T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL AÇILIM FONKSİYON METODU İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ

SEDA KAÇAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Fırat EVİRGEN** (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR
Doç. Dr. Mehmet YAVUZ

BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Modifiye Edilmiş Üstel Açılım Fonksiyon Metodu ile Bazı Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Soliton Çözümlerinin Analizi**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Seda KAÇAR

ÖZET

MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL AÇILIM FONKSİYON METODU İLE BAZI LİNEER OLMAYAN KISMİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN SOLİTON ÇÖZÜMLERİNİN ANALİZİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ

SEDA KAÇAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. FIRAT EVİRGEN)

BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

Kısmi diferansiyel denklemler gerçek hayattaki birçok olayın modellenmesinde kullanılmaktadır. Bu sebeple kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri üzerine literatürde farklı çalışmalar yer almaktadır. Bu çalışmalar arasında özellikle dalga denklemleri ve bunların çözümleri üzerinde yoğunlaşılmıştır. Bunun en önemli nedeni dalga denklemlerinin doğal olayların ve fenomenlerin matematiksel modellemesinde geniş bir uygulama alanına sahip olmasıdır. Örneğin, ses, ısı, elektromanyetik dalgalar gibi birçok fiziksel süreç dalga denklemleriyle açıklanabilir.

Bu tez kapsamında literatürde mevcut bazı kısmi diferansiyel denklemler ele alınmış ve analitik çözümleri modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu ile incelenmiştir. Bu amaçla ilk olarak tezin birinci ve ikinci bölümünde, genel bir literatür taramasına yer verilmiş ve sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve kavramlar ifade edilmiştir. Üçüncü bölümde, ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin araştırılmasında kullanılacak modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu tanıtılmış ve yöntemin işlem basamakları ayrıntılı olarak açıklanmıştır. Son olarak, modifiye edilmiş Burgers KdV, Benjamin-Bono-Mahony ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin analitik çözümleri karakterize edilerek çeşitli boyutlardaki grafikleri ile kontur grafiği çizilerek görselleştirilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kısmi diferansiyel denklemler, modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu, analitik çözüm.

Bilim Kod / Kodları : 20406 Sayfa Sayısı : 37

ABSTRACT

ANALYSIS OF SOLITON SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MODIFIED EXPONENTIAL EXPANSION FUNCTION METHOD
MSC THESIS

SEDA KAÇAR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. FIRAT EVİRGEN)

BALIKESİR, JULY - 2023

Partial differential equations are used in modeling many real-life events. For this reason, there are different studies in the literature on the solutions of partial differential equations. Among these studies, especially the wave equations and their solutions were focused on. The most important reason for this is that wave equations have a wide application area in the mathematical modeling of natural events and phenomena. For example, many physical processes such as sound, heat, and electromagnetic waves can be explained by wave equations.

Within the scope of this thesis, some partial differential equations available in the literature are discussed and their analytical solutions are examined with the modified exponential function expansion method. For this purpose, firstly, in the first and second parts of the thesis, a general literature review is given and the basic definitions and concepts to be used in the next sections are expressed. In the third chapter, the modified exponential function expansion method, which will be used to investigate the analytical solutions of the partial differential equations, is introduced and the steps of the method are explained in detail. Finally, analytical solutions of modified Burgers KdV, Benjamin-Bono-Mahony, and modified Korteweg-de Vries (KdV) equations are characterized and visualized by plotting contour plots with graphs of various dimensions.

KEYWORDS: Partial differential equation, modified exponential function expansion method, analytic solution.

Science Code / Codes : 20406 Page Number : 37

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL VE KISALTMALAR LİSTESİ

$\boldsymbol{u(x,t)}$	**:** İki bağımsız değişkenli fonksiyon
$\boldsymbol{u_x}$	**:** u fonksiyonun konuma göre birinci mertebeden kısmi türevi
$\boldsymbol{u_{xx}}$	**:** u fonksiyonun konuma göre ikinci mertebeden kısmi türevi
$\boldsymbol{u_t}$	**:** u fonksiyonun zamana göre birinci mertebeden kısmi türevi
$\boldsymbol{c}$	**:** Dalga hızı
Tanh	**:** Tanjant hiperbolik fonksiyonu
$\boldsymbol{exp}$	**:** Üstel fonksiyon
MEFM	**:** Modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu
$\boldsymbol{KdV}$	**:** Korteweg de Vries denklemi
$\boldsymbol{mKdV}$	**:** Modifiye edilmiş Korteweg de Vries denklemi
∇	**:** Laplasyan operatörü
∂	**:** Kısmi türev operatörü

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam süresince tüm bilgilerini benimle paylaşmaktan kaçınmayan, her türlü konuda desteğini benden esirgemeyen ve tezimde büyük emeği olan hocam Sayın Doç. Dr. Fırat EVİRGEN' e teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca her zaman yanımda olan aileme, eşim Ömer KAÇAR'a destek ve anlayışlarından dolayı teşekkür ederim.

Balıkesir, 2023 **Seda KAÇAR**

1. GİRİŞ

Diferansiyel denklem kavramı, matematik tarihinde oldukça eski bir kökene sahiptir. İlk diferansiyel denklemler, antik çağlarda bile ele alınmıştır. Antik Yunan matematikçileri, geometrik problemleri çözerken, kirişlerin eğriler üzerindeki hareketini tanımlamak için basit diferansiyel denklemleri kullanmışlardır [1].

Ancak modern diferansiyel denklemler teorisi, 17. yüzyılda ortaya çıkmıştır. Isaac Newton ve Gottfried Wilhelm Leibniz gibi matematikçiler, bu dönemde diferansiyel ve integral hesaplamalarının temellerini atmışlardır. Newton, hareket yasalarını diferansiyel denklemler yardımıyla ifade ederek, klasik mekanik alanında büyük bir ilerleme sağlamıştır.

Daha sonra, 18. ve 19. yüzyıllarda, matematikçiler diferansiyel denklemler teorisini derinleştirmiştir. Bu dönemde, matematiksel fizik ve mühendislik problemlerinin çözümünde diferansiyel denklemlerin önemi artmıştır. Özellikle Joseph Fourier, Pierre-Simon Laplace ve Carl Gustav Jacobi gibi isimler, diferansiyel denklemler alanında önemli katkılarda bulunmuşlardır.

20. yüzyılda, diferansiyel denklemler teorisi daha da gelişti ve çeşitli alt alanları ortaya çıktı. Örneğin, kısmi diferansiyel denklemler, kontrol teorisi, kaotik sistemler ve dinamik sistemler gibi alanlar diferansiyel denklemler teorisine önemli katkılar yaptı [1].

Diferansiyel denklemler kavramı zaman içinde matematiksel düşüncenin temel bir parçası haline geldi ve birçok farklı uygulama alanında güçlü bir araç olarak kullanıldı.

Kısmi diferansiyel denklemler, adi diferansiyel denklemler içinde önemli bir yer tutmaktadır. Adi diferansiyel denklemler, tek bir bağımsız değişkenin türevleriyle ifade edilen denklemlerdir. Bu tür denklemler, genellikle tek bir boyutta hareket eden sistemlerin modellenmesinde kullanılırken, kısmi diferansiyel denklemler, birden çok bağımsız değişkenin türevlerini içerir ve çok boyutlu sistemlerin modellenmesinde kullanılır [2].

Kısmi diferansiyel denklemler, doğal fenomenleri ve fiziksel süreçleri daha gerçekçi bir şekilde açıklamada büyük önem taşır. Birçok fiziksel olay, ısı yayılımı, elektromanyetik alanlar, akışkan dinamiği, kuantum mekaniği gibi alanlarda kısmi diferansiyel denklemlerle ifade edilir. Örneğin, ısı transferi problemleri, malzeme işleme süreçleri, hava akışı modelleri gibi birçok uygulama kısmi diferansiyel denklemlerin kullanımını gerektirir [2-5].

Kısmi diferansiyel denklemlerin önemi, karmaşık sistemlerin analizi, tahmini ve kontrolü açısından da büyük bir etkiye sahiptir. Bu denklemlerin çözümleri, sistemlerin gelecekteki davranışını tahmin etmek ve optimize etmek için kullanılabilir. Kısmi diferansiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümleri, mühendislik tasarımlarında, fizik simülasyonlarında, hava tahmininde ve diğer birçok uygulama alanında kullanılır [6-7].

Kısmi diferansiyel denklemler arasında, dalga denklemleri önemli bir yer tutar ve birçok farklı disiplinde büyük öneme sahiptir. Dalga denklemleri doğal olayları, fiziksel sistemleri ve mühendislik problemlerini modellemek için yaygın olarak kullanılır. Bu denklemler, dalga hareketlerinin zaman ve uzayda nasıl yayıldığını açıklarlar. Bu tür denklemler, birçok fiziksel sistemde karşılaşılan sorunların çözümünde önemli rol oynarlar. Solitonlar, dalga denklemlerinin özel bir türü olan doğrusal olmayan dalga denklemlerinin çözümleridir. Solitonlar, birçok dalga fenomeninde karşılaşılan tek tek, lokalize edilmiş dalgalar olarak tanımlanabilirler. Bunlar, birçok dalga fenomeninde, deniz dalgalarından optik fiberlere kadar birçok uygulamada karşılaşılan önemli bir fenomen olmuştur. Solitonların en ilginç özelliklerinden biri, herhangi bir şekil ve boyutta olabilen ve diğer dalgalarla etkileşime girdiklerinde bile kendi şeklini ve hızını koruyabilen dalgalar olmalarıdır. Bu özellikleri, solitonların bilgi iletimi, veri saklama ve doğrusal olmayan etkileşimlerin modellenmesinde kullanılmalarını sağlar [8].

Gerçek hayattan gelen problemlerin matematiksel modellerinin oluşturulmasıyla elde edilen adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılması, matematikçilerin ve araştırmacıların ayrıca ilgi odağı olmuştur. Çünkü çözüm bulma süreci, sistemin davranışını anlamak, tahmin etmek ve kontrol etmek için kritik bir adımdır. Çözümler, sistemin istikrarı, dengeleri, sürekliği, titreşimleri, dalgalanmaları gibi özelliklerini ortaya koyar. Bu özellikler, gerçek hayattaki problemlere uygulamalar yaparken önemli bilgiler sağlar.

Denklemlerin çözümlerinin araştırılması, analitik ve sayısal yöntemlerle gerçekleştirilir. Analitik yöntemler, denklemi tam olarak çözmek ve analitik ifadeler elde etmek için kullanılır. Bu, denklemlerin matematiksel özelliklerini derinlemesine anlamamıza ve sistemin davranışını açık bir şekilde ifade etmemize olanak tanır. Sayısal yöntemler ise denklemlerin yaklaşık çözümlerini hesaplamak için bilgisayar tabanlı teknikler kullanır. Bu yöntemler, karmaşık problemlerin çözümünü daha pratik bir şekilde elde etmek için yaygın olarak kullanılır.

Dalga denklemleri gibi tipteki problemlerin çözümleri için literatüre birçok yöntem kazandırılmıştır. Bu yöntemler, problemin özelliklerine ve çözüm sürecinin doğasına göre çeşitlilik gösterir. Bu metotlardan bazıları, tanh metodu [9], genişletilmiş tanh fonksiyon metodu [10], exp fonksiyon metodu [11-14], Hirota bilineer dönüşüm metodu [15], Backlund ve Darboux dönüşüm metodu [16], ters saçılım metodu [17,18], genişletilmiş Weierstrass dönüşüm metodu [19,20], ilk integral metodu [21], F-açılım metodu [22], (G/G') -açılım metodu [23,24], geliştirilmiş Bernoulli sub-ODE metodu [25], Sine-Gordon açılım metodu [26], değiştirilmiş üstel metodu [27], Jacobi eliptik fonksiyon metodu [28], Kudryashov metodu [29], modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu (MEFM) [30] şeklinde sıralanabilir.

Bu tez, literatürde bulunan bazı kısmi diferansiyel denklemleri ele alarak analitik çözümlerini modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metoduyla incelemeyi amaçlamaktadır. Bu amaç doğrultusunda, ilk olarak tezin birinci ve ikinci bölümlerinde genel bir literatür taraması yapılmış ve daha sonra kullanılacak temel tanımlar ve kavramlar açıklanmıştır. Üçüncü bölümde, ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerini araştırmak için modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu tanıtılmış ve bu yöntemin adımları detaylı bir şekilde açıklanmıştır. Son olarak, değiştirilmiş Burgers KdV, Benjamin-Bono-Mahony ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin analitik çözümleri çeşitli boyutlarda grafikler ve kontur grafikleriyle karakterize edilerek görselleştirilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Adi Diferansiyel Denklemler

Bir bağımsız değişkeni, bilinmeyen fonksiyonu ve onun türevlerini içeren

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0,$$

şeklindeki bağıntıya *adi (basit) diferansiyel denklem* denir. Burada F tüm argümanlarına göre herhangi bir bilinen fonksiyon olmaktadır [31].

Tanım 2.1. Diferansiyel denklemin içerdiği türevlerin en yüksek mertebesine denklemin *basamağı* yada *mertebesi* denir.

Tanım 2.2. Bir diferansiyel denklem eğer içinde bulundurduğu her basamaktan türeve göre bir polinom denklem olarak yazılabiliyorsa, bu diferansiyel denklemde gözüken en yüksek basamaktan türevin üssüne (kuvvetine) bu diferansiyel denklemin *derecesi* denir.

Adi diferansiyel denklemler mertebe, derece ve lineer terim içerip içermedikleri gibi farklı açılardan sınıflandırılır. Bu sınıflandırmalar dikkate alınarak çeşitli çözüm yöntemleri verilmiştir. Genel olarak bir diferansiyel denklemin çözümü ifade edebilmek için aşağıdaki tanımlardan yararlanılır.

Tanım 2.3. Bir $A \subset R$ aralığını alalım. A aralığı üzerinde tanımlı ve m defa sürekli türevlere sahip fonksiyonların kümesine $C^m(A)$ denir .

Tanım 2.4. Bir $\phi \in C^n(A)$ fonksiyonu verilsin. Eğer ϕ fonksiyonu A kümesi üzerinde $F\left(x, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ diferansiyel denklemini özdeş olarak sağlıyorsa ϕ fonksiyonuna A üzerinde diferansiyel denklemin çözümüdür denir. Eğer bu çözüm n tane keyfi sabit içeriyorsa genel çözüm, genel çözüm içindeki keyfi sabitlere değer verilerek elde edilen çözümlere özel çözüm. Eğer diferansiyel denklemin bir çözümü genel çözümdeki keyfi sabitlere değer verilerek elde edilemiyorsa bu çözüme aykırı, *tekil* yada *singüler* çözüm denir [32].

2.2 Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemler

Bir kısmi türevli diferansiyel denklem, $x_1, \dots, x_n$ bağımsız değişkenlerine bağlı bilinmeyen z fonksiyonu ve onun sonlu sayıda kısmi türevlerinin oluşturduğu bir bağıntıdır.

z bağımlı; x ve y bağımsız değişkenler olmak üzere bir kısmi türevli denklem genel olarak

$$F\left(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots\right) = 0,$$

şeklindedir. Burada

$$z_x = \frac{\partial z}{\partial x},\ \ z_y = \frac{\partial z}{\partial y},\ \ z_{xx} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\ \ z_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},\ \ z_{yy} = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

dir. n bağımsız ve bir bağımlı değişkene sahip kısmi türevli denklemlerin genel şekli ise $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $z = z(x)$ olmak üzere

$$F\left(x_1, x_2, \dots, x_n, z, z_{x_1}, \dots, z_{x_n}, z_{x_1 x_1}, z_{x_1 x_2}, \dots\right) = 0,$$

formunda ifade edilebilir. Burada $x_1, x_2, \dots x_n$ bağımsız değişkenleri; z ise bağımlı değişkeni göstermekte ve $z_{x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}, z_{x_i y_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial y_j},\ i, j = 1,2, \dots, n$ dir.

Kısmi diferansiyel denklemler, akışkanlar mekaniği, ısı ve kütle transferi, sesin yayılması, esneklik, elektrostatik ve elektrodinamik (örneğin, Maxwell denklemleri) ve görelilik dahil olmak üzere birçok alandaki fiziksel yasaları tanımlar. Kısmi diferansiyel denklemler ile ilgili bazı temel kavramlar aşağıdaki gibidir [33].

Tanım 2.5. Kısmi diferansiyel denklemin içerdiği türevlerin en yüksek mertebelisine kısmi türevli diferansiyel denklemin *mertebesi* denir.

Tanım 2.6. $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve bu fonksiyonun kısmi türevleri verilen kısmi diferansiyel denklem R^n uzayının bir bölgesinde özdeş olarak sağlanıyor ise $z(x_1, x_2, \dots, x_n)$ fonksiyonuna verilen kısmi diferansiyel denkleminin bir çözümüdür denir.

Tanım 2.7. Kısmi diferansiyel denklemin mertebesine eşit sayıda keyfi bağımsız fonksiyon içeren çözümüne *genel çözüm* denir. Genel çözümden keyfi fonksiyonların belirli bir seçimi ile elde edilen çözümlere ise *özel çözüm,* keyfi fonksiyonların belirli bir seçimi ile genel çözümden elde edilemeyen çözümlere ise *tekil çözüm* denir.

Adi diferansiyel denklemlerde olduğu gibi bir kısmi türevli denklemin çözümü de tek değildir.

Kısmi diferansiyel denklemler çeşitli açılardan sınıflandırılabilirler. Bu sınıflandırmalardan en önemlisi lineerlik durumuna göre olanıdır.

Tanım 2.8. Bir kısmi türevli diferansiyel denklem bilinmeyen fonksiyon ve bu fonksiyonun tüm türevlerine göre doğrusal bir bağıntı ise bu denkleme *lineer* aksi halde *lineer olmayan* denir.

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler de kendi içerisinde yarı-linner, kuazi-lineer ve tamamıyla lineer olmayan olmak üzere üç başlık altında incelenebilir.

İkinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin gösteriminde genellikle Laplace operatörü kullanılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır.

Tanım 2.9. Laplace operatörü veya Laplacian, Öklid uzayında bir skaler fonksiyonun gradyanının diverjansı ile verilen bir diferansiyel operatördür. Laplace operatörü, genellikle Δ (delta) sembolü ile gösterilir. 1-boyutlu, 2-boyutlu, 3-boyutlu Laplace operatörleri sırasıyla

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \tag{2.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Laplacian, fiziksel olayları tanımlayan birçok diferansiyel denklemde yer alır. Poisson denklemi elektrik ve yerçekimi potansiyellerini, difüzyon denklemi ısı ve sıvı akışını, dalga denklemi dalga yayılımını ve Schrödinger denklemi kuantum mekaniğindeki dalga fonksiyonunu tanımlar.

2.3 Dalga Denklemi

Δ operatörü (2.1) deki gibi olmak üzere hiperbolik tipten bir denklem olan

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - c^2 \Delta U = 0, \tag{2.2}$$

şeklindeki bir denkleme Δ'nın 1,2,3-boyutlu olması durumuna göre sırasıyla 1,2,3 boyutlu dalga denklemi denir. Denklem (2.2)'de c pozitif bir reel sabit ve genellikle, aksi söylenmedikçe, t zaman değişkenini göstermektedir. Buna göre $1,2,3$-boyutlu dalga denklemleri sırasıyla

$$U_{tt} - c^2 U_{xx} = 0,$$
$$U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy}) = 0,$$
$$U_{tt} - c^2(U_{xx} + U_{yy} + U_{zz}) = 0,$$

formundadır. Bu tip denklemler elektromanyetik, hidrodinamik, ses yayılması, elastisite ve kuantum teorisi gibi konularda çok kullanılmaktadır [2].

3. MODİFİYE EDİLMİŞ ÜSTEL AÇILIM FONKSİYON METODU

Modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu (MEFM), üstel açılım fonksiyon metodunun [34-36] bir genişlemesi olarak ele alınmış ve ilk uygulaması Özpınar ve arkadaşları [30] tarafından 2015 yılında yapılmıştır. Bu çalışmada (2+1) boyutlu Boussinesq denkleminin kompleks ve hiperbolik yapıdaki yeni çözümleri elde edilmiştir. 2016 yılında Başkonuş ve arkadaşları [37] MEFM yöntemini manyeto-elektro-elastik dairesel çubuktaki boyuna dalga denklemine uygulayarak yeni analitik çözümler elde edilmiş ve fiziksel yorumu yapılmıştır. Bir başka çalışmada Koçak ve arkadaşları [38] uzun dalga boyuna sahip solitonların davranışını tanımlamak için kullanılan birleştirilmiş Konno-Oono denkleminin yeni analitik çözümlerini elde etmişlerdir. 2016 yılında Bulut ve Başkonuş [39] bir su kütlesinin yüzeyinde yayılan uzun su dalgalarının davranışını tanımlayan (2+1) boyutlu dağılımlı uzun su dalgası sisteminin çözümünü MEFM yöntemi ile araştırmışlardır. [40] nolu kaynakçada yazarlar, dalga hareketi ve yayılmaları için farklı matematiksel modellerin yeni versiyonlarını tanımlamak için kullanılan doğrusal olmayan evrim denklemine MEFM yöntemini uygulamışlardır.

2017 yılında yapılan çalışmalarda ise [41,42] dalga yayılımında hem doğrusal olmama durumunun hem de dağılımın etkilerini hesaba katan ve sığ suda su dalgalarının yayılmasını modellemek için yaygın olarak kullanılan Boussinesq denklemi ile phi-four teorisindeki skaler alanların davranışını yakalamakta kullanılan ve teorik fizikte önemli bir denklem olan phi-four denkleminin çözümleri irdelenmiştir. Elastik homojen olmayan Murnaghan çubuğundaki doğrusal olmayan dalga yayılımını açıklayan önemli bir doğrusal olmayan fiziksel model olan çift dağılımlı denklem için yeni dalga çözümleri ailesi [43] MEFM yöntemi ile oluşturulmuştur.

Çelik ve arkadaşları [44], 2018 yılında mikrotübüller boyunca nano-iyonik akımların iletimini temsil eden doğrusal olmayan bir diferansiyel denklemin karmaşık, üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar gibi yeni çözümlerini modifiye edilmiş $\exp(-\Omega(\xi))$-açılım fonksiyon yöntemi ile araştırmışlardır. Yine aynı yıl, MEFM yöntemi ile (2+1)-boyutlu Heisenberg ferromanyetik spin zinciri denkleminin [45], iki bileşenli ikinci dereceden KdV evrim sisteminin [46] ve karmaşık yapıya sahip birleştirilmiş doğrusal olmayan Maccari sisteminin [47] yürüyen dalga çözümleri araştırılmış ve literatüre kazandırılmıştır.

MEFM yönteminin kesirli mertebeden türevler içeren kısmi diferansiyel denklem uygulamalarına da [48-50] kaynaklarından ulaşılabilir.

Benzer şekilde son yıllarda, modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodunun (2+ 1) boyutlu asimetrik Nizhnik-Novikov-Veselov denklemine [51], basitleştirilmiş MCH denklemi ile Getmanou denklemine [52], (3+1) boyutlu KZK denklemi ile JM denklemine [53], Ivancevic opsiyon fiyatlandırma modeline [54] ve Wu-Zhang sistem modeline [55] uygulamalarına yer verilmiştir.

Bu bölümde modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodunun (MEFM) işlem basamakları ayrıntılı olarak ifade edilmiştir.

Modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodunun genel uygulama prosedürü aşağıdaki adımlar ile özetlenebilir.

$$P(u\,,u_t\,,u_x\,,u_{xx}\,,u_{tx}\,,\ldots)=0, \tag{3.1}$$

Burada $u=u(x,t)$ bilinmeyen bir fonksiyondur, P ise $u(x,t)$ nin ve türevlerinin bir polinomudur.

Adım 1: Yürüyen dalga dönüşümü yardımı ile x ve t bağımsız değişkenleri ξ değişkeniyle ifade edilir. Verilen kısmi türevli diferansiyel denklemin içerdiği kısmi türevler bu dönüşüm ve zincir kuralı yardımıyla aşağıdaki formda elde edilir

$$u(x,t)=U(\xi),\xi=k(x-ct), \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=kU'(\xi),\frac{\partial u}{\partial t}=-cU'(\xi), \tag{3.3}$$

$\vdots$

Burada k dalga sayısını, c hareket eden dalganın hızını göstermektedir. Yürüyen dalga dönüşümü (3.2) yardımıyla (3.1) kısmi türevli diferansiyel denklem aşağıdaki formda doğrusal olmayan bir adi diferansiyel denkleme (NODE) dönüşür

$$NODE(U,U',U'',U''',\cdots)=0. \tag{3.4}$$

Burada NODE, U nun bir polinomudur ve U nun türevleri ξ 'e göre adi türevleri gösterir.

Adım 2: Denklem (3.4) için yürüyen dalga çözümlerinin aşağıdaki biçimde ifade edilebileceği varsayılır:

$$U(\xi) = \frac{\sum_{i=0}^{N} A_i\,[\exp(-\Omega(\xi))]^i}{\sum_{j=0}^{M} B_j\,[\exp(-\Omega(\xi))]^j} = \frac{A_0 + A_1 \exp\big(-\Omega(\xi)\big) + \cdots + A_N \exp\big(-N\Omega(\xi)\big)}{B_0 + B_1 \exp\big(-\Omega(\xi)\big) + \cdots + B_M \exp\big(-M\Omega(\xi)\big)}. \tag{3.5}$$

Burada A_i $(0 \leqslant i \leqslant N)$ ve B_j $(0 \leqslant j \leqslant M)$ $A_N \neq 0, B_M \neq 0, ve\ \Omega = \Omega(\xi)$ aşağıdaki adi diferansiyel denklemi sağlayan bir çözümdür:

$$\Omega' = \mu ex\,p(\Omega) + ex\,p(-\Omega) + \lambda. \tag{3.6}$$

Denklem (3.6) nın çözüm aileleri aşağıdaki analitik çözümlere karşılık gelmektedir.

1. $\text{çözüm } ailesi$: Eğer $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu > 0$

$$\Omega(\xi) = l\,n\left(\frac{-\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2\mu}\tanh\left(\frac{\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}}{2}(\xi + c_1)\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\right). \tag{3.7}$$

2. $\text{çözüm } ailesi$: $\mu \neq 0, \lambda^2 - 4\mu < 0$

$$\Omega(\xi) = ln\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2\mu} tan\left(\frac{\sqrt{-\lambda^2 + 4\mu}}{2}(\xi + c_1)\right) - \frac{\lambda}{2\mu}\right). \tag{3.8}$$

3. $\text{çözüm } ailesi$: $\mu = 0,\ \lambda \neq 0\ \ \lambda^2 - 4\mu > 0$

$$\Omega(\xi) = -ln\left(\frac{\lambda}{exp\big(\lambda(\xi + c_1)\big) - 1}\right). \tag{3.9}$$

4. $\text{çözüm } ailesi$: $\mu \neq 0, \lambda \neq 0\ ve\ \lambda^2 - 4\mu = 0$

$$\Omega(\xi) = ln\left(-\frac{2\lambda(\xi + c_1) + 4}{\lambda^2(\xi + c_1)}\right). \quad (3.10)$$

5. çözüm $ailesi$: $\mu = 0, \lambda = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu = 0$

$$\Omega(\xi) = l\,n(\xi + c_1). \quad (3.11)$$

$A_0, A_1, A_2, \dots\ A_N, B_0, B_1, B_2, \dots B_M\ , c_1$ daha sonra tanımlanacak sıfır olmayan sabitlerdir. Pozitif tamsayılar N ve M, denklemdeki en yüksek dereceli türevler ile en yüksek dereceli doğrusal olmayan terimler arasındaki denge ilkesi alınarak tanımlanabilir.

Adım 3: N ve M'nin farklı değerlerine göre çeşitli denklem biçimleri bulabiliriz. (3.5) denklemini ve türevlerini (3.4) denkleminde yerine yazarak, $exp(-\Omega(\xi))$'nin kuvvetlerini içeren bir polinom elde edebilir. $exp(-\Omega(\xi))$'nin aynı kuvvetteki tüm katsayılarını sıfıra eşitlersek, karşımıza cebirsel bir denklem sistemi çıkar. Bu sistemi Wolfram Mathematica yardımıyla çözdüğümüzde, $A_0, A_1, A_2, \dots\ A_N, B_0, B_1, B_2, \dots B_M\ , c_1, \lambda, \mu$ katsayılarının farklı değerleri elde edilir. Bu katsayıları, (3.7)-(3.11) ile ifade edilen çözüm ailelerini dikkate alarak denklem (3.5) te yerine yazılırsa ele alınan kısmi türevli diferansiyel denklemin farklı karakteristikteki birçok analitik çözümü elde edilebilir.

4. KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLER ÜZERİNDE BAZI UYGULAMALAR

4.1 Modifiye Edilmiş Burgers KdV Denklemi ve Çözümleri

Modifiye edilmiş Burgers-KdV denklemi, Burgers denklemi ve Korteweg-de Vries (KdV) denkleminin özelliklerini birleştiren doğrusal olmayan kısmi diferansiyel bir denklemdir. Doğrusal olmayan dalga yayılımı alanında ortaya çıkar ve matematiksel fiziğin çeşitli alanlarında çalışılmıştır.

Burgers denklemi, viskoz bir akışkanın bir boyuttaki davranışını tanımlayan iyi bilinen doğrusal olmayan kısmi diferansiyel bir denklemdir. Şok dalgaları ve türbülans gibi olaylara yol açan bir konvektif terim ve bir viskoz terim içerir.

Öte yandan Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, sığ sularda uzun dalgaların yayılmasını tanımlayan doğrusal olmayan dispersif bir dalga denklemidir. Dalga dinamiğinde önemli rol oynayan hem doğrusal olmayan hem de dispersiyonu dikkate alır.

Değiştirilmiş Burgers-KdV denklemi, sırasıyla Burgers ve KdV denklemlerinin advektif (konvektif) ve dispersif özelliklerini birleştirir. Bu denklem şu şekilde yazılabilir [56]:

$$u_t + \mathrm{p}u^2u_x + qu_{xx} - ru_{xxx} = 0, \tag{4.1}$$

burada p, q ve r sıfırdan farklı birer sabittir ve sırasıyla doğrusal olmayan ve dağıtıcı terimlerin göreli güçlerini belirtir.

Denklem (4.1) için $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ c sıfırdan farklı olmak üzere dalga dönüşümü ele alınırsa lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem, lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu',\ \frac{\partial u}{\partial x} = u',\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'',\ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u''',$$

eşitliklerinden yararlanılır. Böylece (4.1) kısmi diferansiyel denklemi

$$-cu' + \mathrm{p}u^2u' + qu'' - ru''' = 0, \tag{4.2}$$

formunda lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Denklem (4.2) nin ξ ye göre tekrar integrali alınıp integral sabiti sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki denklem elde edilir

$$-cu + \mathrm{p}u^3 + 3qu' - 3u'' = 0. \tag{4.3}$$

Denklem (4.3) ün en yüksek mertebeli türevini içeren terimi ile en yüksek kuvvete sahip lineer olmayan terimini dikkate alıp denge prensibi yardımıyla

$$-3N + 3M = -N + M - 2 \Rightarrow \; M = N - 1,$$

eşitliği elde edilir. Burada $N = 2$ ve $M = 1$ değerleri için eşitlik sağlanır. Böylece denklem (4.1) in çözümü dikkate alınarak

$$U = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega} + A_2 e^{-2\Omega}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega}} = \frac{\gamma}{\Psi}, \; A_2 \neq 0, \; B_1 \neq 0, \tag{4.4}$$

formunda elde edilir. Çözüm (4.4) ün birinci ve ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki formdadır

$$U' = \frac{\gamma'\Psi - \gamma\Psi'}{\Psi^2}, \tag{4.5}$$

$$U'' = \frac{\gamma''\Psi^3 - \Psi^2\gamma'\Psi' - (\Psi''\gamma + \Psi'\gamma')\Psi^2 + 2(\Psi\prime)^2\gamma\Psi}{\Psi^4}\,. \tag{4.6}$$

Denklem (4.3)'de (4.4), (4.5) ve (4.6) eşitlikleri yerine yazılırsa terimleri exp(–Ω (ξ)) nin çeşitli kuvvetlerini içeren bir polinom olarak elde edilir. Bu polinomun aynı kuvvete sahip exp(–Ω (ξ)) li terimleri sıfıra eşitlenir ise polinomun katsayılarını içeren lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Bu cebirsel denklem sistemi çözülerek gerekli katsayılar tespit edilir.

Bu katsayılar için elde edilen çözümlerden bir tanesi aşağıdaki gibidir:

$$A_1 = A_1, \mu = \mu, \lambda = \lambda, A_2 = A_2; B_1 = B_1; r = r; B_0 = -\frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu})B_1 + \frac{A_1 B_1}{A_2}$$

$$A_0 = \frac{1}{2}\left(\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right)A_1 - \left(\lambda\left(\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}\right) - 2\mu\right)A_2\right); p = \frac{6rB_1^2}{A_2^2};$$

$$q = 3r\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}; c = 2r(\lambda^2 - 4\mu). \tag{4.7}$$

Denklem (4.7) de belirtilen katsayılar ve Bölüm 3 te belirtilen çözüm aileleri dikkate alınır ise değiştirilmiş Burgers KdV denkleminin (4.1) çözümleri karakterize edilir.

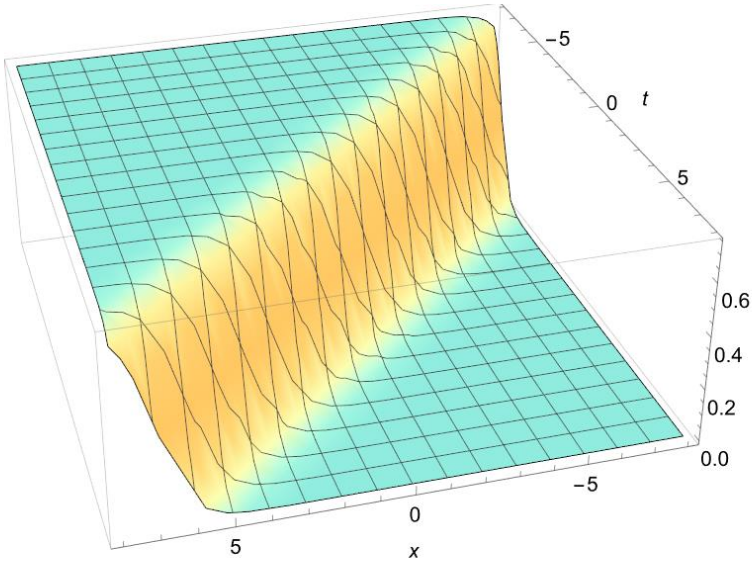
Durum 1

$\mu \neq 0,\ \lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere, (3.7) ile belirtilen çözüm ailesi ve (4.7) ile hesaplanan katsayılar (4.4) denkleminde yerine yazılır ise;

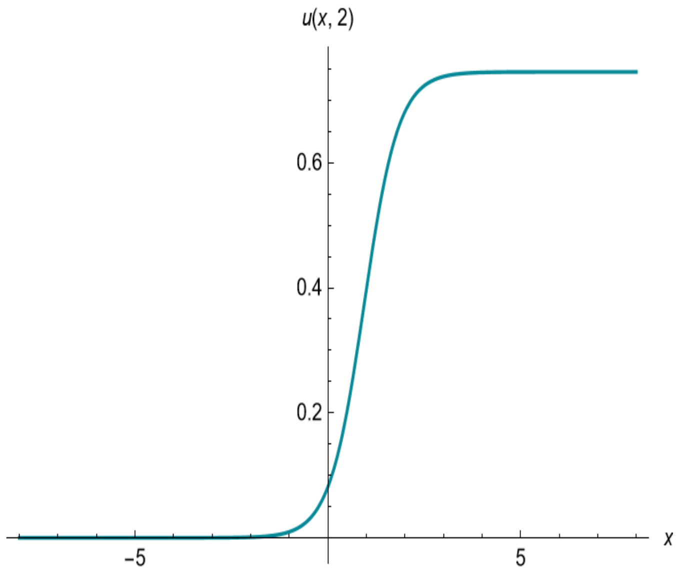
$$u_1(x,t) = \frac{\left(M+\lambda-\frac{4\mu}{\mathrm{f(x,t)}M+\lambda}\right)A_1+\left(-\lambda(M+\lambda)+2\mu\left(1+\frac{4\mu}{(\mathrm{f(x,t)}M+\lambda)^2}\right)\right)A_2}{\left(M+\lambda+\frac{4\mu}{\mathrm{f(x,t)}M+\lambda}-\frac{2A_1}{A_2}\right)B_1}, \tag{4.8}$$

çözümü elde edilir. Burada

$M = \sqrt{\lambda^2 - 4\mu}$ ve $f(x,t) = \mathrm{Tanh}(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 - 4\mu}(\mathrm{EE} + x - 2rt\lambda^2 + 8rt\mu))$ şeklindedir.

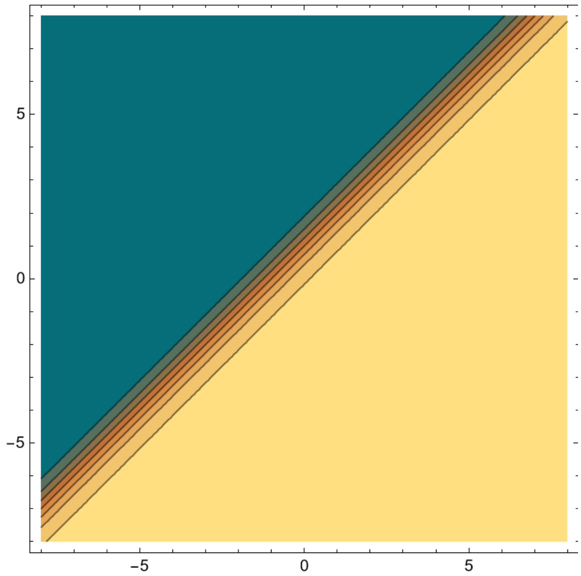


(a)



(b)

Şekil 4.1: Değiştirilmiş Burgers-KdV denklemi (4.1)’in (4.8) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = 2; \mu = 1; \lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1; \mathrm{EE} = 0.2}$, değerleri ile oluşturulan **(a)** 3-boyutlu yüzey ($\boldsymbol{-8 \leq t \leq 8}$) grafiği ve **(b)** 2-boyutlu ($\boldsymbol{t = 2}$) eğri grafiği.



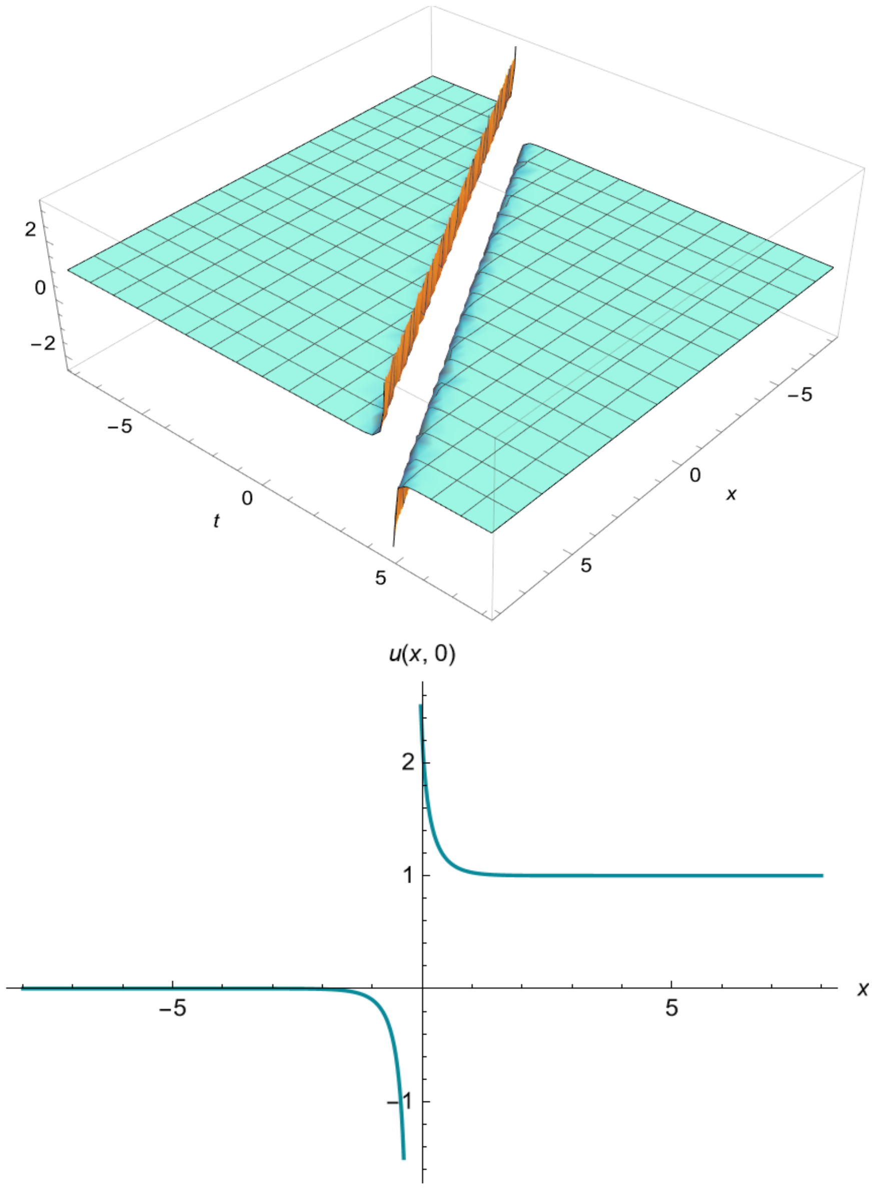
Şekil 4.2: Değiştirilmiş Burgers-KdV denklemi (4.1)'in (4.8) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = 2; \mu = 1; \lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1;}$ **EE** $\boldsymbol{= 0.2}$ değerleri ile oluşturulan kontur grafiği.

Durum 2

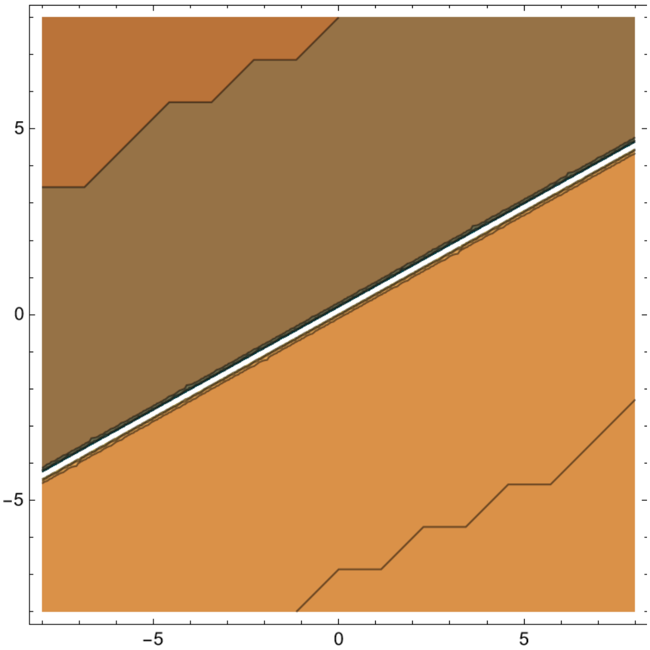
$\mu = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (3.9) ile belirtilen çözüm ailesi ve (4.7) ile hesaplanan katsayılar (4.4) denkleminde yerine yazılır ise;

$$u_2(x,t) = \frac{\left(\sqrt{\lambda^2} + \lambda \mathrm{Coth}\left(\frac{1}{2}\lambda(\mathrm{EE} + x - 2rt\lambda^2)\right)\right)A_2}{2B_1} \tag{4.9}$$

çözümü elde edilir.



Şekil 4.3: Değiştirilmiş Burgers-KdV denklemi (4.1)'in (4.9) çözümünün $\boldsymbol{\lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1; \mathrm{EE} = 0.2}$ ve $\boldsymbol{t = 0}$ değerleri ile oluşturulan **(a)** 3-boyutlu yüzey $(\boldsymbol{-8 \leq t \leq 8})$ grafiği ve **(b)** 2-boyutlu $(\boldsymbol{t = 0})$ eğri grafiği.



Şekil 4.4: Değiştirilmiş Burgers-KdV denklemi (4.1)'in (4.9) çözümünün $\boldsymbol{\lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1; \mathrm{EE} = 0.2}$ değerleri ile oluşturulan kontur grafiği.

4.2 Benjamin-Bono-Mahony Denklemi ve Çözümleri

Kdv denklemine alternatif bir model oluşturmak için 1972'de B. Benjamin, J. L. Bona ve J. J. Mahony tarafından bir çalışma yapılmıştır. Bu çalışma sonucunda KdV denklemi geliştirilerek Benjamin-Bona-Mahony (BBM) ya da bir diğer adıyla düzenli uzun dalga denklemi olarak isimlendirilen yeni bir denklem oluşturulmuştur. BBM denklemi, yayılma sırasında şekillerini ve hızlarını koruyan yerelleştirilmiş ve kararlı dalga çözümleri olan solitonların varlığını destekler. Bu solitonlar genellikle BBM solitonları olarak adlandırılır. Denklem ayrıca dalga kırılması, dalga etkileşimleri ve şok dalgalarının oluşumu gibi diğer ilginç dalga olaylarını da sergiler.

BBM denkleminin uygulamaları akışkanlar dinamiği, doğrusal olmayan optik ve kıyı mühendisliği gibi alanlarda bulunabilir. Dağınık ortamlarda dalga yayılımını incelemek ve anlamak için matematiksel bir çerçeve sağlar ve karmaşık dalga olaylarının anlaşılmasına katkıda bulunur [57].

Bu denklem;

$$u_t + au_x + 2uu_x - bu_{xxt} = 0, \tag{4.10}$$

formunda tanımlanır. Denklem (4.10) için $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ c sıfırdan farklı olmak üzere dalga dönüşümü ele alınırsa lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem, lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu', \ \frac{\partial u}{\partial x} = u', \ \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'', \ \ \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u''',$$

eşitliklerinden yararlanılır. Böylece (4.10) kısmi diferansiyel denklemi

$$-cu' + \mathrm{a}u' + 2uu' - bcu''' = 0, \tag{4.11}$$

formunda lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Denklem (4.11)'nin ξ ye göre tekrar integrali alınıp integral sabiti sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki denklem elde edilir

$$-cu + au + u^2 - bcu'' = 0. \tag{4.12}$$

Denklem (4.12)'nin en yüksek mertebeli türevini içeren terimi ile en yüksek kuvvete sahip lineer olmayan terimini dikkate alıp denge prensibi yardımıyla

$$-2N + 2M = -N + M - 2 \Rightarrow \ M = N - 2,$$

eşitliği elde edilir. Burada $N = 3$ ve $M = 1$ değerleri için eşitlik sağlanır. Böylece denklem (4.10)'un çözümü

$$U = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega} + A_2 e^{-2\Omega} + A_3 e^{-3\Omega}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega}} = \frac{\gamma}{\Psi}, \tag{4.13}$$

formunda elde edilir. Çözüm (4.13)'ün birinci ve ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki formdadır

$$U' = \frac{\gamma'\Psi - \gamma\Psi'}{\Psi^2}, \tag{4.14}$$

$$U'' = \frac{\gamma''\Psi^3 - \Psi^2\gamma'\Psi' - (\Psi''\gamma + \Psi'\gamma')\Psi^2 + 2(\Psi')^2\gamma\Psi}{\Psi^4}\,. \tag{4.15}$$

Denklem (4.12)’de (4.13), (4.14) ve (4.15) eşitlikleri yerine yazılırsa terimleri $exp(-\Omega(\xi))$ nin çeşitli kuvvetlerini içeren bir polinom elde edilir. Bu polinomun aynı kuvvete sahip $exp(-\Omega(\xi))$ li terimleri sıfıra eşitlenir ise polinomun katsayılarını içeren lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Bu cebirsel denklem sistemi çözülerek gerekli katsayılar tespit edilir.

Bu katsayılar için elde edilen çözümlerden bir tanesi aşağıdaki gibidir.

$$A_1 = A_1, A_2 = A_2, A_3 = A_3, a = a, \lambda = \lambda, B_1 = B_1, B_0 = \left(-\lambda + \frac{A_2}{A_3}\right)B_1,$$

$$A_0 = \frac{(A_2 - \lambda A_3)\big(A_1 + \lambda(-A_2 + \lambda A_3)\big)}{A_3}, b = \frac{A_3}{3(-4A_1 + 4\lambda A_2 - 3\lambda^2 A_3 + 2aB_1)}, \tag{4.16}$$

$$c = a - \frac{4A_1 - 4\lambda A_2 + 3\lambda^2 A_3}{2B_1}, \qquad \mu = \frac{5\lambda^2}{2} + \frac{3(A_1 - \lambda A_2)}{A_3},$$

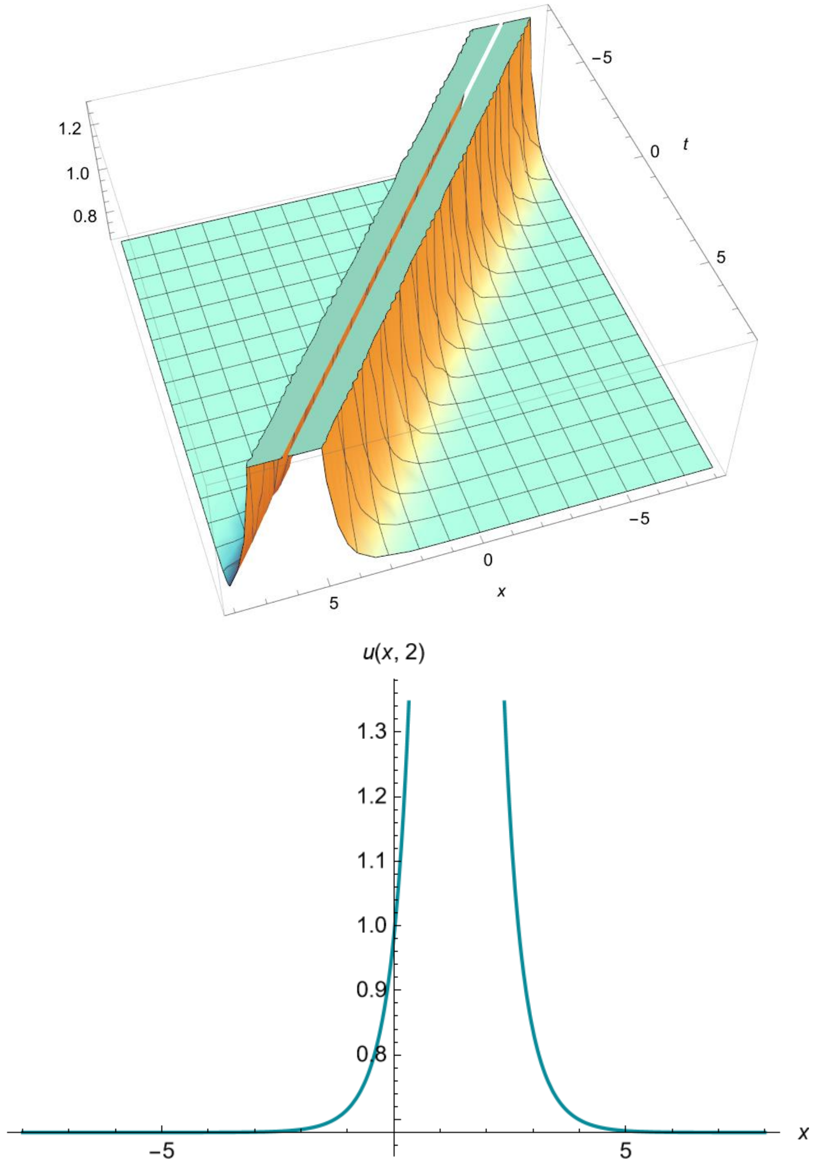
Denklem (4.16)’de belirtilen katsayılar ve Bölüm 3’te belirtilen çözüm aileleri dikkate alınır ise modifiye edilmiş Benjamin-Bona-Mahony denkleminin (4.10) çözümleri karakterize edilir.

Durum 1

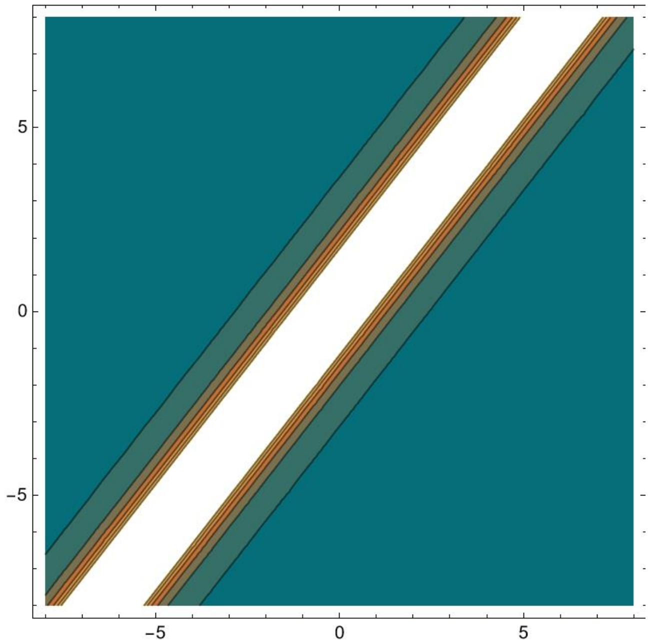
$\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere, (3.7) ile belirtilen çözüm ailesi ve (4.16) ile hesaplanan katsayılar (4.13) denkleminde yerine yazılır ise;

$$u_1(x,t) = \frac{A_1}{B_1} - \frac{\lambda A_2}{B_1} + \frac{A_3\lambda^2}{B_1} + \frac{4A_3K^2}{B_1\left(\lambda + \sqrt{-4K + \lambda^2}\,\mathrm{Tanh}\left(\frac{1}{2}\mathrm{f(x,t)}\sqrt{-4K + \lambda^2}\right)\right)^2}$$
$$- \frac{2A_3K\lambda}{B_1\left(\lambda + \sqrt{-4K + \lambda^2}\,\mathrm{Tanh}\left(\frac{1}{2}\mathrm{f(x,t)}\sqrt{-4K + \lambda^2}\right)\right)^2}. \tag{4.17}$$

Burada $K = \frac{5\lambda^2}{2} + \frac{3(A_1 - \lambda A_2)}{A_3}$ ve $f(x,t) = \mathrm{EE} + x - t(a - \frac{4A_1 - 4\lambda A_2 + 3\lambda^2 A_3}{2B_1})$ şeklinde tanımlanır.



Şekil 4.5: Benjamin-Bona-Mahony denklemi (4.10) ‘un (4.17) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = -1}$; $\boldsymbol{A_2 = 2}$; $\boldsymbol{A_3 = 3}$; $\boldsymbol{\lambda = 0.01}$; $\boldsymbol{B_1 = 3}$; $\boldsymbol{a = 0.1}$; $\mathbf{EE = 0.2}$ **(a)** 3-boyutlu yüzey $(\boldsymbol{-8 \le t \le 8})$ grafiği ve **(b)** 2-boyutlu ($\boldsymbol{t = 2}$) eğri grafiği



Şekil 4.6: Benjamin-Bona-Mahony denklemi (4.10) ‘un (4.17) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = -1}$; $\boldsymbol{A_2 = 2}$; $\boldsymbol{A_3 = 3}$; $\boldsymbol{\lambda = 0.01}$; $\boldsymbol{B_1 = 3}$; $\boldsymbol{a = 0.1}$; $\mathbf{EE = 0.2}$ değerleri ile oluşturulan kontur grafiği.

4.3 Birleştirilmiş KdV-mKdV Denklemi ve Çözümleri

Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi, matematiksel fizik alanında, özellikle solitonların ve doğrusal olmayan dalga olaylarının incelenmesinde ortaya çıkan doğrusal olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. İki iyi bilinen Korteweg-de Vries (KdV) denklemi ve değiştirilmiş Korteweg-de Vries (mKdV) denkleminin birleşiminden oluşmaktadır. Korteweg-de Vries denklemi, sığ su dalgalarının evrimini tanımlayan doğrusal olmayan dağılımlı bir dalga denklemidir. Genellikle çeşitli fiziksel sistemlerdeki uzun dalgaları modellemek için kullanılır. mKdV denklemi, KdV denkleminin daha yüksek dereceli dispersif terimler içeren ve dalga yayılımının daha doğru bir tanımını sağlayan bir modifikasyonudur. Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi zengin dinamikler sergiler ve yayılma sırasında şekillerini ve bütünlüklerini koruyan yerelleştirilmiş ve kararlı dalga çözümleri olan solitonların oluşumunu destekler. Bu solitonlar, denklemdeki baskın terimlere bağlı olarak genellikle KdV solitonları veya mKdV solitonları olarak adlandırılır. Tez kapsamında [56] nolu kaynakta tanınlanan ve aşağıdaki formda verilen birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi ele alınmıştır:

$$u_t + \mathrm{p}uu_x + \mathrm{q}u^2u_x + ru_{xxx} = 0. \tag{4.18}$$

Burada p, q ve r sıfırdan farklı birer sabittir.

Denklem (4.18) için $u = u(\xi)$, $\xi = x - ct$ c sıfırdan farklı olmak üzere dalga dönüşümü ele alınırsa lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem, lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme dönüştürülür. Burada

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -cu', \frac{\partial u}{\partial x} = u', \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = u'', \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = u''',$$

eşitliklerinden yararlanılır. Böylece (4.18) kısmı diferansiyel denklemi

$$-cu' + puu' + qu^2u' + ru''' = 0, \tag{4.19}$$

formunda lineer olmayan bir adi diferansiyel denkleme indirgenir. Denklem (4.19)'nin ξ ye göre tekrar integrali alınıp, integral sabiti sıfıra eşitlenir ise aşağıdaki denklem elde edilir

$$-6cu + 3pu^2 + 2qu^3 + 6ru'' = 0. \tag{4.20}$$

Denklem (4.20)'nin en yüksek mertebeli türevini içeren terimi ile en yüksek kuvvete sahip lineer olmayan terimini dikkate alıp denge prensibi yardımıyla

$$-3N + 3M = -N + M - 2 \Rightarrow M = N - 1,$$

eşitliği elde edilir. Burada $N = 2$ ve $M = 1$ değerleri için eşitlik sağlanır. Böylece denklem (4.18)'in çözümü

$$U = \frac{A_0 + A_1 e^{-\Omega} + A_2 e^{-2\Omega} + A_3 e^{-3\Omega}}{B_0 + B_1 e^{-\Omega}} = \frac{\gamma}{\Psi}, \tag{4.21}$$

formunda elde edilir. Çözüm (4.21)'in birinci ve ikinci mertebeden türevleri aşağıdaki formdadır

$$U' = \frac{\gamma'\Psi - \gamma\Psi'}{\Psi^2}, \tag{4.22}$$

$$U'' = \frac{\gamma''\Psi^3 - \Psi^2\gamma'\Psi' - (\Psi''\gamma + \Psi'\gamma')\Psi^2 + 2(\Psi')^2\gamma\Psi}{\Psi^4}. \tag{4.23}$$

Denklem (4.20)'de (4.21), (4.22) ve (4.23) eşitlikleri yerine yazılırsa terimleri $exp(-\Omega(\xi))$ nin çeşitli kuvvetlerini içeren bir polinom elde edilir. Bu polinomun aynı kuvvete sahip $exp(-\Omega(\xi))$ li terimleri sıfıra eşitlenir ise polinomun katsayılarını içeren lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemi oluşturulur. Bu cebirsel denklem sistemi çözülerek gerekli katsayılar tespit edilir.

Bu katsayılar için elde edilen çözümlerden bir tanesi aşağıdaki gibidir.

$$A_1 = A_1, A_2 = A_2, B_1 = B_1, \mu = \mu, \lambda = \lambda, r = r, A_0 = \frac{1}{6}\left(-\lambda A_1 + \frac{2A_1^2}{A_2} + 2\mu A_2\right),$$
$$B_0 = \frac{(-2A_1^2 + \lambda A_1 A_2 + 4\mu A_2^2)B_1}{6A_2(-A_1 + \lambda A_2)}, q = -\frac{6rB_1^2}{A_2^2}, \tag{4.24}$$
$$p = -\frac{2r(4A_1^2 - 8\lambda A_1 A_2 + (3\lambda^2 + 4\mu)A_2^2)B_1}{A_2^2(-A_1 + \lambda A_2)}, c = r\left(\lambda^2 + 4\mu + \frac{2A_1(A_1 - 2\lambda A_2)}{A_2^2}\right).$$

Denklem (4.24)'de belirtilen katsayılar ve Bölüm 3'te belirtilen çözüm aileleri dikkate alınır ise birleştirilmiş KdV-mKdV Denklemi (4.18) çözümleri karakterize edilir.

Durum 1

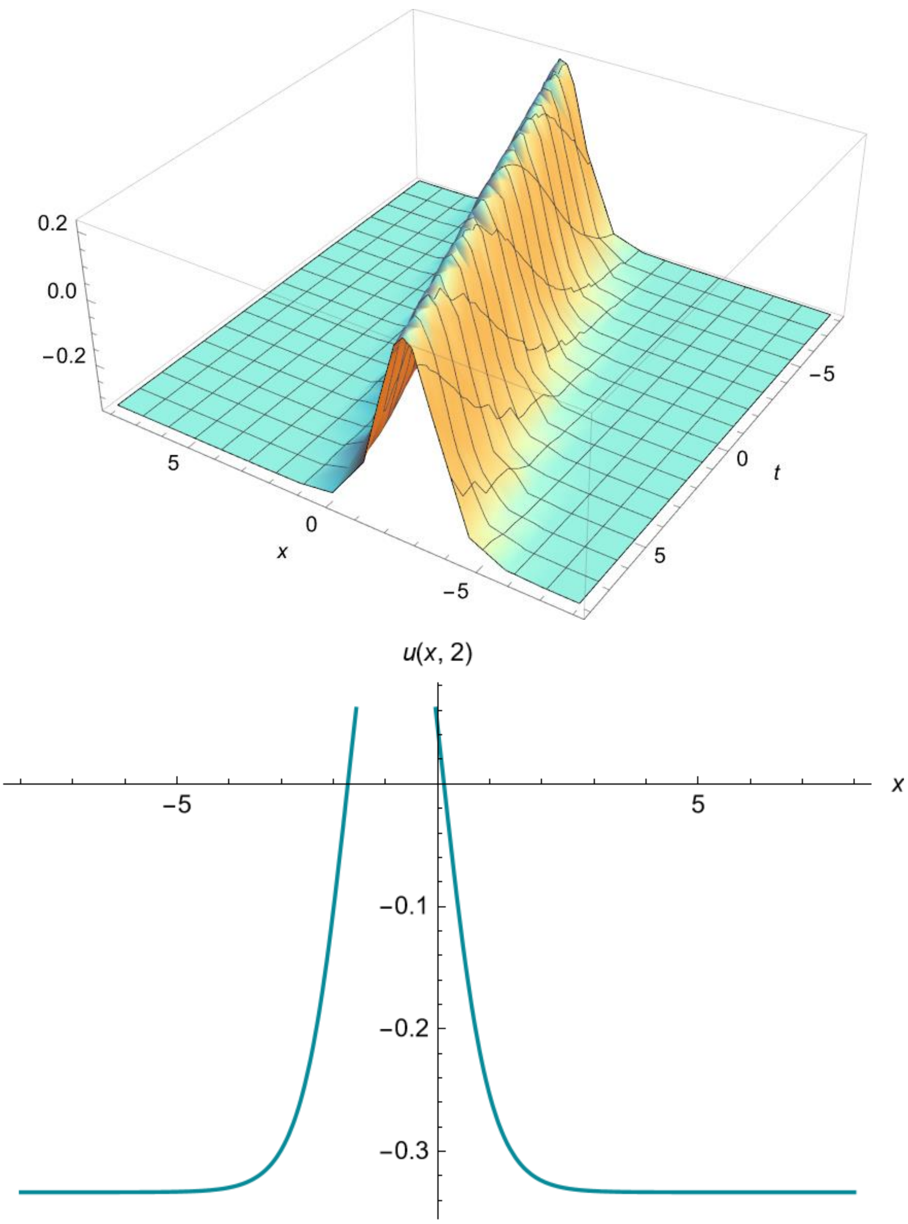
$\mu \neq 0$, $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere, (3.7) ile belirtilen çözüm ailesi ve (4.24) ile hesaplanan katsayılar (4.21) denkleminde yerine yazılır ise;

$$u_1(x,t)=\frac{2\left(\frac{A_1^2}{A_2}+A_2\left(\mu+\frac{12\mu^2}{\left(-\lambda-M\mathrm{Tanh}\left(f(x,t)\right)\right)^2}\right)\right)}{B_1\left(\frac{-2A_1^2+\lambda A_1A_2+4\mu A_2^2}{A_2(-A_1+\lambda A_2)}+\frac{12\mu}{-\lambda-M\mathrm{Tanh}\left(f(x,t)\right)}\right)}+\frac{2(3A_1(-\frac{\lambda}{6}+\frac{2\mu}{-\lambda-M\mathrm{Tanh}(f(x,t))}))}{B_1(\frac{-2A_1^2+\lambda A_1A_2+4\mu A_2^2}{A_2(-A_1+\lambda A_2)}+\frac{12\mu}{-\lambda-M\mathrm{Tanh}(f(x,t))})}. \tag{4.25}$$

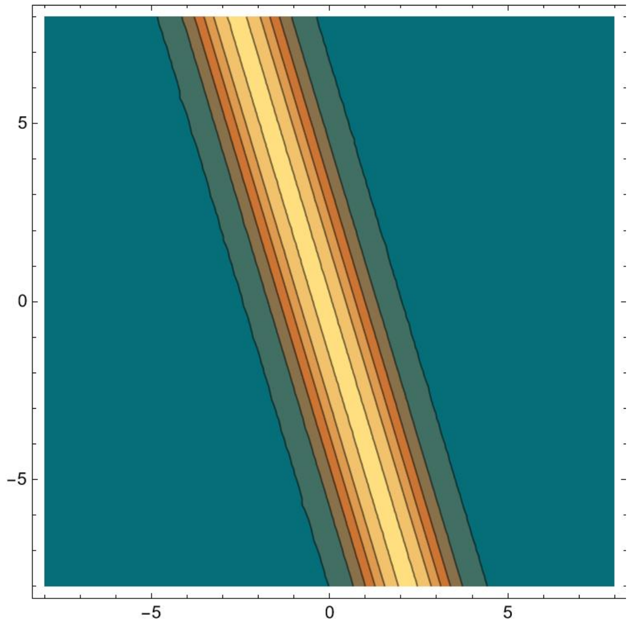
Burada

$f(x,t)=\left(\frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2-4\mu}\left(\mathrm{EE}+x-rt\left(\lambda^2+4\mu+\frac{2A_1(A_1-2\lambda A_2)}{A_2^2}\right)\right)\right)$ ve $M=\sqrt{\lambda^2-4\mu}$

formunda tanımlanmaktadır.



Şekil 4.7: Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi (4.18)’in (4.19) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = 2; \mu = 1; \lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1;} \mathbf{EE} \boldsymbol{= 0.2}$ **(a)** 3-boyutlu yüzey $(\boldsymbol{-8 \leq t \leq 8})$ grafiği ve **(b)** 2-boyutlu $(\boldsymbol{t = 2})$ eğri grafiği.



Şekil 4.8: Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi (4.18)'in (4.19) çözümünün $\boldsymbol{A_1 = 2; \mu = 1; \lambda = 3; A_2 = 1; B_1 = 3; r = 0.1; \mathrm{EE} = 0.2}$ değerleri ile oluşturulan kontur grafiği.

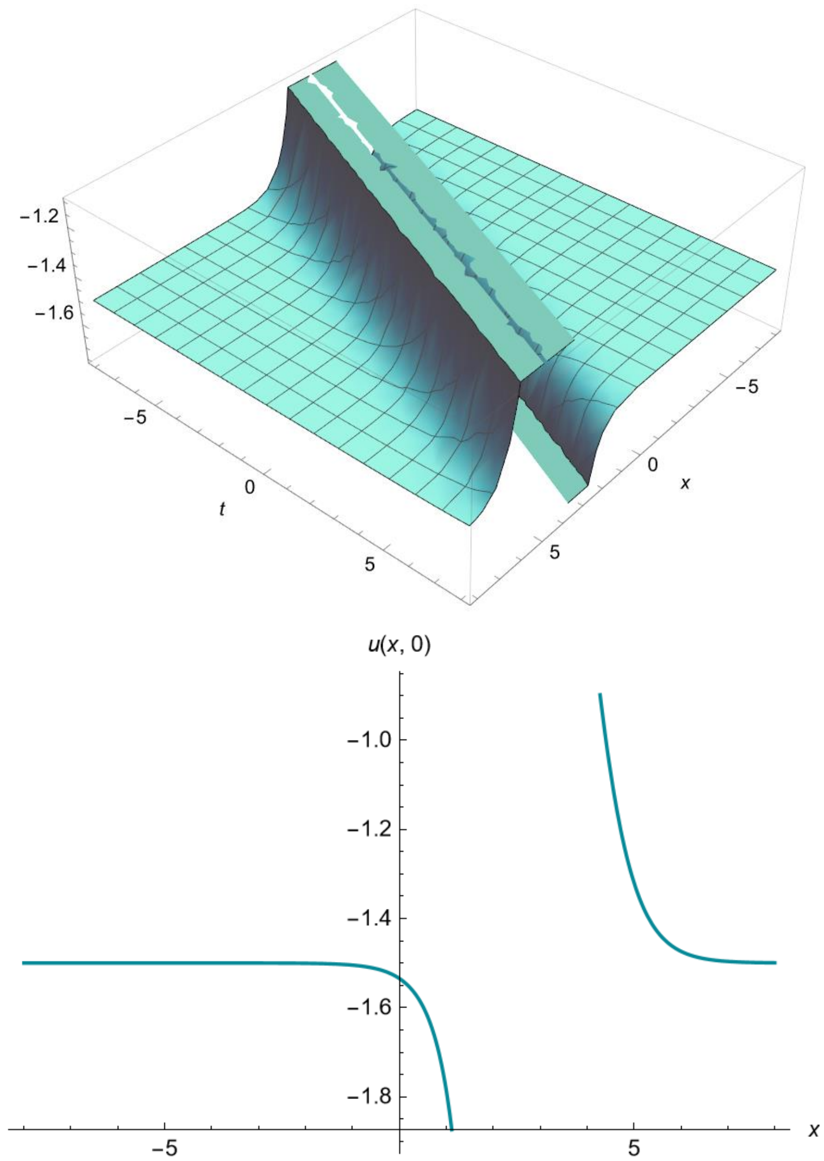
Durum 2

$\mu = 0$ ve $\lambda^2 - 4\mu > 0$ olmak üzere (3.9) ile belirtilen 3. çözüm ailesi ve (4.24) ile hesaplanan katsayılar (4.21) denkleminde yerine yazılır ise;

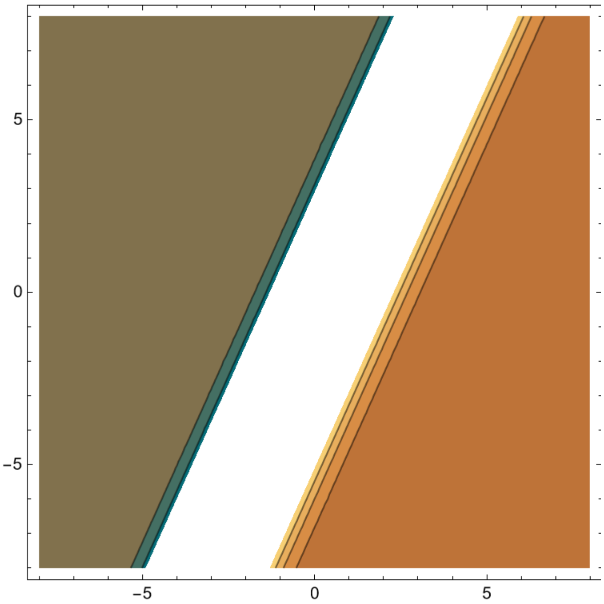
$$u_2(x,t) = \frac{A_1 - \lambda A_2}{\left(1 + \dfrac{6f(x,t)A_2^2}{-\dfrac{2(-1+f(x,t))^2 A_1^2}{\lambda^2} + \dfrac{(-7+f(x,t))(-1+f(x,t))A_1A_2}{\lambda} - 6A_2^2}\right)B_1}, \tag{4.26}$$

çözümü elde edilir.

Burada $f(x,t) = e^{\lambda\left(\mathrm{EE} + x - rt\left(\lambda^2 + \frac{2A_1(A_1 - 2\lambda A_2)}{A_2^2}\right)\right)}$ formundadır.



Şekil 4.9: Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi (4.18)'in (4.26) çözümünün $\boldsymbol{\lambda = 2; A_1 = 1; A_2 = 2; B_1 = 2; r = 0.9; EE = 0.2}$ **(a)** 3-boyutlu yüzey $(\boldsymbol{-8 \leq t \leq 8})$ grafiği ve **(b)** 2-boyutlu $(\boldsymbol{t = 5})$ eğri grafiği



Şekil 4.10: Birleştirilmiş KdV-mKdV denklemi (4.18)'in (4.26) çözümünün $\boldsymbol{\lambda = 2; A_1 = 1; A_2 = 2; B_1 = 2; r = 0.9;}$ $\mathbf{EE = 0.2}$ değerleri ile oluşturulan kontur grafiği.

5. SONUÇLAR

Kısmi diferansiyel denklemler, doğa olaylarını, fiziksel süreçleri, mühendislik problemlerini ve diğer birçok fenomeni matematiksel olarak modellemek için önemli bir araçtır. Örneğin, fizikte elektrik, akışkanlar mekaniği, ısı transferi, kuantum mekaniği gibi birçok alanın temel denklemleri kısmi diferansiyel denklemler şeklindedir. Mühendislikte, bir köprü yapısının dayanıklılığını analiz etmek için, kısmi diferansiyel denklemlerle birlikte uygun sınır koşulları kullanılarak yapı üzerindeki kuvvetlerin ve gerilmelerin dağılımı hesaplanabilir. Biyolojide, biyofilm oluşumu ve yayılması, hücre migrasyonu, doku mühendisliği, kanser hücre yayılımı gibi biyolojik süreçler de kısmi diferansiyel denklemlerle modellenebilir. Özellikle difüzyon, göç, büyüme ve ölüm gibi faktörlerin etkileşimlerini dikkate alan kısmi diferansiyel denklemler, bu süreçlerin matematiksel olarak açıklanmasına yardımcı olur. Ayrıca, elektrofizyoloji alanında sinir hücrelerinin elektriksel aktivitelerinin modellenmesinde de kısmi diferansiyel denklemler kullanılır. Örneğin, Hodgkin-Huxley modeli sinir hücrelerinin aksiyon potansiyellerini tanımlayan bir kısmi diferansiyel denklem sistemidir.

Dalga denklemleri, kısmi diferansiyel denklemler alanında büyük öneme sahip olan bir alt dalıdır. Bu denklemler, dalgaların davranışını ve yayılımını matematiksel olarak modellemek için kullanılır. Kısmi diferansiyel denklemler, zaman ve uzay değişkenlerine bağlı olarak dalgaların hareketini açıklar ve bu nedenle dalga fenomenlerinin analizinde yaygın olarak kullanılır. Dalga denklemleri, birçok farklı alanda uygulama bulur. Fizikte, akustik dalgalar, elektromanyetik dalgalar, mekanik dalgalar ve diğer dalgaların matematiksel analizi dalga denklemleriyle gerçekleştirilir. Örneğin, ses dalgalarının yayılmasını modellemek için dalga denklemleri kullanılır. Bu denklemler, ses dalgalarının hızını, frekansını, yayılma yönünü ve enerji dağılımını hesaplamak için kullanılan temel araçlardır. Mühendislik alanında dalga denklemleri, yapısal analiz, titreşim analizi, akustik tasarım ve iletişim sistemleri gibi birçok alanda önemlidir. Örneğin, yapısal analizde, bina veya köprü gibi yapıların titreşim davranışı dalga denklemleri kullanılarak modellenebilir. Bu modeller, yapısal sağlamlığın değerlendirilmesi, titreşim azaltma stratejilerinin belirlenmesi ve yapısal tasarımın optimize edilmesi için kullanılır. Hidrodinamikte, dalga denklemleri okyanus dalgalarının hareketini, su dalgalarının yayılmasını ve gelgit olaylarını modellemek için kullanılır. Bunun yanı sıra manyetik dalgaların, elektromanyetik dalgaların ve diğer elektromanyetik radyasyonun yayılımını anlamak için de dalga denklemleri kullanılır.

Matematiksel modellemede kısmi diferansiyel denklemlerin kullanılması ne kadar önemli ise bu modellerin çözümlerinin araştırılması, bu sayede sistemin davranışının anlaşılması ve öngörülebilmesi de bir o kadar önemli bir husustur. Bu çözümler, gerçek dünya problemlerinin analizinde ve tahmininde kullanılır. Bu sebeple literatürde kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için birçok analitik ve nümerik yöntem yer almaktadır.

Bu tez kapsamında literatürde mevcut olan modifiye edilmiş üstel açılım fonksiyon metodu ele alınmış ve detaylı olarak incelenmiştir. Yöntemin etkinliğini göstermek amacıyla modifiye edilmiş Burgers KdV, Benjamin-Bono-Mahony ve modifiye edilmiş Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin yeni analitik çözümleri elde edilmiş ve iki, üç boyutlu grafikleri ile kontur grafiği çizilerek görselleştirilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] T. Archibald, C. Fraser, I. Grattan-Guinness, “The history of differential equations”, 1670—1950, Oberwolfach Rep. 1, no. 4, pp. 2729–2794.

[2] M. Çağlıyan ve O.Çelebi, “Kısmi diferansiyel denklemler”, Dora Yayıncılık, 2021.

[3] D. Bleecker and G. Csordas, “Basic Partial Differential Equations”, Chapman and Hall, New York, (1995).

[4] S.J. Farlow, “Partial Differential Equations for Scientists and Engineers”, Dover, New York, (1993).

[5] F. John, “Partial Differential Equations”, Springer-Verlag, New York, (1982).

[6] L. Lam, “Nonlinear Physics for Beginners”, World Scientific, Singapore, (1998)

[7] J. D. Logan, “An Introduction to Nonlinear Partial Differential Equations”, John Wiley, New York, (1994).

[8] A. M. Wazwaz, “Partial Differential Equations: Methods and Applications”, Balkema, Leiden, (2002).

[9] W. Malfliet, “Solitary wave solutions of nonlinear wave equations”, American Journal of Physics, 60(7), 650–654, 1992.

[10] E. Fan, “Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equations”, Physics Letters A, 277(4-5), 212–218, 2000.

[11] J. H. He, X. H. Wu, “Exp-function method for nonlinear wave equations”, Chaos, Solitons & Fractals, 30(3), 700-708, 2006.

[12] M. A. Akbar, N. H. M. Ali, “Exp-function method for Duffing equation and new solutions of (2+ 1) dimensional dispersive long wave equations”. Progress in Applied Mathematics, 1(2), 30-42, 2011

[13] A. Bekir, A. Boz, “Exact solutions for nonlinear evolution equations using Exp-function method”. Physics Letters A, 372(10), 1619-1625, 2008.

[14] H. M. Baskonus, H Bulut, “Analytical studies on the (1+1)-dimensional nonlinear dispersive modified Benjamin–Bona–Mahony equation defined by seismic sea waves”, Waves Random Complex Media, 25 576–86, 2015.

[15] R. Hirota, “Exact Solution of the Korteweg—de Vries equation for multiple Collisions of solitons”, Phys. Rev. Lett., 27(18), 1192-1194, 1971.

[16] V. B. Matveev. and M. A. Salle, “Darboux Transformations and solitons, in: Series in Nonlinear Dynamics”, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1991.

[17] M. J. Ablowitz, and H. Segur, 1981. “Solitons and the Inverse Scattering Transform”, SIAM, Philadelphia, 425 p.

[18] M.J. Ablowitz, and P.A. Clarkson, 1991. “Solitons, Non-linear Evolution Equations and Inverse Scattering Transform”, Cambridge University Press, Cambridge, 516 p.

[19] A. V. Porubov, and M. G. Velarde, 1999. “Exact periodic solutions of the complex Ginzburg-Landau equation”, J. Math. Phys. 40(2), 884–896.

[20] E. A. Wakil, E. M. Abulwafa, and M. A. Abdou, 2010. “Extended Weierstrass transformation method for nonlinear evolution equations”, Nonlinear Sci. Lett. A: Math. Phys. Mech. 1(3), 253–262.

[21] Z. Feng, 2002. “The first integral method to study the Burgers-KdV equation”, Journal of Physics A: Mathematical and General, 35(2): 343-349.

[22] Y. Zhaou, M. Wang, and Y. Wang, 2003. “Periodic wave solutions to a coupled KdV equations with variable coefficients”, Physics Letters A, 308, 31–36

[23] M. Wang, X. Li, and J. Zhang, 2008. “The G'/G -expansion method and travelling wave solutions of nonlinear evolution equations in mathematical physic”, Phys. Lett. A, 372(4), 417–423.

[24] G. Ebadi, and A. Biswas, 2011. “The method and topological soliton solution of the K(m, n) equation”, Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 16(6), 2377–2382.

[25] E. N. Aksan, H. Bulut, M. Kayhan, “Some Wave simulation properties of the (2+1) dimensional breaking soliton equation”. ITM Web Of Conferences, 13, 01014, (2017).

[26] G. Yel, H. M. Baskonus, H. Bulut, “Novel archetypes of new coupled Konno-Oono equation by using sine-Gordon expansion method”. Optical and Quantum Electronics, 49(9), 285, (2017).

[27] Q. Chen, H. M. Baskonus, W. Gao, E. Ilhan, “Soliton theory and modulation instability analysis: The Ivancevic option pricing model in economy”. Alexandria Engineering Journal, 61(10), 7843-7851, (2022).

[28] J. Lee, R. Sakthivel. and L.Wazzan, 2010. “Exact traveling wave solutions of a higher-dimensional nonlinear evolution equation”, Modern Physics Letters B, 24(10), 1011–1021.

[29] N. A. Kudryashov, 2012. “One method for finding exact solutions of nonlineardifferential equations”, Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 17, 2248-2253.

[30] F. Özpınar, H. M. Baskonus, H. Bulut. “On the Complex and Hyperbolic Structures for the (2 +1)-Dimensional Boussinesq Water Equation. Entropy”. 2015; 17(12):8267-8277.

[31] A. Mısır, “Teori Teknik ve Uygulamalı Diferansiyel Denklemler”, Gazi Kitabevi, 2016.

[32] M. Rasulov, B. Sinsoysal, “Diferansiyel Denklemler Teorisine Giriş”, Çağlayan Kitabevi, 2014.

[33] A. N. Dernek, “Kısmi Türevli Denklemler ve Çözümlü Problemler”, Nobel Yayınevi, 2014.

[34] H. O. Roshid and Md. A. Rahman, “The $\exp(-\Phi(\eta))$- expansion method with application in the (1+1)- dimensional classical Boussinesq equations”, Results in Physics, 4, 150–155, 2014.

[35] M. G. Hafez, Md. Nur Alam and M. Ali Akbar, “Application of the exp (-Omega(\eta))-expansion Method to Find Exact Solutions for the Solitary Wave Equation in an Unmagnatized Dusty Plasma”, World Applied Sciences Journal 32 (10): 2150-2155, 2014

[36] A. E. Abdelrahman, Emad H. M. Zahran, Mostafa M. A. Khater, “The $\exp(-\phi(\xi))$-Expansion Method and Its Application for Solving Nonlinear Evolution Equations Mahmoud”, International Journal of Modern Nonlinear Theory and Application, 4, 37-47, 2015.

[37] H. M. Baskonus, H. Bulut, and A. Atangana, (2016). “On the complex and hyperbolic structures of the longitudinal wave equation in a magneto-electro-elastic circular rod. Smart Materials and Structures”, 25(3), 035022.

[38] Z. F. Koçak, H. Bulut, D. A. Koc, and H. M. Baskonus, (2016). “Prototype traveling wave solutions of new coupled Konno-Oono equation”. Optik, 127(22), 10786-10794.

[39] H. Bulut, and H. M. Baskonus, (2016). “New complex hyperbolic function solutions for the (2+ 1)-dimensional dispersive long water–wave system”. Mathematical and Computational Applications, 21(2), 6.

[40] H. M. Baskonus, D. A. Koç, and H. Bulut, (2016). “Dark and new travelling wave solutions to the nonlinear evolution equation”. Optik, 127(19), 8043-8055.

[41] S. Duran, M. Askin, and T. A. Sulaiman, (2017). “New soliton properties to the ill-posed Boussinesq equation arising in nonlinear physical science”. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 7(3), 240-247.

[42] S. T. Demiray, and H. Bulut, (2017). “Analytical solutions of Phi-four equation”. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 7(3), 275-280.

[43] C. Cattani, T. A. Sulaiman, H. M. Baskonus, and H. Bulut, (2018). “Solitons in an inhomogeneous Murnaghan’s rod”. The European Physical Journal Plus, 133, 1-11.

[44] E. Celik, H. Bulut, and H. M. Baskonus, (2018). “Novel features of the nonlinear model arising in nano-ionic currents throughout microtubules”. Indian Journal of Physics, 92, 1137-1143.

[45] T. A. Sulaiman, T. Aktürk, H. Bulut, and H. M. Baskonus, (2018). “Investigation of various soliton solutions to the Heisenberg ferromagnetic spin chain equation”. Journal of Electromagnetic Waves and Applications, 32(9), 1093-1105.

[46] A. Yokus, H. M. Baskonus, T. A. Sulaiman, and H. Bulut, (2018). “Numerical simulation and solutions of the two-component second order KdV evolutionary system”. Numerical Methods for Partial Differential Equations, 34(1), 211-227.

[47] A. Ciancio, H. M. Baskonus, T. A. Sulaiman, and H. Bulut, (2018). “New structural dynamics of isolated waves via the coupled nonlinear Maccari’s system with complex structure”. Indian Journal of Physics, 92, 1281-1290.

[48] S. T. Demiray, (2020). “New soliton solutions of optical pulse envelope E (Z, τ) with Beta Time Derivative”. Optik, 223, 165453.

[49] S. T. Demiray, and U. Bayrakci, (2021). “Soliton solutions for space-time fractional Heisenberg ferromagnetic spin chain equation by generalized Kudryashov method and modified exp (-Ω (η))-expansion function method”. Revista mexicana de física, 67(3), 393-402.

[50] H. Yépez-Martínez, H. Rezazadeh, M. Inc, and A. Akinlar, M. (2021). “New solutions to the fractional perturbed Chen–Lee–Liu equation with a new local fractional derivative”. Waves in Random and Complex Media, 1-36.

[51] H. M. Baskonus, (2021). “Dark and trigonometric soliton solutions in asymmetrical Nizhnik-Novikov-Veselov equation with (2+ 1)-dimensional”. An International Journal of Optimization and Control: Theories & Applications (IJOCTA), 11(1), 92-99.

[52] Ş. T. Demiray, and S. Kastal, (2021). “The Modified Exp (-ϑ (σ))-Expansion Function Method for Exact Solutions of the Simplified MCH Equation and the Getmanou Equation”. Adıyaman University Journal of Science, 11(2), 276-289.

[53] Ş. T. Demiray, and S. Kastal, (2021). “MEFM For Exact Solutions Of The (3+ 1) Dimensional KZK Equation and (3+1) Dimensional JM Equation”. Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 21(1), 97-105.

[54] Q. Chen, H. M. Baskonus, W. Gao, and E. Ilhan, (2022). “Soliton theory and modulation instability analysis: The Ivancevic option pricing model in economy”. Alexandria Engineering Journal, 61(10), 7843-7851.

[55] T. Yazgan, E. Ilhan, E. Çelik, and H. Bulut, (2022). “On the new hyperbolic wave solutions to Wu-Zhang system models. Optical and Quantum Electronics”, 54(5), 298.

[56] A. Bekir, (2009). “On traveling wave solutions to combined KdV–mKdV equation and modified Burgers–KdV equation”. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 14(4), 1038-1042.

[57] B. Benjamin, J. Bona, L. Mahony “Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems”, Philosophical Transactions Society London Series A, 272, 47-78, 1972.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Seda KAÇAR

Doğum tarihi ve yeri : 12.12.1991 Seyhan

e-posta : sedakcarr@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik A.B.D	2023
Lisans	Aksaray Üniversitesi/Matematik	2014
Lise	Seyhan 5 Ocak Anadolu Lisesi	2009

Yayın Listesi