercise price) ile karşılaştırmalıdır. Bu prosedürün arbitrajsız bir fiyatı oluşturduğunu göstermek için bazı argümanlar gereklidir. Bensoussan (1984) ve Karatzas (1988) [27,28] çalışmalarına kadarki bazıları Mckean'ın orijinal çalışmasının 20 yıl sonrası sınırsız değer problemleri (free boundary problems) ile Amerikan opsiyonları için arbitrajsız değerler arasındaki bağlantı ortaya çıktı.

Cox ve Ross (1976) [29] risk nötr ölçümünü (risk neutral measure) Black-Scholes formülünden hissenin büyüme değerini (a) çıkararak hesapladı. Bu yüzden büyüme oranı ne olursa olsun değer aynıdır. Eğer yatırımcılar için risk nötr (risk neutral) ise riskli olsun ya da olmasın tüm hisselerin büyüme değeri risksiz faiz oranı olan r dir. Fakat Black-Scholes modelinde a = r alırsak opsiyonun değeri $E\left[e^{-r(T-t)}\max(S_T - K, 0)\right]$ olur. Fakat Cox ve Ross eşdeğer martingal ölçüleri ile bağlantıyı kuramadı. Bu noktada bu son parçası Harrison ve Kreps (1979) [20] tarafından tamamlandı. Bu çalışmada Harrison ve Kreps temettü dağıtan bir hisse senedi üzerine çalışma yapmışlardır. Etkin piyasa hipotezi olarak tanımladıkları durum, iyi çeşitlendirilmiş bir portföy satın alarak bunu elinde tutmaktır. Modellerini bunun üzerine kurarlar. Ayıca Harrison ve Priska'nın çalışması [21] Cox, Ross ve Rubenstein'in ayrık zamanlı modelini genelleştirdi. Harrison ve Pliska çalışmasında martingal teorisini kullanan bir sürekli bir hisse senedi alım satımı için teori geliştirdiler.[28] Amaçları varlık fiyatlarındaki genel kabullerle opsiyon fiyatlamanın mümkün olduğunu göstermektir.

1984 yılında Alain Bensoussan [28] 'Opsiyon Fiyatlama Teorisi Üzerine' adlı bir makale yazar. Bu makaledeki amacı borsada olmayan riskli işlemler için değer fonksiyonu tanımlamak için aksiyomatik bir çerçeve sağlamaktır. Fiyatları olan varlıklar için bir Pazar var ve stokastik süreçler olarak karakterize edilir. Yöntemi bu varlıklardan oluşan bir portföy oluşturup işlemlerde yer alan riskleri taklit etmektir. Problemi ötesine geçse de Opsiyon fiyatlama ile ilgili terminolojiye bağlı kalarak ilerler. Amaçları Amerikan opsiyonları için de titizlikle oluşturulmuş bir fiyatlama teorisi oluşturmaktır.

1988 yılında Ioannis Karatzas [27], Bensoussan'ın mevcut teorisinin sonuçlarını hem genişletip hem de basitleştirme adına bir yaklaşım sunar. Bensoussan çalışmasında sıkı sınırlılık ve koşullu talebin ödenmesi üzerine düzenlilik koşullarını zorlaştıran 'penalization method'u kullanır. Bu koşullar ancak Amerikan opsiyonlarıyla sağlanır. Karatzas'ın amacı bu problem için daha sade ve yukarıdaki kısıtlamaları kaldırmayı başaran alternatif bir metodoloji önermektir. Bu optimal durma (optimal stopping) probleminin martingal süreçlerine dayanır. Ayrıca metolojisi herhangi bir zamanda uygulanabilir opsiyonlar (Amerikan opsiyonları) için çok uygundur. Çalışmasında Bensoussan'ın modelinin bir versiyonunu tanımlar, portföyün fiyatlanması için gerekli şartları verir, modelini Avrupa tipi opsiyonlara uygular, daha sonra Amerikan opsiyonları için bir riskten korunma stratejisi (hedging strategy) notasyonu verir. Bunun için bir portföy ve tüketim süreci (consumption process) çifti tanımlar. Bununla piyasaya uygun şekilde yatırım yaparak Amerikan opsiyonundan kazanılabilecek miktarla aynı seviyeye ulaşmayı mümkün kılar. Bunun için t=0 anında eldeki varlığın en düşük düzeyde olmasını tanımlayarak riskten korunma stratejisinin varlığına izin verir. Son bölümde fiyatlama için bir formül verir ve sonuçları değerlendirerek çalışmasını bitirir.

4.1 Optimal Durma Problemi (Optimal Stopping Problem)

Tam bu noktada Optimal Durma Problemine (Optimal Stopping Problem) parantez açmak yerinde olacaktır. Bu problem elimizdeki bir varlığın maksimum karlılığı esnasında satmak ve yapılan karı en üst noktaya çıkarmaya çalışmaktır. Problem, hangi anda varlığın maksimum karda olduğunu belirlemeye çalışır.

Örnek : Bir kişinin t anındaki elindeki varlığın fiyatı X_t olsun ve aşağıdaki stokastik diferansiyel denklemle gösterilsin.

$$dX_t = rX_t dt + \alpha X_t dB_t \,, \qquad X_0 = x > 0$$

Burada B_t bir boyutlu geometrik Brown Hareketi, r ve α pozitif katsayılardır. Bu durumda bir $a > 0$ katsayısı işlem maliyeti ve $\rho > 0$ da indirim faktörü olarak verildiğinde bu kişinin eline geçen tutar

$e^{-\rho t}(X_t - a)$

olsun. Bu durumda bir τ anında kazanç beklentisini veren ifade aşağıdaki gibi olsun ve bu durumu maksimize etmeye çalışalım [9].

$$E^{(s,x)}[e^{-\rho\tau}(X_\tau - a)] = E^{(s,x)}[g(\tau, X_\tau)]$$

$$g(t,\xi) = e^{-\rho t}(\xi - a)$$

Bu durumda $Y_t = (s + t, X_t)$ için karakteristik operatöre A dersek

$$Ag(s,x) = \frac{\partial g}{\partial s} + rx\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}, \qquad g \in C^2(R^2)$$

Buradan $\frac{\partial g}{\partial s} = -\rho e^{-\rho}\ (x - a), \frac{\partial g}{\partial x} = e^{-\rho}\ , \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ olduğundan

$$Ag(s,x) = -\rho e^{-\rho t}(x - a) + rxe^{-\rho t} = e^{-\rho t}(x(r - \rho) + \rho a)$$

olur. Bu noktada

$$U = \{(s,x); Ag(s,x) > 0\} = \begin{cases} R \times R_+, & r \geq \rho \\ \left\{(s,x); x < \dfrac{\rho a}{\rho - r}\right\}, & r < \rho \end{cases}$$

Eğer $r \geq \rho$ ise $Ag(s,x)$ pozitif olmaz ve bir τ^* anından bahsedemeyiz. Burada bir D bölgesi t ye göre invaryant olmalıdır yani $D + (t_0, 0) = D$ olur. (İspat için [9]) Öyle bir g^* fonksiyonu vardır ki

$$g^*(s - t_0, x) = \sup_\tau E^{(s-t_0,x)}[e^{-\rho\tau}(X_\tau - a)] = \sup_\tau E\left[e^{-\rho(\tau+(s-t_0)}(X_\tau^x - a)\right]$$

$$= e^{-\rho t_0} \sup_\tau E\left[e^{-\rho(\tau+s)}(X_\tau^x - a)\right] = e^{-\rho t_0} g^*(s,x).$$

Burada bazı $x_o \geq \frac{a\rho}{\rho - r}$ için $D(x_o) = \{(t,x); 0 < x < x_o\}$ ifadesi U ifadesini içerir. Eğer V bu bölgenin içinde değilse $y \in V$ için

$$E^y[g(Y_\tau)] = g(y) + E^y\left[\int_0^\tau Ag(Y_t)dt\right] < g(y).$$

Buradan optimal durma noktasının varlık teoreminden [9] $g^*(y) = g(y)$ ve $V = 0$ olur.

Şimdi $\tau_{x_o} = \tau_{D(x_o)}$ olur ve $\theta(s,x) = \theta_{x_o}(s,x) = E^{(s,x)}[g(Y_{\tau(x_o)})]$ sonucunu bulmaya çalışalım. $f = \theta$ için aşağıdaki problemin bir başlangıç değer problemi olduğunu biliyoruz.

$$\frac{\partial f}{\partial s} + rx\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0, \qquad 0 < x < x_0$$

$$f(s, x_0) = e^{-\rho s}(x_0 - a).$$

Bu noktada $f(s,x) = e^{-\rho s}\Phi(x)$ dönüşümü yapalım ve kısmi türevleri başlangıç değer probleminde yerlerine yazalım.

$\frac{\partial f}{\partial s} = -\rho e^{-\rho s}\Phi(x)$, $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\rho s}\Phi'(x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{-\rho}\ \Phi''(x)$ yazıp tüm terimleri $e^{-\rho s}$ ile bölersek

$$-\rho\Phi(x) + rx\Phi'(x) + \frac{1}{2}\alpha^2 x^2 \Phi''(x) = 0\,, \qquad , \qquad 0 < x < x_0$$

$$\Phi(x_0) = x_0 - a$$

denklemi 2. Dereceden değişken katsayılı homojen bir diferansiyel denklemdir. Genel çözümü ise C_1 ve C_2 ler keyfi sabitler olmak üzere

$$\Phi(x) = C_1 x^{\gamma_1} + C_2 x^{\gamma_2}$$

Şeklindedir. Yukarıdaki denklem Euler tipi bir denklemdir ve karakteristik denkleminin kökleri aşağıdaki gibidir.

$$\gamma_{1,2} = \frac{-(r - \frac{\alpha^2}{2}) \pm \sqrt{(r - \frac{\alpha^2}{2})^2 - 2\rho\alpha^2}}{\alpha^2}\,, \qquad \gamma_2 < 0 < \gamma_1$$

Bu noktada $\Phi(x)$ fonksiyonunun $x \to 0$ için sınırlı olması gerektiğinden $C_2 = 0$ alıp başlangıç koşulu olan $\Phi(x_0) = x_0 - a$ ifadesini yazdığımızda C_1 katsayısını

${C_1 x_0}^{\gamma_1} = x_0 - a$ ve $C_1 = {x_0}^{-\gamma_1}(x_0 - a)$ buluruz.

$$\theta_{x_0}(s,x) = f(s,x) = e^{-\rho s} C_1 x^{\gamma_1} = e^{-\rho}\ (x_0 - a)(\frac{x}{x_0})^{\gamma_1}$$

Buradan x_0 noktasını maksimum nokta olarak alırsak $x_0 = x_{max} = \frac{a\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$ olarak bulunur.

Şimdi $\theta_{x_{max}}(s,x)$ ifadesi $g^*(s,x) = \sup_{\tau} E^{(s,x)}[e^{-\rho}\ (X_\tau - a)]$ için optimum noktadır.

Sonuç olarak kişi varlıklarını $x_{max} = \frac{a\gamma_1}{\gamma_1 - 1}$ değerine ilk ulaştığında satmalıdır. Bu durumdan beklenen indirimli kar ise şudur;

$$g^*(s,x) = \theta_{x_{max}}(s,x) = e^{-\rho s}(\frac{\gamma_1 - 1}{a})^{\gamma_1 - 1}(\frac{x}{\gamma_1})^{\gamma_1}$$

Daha sonra 1990 yılında David Leonard ve Michael Solt [30] ‘Teminat Bedeli belirlemek için Black-Scholes Modelinin Kullanımı Üzerine’ adlı makalesinde bazı özel prosedürleri incelemişlerdir. Temettüler (dividends) veya seyreltme (dilution) için ayarlanmamış Black-Scholes Modeli kısa vadelerle parasız teminatları ihmal eder. Seyreltme için bir düzeltme, temettü ödemeyen şirketlerin daha uzun vadeli teminatları için değerlemeyi iyileştirir. Temettü ödeyen firmalar için bulgular, teminatların nakitte olduğu veya vadenin 4 yılı aştığı firmalara göre daha iyi durumda olduğunu belirtir.

1990 yılında Beni Lauterbach ve Paul Schultz, [31]‘Pricing Warrants: An Empirical Study of The Black-Scholes Model and Its Alternatives‘ isimli çalışmasında yaygın olarak kullanılan Black-Scholes Modeli ile ilgili potansiyel sorunları araştırmak için 25000’den fazla günlük teminat (warrant) fiyatını örneğini kullanır. Bu makalede warrant fiyatlarını belirlemede Black-Scholes modelinin performansından daha iyi modellemeler araştırılır. Örneğin Chen 1975’te warrant fiyatlamak için Dinamik Programlama Yöntemini kullanmıştır. Bu yöntem, eğer hisse senedi getirisi ve fiyatlardaki oynaklık üzerine makul tahminler elde edilirse kullanışlıdır ve doğru sonuçlar vermektedir. Noreen and Wolfson 1981’de dayanak hisse senedinin log-normal dağılım sürecini takip ettiği bir Black-Scholes varant modelini ve hisse senedi fiyatının varyans difüzyon modelinin sabit esnekliğini takip eden bir modeli test etmek için 52 varant fiyatının bir ölçümünü kullanırlar. Sonuç olarak ikisinin de aynı düzeyde iyi sonuçlar verdiğini vurgularlar. Schwartz, 1977 yılında varant fiyatlarını tanımlayan kısmi diferansiyel denklemin yaklaşık çözümlerini bulmak için Sonlu Farklar Metodunu kullanır. Çalışmada varant fiyatlarını belirlemek için düzenlenen bir Black-Scholes Modeli şu şekildedir:

$$W = \langle \frac{N}{\frac{N}{\gamma} + M} \rangle \left[\left(S - \sum_i e^{-rt_i} D_i + \frac{M}{N} W \right) N(d_1) - e^{-rT} x N(d_2) \right]$$

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S - \sum_i e^{-rt_i} D_i + (M/N)W}{x} + rT}{\sigma\sqrt{T}} + \frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

W, Varant Fiyatı

S, Hisse senedi fiyatı

x, opsiyonun işleme konulacağı fiyat (exercise price)

N, Tedavüldeki hisse senedi sayısı

W, Varant sayısı

γ, her varant ile satın alınabilecek hisse seyısı

r, Risksiz faiz oranı

T, Vade süresi

σ, Birim zamanda S+(M/N)W ‘ya ait dönüşün Standart Sapması

N(d), d için kümülatif Normal Dağılım Fonksiyonu

t_i, i. Temettü ödenene kadar olan süre

D_i, i. Temettü hisse başı dolar bedeli

Bu modeli test etmek için aşağıdaki formül kullanılır:

$$ISD_t = \alpha_0 + \alpha_1 \langle \frac{S - \sum_i D_i e^{-rt_i} - e^{-r} \;\; x}{e^{-rT} x} \rangle_{t-1} + \alpha_2 r_{t-1} + \varepsilon_t$$

Burada α_0, α_1, α_2 terimleri katsayılardır.

Sonuç olarak bu model Varant fiyatlama için en çok kullanılan tekniklerden olan Black-Scholes Modelinin seyreltme (dilution, sermayenin azaltılması) için bir ayarlama içeren versiyonudur. Bu Modelde karşılaşılabilecek problemler:

1. Temettü ödemelerinden önce opsiyonu kullanma
2. Eklenti Olasılığı
3. Stokastik oranlar
4. Stokastik Hisse dalgalanmaları
5. Hisse değerleriyle ters orantılı hisse dalgalanmaları olarak verilmiştir.

Bu problemlerde Black-Scholes modelinin sabit varyans fikri en önemli dezavantajdır. Ayrıca Ross'un CEV(Constant Elasticity of Variance) (1975) Modeli ile Black-Scholes Modeli karşılaştırılmış ve CEV Modeli ancak esnekliğe dair iyi tahminler verildiğinde fiyatlamayı doğru yapabilmiştir. Fakat SRCEV (Square Root Constant Elasticity of Variance) Modeli, Varant fiyatlarını tahmin etme konusunda Black-Scholes Modelinden daha iyi performans gösterir.

Dönüştürülebilir menkul kıymetler genellikle menkul kıymetlerin 'garanti kısmı' değerinin, başka türlü eşdeğer bir düz tahvilin veya bir imtiyazlı hissenin değerine eklenmesiyle fiyatlandırılır. Sonuçlar CEV Modellerinin dönüştürülebilir finansal araçların teminatlı kısmını fiyatlandırmak için kullanışlı olabileceğini gösteriyor [31]. Bu çalışma CEV Modelinin bu tür finansal araçların fiyatlandırılmasının incelenmesi gerektiğine dikkat çekerek sona eriyor.

1993 yılında Davis, Panas, Zariphopoulou [32]'European Option Prices with Transaction Costs' isimli makalesinde işlem maliyetlerini de hesaba katarak opsiyon fiyatlama için yeni bir tanımlama getirdiler. Çalışmalarında Hodges ve Neuberger'in 1989 yılındaki çalışmasındaki tanımlamanın bir modifikasyonu ve benzer bir yaklaşım kullandıklarını belirtirler. Daha önce işlem maliyeti içermeyen Avrupa tipi opsiyonlarda Black-Scholes

Modelini kullanıyordu. Burada yazarlar işlem maliyetini de işin içine koyarlar. Bu işlem maliyetlerini belirleyen fonksiyonlar iki stokastik optimal kontrol problemi içerir. Bunun için Fayda Maksimizasyon Teorisi (Utility Maximization Theory) kullanırlar. Bunun için bir Utility Function (Fayda Fonksiyonu) tanımlarlar ve bu fonksiyonun değerinin maksimum beklentisini tanımlarlar. Böylelikle bir stokastik optimal kontrol problemi tanımlanmış olur. Diğer bir açıdan işlem maliyeti olmadan bir opsiyon fiyatının formülünü oluştururlar. Daha sonra Bellman Denklemleri yardımıyla işlem maliyetlerini tanımlayıp bu denklemlerin çözümlerinin varlık ve tekliğini gösterirler. Daha sonra Nümerik sonuçları paylaşıp, çalışmalarını bitirirler.

4.2 Black-Scholes Modelinin Yapay Sinir Ağları İle Çözümlendiği Başlıca Çalışmalar

2003 yılında [33] nolu çalışmayla Henrik Amilon, Sinir ağları yöntemleriyle Opsiyon fiyatlama ve riskten korunma modellemesi geliştirmişlerdir. Bu konuda 1994 yılında Hutchinson [34] ‘un çalışması fikir verici nokta olmuştur. Yapay Sinir ağları noktasında Boltzmann Makinesi, Hopfield Model, Kohonen Ağları gibi yöntemler vardır. Fakat bu yöntemlerden en popüler olanı Multi Layer Perceptron (MLP) (Çok Katmanlı Algılayıcı) Yöntemidir. Bu yöntemde her sinir kendisine giden sinyalleri özetler, bir bias terimi ekler ve nonlineer bir dönüşüm yapar. Buradaki transfer fonksiyonu, monoton artan türevli bir fonksiyondur. Bu dönüşüm lineer de olabilir fakat ağın doğrusal olmayan fonksiyonları eşleyebilmesi için bazı gizli katmanların doğrusal olmayan transfer fonksiyonlarına sahip olması gerekir. Nöronun dönüştürülmüş sinyali sonraki katmanlara iletilir ve bu süreç tekrarlanır. Nöronlar arası bağlantılar ağırlıklar olarak temsil edilir. Sisteme girdi vektörleri işlendiğinde nöronlar aracılığıyla ağ üzerinden iletilir. Ağ çıktıları önceden bilinen bir hedef vektörle karşılaştırılır ve bir hata fonksiyonu hesaplanır. Hata fonksiyonu sistemi geri besler ve ağırlıklar ve ağ yeniden ayarlanıp süreç yeniden ilerler. Bu süreç hata minimize olana kadar sürer. Ağırlıkları ayarlamak için kullanılan algoritmalar geri yayılım (back propagation) olarak adlandırılır. [33,35]

Daha sonra çalışmada Geri yayılımın formülizasyonu verilir ağın yapısı belirlenir, veriler ağa işlenir (buradaki veriler İsveç Borsasının 1997 Haziran- 1998 Mart ve 1998 Haziran-1999 Mart arasındaki hisse senedi fiyatlarıdır), sinir ağı modeli kurulur ve deneysel sonuçları karşılaştırılır. MLP Sinir Ağı Modeli ile oluşturulan sonuçlar iki modelle karşılaştırılır. Birincisi Tarihsel olarak tahmin edilen fiyatlardaki volatilite baz alınarak oluşturulan Black-Scholes Modeli (BSh), diğeri de opsiyon vadesine kalan gün baz alınarak her gün yeniden belirlenen volatilite baz alınarak oluşturulan Black-Scholes Modelidir (BSi). Bu iki volatiliteye göre Mlp modelinde de farklı sonuçlar oluşmaktadır (MLPh, MLPi). Sonuçlar opsiyon fiyatlandırma açısından sıralandığında hata payı en az olan MLPi, daha sonra sırasıyla BSi, MLPh ve BSh şeklindedir. Riskten kaçınma açısından sonuçlar sıralandığında ise hata payı azdan çok olana doğru sıralama şu şekildedir: MLPh, MLPi, BSi ve BSh. Sonuçların daha detaylı incelenmesi açısından [33] nolu çalışma incelenmelidir.

2004 yılında Bennel ve Sutcliffe [35] numaralı çalışmada Black-Scholes Modeli Yapay Sinir Ağları ile Avrupa tipi opsiyonlar için fiyatlandırma performansını FTSE 100 (Londra Borsası) İndeksi için gerçekleştirmişlerdir. Bu çalışma FTSE 100 için Yapay Sinir Ağları modeliyle sunulan ilk yaygın çalışmadır. Alış opsiyonu için opsiyonun alış fiyatı varlığın gerçek fiyatından yüksekse veya satış opsiyonu için varlığın satış fiyatı gerçek fiyatından düşükse yani opsiyonu kullanmanın anlamsız olduğu durumlara Out of the Money (OTM) denir. OTM Opsiyonlarında Yapay Sinir Ağları, Black-Scholes Modeline göre üstündür. Fakat Opsiyonu kullanmanın karlı olduğu durumlarda yani In The Money (ITM) durumlarında Black-Scholes Modelinin performansı artarken Yapay Sinir Ağlarının performansı düşer. Bu durumda hisse sayısı sınırlandırıldığında ve vade süresi arttıkça (200 günden fazla) iki model karşılaştırılabilir hale gelir. Sonuçlar için daha fazla bilgi [35] nolu çalışmadan alınabilir.

2019 Yılında Angabalan ve arkadaşları [36] Rekabetçi Sinir Ağları Modelini lineer olmayan ve kesirli mertebeden dinamik bir sistem için oluşturdular. Bunu yaparken Lyapunov Fonksiyoneli, Mittag-Leffler Fonksiyonu özelliklerinin asimptotik açılımı, Caputo Türevinin bazı özelliklerini kullandılar. Matris şeklinde verilen Kesirli Mertebeden Rekabetçi Sinir Ağları modellerinin Global Asimptotik Kararlılığı kadar iyi bir denge noktasının varlığını ve tekliğini gösterdiler. Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ve Gronwall Eşitsizliği yardımıyla modelin sınırlılığını gösterdiler. Lineer ve ayarlanabilir geri besleme kontrol yöntemleriyle zaman gecikme terimi içeren kesirli mertebeden Rekabetçi Sinir Ağları modeli ile daha önceden çalışılmış tamsayı mertebeden Rekabetçi sinir ağları modelinin asimptotik senkronizasyon kriteri belirlendi. Daha sonra Nümerik simülasyonlarla sonuçlar açıklanır.

2021 yılında Chen ve diğerleri [37] çalışmalarında Laguerre Sinir ağları ile oluşturulan üç katmanlı nümerik bir algoritma ile Amerkan opsiyonu fiyatlarını belirlemeyi amaçlarlar.

Amerikan opsiyonları için volatilite ve faiz oranı sabit olmadığında Black-Scholes Denkleminin analitik çözümünü bulmak oldukça zordur. Bu tip durumlarda geçerlilik süresi ve hisse senedi fiyatı ağın girdisi, opsiyonun fiyatı ise tek çıktı katmanıdır. Aktivasyon fonksiyonu olarak da Laguerre Fonksiyonları kullanılır. Black-Scholes denklemi ve başlangıç koşulları verilir, çözüm aralığımızda bazı noktalar verilir ki algoritma ayarlanabilsin. Son olarak makine öğrenme algoritması ağ bağlantı ağırlıklarını optimize etmek için kullanılır. Sonlu elemanlar yöntemi ve radyal tabanlı fonksiyon sinir ağı gibi mevcut algoritmalarla karşılaştırıldığında, Laguerre sinir ağı tarafından elde edilen sayısal çözümler daha yüksek doğruluğa ve daha küçük hatalara sahiptir, bu da önerilen yöntemin Black-Scholes denklemlerini çözmek için uygulanabilirliğini ve üstünlüğünü göstermektedir.

2023 yılında Grohs, Hornung, Jentzen ve Wurstemberger [38] çalışmalarında yapay sinir ağlarının kısmi türevli Black-Scholes Denklemlerinin çözümlerindeki zorluğun üstesinden geldiği vurgulanır. Ayrıca yapay sinir ağları görüntü ve ses tanıma, oyun zekası analizi, hesaplamalı reklamcılık alanlarında da çok başarılı şekilde kullanılmaktadır. Bu tür simülasyonlar gösterir ki yapay sinir ağları çok boyutlu fonksiyonlara yaklaşım noktasında oldukça etkilidir. Bu çalışmanın amacı da yapay sinir ağları için hangi parametrelerde kısmi türevli bir Black-Scholes Denkleminin nümerik çözümüne yaklaşıldığının ortaya koyulmasıdır. Böylelikle kısmi türevli Black-Scholes denklemlerinin çok boyutlu çözümlerinde bu zorluğun üstesinden yapay sinir ağları ile gelinebildiği gösterilmiştir.

4.3 Martingal Süreçleri Üzerine Çalışmalar

2012 Yılında Beiglböck ve Juillet, [39] çalışmalarında marjinal martingal kısıtlamaları atında Optimal bir taşıma problemi tanımlarlar. P Olaslık uzayı, $\mu, v \in P$ maliyet fonksiyonu $c: R \times R \to R$ olsun. Eğer a ve b sırasıyla μ ve v ye göre integrallenebilir ise $c(x,y) \geq a(x) + b(y)$ olur. $lav\ X = \mu$ ve $lav\ Y = v$ ise $c(X,Y) \geq a(X) + b(Y)$ ifadesinin beklenti fonksiyonu olan $\left[E\left(a(X)\right) + E\left(b(Y)\right), +\infty\right]$ iyi tanımlıdır. Bu özellik İntegrallenebilirlik için yeter koşuldur. Böylelikle Optimal Taşıma Problemi Şu Minimizasyon Problemini içerir:

$lav\ X = \mu$ ve $lav\ Y = v$ için $min\{E[c(X,Y)]\}$ olmalıdır.

Bu problemin sonucu için $C(\mu, v)$ olarak tanımlarız.

$$C(\mu, v) = \inf_{\pi \in \Pi(\mu, v)} \iint c(x,y) d\pi(x,y)$$

Burada π optimal taşıma planıdır. $\Pi(\mu, v)$ ise tüm taşıma planlarıdır. Daha sonra bu optimal taşıma planının bir Martingal olduğu belirtilir. Bu martingal taşımanın varlığını bir optimal nokta bulunduğu ispatlanır. Daha sonra bu Martingal taşımanın yapısı oluşturulur ve Monoton Martingal taşımanın varlığı ve tekliği üzerine tartışılır. Diğer bölümde Monoton martingal taşımanın optimallik şartları üzerinde durulur. Son olarak farklı Maliyet Fonksiyonları ve optimal martingaller arası bağlantılara yer verilir.

2012 Yılında Dolansky ve Soner, [40] çalışmalarında martingal optimal taşıma problemi ile robust riskten koruma arasındaki ikiliği sürekli zaman için incelemişlerdir. Riskten korunma problemi, altta yatan riskli varlığın ve statik bir pozisyonun dinamik olarak alım satımından oluşan minimal bir süper korunma portföyü oluşturmaktır. Bu ikilik, opsiyonun beklenen değerini makimize eden Monge-Kantorovich tipi Martingal Taşınım Problemidir. Burada verilen tüm martingal ölçüleri vade sonunda marjinaldir. Ayrıca süper çoğaltma portföyleri de bir maliyet oluşturur.

Orijinal Taşıma Problemi Mogne tarafından [41] 19. Yüzyılda yazılmıştır. Problem, bir kazı için toprak yığınını optimal şekilde yer değiştirmektir. Matematiksel olarak μ ve v eşit kütleler olsun. Burada R^d üzerinde v den μ ye bir optimal eşleştirme araştırılmaktadır. S burada bir eşleştirme olmak üzere;

$$\int \varphi\big(S(x)\big)dv(x) = \int \varphi(x)d\mu(x)$$

Tüm sürekli φ fonksiyonları için R^d üzerinde sağlanır. C maliyet fonksiyonu ve tüm S eşleştirmeleri için ;

$$\int c\big(x, S(x)\big)dv(x)$$

İfadesini R^d üzerinde minimum yapmak amaçlanmaktadır. Kantorovich, [42] ve [43] deki çalışmalarında eşleştirme kullanmak yerine marjinalleri μ ve v olan $R^d \times R^d$ de bir olasılık uzayı tanımlayarak problemi lineerleştirdi. Böylelikle $(g, h) \in R^d$ yukarıdaki çalışma [39] ile de paralel olmak üzere ;

$$g(x) + h(y) \leq c(x, y)$$

sağlanır. Böylelikle amaç artık aşağıdaki ifadeyi maksimize etmektir:

$$\int g(x)dv(x) + \int h(y)d\mu(y)$$

Robust riskten korunma problemlerinde hisse sürecinin başlangıç ve final dağılımı olarak iki değer daha verilir. Sonrasında optimal bağlantı kurulmaya çalışılır. Problemdeki maliyet fonksiyoneli sadece final değere değil iki değer arası bağlantının tamamına bağlıdır. Bu metindeki yaklaşım, orijinal robust riskten korunma problemini kendisi açısından bir limit olarak kullanmaktır. Böylelikle robust riskten koruma, olasılık ölçüsü doğru seçildiğinde klasik anlamda riskten korumaya dönüşür. Yani verilen olasılık uzayında klasik ikilik sonuçlarını Avrupa tipi opsiyonların riskten korunması için uygulanabilir. Son adım gözlemlenmiş değerlerin limitini analiz etmektir. Bu durumu arbitrajsız fiyatlarla ve stokastik süreçlerin limit teoremleriyle birleştirilir. Devamında sonuçlar formülize edilir, yarı kesin yaklaşım ile bu çalışmadaki yaklaşım arasındaki bağlantı kanıtlanır, sonrasında çalışmanın ana sonuçlarını vurgulayan eşitsizliğin ispatıyla çalışma sonuçlanır.

2012 yılındaki bir diğer çalışmada Duplantier ve diğerleri [44] kritik durumda Gauss çarpımsal kaosunu çalışmışlardır. Burada türev martingal, dallanan Brown hareketi ve dallanan rassal yürüyüş bağlamında tanıtılır ve rastgele bir değere yakınsar. Ayrıca türev martingali ile bağlantılı olarak, logaritmik Gauss değişkenleriyle ilgili varsayımlar yazılmaktadır.

Şimdi Gauss Çarpımsal Kaosunun tanımını yazalım. $n \geq 1$ için R^d nin Borel altkümelerinde bir M_n Radon ölçümü olsun. [45]

$$M_n(A) = \int e^{\gamma X_x^n - \frac{\gamma^2}{2} E[(X_x^n)^2]} dx$$

Her A Borel Kümesi için $(M_n(A))_n$ dizisi bir pozitif martingaldir ve $M(A)$ ile gösterilen rastgele bir değişkene yakınsar. Bu dizinin yakınsadığı $M(A)$ şu şekilde gösterilir:

$$M(A) = \int e^{\gamma X_x - \frac{\gamma^2}{2} E[X_x{}^2]} dx$$

Bu ifadeye $\gamma^2 K$ çekirdeğiyle ilişkili Gauss Çarpımsal Kaosu denir. Bu değer Kovaryans çekirdeği $\gamma^2 K$ olan bir X Gauss dağılımının üsteli olarak düşünülebilir. Daha sonra Türev Martigali formülü yazılır:

$$M_t'(dx) = (\sqrt{2d}t - X_t(x)) e^{\sqrt{2d} X_t(x) - dE[X_t(x)^2]} dx$$

Sonrasında Türev Martingalin negatif olmadığı tanımlanır. Bu tanımlamalar üzerine varsayımlarla çalışma sonuçlandırılır.

2013 yılında Chakarov ve Sankaranarayananan [46] ‘Probabilisitc Program Analysis with Martingales’ adlı çalışmalarında sonsuz durum olasılıkları programlarını analiz etmek için bazı teknikler vermişlerdir. İlgilendikleri konulardan biri olasılık değişmezleri ve neredeyse kesin sonuç durumlarını sentezlemeye çalışmışlardır. Analizlerinin temeli olasılık teorisinin süper martingal süreçlerine dayanır. Öncelikle olasılık programlarının döngüleri için süper martingalleri tanımlarlar. Olasılığı yüksek olan martingallerin değerlerini sınırlandırmak için ölçüm eşitsizliklerinin kullanımını sunarlar. Böylece program değişkenleri için olasılıksal sınırlar oluşur. Devamında Olasılık Programı için Neredeyse Kesin Sonuçlarını test etmek için bir süper martingal sıralama fonksiyonu verilir. Son olarak olasılık programı için oluşturulan süper martingal sıralama fonksiyonu ve martingal kavramı birleştirmek için kısıtlamaya dayalı teknikler genişletilir. En son bazı kompleks olasılık programlarının değişmezliği ve sonuçları hakkında uygulamalar sunulur.

2014 yılında ise Xiaofeng Shao ve Jingsi Zhang, [47] çalışmasında Martingal Fark Korelasyonunu çok boyutlu değişken taramalarında kullanımları üzerine örnekler bulunmaktadır. Örneklerinde [48,49,50] daki çalışmalarda analiz edilen modelleri almışlardır.

2016 Yılında Kabanov, Kardaras ve Song [51] çalışmalarında negatif olmayan varlıklarla ilgili işlemleri süpermartingale dönüştüren süpermartingal deflatörü ve süpermartingal numarası (numeraire) ile ilgilidir. Süpermartingal numarası, süpermartingal deflatörüne karşılık gelen varlık işlemidir. Çalışmanın amacı P olasılığı altındaki süpermartingal numarasının P değerine çok yakın bir olasılıkta Lokal Martingal numarasına dönüştüğünü göstermektir.

Yine 2016 yılında Labordere ve Touzi [52] çaışmalarında kendilerinden önce tanımlanmış olan Martingal taşıma probleminin bir genişletilmesini sunmaktadır. Beiglböck ve Julliet Martingal taşıma problemine bir boyutlu Brenier Teoreminin bir genişletilmesini eklediler. Bu [52] çalışmanın amacı Martingal Optimal Taşıma Problemine Spence-Mirrlees Koşulunu genişleterek kendilerinden önceki süreci tamamlamaktır. Bunu yaparken önce alt ve üst sınırlara uygun şekilde Martingal Optimal Taşınım Planına karşılık gelen karakterizasyonu gerçekleştirirler. Bu veriler sol ve sağ monoton martingal taşınım probleminin verilir. Bu veriler bir yan ürün olarak karşılık gelen optimal yarı statik riskten korunma stratejileri için açık bir şekilde sağlar. Sonuç olarak da Çoklu marjinal Duruma bir uzantı sağlanır.

2017 yılında Gaoyue Gao ve Jan Obloj [53] çalışmalarında Martingal Optimal Taşıma Probleminin çözümü için hesaplamalı bir yöntem geliştirdiler. Çalışmalarında çok adımlı çok boyutlu Martingal Optimal Taşıma Problemi bir dizi Lineer Programlama Problemine yaklaşabilir. Bu Lineer Proglamlama Problemlerinin sonuçları Martingal şartlarında olan uygun gevşemelerle birleştirilmiş marjinal dağılımların birleştirilmesidir. Ayrıca olasılık yaklaşımlarını ayrıklaştırmak için iki genel yaklaşım sunarlar. Bunlar bu dağılımlara karşı integralleri hesaplayabildiğimiz durumlar ve onlardan örnek alabildiğimiz durumlardır. Bu durum ana sonucumuzu uygulanabilir kılar ve Martingal Optimal Problemini çözmek için uygulanabilir bir şemeya olanak verir. Son olarak gerçek verilerde tek adım modelinde uzmanlaşmak için bu çalışmaya kadar yapılmamış olan yakınsama oranının bir tahmini sunulur.

2017 Yılında Backhoff, Beiglböck ve diğerleri [54] bilinen Optimal Taşıma Probleminin Benamou-Brenier tipi formülünü sunarlar. Son zamanlarda Martingal kısıtlamalarına sahip optimal taşıma problemlerine bir ilgi oluşmuştur. Bu durum özellikle Robust finans alanında gözlemlenir fakat matematikte de martingal eşitsizlikleri ve Shokorhod Gömülü Problemi önemli sonuçları olan bağımsız bir ilgi alanıdır. Bu çalışma ise Martingal optimal problemi hakkındadır. Klasik Optimal Taşıma Probleminin zamana bağlı versiyonunda Benamou-Brenier ve Mc-Cann'in katkıları çok önemli bir yer tutar. Verilen formülasyon d boyutludur ve μ ve v konveks formdadır. Martingal Optimal Taşıma Probleminin çözümü olan $M^* = (M_t^*)_{t\in[0,1]}$ bir Markov Martingali olarak ortaya çıkar. Markov martingalinin özelliği ise bir Brown parçacığının hareketini $M_0^* \sim \mu$ ve $M_1^* \sim v$ olacak şekilde olabildiğinde yakın şekilde taklit etmesidir. Bu, McCann Yer değiştirme interpolasyonu ile benzer olarak μ ve v arasında zamanla tutarlı bir interpolasyondur. Başlangıç ve bitiş değerlerinin uygun şekilde seçilmesiyle M^*, Brown Hareketi, Geometrik Brown hareketi, Bass Martingali gibi durumlara dönüşür. Böylelikle Kellerer Teoremine yeni bir yaklaşım da geliştirilir.

2017 yılında Bernard Bercu [55] çalışmasındaki amacı martingal yaklaşımı aracılığıyla bir boyutlu rasgele fil yürüyüşünün (RFY) asimptotik davranışı üzerine bazı iyileştirmeler yapmaktır. Bir boyutlu RFY'nin Asimptotik davranışı 0 ile 1 arasındaki bir p hafıza parametresine bağlıdır. Bu davranış $0 \leq p < 3/4$ aralığındaki bölgede (diffüz bölge) farklıdır, $p = 3/4$ olduğu durum kritik bölgedir, $3/4 < p \leq 1$ olduğu bölgede (süperdiffüz bölge) farklıdır. Bu çalışmada bu durumun neredeyse kesin yakınsaklık ve FRY'nin asimptotik normalliği üzerine yeni bazı sonuçları sağlanacaktır. Kendilerinden önceki çalışmalarda [56] diffüz bölgede neredeyse yakınsaklık şartları ile ilgili bazı şartlar verilmiştir. Bu çalışmada bu şartlar ile ilgili daha güçlü bir ispat verilmiştir. Sonrasında ise süperdiffüz bölgedeki dağılımların Gauss dağılımı olup olmadığı yönünde bir ispat yapılmıştır.

Rassal Fil Yürüyüşü (Random Elephant Walk) (RFY): Bu süreç uzun süre hafızalı rassal yürüyüşlerden bir tanesidir. Uzun süreli hafıza kavramı Uygulamalı Matematik, Fizik, Bilgisayar ve Ekonomi gibi alanlarda oldukça kullanılır. RFY, bir boyutlu, ayrık zamanlı, Tam Sayılar üzerinde bir rassal yürüyüştür ve hareketin en başından itibaren tam bir hafıza özelliğine sahiptir [55]. Bu kavram aslında Schütz ve Trimper'ın [57] 'Filler her zaman hatırlar' isimli çalışmasına dayanır. Zaten bu rassal sürecin Rassal Fil Yürüyüşü adını almasının sebebi sürecin uzun süreli hafıza özelliğine gönderme yaparak hafızasının iyi olduğu bilinen bir hayvanın adının yazılmasıdır. RFY ile ilgili özellikler ile ilgili [57] nolu makale incelenmelidir.

4.4 Diğer Black-Scholes Denklemleri Üzerine Seçme Çalışmalar

2000 yılında [58] Perello ve diğerleri Black-Scholes Opsiyon fiyatlama modeli ile Stratonovich şartlarını birleştirerek kapsamlı bir inceleme yapmışlardır. Çalışmalarında Black-Scholes modelinin altında yatan birçok inceliğe dikkat çekmektedirler.

2004 Yılında Hsien Chung Wu, Avrupa tipi opsiyonları fiyatlandırmak için Fuzzy Kümeleri Teorisini Black-Scholes formülüne uygulamıştır [59]. Fiyatlardaki dalgalanma nedeniyle Black-Scholes Modelinin bazı girdi değerleri beklenmeyen değerler olabilir. Bu nedenle faiz oranı, volatilite ve hisse senedi fiyatı değerleri için Fuzzy Sayıları önerilir. Böylelikle Opsiyonun fiyatı da bir Fuzzy Sayısına dönüşmüş olur. Bu durumda herhangi bir hissenin opsiyon fiyatı kabul edilebilir bir yakınlıkta belirlenir. Tabi bu kabul edilebilir yakınlıktaki opsiyon fiyatını bulmak için bir optimizasyon probleminin çözülmesi gerekir.

2006 Yılında Svante Janson ve Johan Tysk, Black-Scholes tipi operatorlar için Feynman-Kac Formulünü geliştirdiler. Çalışmalarında Black-Scholes Denkleminin stokastik çözümüne de karşılık gelen Feynman-Kac teoremi tanımlarlar ayrıca tek boyutlu uzayda çözümün sonuçlarını incelerler [60].

2006 Yılındaki bir başka çalışmada Jarrow, Çetin, Protter Warackla [61] nolu çalışmada genişletilmiş Black-Scholes ekonomisinde likid olmama fikrinin teorisini ve deneysel kanıtını sunarlar. Bu çalışmada ortaya çıkan likidite riski, işlem fiyatının ticaret boyutunda bir fonksiyon olmasıyla birlikte stokastik bir arz eğrisi olarak modellenmiştir.

Burada arz eğrisi, yüksek fiyattan alımlar ve düşük fiyattan satımlar ile birlikte yukarı eğimlidir. Optimal ayrık zamanlı riskten korunma stratejileri türetilir ve deneysel kanıtlar her seçeneğe özgü önemli bir likidite varlığı ortaya koyar. Bu çalışmada likidite azlığının opsiyon fiyatları üzerine tahminlerini ifade etmek ve teoriyi açıklamak için genişletilmiş bir Black-Scholes modeli verilir. Çalışmanın sonuçları likidite bedeli opsiyon fiyatlarının önemli bir bileşenidir ve riskten korunan opsiyon sayısı ile quadratik olarak artar. Ayrıca Standart Black-Scholes Riskten korunma stratejileri genellikle optimal riskten korunma stratejilerinden daha yüksek likidite maliyetlerine sebep olur [61].

2006 Yılında bir başka makalede Arriojas ve arkadaşları [62] stokastik Black-Scholes denklemleri için gecikme terimi ekleyerek gecikmeli diferansiyel denklemlere dönüştürmüşlerdir (delay differential equations). Amaç modelin, opsiyon fiyatlarının kapalı form sunumlarına izin verecek kadar basit ve gerçek zamanlı piyasa değerlerine uyacak kadar da esnek olmasını sağlamaktır. Model arbitrajsız olma ve piyasanın tam olma özelliğini korur ve Avrupa tipi opsiyonlar için geçerlidir. Opsiyon fiyatlama formülünün türetilmesi eşdeğer bir Martingal ölçümüne dayanmaktadır.

$$dS(t) = S(t)\big[\mu\varphi(t-a)dt + g\big(\varphi(t-b)\big)dW(t)\big], t \in (0, l)$$

$$S(0) = \varphi(0)$$

Gecikmeli stokastik diferansiyel denkleminin çözümü;

$$S(t) = \varphi(0)exp\left\{N(t) - \frac{1}{2}[N,N](t)\right\},$$

$$S(t) = \varphi(0)exp\left\{\mu\int_0^t \varphi(u-a)du + \int_0^t g\big(\varphi(u-b)\big)dW(u) - \frac{1}{2}\int_0^t g\big(\varphi(u-b)\big)^2 du\right\}$$

olarak verilmiştir [62].

2007 Yılında Accardi ve Boukas Black-Scholes Denklemini kuantum bağlamında incelediler ve Hudson-Parthasarathy kuantum stokastik kalkulus bağlamında Black-Scholes Modelinin bir uzantısını oluşturdular.[63] Bu çalışmada referans kaynakları ise Segal'in [64] nolu çalışmasıdır. Kuantum Ekonomi ve Kuantum Finans denilen alan, Kuantum Mekaniği Kavramlarıyla borsadaki hisse fiyatı düzensizliklerini açıklamaya çalışan bir alandır. Bu alandaki ilk çalışmayı William Segal ve Isidor Segal yayınlamışlardır. Amaçları varlık fiyatlarının ve türevlerinin anlık ölçümlerini yapabilme gibi pazar örneklerini bileştirmektir. Bunu B_t Brown hareketine bir Y_t parametresi ekleyerek yapmaya çalıştırlar. Y_t parametresi, B_t nin içinde anlık olarak ölçülemeyen varlık ve türevlerinin etkisi olarak verilir. Bööylelikle işlem $aB_t + bY_t$ olur ve $\Phi(a + bi)_{X[0,t]}$ şeklinde sunulur. Sonuç olarak bir kuantum opsiyon $w(T, z_0)$ olsun. z_0 için $X = Ke^{z_0}$ dır. Burada Kuantum Portföy;

$a_t = w_{0\,1}(t - T, z_t)$

$b_t = \big(w(T - t, z_t) - a_t J_t(X)\big)e^{-tr}\beta_0^{-1}$

$J_t(X) = Ke^{z_t}$

olarak sunulmuştur. [63]

2008 Yılında Ankudinova ve Ehrhardt [65], Nonlineer Black-Scholes Denklemlerinin Nümerik Çözümleri üzerine bir çalışma yayınladı. Lineer olmayan Black-Scholes Denkleminin Klasik Black-Scholes Denklemine göre bazı avantajları vardır. Bunlar işlem maliyeti, korumasız portföyün riskleri, büyük yatırımcının tercihleri ve likid olmayan piyasalar gibi daha gerçekçi durumları modelleyebilmesidir. Bu durumlar hissenin fiyatı, volatilite, drift (sürüklenme) ve opsiyon fiyatının kendisi üzerinde etkili büyüklüklerdir. Bu çalışmada birçok etkiyle belirlenen volatiliteye bağlı Avrupa tipi veya Amerika tipi opsiyon fiyatlarına göre en uygun lineer olmayan Black-Scholes Denklemleri verilmiştir. Avrupa tipi opsiyonlar için problem nonlineer terim içeren bir difüzyon denklemine dönüştürülerek opsiyon fiyatı için analitik bir yaklaşım belirlenir. Amerika tipi opsiyon fiyatı içinse Sevcovic çözümünü takip eden sabit alanda tanımlı lineer olmayan lokal olmayan parabolik denklemin serbest sınır değer problemi olarak tanımlanır. Son olarak çalışmada Leland Modeli, Barles ve Soner Modeli için geçerli volatilitelere göre nümerik çözümler sunulur. Lineer Black-Scholes Denkleminin çözümü;

$$0 = V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV\,, \qquad S = S(t) > 0, t \in (0, T)$$

ifadesinden gelir. Burada S(t) dayanak varlık fiyatının değeri şu stokastik diferansiyel denklemi sağlar:

$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)$

Burada μ, varlığın ortalama artışı (drift veya trend) , σ, volatilite, W(t) geometrik Brown Hareketi, r risksiz faiz oranıdır ve (0,T) aralığında herhangi bir temettü ödemesi yoktur.

Ayrıca modelde herhangi bir işlem maliyeti yoktur, borç alma ve borç verme faiz oranları eşittir. Tüm taraflar herhangi bir bilgiye, menkul kıymetlere ve kredilere ulaşma imkanına her zaman ve her boyutta sahiptir, tüm değişkenler mükemmel bölünebilir ve herhangi bir gerçek sayı değeri alabilir ve bireysel ticaret fiyatı etkilemez. Artbitraj fırsatı olmaması demek risksiz kar etme fırsatı yok demektir.

Tüm bu kabuller sonrasında piyasa tam demektir yani herhangi bir varlık, piyasadaki diğer varlıklardan oluşan bir portföy ile çoğaltılabilir. Böylelikle Black-Scholes Denklemi bir Isı Denklemine dönüştürülüp analitik bir şekilde çözülerek opsiyonun fiyatı belirlenebilir.

Gerçek hayatta yukarıdaki kabullerin pek de olası olmadığını anlamak zor değildir. İşlem maliyetleri, büyük yatırımcı tercihleri, tamamlanmamış piyasalar sürecin nonlineer olduğunu gösteren durumlardır. Ayrıca μ ve σ katsayılarının t anına göre hatta S(t) opsiyon fiyatı değerine göre değişmesi (sabit katsayı olmaması) bizim yukarıdaki kabullerimizle çelişir. Sabit bir μ ve sabit olmayan volatilite $\sigma^2 = \sigma^2(t, S, V_S, V_{SS})$ olsun. Böylelikle Avrupa tipi opsiyonlar için aşağıdaki lineer olmayan Black-Scholes Denklemini yazabiliriz:

$$0 = V_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S, V_S, V_{SS})S^2 V_{SS} + rSV_S - rV$$

Ayrıca bir temettü parametresi olarak $qSdt$ terimini ekleyip denklemi Amerika tipi opsiyonlar için de oluşturabiliriz:

$$0 = V_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t, S, V_S, V_{SS})S^2 V_{SS} + (r - q)SV_S - rV$$

Bu denklemdeki q değeri S değerine sahip hissenin temettü verimidir.

Daha sonra [65] numaralı çalışmada volatilite için farklı modelleri verir. Örneğin Leland Modeli ile volatilite belirlenir:

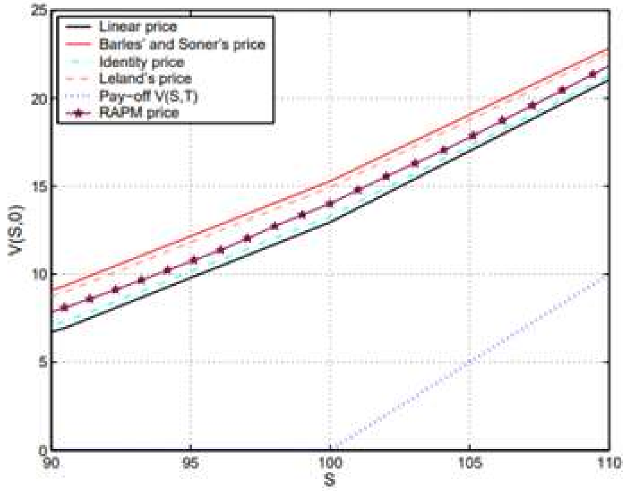
$$\sigma^2 = \sigma^2(1 + Le\ sign(V_{SS}))$$

$$Le = \sqrt{\frac{2}{\pi}\frac{K}{\sigma\sqrt{\delta t}}}$$

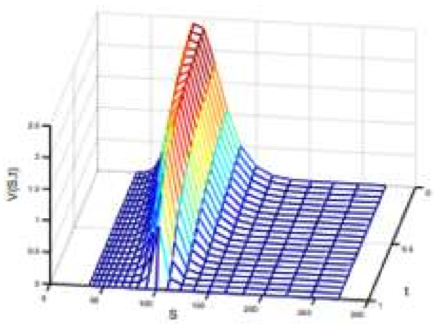
K: Alış satış işleminin birim dolar başına işlem maliyeti

δt : İşlem Sıklığı

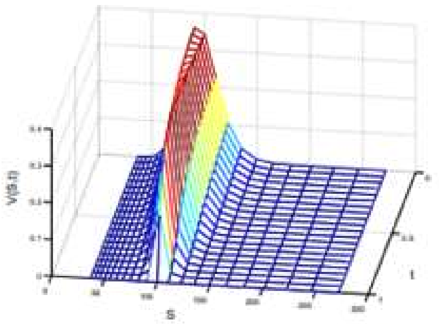
Leland Modeli gibi farklı modeller de mevcuttur. Barles ve Soner Modeli, Riske Göre Ayarlanmış Fiyatlandırma Metodolojisi ile de volatiliteler belirlenir. Daha sonra Avrupa tipi opsiyonlar için analitik çözümler bulunur. Amerika tipi opsiyonlar için ise dönüşümler yapılır ve Nümerik çözümler paylaşılır. Nümerik Çözümler Sonlu Farklar Metodu ile yapılır graikler çizilir ve farklı volatilite modellerinin birbirleriyle kıyaslaması yapılarak çalışma sonlandırılır. Sonuç simülasyonları şu şekilde oluşmuştur:



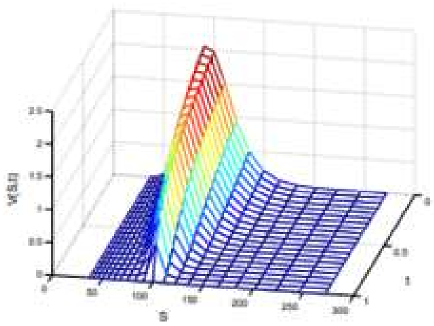
Şekil 4.1. Farklı Volatilite Hesaplama Modellerine Göre Opsiyon Fiyatları (Ankudinova ve Ehrhardt [65])



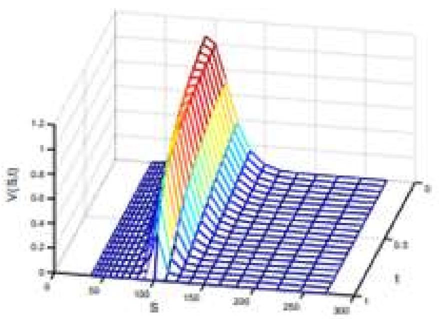
(a) Barles' and Soner's model (a = 0.02) vs. linear model



(b) $\Psi(x) := x$ chosen as the identity ($a = 0.02$) vs. linear model



(c) Leland's model (δt = 0.01, κ = 0.05) vs. linear model



(d) RAPM model ($M = 0.01$, $C = 30$) vs. linear model

Şekil 4.2 Farklı Volatilite Hesaplama Modellerine Göre İşlem Maliyetlerinin etkisi (Ankudinova ve Ehrhardt [65])

2011 Yılında Pak ve Smirnov [66] Feynman İntegrallerinin asimptotik genişlemesi için geometrik bir yaklaşım sunmuşlardır. Çalışmalarında belirli bir momentum limitinde bir Feynman İntegrali için genişleme bölgelerini bulmak için bir algoritma geliştirmişlerdir.

2019 Yılında M. Fujii,A. Takahashi ve M. Takahashi [67] çalışmalarında Weinan'ın [68] çalışmasındaki Derin Geriye Dönük Stokastik Diferansiyel Denklemin (GDSDD) (Backward Stochastic Differential Equation BSDE) çözümünün asimptotik genişlemesinin kullanımı gösterilmiştir. Bu süreçte kayıp fonksiyonu oldukça azdır ve yakınsaklık hızı ise artar. Çözüm tekniği ve sonuçları farklı borçlanma ve borç verme oranlarının yanı sıra kuadratik büyüme sürücüleriyle çözülebilir GDSDD'lerin bir sınıfı olarak Bergman Modelini kullanarak gösterilir. Ayrıca bu çalışmada Amerikan Opsiyonların fiyatlarını temsil etmesi için derin GDSDD Çözücünün bir uzantısı da verilmiştir.

2020 yılında Q. Han, X. Li VE Y. Li [69] çalışmalarında Yamabe Denkleminin izole tekillikler yakınında pozitif çözümlerinin asimptotik davranışlarını çalışmışlar ve keyfi mertebelere kadar genişlemeler kurmuşlardır. Ayrıca tekil nokta yakınlarında ve yaklaşımların keyfi yüksek mertebelerinde öngörülen asimptotik açılımlarla çözümlerin varlığı çalışılmıştır.

$$-\Delta u = \frac{1}{4}n(n-2)u^{\frac{n+2}{n-2}}$$

denklemine Yamabe Denklemi denir. u denklemin pozitik çözümüdür ve denklem $B_1\backslash\{0\} \subset R^n$ kümesinde (delinmiş top) $n \geq 3$ için tanımlıdır. Yani orijin noktasında çıkarılamaz bir tekillik vardır. u pozitif çözümüne karşılık gelen konformal metrik

$g = u^{\frac{4}{n-2}}|dx|^2$ bir $R(g) = n(n-1)$

skaler eğriliğine sahiptir. Daha sonra bu denklemin çözümleri bulunur, izole tekillikleri hesaplanıp birinci mertebeden genişlemeleri yapılır. Daha sonraki bölümde asimptotik genişlemeleri birinci mertebe ve daha yüksek mertebeleri için hesaplanır. Son bölümde öngörülen asimptotiklerle singüler çözümleri yapılır.

2021 yılında Khalsaraei ve diğerleri [70] çalışmalarında işlem maliyeti içeren Avrupa tipi opsiyonlar için oluşturulan lineer olmayan kısmi diferansiyel Black-Scholes Denklemini çözmek için uzamsal türevin standart olmayan ayrıklaştırmasına dayalı nümerik bir metot kullanmışlardır. Bunun için önerilen şema pozitif tanımlı kararlı ve monotondur. Ayrıca nümerik çözümler dört farklı yöntemle gösterilmiştir.

5. KESİRLİ BLACK-SCHOLES DENKLEMLERİ ÜZERİNE YAPILAN ÇALIŞMALAR

5.1 Kesirli Brown Hareketi (Fractional Brownian Motion) :

Kesirli Brown Hareketi, Brown Hareketinin Hurst Parametresiyle verilen bir genelleştirilmesidir. Levy, 1953'te [14] Riemann Liouville anlamında kesirli integralle Kesirli Brown Hareketini Şu şekilde tanımlamıştır:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \int_0^t (t-s)^{H-1/2} dB(s)$$

Burada $dB(s)$ parametresi White Noise yani ortalaması sıfır olan Normal Dağılım gösteren rastlantısal terim, H parametresi ise Hurst İndeksi veya Hurst Parametresi olarak tanımlanır. Bu noktada Hurst Parametresini bilmek gerekir. Hurst Parametresi, Harold Edwin Hurst tarafından geliştirilen zaman serileri arasındaki korelasyonu açıklamaya çalışan bir parametredir. Yani ölçülen bir verinin bir önceki zamandaki değeri ile bir sonraki zamandaki değerinin ne yönde bir korelasyonu olduğunu verir [71].

Korelasyon, Olasılık Kuramı ve istatistikte iki değişken arasındaki ilişkinin yönünü ve gücünü belirtir. Eğer iki değişken arasındaki korelasyon pozitif ise bu değişkenler arasında doğru orantı olduğunu. eğer ki korelasyon negatif ise bu iki değişken arasında ters orantı olduğunu gösterir. Korelasyonun 0'a yakın olması gücünün zayıf olduğunu 0'dan uzak (+1 veya -1'e yakın) olması durumunda güçlü olduğunu belirtir.

Daha sonra bu tanımın kesirli işlemlerde yeterince kullanışlı olmaması sebebiyle şu formülizasyon geliştirilmiştir [72]:

$$\begin{aligned} B_H(t) = B_H(0) \\ &+ \frac{1}{\Gamma(H+1/2)} \left\{ \int_{-\infty}^{0} \left[(t-s)^{H-\frac{1}{2}} - (-s)^{H-\frac{1}{2}} \right] dB(s) \right. \\ &\left. + \int_0^t (t-s)^{H-\frac{1}{2}} dB(s) \right\} \end{aligned}$$

$t > 0$

Aslında Brown hareketi ile kesirli Brown hareketi arasındaki fark, Brown hareketindeki artışların bağımsız olmasıdır. Brown hareketinde bir önceki zamandaki hareket ile bir sonraki zamandaki hareket tamamen bağımsızdır. Fakat kesirli Brown hareketinde bu durum bağımsız değildir. Eğer H parametresi, ½'den büyük ise artışlar arasında bir pozitif yönlü korelasyon olduğunu söyleriz. Bu duruma Uzun Dönem Bağımlılık (Long Range Dependence) veya Yusuf Etkisi (Joseph Effect) de denir. Bu ismi almasının sebebi Yusuf Peygamberin kıssasındaki Mısır'ın yaşayacağı yedi bereketli yıl, yedi kıtlık yılı olayını tahmin etmesinden ileri gelir [73]. Tam tersi eğer H, ½'den küçük ise artışlar arasında negatif yönlü bir korelasyon olduğunu söyleriz. $H = 1/2$ olması durumunda ise Süreç bildiğimiz Brown hareketi sürecidir. Yani bildiğimiz Brown hareketi, kesirli Brown hareketinin $H = 1/2$ olduğu durumdaki özel bir durumudur.

Kesirli anlamda Black-Scholes Denklemi olarak ilk yapılan çalışmalardan ise Cuttland, Kopp, Willinger'ın 1995 yılındaki 'Stock Price Returns and The Joseph Effect: A Fractional Version of The Black-Scholes Model' çalışması olmuştur. Bu çalışmada [73] Kesirli Black-Scholes Denklemi yazarken Uzun Dönem Bağımlılık özelliğine sahip bir kesirli Brown Hareketini de tanımlarlar.

$X = (X_t,\ t = 0,1,2,\dots)$ ifadesine ortalaması μ, varyansı σ^2 olan kovaryans durağan stokastik süreç diyelim.

i. $r(k)$ ifadesi de otokorelasyon fonksiyonu olsun. ($k \geq 0$)

ii. $r(k) \sim k^{-\beta} L_1(k)\,, k \to \infty\ ,\quad 0 < \beta < 1$

iii. L_1 , $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{L_1(tx)}{L_1(t)} = 1$ şartını sağlıyorsa (yani $t \to \infty$ iken yavaş şekilde sonsuza ıraksıyorsa örneğin sabit fonksiyon, logaritma fonksiyonu gibi)

Yukarıdaki $r(k)$ şartını şağlayan stokastik süreç Uzun Dönem Bağımlılık (Long Range Dependence) özelliğine sahiptir denir.
Eğer $r(k) \sim p^k\,, k \to \infty\,, p \in [0,1]$ ise stokastik süreç, short range dependence özelliğine sahiptir denir [73].

Long Range Dependence (Yusuf Etkisi) 'nin önemi Hurst Kuralı ile şu şekilde verilir. X_k: $k = 0,1,2,\dots n$ gözlem örneklerinin ortalaması $\mu(n)$ ve varyansı $S^2(n)$ olsun R/S İstatistiği (Yeniden Ölçeklendirilmiş ayarlanmış aralık);

$$\frac{R(n)}{S(n)} = (\max(0, W_1, W_2, \dots W_n) - \min(0, W_1, W_2, \dots W_n))/S(n)$$

$W_k = (X_1 + X_2 + \dots + X_k) - k\mu(n)$ olur.

Hurst, $E[R(n)/S(n)] \sim cn^H$ ifadesindeki H değerini $0.5 < H < 1$ aralığında olduğunu doğal olarak meydana gelen birçok zaman serisi ilişkisini gözlemleyerek buldu. Burada c, sonlu n'ye bağlı olmayan pozitif katsayıdır [71]. Daha önce de söylediğimiz gibi eğer burada H=0.5 olsaydı X_k stokastik süreci short range dependence özelliğine sahip olurdu. Bu H değerlerinin değişikliğin yarattığı etkiye Hurst Etkisi veya Hurst Fenomeni denir.

Uzun Dönem Bağımlılık (Long Range Dependence) özelliğine sahip Durağan Stokastik Modellerin en bilinenleri Kesirli Gauss Noise Modelleri ve Kesirli ARIMA süreçleridir. Kesirli Gauss Noise Modeli korelasyon fonksiyonu $r(k) = \frac{1}{2}(|k+1|^{2H} - |2k|^{2H} - |k-1|^{2H}),\ k \geq 0, H \in (0,1]$ olarak tanımlanan bir Gauss sürecidir ve eğer $1/2 < H < 1$ ise süreç Long Range Dependence özelliğine sahiptir denir. $H = 1/2$ ise süreç bağımsızdır ve eğer $0 < H < 1/2$ ise modelleme amaçları ve istatistiksel uygulamaları açısından daha az ilgi çekici olur. Bu modelde Kesirli Brown Hareketi $b_H = (b_H(t), t \in R)$, $0 < H < 1$ dir ve kovaryansı

$E[b_H(s)b_H(t)] = \frac{1}{2}(|s|^{2H} + |t|^{2H} - |t-s|^{2H})$ dır.

Kesirli Brown hareketi ilk olarak [74] da tanıtıldı ve Mandelbrot ve diğerleri ([72,75,76,77,78]) tarafından olasılık ve İstatistikçilerin dikkatine sunuldu. Kesirli ARIMA Modelleri ise [74,79,80] de tanıtılmaktadır.

5.2 Kesirli Brown Hareketinin Özellikleri Ve Uygulamaları

Kesirli Brown Hareketine sahip kesirli Black-Scholes Denkleminin Yusuf Etkisi yani Long Range Dependence özelliğine sahip durumları Kunitomo, Maheswaran,Sims [81,82] tarafından 1993 yılında incelendi. Burada Long Range Dependence özelliğine sahip Kesirli Brown Hareketinin Yarı Martingal Özelliğine (Semimartingale Property) sahip olmadığı ispatlandı. Bu çalışmalara göre long range dependence özelliğine sahip süreçler bir ölçü değişikliği ile martingallere dönüştürülemez.

Yarı Martingal Özelliği : (Semimartingal Property) Mandelbrot ve Van Ness 1968 yılındaki çalışmalarında [83] H parametresinin aralığının $0 < H < 1$ olduğu durumda $b_H = (b_H(t), 0 \leq t \leq 1)$ kesirli Brown Hareketinin olası tüm durumlarının sürekli ve türevlenemez olduğunu gösterdi. $w \in \Omega$ wiener süreci olmak üzere;

$$\sum_{t \in T_n} |b_H(w, t + \Delta t) - b_H(w, t)| \to \infty\,, n \to \infty$$

İfadesinde yukarıdaki Lemmadan dolayı S-sürekli B_H için

$$E\left[\sum_{t \in T_n} |B_H(w, t + \Delta t) - B_H(w, t)|^2\right] = \gamma N^{1-2H}$$

Burada γ sonlu, $1/2 < H < 1$ ve $\gamma N^{1-2H} \approx 0$ olur.

$\sum_{t \in T_n} |b_H(w, t + \Delta t) - b_H(w, t)|^2 \to {}^\circ[\sum_{t \in T_n} |B_H(w, t + \Delta t) - B_H(w, t)|^2]=0$

Böylelikle b_H değerinin sonlu olduğunu gösterilir. Fakat $\sum_{t \in T_n} |b_H(w, t + \Delta t) - b_H(w, t)| \to \infty\,, n \to \infty$ ifadesinde b_H için $1/2 < H < 1$ aralığında sınırsız olduğundan bir yarı martingal oluşturmaz. Ayrıca yukarıdaki tanımdan dolayı $\sigma b_H(t) + \mu t$ sürecinin kesirli, geometrik Brown hareketi s_H 'ın bir konveks fonksiyonu olarak yazılabildiği görülür ki s_H süreci $\frac{1}{2} < H < 1$ aralığında yarı martingal değildir [84].

Kesirli Geometrik Brown hareketi gibi hisse senedi fiyatlama süreçleri, yarı martingal özelliği gibi kısıtlayıcı durumlar içerir. Bununla birlikte modern stokastik analiz teorisinin çoğu yarı martingallerle sınırlı olduğundan, finans mühendisiliği açısından hisse senedi fiyatlarında Joseph etkisinin getirilerinin sonuçları sınırlayıcıdır.

Eşdeğer Martingal Ölçüm Problemi:

Şimdi eşdeğer martingal ölçümü için ayrık zamanlı bir süreç tanımlayacağız. Bu süreç martingal özelliğini de bazı durumlarda sağlayacak. Hyperfinite kesirli rassal yürüyüş süreci $B_H = (B_H(t), t \in T)$, $1/2 < H < 1$ $(w, t) \in (\Omega, T)$, artışlar $\Delta B_H(w', t)$ dir ve pozitiftir. $[w]_t = \{w' \in \Omega: w'(s) = w(s), s < t\}$. Burada 0 noktası $ri(conv(\Delta B_H(w', t): w' \in [w]_t))$ kümesinin elemanı değildir. Ri(conv(x)) kümesi dışbükey yapının göreceli iç kısmı demektir (relative interior of the convex hull). $1/2 < H < 1$ için

$$\Delta B_H(w,t) = B_H(w,t+\Delta t) - B_H(w,t)$$
$$= c_H Y(w,t) + c_H w(t)\Delta t^H$$

$$Y(w,t) = \sum\nolimits_{-N\le s<t} \{(t+\Delta t - s)^\alpha - (t-s)^\alpha\} w(s)\sqrt{\Delta t}$$

$t \in T$ ve $w \in A_t = \{w: w(s) = 1, s < t\}$dir. Ayrıca $P[A_t] = 2^{-N(N-t)-1}$ olasılığı pozitiftir.

$$\Delta B_H(w,t) = c_H \left(w(t)\Delta t^H + \sum_{0<s<N+t} \{(s+\Delta t)^\alpha - s^\alpha\} w(s)\sqrt{\Delta t} \right)$$
$$= c_H\sqrt{\Delta t}(w(t)\Delta t^\alpha + (N+t+\Delta t)^\alpha - \Delta t^\alpha).$$

Burada eğer $w(t) = 1$ ise $\Delta B_H(w,t)$ ifadesi pozitiftir. Eğer $w(t) = -1$ ise

$$\Delta B_H(w,t) = c_H\sqrt{\Delta t}((N+t+\Delta t)^\alpha - 2\Delta t^\alpha)$$
$$\ge c_H\sqrt{\Delta t}(N^\alpha - 2\Delta t^\alpha)$$

olur. $\Delta S_H(w,t) = S_H(w,t)(\mu\Delta t + \sigma\Delta B_H(w,t))$ olacak şekilde $\Delta S_H(w,t)$ artışı $1/2 < H < 1$ parametreli kesirli geometrik rassal yürüyüş süreci, $w(t)$ nin her zaman pozitif değeridir. Böylelikle şu önermeleri yapabiliriz:

1. $1/2 < H < 1$, $t \in T$ ve $w \in A_t$ için kesirli rassal yürüyüş B_H ın artışı olan $\Delta B_H(w,t)$ ve kesirli geometrik rassal yürüyüş S_H ın artışı olan $\Delta S_H(w,t)$ değerleri $w(t)$ nin değeri ne olursa olsun pozitiftir.
2. Yeterince büyük $n \in N$ için kesirli rassal yürüyüş $B_{H,n}$ ve kesirli geometrik rassal yürüyüş $S_{H,n}$ eşdeğer martingal ölçümü oluşturmaz.

Arbitraj Fırsatları Hakkında:

Stricker'in [85] sürekli örnek yolları fiyatlandırma süreçlerinin eşdeğer martingal ölçümünün varlığı ile arbitraj fırsatlarının yokluğu arasındaki denklik hakkındaki genel sonuçları geometrik kesirli Brown hareketi fiyatlama sürecinin S_H , $1/2 < H < 1$ uygulamasıdır. Yani kısacası Kesirli Black-Scholes Opsiyon fiyatlama modeli arbitraj fırsatı sunar. Bu konuyla ilgili daha çok bilgi için [82] nuamaralı kaynak incelenebilir. Burada hyperfinite kesirli CRR (Cox, Ross, Rubinstein) modeli ayrık zamanda pratik kullanımda arbitraj fırsatlarına olanak verir.

Sonuç olarak bu çalışma [73] klasik anlamda opsiyon fiyatlama tekniği ve bu tekniğin özelliği olan yarı martingal özelliği ile long range dependence yani Yusuf Etkisi özelliğine sahip (H parametresinin $\frac{1}{2} < H < 1$ aralığında olduğu B_H içeren) olan kesirli Black-Scholes Modelinin kıyaslaması şeklinde ve Kesirli Black-Scholes modelinin yarı grup özelliğinin veya arbitraj fırsatlarının olup olmadığının incelenmesi şeklinde ilerler. Kesirli Brown Hareketinden sonra bu hareket ile tanımlanan Kesirli Black-Scholes Modelini sunması açısından değerli bir çalışmadır.

1996 yılında W. Dai ve C. C. Heyde, 'Ito Formula with Respect to Fractional Brownian Motion and Its Application' isimli makalesinde H parametresinin $1/2 < H < 1$ aralığında olduğu ve H parametresine bağlı kesirli Brown hareketi için Ito Formülünün bir versiyonunu oluşturmuşlardır. Long Range Dependence özelliğine sahip kesirli Brown Hareketinin Yarı Martingal özelliği olmadığı için standart Ito Formülünü kullanamayız. Bu sebeple Ito Formülünün bir versiyonu oluşturmaya çalışılır.[86]

Tanım: $a(w.t), b(w,t): [0,T] \times \Omega \to R$ olacak şekilde iki stokastik süreç olsun. $B_H(t)$ H parametresine bağlı kesirli Brown hareketi olsun.
$dX_t = a(t)dt + b(t)dB_H(t)$ stokastik kesirli diferansiyel denkleminin çözümü
$X(w,t) = X_0(w) + \int_0^t a(w,s)ds + \int_0^t b(w,s)\mathrm{d}B_H(\mathrm{w,s})$ olur. Burada X_0 rassal başlangıç değeri, $\int_0^t a(w,s)ds$ her $w \in \Omega$ için adi Riemann-Stieltjes integrali, $\int_0^t b(w,s)\mathrm{d}B_H(\mathrm{w,s})$ stokastik kesirli integraldir.

Teorem: (Kesirli Brown Hareketine göre Ito Integrali)
(Ω,F,P) tam olasılık uzayı, $B_H(\tau)$ [0,T] aralığında kesirli Brown hareketi (H parametresi $1/2 < H < 1$ aralığında), $B_H(0) = 0$, her $\tau \in [0,T]$ için $E[B_H(\tau)] = 0$ ve $a(w.\tau), b(w,\tau), X(w,\tau)$ stokastik süreçler ve $[t_0, t] \in (0,T)$ olsun.

1. $a(w.\tau)$ terimi $[t_0, t]$ aralığında her $w \in \Omega$ için Riemann-Stieltjes anlamında integralenebilirdir,
2. $\int_0^t b(\tau)db_H(\tau)$ integrali Dai ve Heyde anlamındadır,
3.

a. $0 \le s \le t_1 \le t_2, t_3 \le t_4 \le T, \{b(\tau): 0 \le \tau \le T\}, \{ B_H(\tau): 0 \le \tau \le T\}$

$$E\{\{(b(t_1) - b(s)(b(t_3) - b(s))(B_H(t_{2\_}B_H(t_2))(B_H(t_4) - B_H(t_4)\}\}$$
$$= E\{(b(t_1) - b(s))(b(t_3) - b(s))\}E\{B_H(t_{2\_}B_H(t_2))(B_H(t_4 - B_H(t_4))\}$$

b. $d^2b(t)/dt^2$ 2. Türevi vardır, $0 \leq s \leq t_1 \leq t_2, t_3 \leq t_4 \leq T$, $\left\{b'(\tau) = \frac{db(\tau)}{d\tau} : 0 < \tau < max\{t_1, t_3\}\right\}$, $B_H(t_1), B_H(t_2), B_H(t_3), B_H(t_4)$ rassal değişkenleri ξ ve η için $\sigma\left\{b'(\tau): s \leq \tau \leq max\left\{\{t_1, t_3\}\right\}\right\}, E|\xi|^4 < \infty, E|\eta|^4 < \infty,$

$E\{(b'(s)t_1 - s) + \xi)((b'(s)t_3 - s) + \eta)(B_H(t_2) - B_H(t_1))(B_H(t_4) - B_H(t_3))\} =$
$E\{(b'(s)t_1 - s) + \xi)((b'(s)t_3 - s) + \eta\}E\{(B_H(t_2) - B_H(t_1))(B_H(t_4) - B_H(t_3)\},$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\frac{db}{dt}(t, w)\right|^4 < \infty, \sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\frac{d^2b}{dt^2}(t, w)\right|^4 < \infty$$

4.

$X_t - X_{t_0} = \int_{t_0}^t a(w, \tau)d\tau + \int_{t_0}^t b(w, \tau)dB_H(w, \tau)$, ve iki değişkenli $U(t, x): [0, T] \times R \to R$ fonksiyonu sürekli,

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|U(X_t, t)|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\frac{\partial U}{\partial t}(X_t, t)\right|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\frac{\partial U}{\partial x}(X_t, t)\right|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E\left|\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}(X_t + O_{L_2}(1), t)\right|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|a(t)|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|b(t)|^2 < \infty,$$

$$\sup_{0 \leq t \leq T} E|b(t) - b(s)| < const|t - s|^\beta , \beta \geq 0 \ iken$$

$dY_t = \left\{\frac{\partial U}{\partial t}(t, X_t) + a(t, w)\frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t)\right\}dt + b(t, w)\frac{\partial U}{\partial x}(t, X_t)dB_H(t)$ olarak verilen diferansiyel denkleminin çözümü;

$$Y_t = Y_{t_0} = \int_0^t \left\{\frac{\partial U}{\partial t}(\tau, X_\tau) + a(\tau, w)\frac{\partial U}{\partial x}(\tau, X_\tau)\right\}d\tau + \int_{t_0}^t b(\tau, w)\frac{\partial U}{\partial x}(\tau, X_\tau)dB_H(\tau)$$

olur.

Bu teoremde eğer $2H > 1$ ise $E(B_H(t + \Delta) - B_H(t))^2 = |\Delta|^{2H}$ olmasına ayrıca dikkat çekilmiştir.

Bu çalışmada stokastik kalkülüsün kesirli Brown hareketi noktasında uygulamaları ile ilgili şu noktaya dikkat çekilmiştir. [87]

Tanım:
$dX_t = f(t, X_t)dt + g(t)dB_H(t)$ stokastik diferansiyel denklemi için $g(t): R \to R$ sınırlı bir Borel Fonksiyonu olsun.

$$\int_0^t g\big(B_H(\tau)\big)dB_H(\tau) = \int_0^{B_H(t)} g(\tau)d\tau$$

$$\int_0^{B_H(t)} g(\tau)d\tau = \lim_{|\beta^n|\to 0} \sum_j g(t_{j-1}^n)(B_H\big(t_j^n\big) - B_H(t_{j-1}^n))$$

olarak tanmlanır [87].
Bu teoremden sonra stokastik kesirli bir diferansiyel denklemin varlık ve teklik problemine girilir. Çözümün varlık ve tekliğinin ispatı ve yukarıdaki teoremlerin ispatı ile çalışma sona erer.

Long range dependence özelliğine sahip yani kesirli Brown hareketinin Hurst parametresi $1/2 < H < 1$ olduğu durumda Yarı Martingal ve Markov özelliği olmadığını biliyoruz. 1999 ve 2000 yılında Hu ve Oksendal'in çalışmalarında [88,89] $1/2 < H < 1$ için $B_H(t)$ kesirli Brown hareketi için bir White noise teoremi geliştirdiler. Çalışmalarında kesirli Brown hareketine sahip bir sürece ait bir portföye ait (bir miktar risksiz faiz yatırımı ve bir miktar opsiyon miktarının bulunduğu) optimal karlılığı belirlemeye çalıştılar.

Burada $A(t)$, r faiz oranıyla bankaya yatırılmış bir miktar olsun.
$dA(t) = rA(t)dt, \qquad A(0) = 1$
S(t) de bir hisse senedinin t anındaki bedeli olsun.
$dS(t) = aS(t)dt + \sigma S(t)dB_H(t), \qquad S(0) = s > 0, \qquad a > r > 0, \qquad \sigma \neq 0$
Burada $B_H(t)$ Ito tipi kesirli Brown hareketi olarak tanımlanır [88]. Şimdi $\theta(t) = (\alpha(t), \beta(t))$ bizim portföyümüz olsun. $\alpha(t)$ risksiz yatırım yani A(t) oranını, $\beta(t)$ ise opsiyon satın alınan oranı versin. Burada $\alpha(t)$ ve $\beta(t)$, $F_t^{(H)}$-sürecidir, $F_t^{(H)}$ ise$\{B_H(s)\}, s \leq t$ tarafından genelleştirilen σ-cebiridir.
$Z(t, w) = Z^{\theta}(t, w) = \alpha(t)A(t) + \beta(t)S(t)$

ile verilen $Z(t,w)$ ifadesi $\alpha(t)$ oranında risksiz yatırım olan $A(t)$, $\beta(t)$ oranında riskli yatırım olan (volatilite ve rassal terim içeren) $S(t)$'den oluşan bir portföyün değer sürecini verir. Bu denklemin diferansiyeli

$$dZ(t) = \alpha(t)dA(t) + \beta(t)dS(t)$$

olur. Burada Z^{θ} negatif değildir. Buradaki kabul edilebilir θ portföylerinin kümesi A olsun. Bir z değeri için öyle bir $\theta^{*} \in A$ değeri vardır ki V(z) değeri şu şekilde olur.

$$V(z) = V_H(z) = \sup_{\theta \in A} E^{z}\left[u(Z^{\theta}(T))\right] = E^{z}\left[u(Z^{\theta^{*}}(T))\right]$$

$T > 0, E^{z}$ ifadesi için beklenti, $Z^{\theta}(0) = z$, ve $u: [0,\infty] \to R$ verilen azalmayan ve konkav bir fayda fonksiyonudur.

Bu denklemlerde kesirli Brown hareketi olması sebebiyle martingal özelliğinin sağlanmadığını belirtmiştik. Standart Brown hareketinde bu işlem Hamilton Jacobi Bellman Denklemi ile yönlendirilen dinamik programlama tekniği ile çözülür. Fakat kesirli Brown hareketinde bu mümkün değildir çünkü Markov özelliği sağlanmaz [89].

Ayrıca bu çalışmada yukarıdaki optimal portföy probleminin bir açık çözümü verilir. [90] nolu çalışmada Hurst Parametresine bağlı $(1/2 < H < 1)$ Ito tipi Kesirli Black-Scholes Modeline ait martingal yaklaşımı bu problemin çözümünde kullanılır. İşlem basamakları için [90] nolu çalışma incelenebilir.

Teorem: $u(x) = \frac{1}{\gamma}x^{\gamma}$ bizim fayda fonksiyonumuz ve optimal portföy probleminin $V(z)$ değer fonksiyonu ;

$$V(z) = V_H(z) = \frac{1}{\gamma} z^{\gamma} exp\left(r\gamma T + \frac{\gamma}{2(1-\gamma)}.(\frac{a-r}{\sigma})^2 \Lambda_H . T^{2-2H}\right)$$

olur ve optimal durma noktası $Z^{\theta^{*}}(T)$ ise ;

$$Z^{\theta^{*}}(T) = zexp\left(\frac{1}{1-\gamma}\int_0^T K(s)dB_H(s) + rT + \frac{1-2\gamma}{2(1-\gamma)^2}.(\frac{a-r}{\sigma})^2 \Lambda_H . T^{2-2H}\right)$$

olur.

Teorem: Yukarıdaki optimal portföy problemi için $u(x) = \frac{1}{\gamma}x^{\gamma}$ olduğunu kabul edersek $\theta^* = (\alpha^*, \beta^*)$ değeri için

$$\beta^*(t) = e^{r(t-T)}\sigma^{-1}S^{-1}(t)\frac{K(t)}{1-\gamma}exp\left\{\frac{1}{1-\gamma}\int_0^t K(s)dB_H(s) - \frac{(a-r)^2T^{2-2H}}{2(1-\gamma)^2\sigma^2}\left[\gamma\Lambda_H + \rho_H\left(\frac{t}{T}\right) + rT\right]\right\}$$

$$\alpha^*(t) = A^{-1}(t)(Z^{\theta^*}(t) - \beta^*(t)S(t))$$

$$e^{-rt}Z^{\theta^*}(t) = z + \int_0^t \exp(-rs)\,\sigma\,\beta^*(s)S(s)dB_H(s)$$

olacaktır.

Teorem: Burada u fonksiyonunu $u(x) = logx, x > 0$ alırsak;

$$V(z) = logz + rT + \frac{1}{2}(\frac{a-r}{\sigma})^2\Lambda_H T^{2-2H}$$

$$\beta^*(t) = Ze^{rt}\sigma^{-1}S^{-1}(t)ze^{rt}K(t)exp\left\{\int_0^t K(s)dB_H(s) - \frac{1}{2}(\frac{a-r}{\sigma})^2\,T^{2-2H}\rho_H\left(\frac{t}{T}\right)\right\}$$

$$\alpha^*(t) = A^{-1}(t)\left(Z^{\theta^*}(t) - \beta^*(t)S(t)\right)$$

$$e^{-rt}Z^{\theta^*}(t) = z + \int_0^t \exp(-rs)\,\sigma\,\beta^*(s)S(s)dB_H(s)$$

denklemlerine ulaşılır [89].

5.3 Kesirli Black-Scholes Modeli

Kesirli Brown hareketi $b_H = (b_H(t): 0 \leq t \leq 1)$, $H(\,1/2 < H < 1)$ olarak tanımlansın. $E[b_H(1)^2] = 1$ olduğundan bir Gauss sürecidir ve bu sürecin kovaryans fonksiyonu

$$R(s,t) = \frac{1}{2}(s^{2H} + t^{2H} - (t-s)^{2H}), 0 \leq s < t \leq 1$$

olsun. $b_H(t) - b_H(t-1)$ ifadesi t anındaki $r(k)$ otokorelasyon fonksiyonuna göre artışımızdır.

$r(k) \sim c(H)k^{2H-2}, k \to \infty$

Burada $c(H)$, k'dan bağımsız pozitif katsayıdır. Yukarıdaki $r(k)$ ise $1/2 < H < 1$ boyunca (1) özelliğini sağlar.

Wiener İntegrali için Anderson'un [91] kurduğu yapıyı kullanarak standart olmayan b_H şu şekilde verilir. $\alpha = H - \frac{1}{2}$ olmak üzere b_H (hyperfinite) süreci;

$$B_H(w,t) = c_H \sum_{-N \le s < t} F(s,t)\Delta B(w,t)$$

N bir tamsayı, c_H pozitif katsayı, $B_H: \Omega \times T \to R$ dir. Burada $F: T \times T \to R$ Fonksiyonu

$$F(s,t) = \begin{cases} (t-s)^{\alpha} - (-s)^{\alpha} 1_{\{s \le 0\}}(s), & s \le t \\ 0 \quad , & s > t \end{cases}$$

olur. Burada B_H, $1/2 < H < 1$ parametreli (Ω, A, P) de tanımlı Hyperfinite Kesirli Rassal Yürüyüş (Hyperfinite Fractional Random Walk) olarak tanımlanır. [29]'de B_H'ın iyi tanımlı integal tanımlamasıyla [92]'daki formulasyon;

$$b_H(t) = c_H \int_{-\infty}^{t} \left[(t-s)^{\alpha} - (-s)^{\alpha} 1_{\{s \le 0\}}(s)\right] db(s)$$

$$= c_H \int_{-\infty}^{t} f(t,s) db(w,s)$$

olur. Burada c_H;

$$c_H = \left(\int_{-\infty}^{0} [(1-u)^{\alpha} - (-u)^{\alpha}]^2 du + \int_{0}^{1} (1-u)^{2\alpha} du \right)^{1/2}$$

olur. Böylelikle Kesirli Rassal Yürüyüşler için Donsker tipi invaryans prensip tanımlanmış olur [92,93].

Teorem: **a.** w, Wiener süreci, B_H S-Sürekli ve $B_H(w,t) = b_H(w,t)$, $t \in T$.dir.

b. Eğer $n \to \infty$ ise $B_{H,n} \to b_H$ dir.

Teoremin ispatı [73] çalışmasında verilmiştir. Bu noktada bazı açıklamaları yapmak gerekir. Bu çalışmadaki Kesirli Brown Hareketi, bildiğimiz Brown Hareketinin Anderson'un yapısı ile hyperfinite rassal yürüyüş olarak tanımlandığı Kesirli hyperfinite rassal yürüyüştür. Lindstorm'un [108] çalışmasındaki yaklaşımı, Kesirli Brown Alanlarını oluşturmak için White Noise İntegrallerini kullanması açısından farklılıklar içerir. Bu çalışma benzer yapıyı oluşturan alternatif bir yaklaşımdır. Ayrıca yukarıdaki Teorem daha genel sonuçları olan bir durumun özel bir halidir. Davydov, hangi lineer zaman serilerinin b_H sürecine yakınsayacağının kollarını verir [94].

Şimdi Kesirli Black-Scholes Denklemini tanımlayalım. Öncelikle bildiğimiz Black-Scholes Denklemini oluşturan Stokastik Diferansiyel denklemi yazalım. Bu denklemde t zamanı, s hisse senedi fiyatını, w wiener sürecini, μ risksiz faiz oranını, σ volatiliteyi (fiyatlardaki oynaklık), b(w,t) Brown hareketini tanımlasın

$ds(w,t) = s(w,t)(\sigma db(w,t) + \mu dt)$

stokastik diferansiyel denkleminin çözümü

$$s(w,t) = s_0 \exp(\sigma b(w,t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t)$$

olarak verilmiştir. Şimdi bu Stokastik Denklemin Kesirli versiyonunu yazalım. b_H kesirli Brown hareketini, s_H ise H parametresine göre hisse fiyat sürecini göstersin.

$ds_H(w,t) = s_H(w,t)(\sigma db_H(w,t) + \mu dt)$

Denklemi h parametresine göre kesirli Brown hareketi içeren stokastik diferansiyel bir denklemdir. Bu denklemin ayrık hyperfinite modeli, Cox, Ross, Rubinstein'in opsiyon fiyatlama modelinin (Binom modeli) $1/2 < H < 1$ parametresine göre kesirli versiyonudur. Yani denklemin ayrık zamanlı versiyonu

$\Delta S_H(w,t) = S_H(w,t)(\sigma\Delta b_H(w,t) + \mu dt)$ dur. Çözümü de $S_H(w,t) = s_0 \prod_{u<t}(1 + \sigma\Delta B_H(w,u) + \mu\Delta t)$ olur [26].

S_H fiyatlama süreci geometrik bir rassal yürüyüş durumundan oluşturulmuştur. Bu nedenle bu süreç, hyperfinite geometrik kesirli rassal yürüyüş veya kesirli Cox, Ross, Rubinstein (CRR) Modeli olarak tanımlanır [95].

Teorem: $1/2 < H < 1$, $w \in \Omega$, $S_H(w,t)$ $t \in T$ için S-Sürekli olsun.

$°S_H(w,t) = s_0 \exp(\sigma b_H(w,°t) + \mu°t)$ olur. Şimdi aşağıdaki lemmayı gösterelim.

Lemma: C, sonlu bir sabit olsun. Her $t \in T$ için

$$E\left[\left(\Delta B_H(t)\right)^2\right] = \Delta t^{2H}\left(1 + C(t)\right)$$

$C(t) \approx C$ ve $1/2 < H < 1$ dir. Böylece

$$E\left[\sum_{0\le t<1}\left(\Delta B_H(t)\right)^2\right] \approx 0.$$

Lemmanın ve üzerindeki teoremin ispatı [73] çalışmasından bulunabilir.

Tanım: Bir hisse için Kesirli Black-Scholes fiyatlama modeli, $1/2 < H < 1$ parametreli geometrik kesirli Brown hareketini içerir.
$S_H(w,t) = s_0 \exp(\sigma b_H(w,t) + \mu t)\,, 0 < t < 1$

Sonuç: $S_{H,n}$, ayrık zamanlı, geometrik, kesirli, $1/2 < H < 1$ parametreli rassal yürüyüş süreci olsun. $n \in N$ ve $\Delta t = 1/n$ için
$S_{H,n}(w,t) = s_0 \prod_{u<t}(1 + \sigma\Delta B_{H,n}(w,u) + \mu\Delta t)$ ve $n \to \infty$ iken $S_{H,n} \to S_H$dir.

2009 Yılında Marcin Magdziarz, [96] Black-Scholes Formula in Subdiffusive Regime isimli çalışmasında Black-Scholes Modelinin, finansal piyasaların subdifüzyonal (alt yayılımlı) karakterlerini içeren bir genelleştirmesini sunar. Bu tür süreçleri karşılayabilmesi için subdifüzyonal (alt yayılımlı) Brown hareketi tanımlanır. Bu sürecin olasılık yoğunluk fonksiyonunun dinamiklerini yönlendirmesi için bir Kesirli Fokker-Planck Denklemi tanımlanır. Ele alınan model arbitrajsız ve tam olmayan bir modeldir. Sonrasında Avrupa tipi opsiyonların fiyatlarına karşılık gelen Subdifüzyonal Black-Scholes Denklemini bulunur ve bu opsiyon fiyatlarının nasıl değerlendirilebileceği Monte Carlo Yöntemiyle gösterilir. Klasik sonuçlar ve Subdifüzyonel Black-Scholes Modelinin sonuçları karşılaştırılarak çalışma sona erer.

Subdifüzyon yani alt yayılım lineer olmayan bir süreçtir. Normal olmayan difüzyon bir α kuvvet katsayısı ile verilir. Bu süreç ortalama kare yer değiştirme ile verilir. $\langle r^2(x) \rangle = K_\alpha X^\alpha$ ifadesinde eğer $\alpha = 1$ ise süreç tipik difüzyondur, $\alpha > 1$ ise süreç süperdifüzyon, eğer $\alpha < 1$ ise süreç subdifüzyondur. Bu tür normal olmayan difüzyon, Kesirli Difüzyon Denklemleriyle modellenir.

Gerçek hayattaki birçok durumda verilerin hareketsiz kaldığı gözlemlenir. Bu durum en çok katılımcı sayısının ve işlem sayısının nispeten düşük olduğu gelişmekte olan piyasalarda görülür. Bu durum Fiziksel sistemlerde oldukça kullanılan Subdifüzyon (alt yayılım) ile açıklanabilir. Subdifüzyonun yaygın Matematiksel tanımlaması kesirli Fokker-Planck denklemleriyle yapılır. Bu denklem yavaş dinamikler sergileyen modellerin analizinde oldukça kullanılır.

Bu model için önce Subdifüzyonal (alt yayılımlı) Brown Hareketini tanımlıyoruz.

$Z_\alpha(t) = Z(S_\alpha(t))$

ifadesinde $Z_\alpha(t)$ Subdifüzyonal Geometrik Brown Hareketidir, Z(t) ise Geometrik Brown Hareketidir, $0 < \alpha < 1$ parametresine bağlı $S_\alpha(t) = inf\{\tau > 0 : U_\alpha(\tau) > t\}$ ise ters α kararlı alt koordinatördür.

Teorem: $Z_\alpha(t)$ Subdifüzyonal Geometrik Brown Hareketi, $Z_\alpha(t)$ nin Kısmi Diferansiyel Denklemi kesirli Fokker-Planck tipi denklemin çözümüdür.

$$\frac{\partial w(x,t)}{\partial t} = {}_0D_t^{1-\alpha}\left[-\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{\partial}{\partial x}xw(x,t) + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}x^2w(x,t)\right], w(x,0) = \delta_{z_0}(x)$$

$${}_0^{RL}D_t^{1-\alpha}f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}f(s)ds$$

kesirli türevi Riemann Liouville anlamındadır.

2005 Yılında Björk ve Hult [97], Kesirli Black-Scholes Modeli ile Wick İntegralinin ilişkisi üzerine bir çalışma yayınladılar. Bu çalışmanın öncülü olan çalışmalar da [98,99] nolu çalışmalardır. Bu çalışmaların ana mantığı Brown Hareketi yerine Kesirli Brown Hareketi ($1/2 < H < 1$ aralığında Hurst parametresine bağlı) olması ve Ito İntegrali yerine de Wick İntegrali olmasıdır. Kesirli Brown hareketi içeren durumlarda bir martingal özelliğinden bahsedemediğimizi daha önce belirtmiştik. Bu çalışmada yukarıda referans noktalarında yer alan bir çelişkiyi çözmek için problem yeniden ele alınmıştır. Bu çelişki, kesirli Brown hareketi içeren modellerin arbitrajın olabileceğini kanıtlayan makalelerin aksine yukarıdaki çalışmalarda arbitraj imkanı olmadığının belirtilmesidir.

2010 Yılında Guy Jumarie [100], 'Derivation and Solutions of Some Fracitonal Black-Scholes Equations in Coarse-Grained Space and Time. Applications to Merton'd Optimal Portfolio' isimli çalışmasında Mittag-Leffler Fonksiyonu belirten kesirli mertebeden Taylor Serileri kullanarak, kesirli süreçlerin dinamiklerine sahip stokastik bir diferansiyel denklem modeli kurar. Buradan iki yeni kesirli Black-Scholes Denklemi tanımlanıp çözümleri verilebilir. Bu denklemlerden biri modeli diğeri de çözümü verir. Merton'un Optimal Portföyü bu model ve çözüm ışığında yeniden gözden geçirilir ve yeni sonuçlar eklenir. Borsanın temel dinamikleri için gerçek veriler ile sanal verileri tanımlanmasında öneriler sunar.

$f(x+h) = E_\alpha(h^\alpha D_x^\alpha)f(x)$, kesirli Taylor serisi, $E_\alpha(.)$ Mittag Leffler Fonksiyonu

Ayrık zamanlı FW, İleri Operatörü olarak tanımlanır. $FWhf(x) = f(x+h)$

$$\Delta^\alpha f(x) = (FW-1)^\alpha f(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \binom{\alpha}{k} f[x + (\alpha - k)h]$$

Sürekli zamanlı veriler için de

$$D_x^\alpha f(x) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x-\varepsilon)^{-\alpha} \big(f(\varepsilon) - f(0)\big) d\varepsilon$$

Modifiye edilmiş Riemann Liouville Kesirli türevidir.

Kesirli türevler ve Taylor açılımı işlemlerinin sonucunda iki adet Black-Scholes modeli bulunur.

Model 1:

$$P_t^{(\alpha)}(x,t) = (rP - rxP_x)\frac{t^{1-\alpha}}{(1-\alpha)!} - \frac{\alpha!}{2}\sigma^2 x^2 P_{xx}$$

Model 2:

$$\acute{P}_t^{(\alpha)}(x,t) = -rx^\alpha \acute{P}_x^{(\alpha)}(x,t) - \gamma(\alpha)\sigma^2 x^{2\alpha} \acute{P}_{xx}^{(\alpha)}(x,t)$$

$$\gamma(\alpha) = \frac{(\alpha!)^3 \Gamma^2(1-\alpha)}{(2\alpha)!}$$

modellerinin çözümleri yapılır ve Merton'un klasik anlamda optimal portföyü kesirli olarak yeniden düzenlenir. Bu kesirli portföy için optimal kontrol problemi çözülür ve sonuç şöyle bulunur:

$$v(t) = \left(\frac{\gamma - (\alpha!)^{-1}}{(1-\gamma)(1-\alpha)!} \int_t^T e^{-\frac{\rho\tau}{1-\gamma}} \tau^{1-\alpha} X_\alpha(T,\tau) d\tau^\alpha \right)^{-1} e^{\frac{-\rho\tau}{1-\gamma}}$$

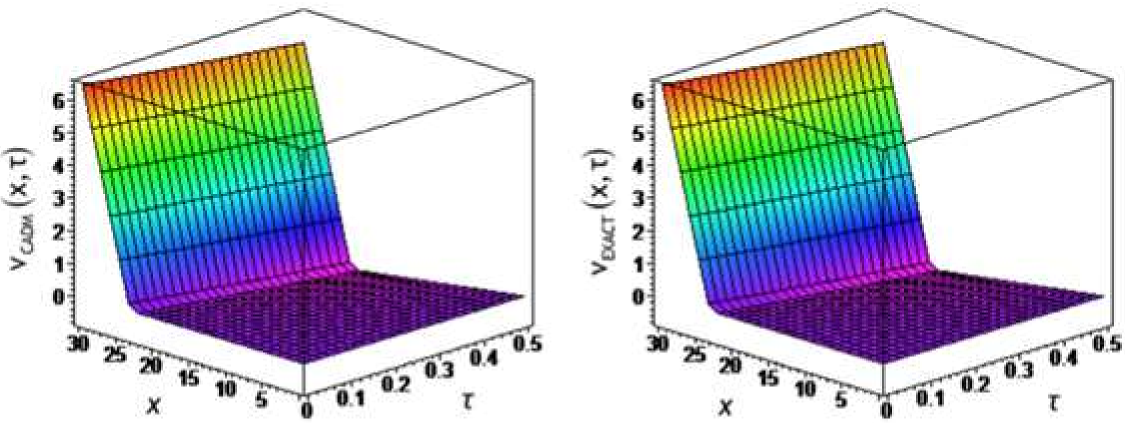
Burada parametrelerin short range dependence ve long range dependence özelliğine sahip olma durumlarına inceleme yapılır. Son olarak gerçek ve sanal veriler üzerinden sonuçlar değerlendirilir ve çalışma sonlanır.

2017 yılında N. Özdemir ve M. Yavuz, [101] çalışmaları Çok değişkenli Pade Yaklaşımını kullanarak Caputo anlamında Kesirli Black-Scholes Denklemlerinin nümerik çözümlerini bulmak üzerinedir. Böylelikle Avrupa tipi Vanilla alış opsiyonu fiyatı belirleme problemini çözerler. Daha sonra [102] nolu çalışmada yazarlar Avrupa tipi vanilla alış opsiyon fiyatını belirlemek için tekil bir çekirdek fonksiyonu olmadan kesirli mertebeden bir Black-Scholes

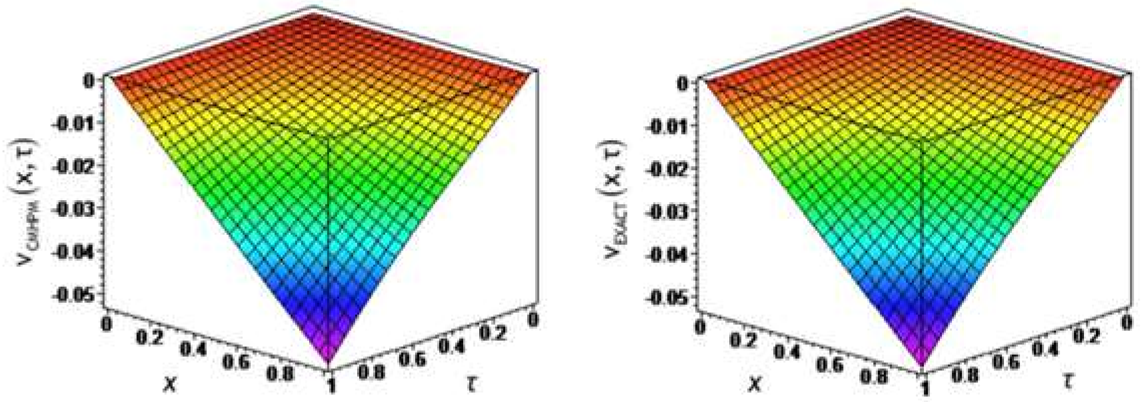
Denklemini çözerler. Bu çalışmada türevler Caputo Fabrizzio anlamındadır. Nümerik yöntemler ise Laplace Homotopi Analiz Metodudur.

2018 yılında N. Özdemir ve M. Yavuz [25] çalışmalarında yapay sinir ağlarında ileri besleme yaklaşımıyla Borsa İstanbul'daki indeksin kapanış değerlerini tahmin etme üzerinedir. Ağustos 2012 ile Haziran 2016 arasındaki kapanış değeri ile yapay sinir ağı modeli oluşturulmuş ve modelin sonuçları gerçek değerlerle kıyaslanıp hata payları verilmiştir.

2018 yılında N. Özdemir ve M. Yavuz [103] çalışmalarında başlangıç değeri verilmiş Kesirli Black-Scholes Denklemi ve Genelleştirilmiş Kesirli Black-Scholes Denklemini kullanarak Opsiyon fiyatlama problemini Adomian Ayrıştırma Metodu ile çözmüşlerdir. Burada Kesirli türevler Caputo anlamındadır. Ayrıca yazarlar [104] nolu çalışmada Kesirli Black-Scholes Denklemini bu defa Conformable bir operatör yardımıyla çözerler. Burada kullandıkları yöntem Conformable Adomian Ayrıştırma Metodu ve Conformable kesirli homotopi pertürbasyon metodudur. Çözümlerin etkinliğini kıyaslamak üzere analitik ve nümerik çözümler gerçek verilerle kıyaslanmıştır. Ayrıca conformable anlamında kurulan kesirli Black-Scholes denklemleri yaklaşık çözümler bulmada oldukça etkili olduğu vurgulanmıştır.



Şekil 5.1 Black-Scholes Denkleminin Çözümleri ve Kesirli Black-Scholes Denkleminin Adomian Ayrıştırma Metodu ile Çözümlerinin Karşılaştırılması (Özdemir ve Yavuz [104])



Şekil 5.2 Genelleştirilmiş Black-Scholes Denkleminin Çözümleri ve Kesirli Black-Scholes Denkleminin Homotopi Pertürbasyon Metodu ile Çözümlerinin Karşılaştırılması (Özdemir ve Yavuz [104])

2021 yılında Roul ve Goura [105] çalışmalarında Avrupa tipi opsiyonları tanımlamak için zaman kesirli Black-Scholes Diferansiyel Denkleminin Nümerik çözümleri sunulmuştur. Buradaki kesirli türev Caputo anlamındadır ve süreci ayrıklaştırmak için Sonlu Farklar Metodu kullanılmıştır. Ayrık zamanda kararlılık ve yakınsaklığı incelenmiştir. Yöntemin doğruluğu ve etkinliği ve teorik sonucun doğrulanması için bilinen analitik çözümleriyle iki test problemi düşünülmüştür. Ayrıca sürecin pratikliğini gözlemlemek için metot 3 farklı Avrupa tipi opsiyona uygulanmıştır. Kısacası bu çalışmada opsiyon fiyatına karşılık gelen kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin etkinliği araştırılmıştır.

$$\frac{\partial^{\alpha} Y(S,\tau)}{\partial \tau^{\alpha}} + \frac{\sigma^2}{2} S^2 \frac{\partial^2 Y(S,\tau)}{\partial S^2} + rS\frac{\partial Y(S,\tau)}{\partial S} - rY(S,\tau) = 0$$

$$Y(0,\tau) = \Phi(\tau), \qquad Y(\infty,\tau) = w(\tau)$$

$$\frac{\partial^{\alpha} Y(S,\tau)}{\partial \tau^{\alpha}} = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \dfrac{d}{d\tau} \displaystyle\int_{\tau}^{T} \dfrac{Y(S,\varepsilon) - Y(S,T)}{(\varepsilon - \tau)^{\alpha}} d\varepsilon, & 0 < \alpha < 1 \\ \dfrac{\partial Y(S,\tau)}{\partial \tau}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

Zaman kesirli diferansiyel denklem şekildeki gibi verilmiştir. Daha sonra $S = e^{x}$ ve $\tau = T - t$ dönüşümleri yapılarak $u(x,t) = Y(e^{x}, T - t)$ ifadesi denklemde yazılır. Bu diferansiyel denklem sonlu farklar metodu ile çözülür.

2021 yılında Hernandes, Martines ve Brambila, [106] çalışmalarında radyal tabanlı işlemler aracılığıyla ağsız yöntemi kullanarak zaman kesirli kısmi diferansiyel Black-Scholes denklemini [107] nümerik yöntemle çözmeyi amaçlamışlardır. Zaman kesirli kısmi diferansiyel denklemler fizikte bazı difüzyon problemlerinde, mühendislik uygulamalarında ve bazı hisse senetlerinin subdiffüz veya süperdiffüz davranışlarında gözlemlenir. Bu çalışmada radyal temelli fonksiyonların çok boyutlu düğümlere sahip problemlerin çözümünde yeterince esnek bir yöntem olduğunu ve matrislerdeki koşul sayısının nasıl azaltılabileceğini de görürüz.

6. SONUÇ

Stokastik süreçlerin finans dünyasında kullanımı yaklaşık olarak 120 yıl öncesine kadar gitmektedir. Fakat 1973 yılında yayınlanan Black-Scholes Denklemi bu alanda bir devrim niteliğinde olmuştur. Bu denklemin sağladığı avantajlar sayesinde insanlar opsiyon fiyatlama daha geniş alanlarda kullanılmaya başlanmış ve birçok opsiyon borsası açılmıştır. Fakat daha önce de belirttiğimiz gibi Black-Scholes Modelinin dezavantajları da mevcuttur. Örneğin temettü ödemesinin modelde ihmal edilmesi, işlem maliyetlerinin hesaba katılmaması, modelin sadece Avrupa tipi opsiyonlara uygulanabilir olması gibi durumlar Black-Scholes Modelinde bulunan dezavantajlardır. İnsanlar bu sebeple bu kavramları da içeren yeni çalışmalar yapmışlardır.

Tezimizde optimal durma problemini 4. bölümde ele almıştık. Literatürde tamsayı mertebeli diferansiyel denklemlerle optimal durma problemi üzerine birçok çalışma bulunmaktadır. Fakat kesirli mertebeli optimal durma problemleri üzerine yapılan çalışma sayısı henüz yeterli değildir. Hatta farklı kesirli türevlerin nasıl sonuçlar verdiğine bakılabilir.

Ayrıca tezimizdeki martingal optimal taşıma problemlerinin de kesirli mertebeden çalışmaları henüz literatürde bulunmamaktadır. Böyle bir çalışmanın sonucu da gerçek hayata daha yakın bir model oluşturması açısından önemli olacaktır.

Ayrıca bu çalışmada kesirli mertebeden stokastik diferansiyel denklem içeren Kesirli mertebeden Black-Scholes Denklemi ile Kesirli Brown Hareketi içeren Kesirli Black-Scholes Denklemi aynı denklemler değildir. Bu iki denklemin çözümleri arasındaki bir kıyaslamanın da sonuçları dikkate değerdir. Ayrıca hem kesirli mertebeden hem de kesirli Brown hareketi içeren Black Scholes Denkleminin çözümleri araştırılmalıdır.

KAYNAKLAR

[1]. L. Bachelier, The Theory of Speculation, Annales scientifiques de l'Ecole Normale Sup ´ erieure ', Sorbonne, 1900.

[2]. M. H. A. Davis, Louis Bachelier's 'Theory of Speculation', Princeton University Press, New Jersey, 2006.

[3]. O. Dayan, Opsiyon Fiyatlamada Black-Scholes Denklemi Üzerine bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, Bahçeşehir Üniversitesi, İstanbul, 2021.

[4]. J. Choi, M. Kwak, A Black-Scholes User's Guide To The Bachelier Model, Peking University, HSBC Business School, Shenzhen, China, 2022.

[5]. R. E. A. Paley, N. Wiener, Notes On the Theory and Application of Fourier Transforms, Mashachusetts Institute of Technology, 1934.

[6]. N. Wiener, Differential Space, doi.org/10.1002/sapm192321131, 1923.

[7]. P. Samuelson, Rational Theory of Warrant Pricing, 1965.

[8]. A. Kolmogorov, On The Analytical Solutions Of The Probability Theory, 1931.

[9]. B. Oksendal, Stochastic Differential Equations, An Introduction With Applications, Fifth Edition, Corrected Printing Springer-Verlag Heidelberg, New York, 2000.

[10]. D. W. Stroock, S. R. S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, Springer, 2006.

[11]. A. Kolmogorov, Foundations of the Theory of Probability, Chelsea Publishing Company, New York, 1956.

[12]. J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1953.

[13]. G. Hunt, Markov Processes and Potencials, National Academy of Sciences United States of America, New York, 1956.

[14]. P. Levy, Random Functions: General Theory with Special References to Laplacian Random Functions, University of California Publications in Statistics, 1953.

[15]. K. Ito, Stochastic Integrand, Japan Academy, Nagoya Imperial University, 1944.

[16]. K. Ito, On a Formula Concerning Stochastic Diiferentials, Nagoya Mathematical Journal, 1951.

[17]. P. A. Meyer, C. Dellacherie, Probabilities and Potential, North Holland Publisihing Co., Amsterdam, 1982.

[18]. H. Kunita, S. Watanabe, On Square Integrable Martingales, Cambridge University Press, 1967.

[19]. C. Doleans-dade, P. A. Meyer, Stochastic Integrals for Local Martingales, Springer-Verlag, New York, 1970.

[20]. M. Harrison, D. Kreps, Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets, Graduate School of Business, Stanford University, Stanford, California, 1979.

[21]. M. Harrison, S. Pliska, Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading, North Holland Publishing Company, 1981.

[22]. R. Merton, The Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, 1973.

[23]. M. Yavuz, Kesirli Black-Scholes Opsiyon Fiyatlama Denklemlerinin Yaklaşık Analitik Çözümleri, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 2016.

[24]. P. Willmott, S. Howison, J. Dewynne, Notes And Solutions For: The Mathematics Of Financial Derivatives, A Student Introduction, Cambridge University Press, 1995.

[25]. N. Özdemir, M. Yavuz, A Feed-Forward Neural Network Approach To İstanbul Stock Exchange, Journal Of Applied Computer Science & Mathematics, 2018.

[26]. J. Cox, S. Ross, And M. Rubinstein, Option Pricing: A Simplified Approach, Financial Econom. 7, 1979.

[27]. I. Karatzas, On the pricing of American Ooptions, Springer-Verlag Co., New York, 1988.

[28]. A. Bensoussan, On the Theory of Option Pricing, Acta Applied Mathematics, 1984.

[29]. G. G. Booth, F. R. Kaen, And P. E. Koveos, R/ S Analysis Of Foreign Exchange Rates Under Two İnternational Monetary Regimes, J. Monetary Econom. 10, 1982.

[30]. D. Leonard, M. Solt, On Using The Black-Scholes Model To Value Warrants, The Journal of Financial Reserach, 1990.

[31]. B. Lauterbach, P. Schultz, Pricing Warrants: An Empirical Study of The Black and Scholes Model and Its Applications, Journal of Finance, 1990.

[32]. M. Davis, V. Panas, T. Zariphopoulou, European Option Pricing with Transaction Costs, Society for Industrial and Applied Mathematics,1993.

[33]. Henrik Amilon, A Neural Network Versus Black-Scholes: A Comparison Of Pricing And Hedging Performances, Department Of Economics, Lund University, Lund, Sweden, 2003.

[34]. J. Hutchinson, A. Lo, T. Poggio, A Nonparametric Approach To Pricing And Hedging Derivative Securities Via Learning Networks, Journal Of France, 1994.

[35]. J. Bennel, C. Sutcliffe, Black-Scholes Versus Networks İn Pricing Ftse 100 Options, School Of Management, The University, Southampton, 2004.

[36]. P. Angabalan, J. Cao, R. Raja, G. Rajchakit, H. M. Fardoun, Stability Adn Synchronization Criteria For Fractional Order Competitive Neural Networks With Time Delays: An Asymptotic Expansion Of Mittag Leffler Function, Journal Of Franklin Instıtute, 2019.

[37]. C. Yinghao, H. Yu, X. Meng, Numerical Solving Of The Generalized Black-Scholes Differential Equation Using Neural Network, Elsevier Digital Signal Processing, Volume 112, 2021.

[38]. P. Grohs, F. Hornung, A. Jentzen, P. V. Wurstemberger, A Proof That Artifical Neural Networks Overcome The Course Of Dimensionally İn The Numerical Approximation Of Black-Scholes Partial Diiferential Equations, Memoirs Of The American Mathematical Society, 2023.

[39]. M. Beiglbock, N. Juillet, On A Problem Of Transport Under Marginal Martingale Contraints, 2016.

[40]. Y. Dolansky, H. M. Soner, Martingale Optimal Transport And Robust Hedging İn Continuous Time, Hebrew University Of Jerusalem, 2012.

[41]. G. Monge, Memoire Sur La Theorie Des D´Eblais Et Des Remblais, Histoire De Lacad. Des Sciences De Paris, 1781.

[42]. L.V. Kantorovich, On The Transfer Of Masses, Dokl. Akad. Nauk. Sssr (İn Russian), 37, 227–229, 1942.

[43]. L.V. Kantorovich, On A Problem Of Monge, Uspekhi Mathematics Nauk. 3, 225–226, 1948.

[44]. B. Duplantier, R. Rhodes, S Sheffield, V. Vargas, Critical Gaussian Multiplicative Chaos: Convergence Of The Derivative Martingale, The Annals Of Probability, 2012.

[45]. J. Barral, X. Jin, R. Rhodes, V. Vargas, Gaussian Multiplicative Chaos And Kpz Duality, 2013.

[46]. A. Chakarov, S. Sankaranarayanan, Probalistic Program Analysis With Martingales, 2013.

[47]. X. Shao, J. Zhang, Martingale Difference Corelation And Its Use in High Dimensional Variable Screening, 2014.

[48]. J. Fan, And J. Lv, “Sure Independence Screening For Ultra-High Dimensional Feature Space,” Journal Of The Royal Statistical Society, Series B, 70, 849-911, 2008.

[49]. L. Meier, S. Van De Geer, P. Buhlmann, “High-Dimensional Additive Modeling,” Annals Of Statistics, 37, 3779-3821, 2009.

[50]. J. Fan, Y. Feng, R. Song, “Nonparametric Independence Screening İn Sparse Ultra-High-Dimensional Additive Models,” Journal Of The American Statistical Association, 106, 544-557, 2011.

[51]. Y. Kabarov, C. Kardaras, S. Song, No Arbitrage Of The First Kind And Local Martingale Numeraires, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

[52]. P. H. Labordere, N. Touzi, An Explicit Martingale Version Of The One Dimensional Brenier Theorem, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2016.

[53]. G. Gao, J. Obloj, Computational Methods For Martingale Optimal Transport Problems, Univesity Of Oxford, 2017.

[54]. J. Backhoff, M. Beiglbock, M. Hessmann, S. Kallblad, Martingale Benamou-Brenier: A Probabilistic Perspective, The Annals Of Probability, 2017.

[55]. B. Bercu, A Martingale Approach For The Elephant Random Walk, Journal Of Physics, Applied Mathematics And Theoretical, 2017.

[56]. E. Baur, J. Bertoin, Elephant Random Walks And Their Connection To Polya-Type Urns, Phys. Rew., E94 052134, 2016.

[57]. G. M. Schütz, S. Trımper, Elephants Can Always Remember: Exact Long-Range Memory Effects In A Non-Markovian Random Walk, Phys. Rew., E70 045101, 2004.

[58]. J. Perello, J. M. Porra, M. Montero, J. Masoliver, Black-Scholes Option Pricing Within Ito And Stranovich Conventions, Depertament De Fisica Fonamental, Universitat De Barcelona, Barcelona, 2000.

[59]. H. C. Wu, Pricing European Options Based On The Fuzzy Pattern Of Black-Scholes Formula, 2004.

[60]. S. Janson, J. Tysk, Feynman-Kac Formulas For Black-Scholes Type Equations, Bulletin Of London Mathematical Society, 2006.

[61]. R. A. Jarrow, U. Çetin, P. Protter, M. Warackla, Pricing Options İn An Extended Black-Scholes Economy With Illıquidity: Theory And Empirical Evidence, Review Of Financial Studies, 2006.

[62]. M. Arriojas, Y. Hu, S. Mohammed, G. Pap, A Delayed Black-Scholes Formula, 2006

[63]. L. Accardı, A. Boukas, The Quantum Black-Scholes Equation, Global Journal Of Pure And Applied Mathematics, 2007.

[64]. W. Segal, I. E. Segal, The Black-Scholes Pricing Formula İn The Quantum Context, Proc. Natl. Acad. Sci. Usa, Vol. 95, 1998.

[65]. J. Ankudinova, M. Ehrhardt, On The Numerical Solutions Of Nonlinear Black-Scholes Equations, Institut Fur Mathematik, Technische Universitat Berlin, 2008.

[66]. A. Pak, A. Smirnov, Geometric Approach To Asymptotic Expansion Of Feynman Integrals, 2011.

[67]. M. Fujii, A. Takahashi, M. Takahashi, Asymptotic Expansion As Prior Knowledge İn Deep Learning Method For High Dimensional Bsdes, Springer Japan Kk, Part Of Springer Nature, 2019.

[68]. E. Weinan, J. Han, A. Jentzen, Deep Learning-Based Numerical Methods For High-Dimensional Parabolic Partial Diferential Equations And Backward Stochastic Diferential Equations. Arxiv :1706.04702, 2017.

[69]. Q. Han, X. Li, Y. Li, Asypmtotic Expansion Of Solutions Of The Yamabe Equation Near Isolated Singular Points, Doctor Of Philosophy (Doktora Tezi), Graduate Program İn Maths, Notre Dame, Indiana, 2020.

[70]. M. M. Khalsaraei, A. Zhokri, Z. Mohammadnia, H. M. Sedighi, Qualitatively Stable Nonstandard Finite Difference Scheme For Numerical Solution Of The Non-Linear Black-Scholes Equation, Hindawi Journal Of Mathematics Volume 2021, Article Id 6679484, 12 Pages, 2021.

[71]. H. E. Hurst, Long-term Storage Capacity of Reservoirs, Transactions of the American Society of Civil Engineers, 1951.

[72]. B. Mandelbrot, J. W. V. Ness, Fractional Brownian Motions, Fractional Noises and Applications, SIAM Review, 1968.

[73]. N. Cutland, E. Kopp, W. Willinger, Stock Price Returns and the Joseph Effect: AFractional Version of the Black-Scholes Model, 1995.

[74]. A. N. Kolmogorov, Wienersche Spiralen und einige andere interessante Kurven in Hilbert-schen Raum, Comptes Rendus (Doklady) Academie des Sciences de l'USSR (N.S.) 26 1940.

[75]. B. Mandelbrot and M. S. Taqqu, Robust R/ S analysis of long run serial correlation, Proc. 42nd Session of the lSI 2 ,Manila, 1979.

[76]. B. Mandelbrot, J. R. Wallis, Noah, Joseph And Operational Hydrology, Water Resources Research 4 1968.

[77]. B. Mandelbrot, J. R. Wallis, Computer Experiments With Fractional Gaussian Noises, Parts 1-3, Water Resources Research 5 1969.

[78]. B. Mandelbrot, J. R. Wallis, Some long run properties of geophysical records, Water Resources Research 5 1969.

[79]. J.R.M. Hosking, Fractional Differencing, Biometrica 68, 1981.
[80]. G. E. P. Box And G. M. Jenkins, Time Series Analysis: Forecasting And Control, Holden-Day, San Francisco, 1970.
[81]. N. Kunitomo, Long-Term Memory And Fractional Brownian Motion İn Financial Markets, Preprint, 1993.
[82]. S. Maheswaran, C. A. Sıms, Empirical İmplications Of Arbitrage-Free Asset Markets, 1993.
[83]. B. B. Mandelbrot, J. W. Van Ness, Fractional Brownian Motions, Fractional Noises And Applications, Sıam Review 10, 1968.
[84]. C. Dellacherie, P. A. Meyer, Probabilities And Potential B, North-Holland, Amsterdam, 1982.
[85]. C. Stricker, Arbitrage Et Lois De Martingale, Ann. Lnst. Henri Poincare 26, 1990.
[86]. W. Dai, C. C. Heyde, Ito Formula With Respect To Fractional Brownian Motion And Its Application, Journal Of Applied Mathematics And Stochastic Calculus, 1996.
[87]. S.J. Lin, Stochastic Analysis Of Fractional Brownian Motion, Fractional Noises And Applications. Sıam Review, 10, 1995.
[88]. Y. Hu, B. Oksendal, Fractional White Noise Calculus And Applications İn Finance, Preprint University, Osla, 1999.
[89]. Y. Hu, B. Oksendal, Agnes Sulem, Optimal Portfolio İn A Fractional Black-Scholes Market, 2000.
[90]. J. Cox, C. F. Huang, A Variational Problem Arising İn Financial Economics, J. Mathematical Economics, 1991.
[91]. R. M. Anderson, A Nonstandard Representation For Brownian Motion And Ito Integmtion, Israel Math. J. 25, 1976.
[92]. B. B. Mandelbrot, The Fractal Geometry Of Nature, Freeman, New York, 1983.
[93]. P. Billingsley, Convergence Of Probability Measures, Wiley, New York, 1968.
[94]. Y. A. Davydov, The Invariance Principle For Stationary Processes, Theory Probab. Appl. 15, 1970.
[95]. N. J. Cutland, Nonstandard Measure Theory And İts Applications, J. Bull. London Math. Soc. 15, 1983.
[96]. Marcin Magdziarz, Black-Scholes Formula İn Subdiffusive Regime, Journal Of Statistical Physics, 2009.
[97]. T. Björk, H. Hult, A Note On Wick Product And The Fractional Black-Scholes Model, Department Of Finance, Stockholm School Of Economics, Stockholm, Sweden, 2005.

[98]. Y. Hu, B. Øksendal, Fractional White Noise Calculus And Applications To Finance. Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat., 2003.

[99]. R. J. Elliot, J. Van Der Hoek, A General White Noise Theory And Applications To Finance. Math. Finance 13, 301–330, 2003.

[100]. G. Jumarie, Derivation And Solutions Of Some Fractional Black-Scholes Equations İn Coarse-Grained Space And Time. Applications To Merton's Portfolio, Department Of Mathematics, University Of Quebec, Montreal, 2010.

[101]. N. Özdemir, M. Yavuz, Numerical Solution Of Fractional Black-Scholes Equation By Using The Multivariate Padé Approximation, Special İssue Of The 3rd International Conference On Computational And Experimental Science And Engineering, 2017.

[102]. N. Özdemir, M. Yavuz, European Vanilla Option Pricing Model Of Fractional Order Without Singular Kernel, Fractal And Fractional, 2018.

[103]. N. Özdemir, M. Yavuz, A Quantitative Approach To Fractional Option Pricing Problems With Decomposition Series, Konuralp Journal Of Mathematics 6 (1) 102-109, 2018.

[104]. N. Özdemir, M. Yavuz, A New Approach To The European Option Pricing Model With New Fractional Operator, Mathematical Modeling Of Natural Phenomena, 2018.

[105]. P. Roul, V. M. K. P. Goura, A Compact Finite Difference Scheme For Fractional Black-Scholes Option Pricing Model, Elsevier Applied Numerical Mathematics, Vol. 166 Page 40-60, 2021.

[106]. A. T. Hernandes, F. Brambila, C. A. Torres-Martınes, Numerical Solution Using Radial Basis Functions For Multidimensional Fractional Partial Differential Equations Of Type Black-Scholes, Computational And Applied Mathematics 40, Article Number: 245, 2021.

[107]. F. Black, M. Scholes, The Pricing of Options and Corporate Liabilities, The Jurnal of Political Economy, The University of Chicago Press, Chicago, 1973.

[108]. T. L. Lindstorm, Fractional Brownian fields as integrals of white noise, Bull. London Math. Soc. 24 1992.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Ahmet ÇOBAN

Doğum Yeri ve Tarihi : Balıkesir 10/08/1986

E-Posta : ahmetcobanea@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Yüzüncü Yıl Üniversitesi Matematik Öğretmenliği Bölümü	2010
Lise	Sırrı Yırcalı Anadolu Lisesi	2004