

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞININ
KESİRLİ OPTİMAL KONTROLÜ

MİNE YURTOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Derya AVCI (Tez Danışmanı)
Prof. Dr. Fatma AYAZ
Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU

BALIKESİR, HAZİRAN – 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımda hazırlanan “Çocukluk Çağında Pnömoni Hastalığının Kesirli Optimal Kontrolü” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

MİNE YURTOĞLU



Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından (2023/043) nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

**ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞININ KESİRLİ OPTİMAL
KONTROLÜ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MİNE YURTOĞLU**

**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. DERYA AVCI)

BALIKESİR, HAZİRAN - 2023

Pnömoni, virüs veya bakteri gibi patojenlerin sebep olduğu bulaşıcı bir akciğer iltihabıdır. İnsanlık tarihinde en fazla ölüme sebep olan hastalıkların başında gelir. Ayrıca, hastalığa yakalanan bireylerin çoğu 0-5 yaş arası çocuklar olduğundan, bunun ülkeler ve aileler üzerindeki etkisi göz ardı edilemez.

Özellikle son yıllarda klinik çalışmaları tamamlayıcı nitelikte olan matematiksel epidemiyoloji oldukça geniş bir araştırma alanına ve ilgiye sahip olmuştur. Tezin ilk amacı çocuklardan oluşan bir nüfustaki pnömoni yayılımının dinamiklerini, hastalığa karşı güçlü bir bağışıklık yaratan anne sütüyle beslenme durumlarını da dikkate alarak matematiksel bir model ile açıklamaktır. Birçok hastalığın çapraz geçişli davranışları, tamsayı dereceli türevleri ve singüler çekirdekli kesirli türevleri modellemek için yetersiz kılabilir. Bu nedenle, Atangana-Baleanu kesirli türevi, singüler olmayan Mittag-Leffler çekirdeği sayesinde, hastalığın yayılmasının başlangıcında ve sonunda hastalığın evrimi hakkında daha iyi içgörü sağlar. Bundan hareketle optimal kontrol probleminin üzerine inşa edildiği model Atangana-Baleanu türevi ile donatılmıştır. Bu tezin temel amacı, aşılama, koruyucu önlem, tarama ve tedavi gibi dört kontrol stratejisinin hastalığın salgınını önlemedeki etkilerini tartışmaktır. Hem taşıyıcı ve enfekte olan çocukların oranını hem de kontrol önlemlerinin maliyetlerini en aza indirmek amaçlanmaktadır. Kontrol müdahaleleri eklenen modelin analizi, kararlılığı ve sayısal çözümleri sunulmaktadır.

ANAHTAR KELİMELEER: Pnömoni modeli, Atangana-Baleanu kesirli türevi, optimal kontrol, singüler olmayan çekirdek, kararlılık analizi

Bilim Kod / Kodları : 20406

Sayfa Sayısı : 77

ABSTRACT

**FRACTIONAL OPTIMAL CONTROL OF CHILDHOOD PNEUMONIA DISEASE
MSC THESIS
MINE YURTOGLU
BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS**

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. DERYA AVCI)

BALIKESİR, JUNE - 2023

Pneumonia is a infectious lung inflammation caused by pathogens such as viruses or bacteria. It is one of the diseases that cause the most deaths in human history. Moreover, the impact of this on countries and households cannot be underestimated, as most individuals afflicted with the disease are children aged 0-5.

Especially in recent years, mathematical epidemiology, which is complementary to clinical studies, has had a wide research area and interest. The first aim of the thesis is to explain the dynamics of the spread of pneumonia in a population of children with a mathematical model, considering the state of breastfeeding, which creates a strong immunity against the disease. The crossover behavior of many diseases may render integer degree derivatives and fractional derivatives with singular kernels inadequate for modelling. Therefore, the Atangana-Baleanu fractional derivative provides better insight into disease evolution at the beginning and end of disease spread, thanks to the non-singular Mittag-Leffler kernel. Based on this, the model on which the optimal control problem is built is equipped with the Atangana-Baleanu derivative. The main purpose of this thesis is to discuss the effects of four control strategies such as preventive measures, vaccination, screening and treatment in preventing the epidemic of the disease. It is aimed to minimize both the proportion of carriers and infected children and the costs of control measures. Analysis, stability and numerical solutions of the model with control interventions are presented.

Science Code / Codes : 20406

Page Number : 77

KEYWORDS: Pneumonia model, Atangana-Baleanu fractional derivative, optimal control, non-singular kernel, stability analysis

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ	iv
TABLO LİSTESİ	v
SEMBOL LİSTESİ	vi
KISALTMALAR LİSTESİ	vii
ÖNSÖZ	viii
1. GİRİŞ	1
2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR	8
2.1 Bulaşıcı Hastalıkların Matematiksel Modellemesi.....	8
2.2 Kesirli Analize İlişkin Ön Bilgiler ve Temel Tanımlar	15
2.2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar	17
2.2.2 Kesirli Operatörler	19
2.3 Optimal Kontrole İlişkin Temel Tanım ve Teoremler.....	24
3. ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞI DİNAMİKLERİNİN MODELLENMESİ VE SİSTEM ANALİZİ	28
3.1 Model Formülasyonu.....	28
3.2 Pozitif Çözüm Bölgesi ve Sınırlılık.....	32
3.3 Denge Noktaları ve Temel Üreme Sayısı	36
3.3.1 Hastalısız Denge Noktası	37
3.3.2 Endemik Denge Noktası	38
3.3.3 Temel Üreme Sayısı.....	39
3.4 Yerel Kararlılık Analizi	40
4. ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞININ OPTİMAL KONTROLÜ	46
4.1 Gerekli Optimallik Koşulları	47
5. NÜMERİK ÇÖZÜMLER VE KONTROL STRATEJİLERİ	51
5.1 Algoritma	51
5.2 Kontrol Stratejileri.....	54
5.3 Nümerik Sonuçlar ve Tartışma	56
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	67
7. KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ	77

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1: Pnömoni hastalığı olan bireylerde sıvı içeren alveoller ile normal alveollerin görseli [32].	5
Şekil 2.1: Gerçek dünya problemini matematiksel model olarak tanımlama süreci.	8
Şekil 2.2: Kermack-McKendrick modelinin oluşumu ve formülasyonu.....	9
Şekil 2.3: Bireyler arasındaki temas ağı ve bulaş oranlarına göre hastalık yayılımının dallanma süreci üzerine bir çerçeve [65].	12
Şekil 3.1: Çocukluk çağında pnömoni yayılımının akış diyagramı.	32
Şekil 3.2: Kesirli mertebeden bir sistemin kararlılık bölgesi [79].	41
Şekil 5.1: $\alpha = 0.9$ için A durumundaki tek kontrollü stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.....	60
Şekil 5.2: $\alpha = 0.9$ için B durumundaki ikili kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.....	61
Şekil 5.3: $\alpha = 0.9$ için B durumundaki ikili kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilere göre kontrollerin davranışları.....	62
Şekil 5.4: $\alpha = 0.9$ için C durumundaki üçlü kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırılması.....	63
Şekil 5.5: $\alpha = 0.9$ için C durumundaki üçlü kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilere göre kontrollerin davranışları.....	64
Şekil 5.6: $\alpha = 0.9$ için D durumundaki dördü kontrolde oluşan strateji ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.....	65
Şekil 5.7: $\alpha = 0.9$ için D durumundaki dördü kontrolde oluşan stratejiye göre kontrollerin davranışları.....	66

TABLO LİSTESİ

	<u>Sayfa</u>
Tablo 2.1: J Jacobian matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen kararlılık veya kararsızlık durumları.	14
Tablo 5.1: Modeldeki parametreler ve değerleri.	57

SEMBOL LİSTESİ

\mathbb{N}	: Doğal sayılar kümesi
\mathbb{C}	: Kompleks sayılar kümesi
\mathbb{R}	: Reel sayılar kümesi
\mathbb{R}^n	: n-boyutlu reel vektör uzayı
$\text{Re}(z)$: z kompleks sayısının reel kısmı
$\text{Im}(z)$: z kompleks sayısının imajiner (sanal) kısmı
$\Gamma(\cdot)$: Gamma fonksiyonu
$\exp(\cdot)$: Üstel fonksiyon
$E_\alpha(\cdot)$: Tek parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
$E_{\alpha,\beta}(\cdot)$: İki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu
\mathcal{L}	: Laplace dönüşüm operatörü
$H^1(a,b)$: 1-boyutlu Sobolev uzayı
$L^2(a,b)$: Hilbert uzayı
${}_a I_t^a$: Sol Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}_t I_b^a$: Sağ Riemann-Liouville kesirli integral operatörü
${}^{RL}D_t^a$: Sol Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}^{RL}D_t^a$: Sağ Riemann-Liouville kesirli türev operatörü
${}_a^C D_t^a$: Sol Caputo kesirli türev operatörü
${}_t^C D_b^a$: Sağ Caputo kesirli türev operatörü
$M(\cdot)$: Normalleştirme fonksiyonu
${}_a^{CF} D_t^a$: Sol Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}_t^{CF} D_b^a$: Sağ Caputo-Fabrizio kesirli türev operatörü
${}^{ABC}D_t^a$: Caputo anlamında sol Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{ABC}D_t^a$: Caputo anlamında sağ Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{ABR}D_t^a$: Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türev operatörü
${}^{AB}I_t^a$: Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli integrali
R_0	: Temel üreme sayısı
U_{ad}	: Lebesgue ölçülebilir olan kabul edilebilir kontrol kontrol fonksiyonları kümesi
\arg	: argüman

KISALTMALAR LİSTESİ

AIDS	: Kazanılmış Bağışıklık Yetmezliği Sendromu
COVID-19	: Koronavirüs Hastalığı 2019
SARS	: Şiddetli Akut Solunum Sendromu
MERS	: Orta Doğu Solunum Sendromu
HIV	: İnsan Bağışıklık Yetmezliği Virüsü
SIR	: Duyarlı-Enfekte-İyileşen
SCIR	: Duyarlı-Taşıyıcı-Enfekte-İyileşen
SIT	: Duyarlı-Enfekte-Tedavi edilen
SI_eI_iT	: Duyarlı-Asemptomatik Enfekte-Semptomatik Enfekte-Tedavi Edilen
SVITR	: Duyarlı-Aşılana-Enfekte-Tedavi Edilen-İyileşen
S_uS_aIR	: Programdan habersiz duyarlı-Programdan faydalanan duyarlı-Enfekte-İyileşen
SVC_{Sy}C_{Asy}IR	: Duyarlı-Aşılana-Semptomatik Taşıyıcı-Asemptomatik Taşıyıcı-Enfekte-İyileşen
S₁S₂CIR	: Emzirilmeyen duyarlı-Emzirilen duyarlı-Taşıyıcı--Enfekte-İyileşen
RL	: Riemann-Liouville
OKP	: Optimal Kontrol Problemi
KOKP	: Kesirli Optimal Kontrol Problemi

ÖNSÖZ

Severek çalıştığım bu tez konusunun belirlenmesinde ve fikirlerimin olgunlaşma aşamasında merakımı, gayretimi güdüleyen ve diri kalması için desteğini hiç esirgemeyen kıymetli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Derya AVCI'ya hayat boyu anımsayacağım motivasyon ışığı için sonsuz teşekkürlerimi iletirim.

Lisans dönemimde tanışma fırsatı bulduğum ve tezimin de önemli bir kısmını kapsayan algoritma ve programlama mantığı için temellerimi oluşturmamı sağlayan sevgili hocam Sayın Doç. Dr. Beyza Billur İSKENDER EROĞLU'na sunduğu tüm destek ve perspektif için çok teşekkür ederim. Ayrıca çalışmalarımındaki her türlü yardımları için Fatma BOZANER'e ve sevgili arkadaşım Dilara YAPIŞKAN'a teşekkür ederim.

Nice gecenin geç saatlerine kadar süren çalışmalarımdaya gayriihtiyari hüznün verdiğim, bugüne dek yetişmemdeki mimarlarım anne babama, her başarımda ilgi ve destekleriyle mutluluğumu paylaştığım biricik aileme gönülden, samimi ve şükran dolu teşekkürlerimle.

Balıkesir, 2023

Mine YURTOĞLU

1. GİRİŞ

Bulaşıcı hastalıklar, tarihin başlangıcından beri yarattığı etkilerle insanlığın kolektif hafızasında yer edinmiştir. 20. yüzyılda aşılama yöntemleri, sanitasyon ve antibiyotik tedarikini geliştirmeye ve iyileştirmeye yönelik programlar, toplumlara birçok hastalığı kontrol etme ve ortadan kaldırmasında güven yaratmıştı. Çiçek hastalığı neredeyse tamamen ortadan kaldırılmış, tüberküloz ve çocuk felci düşüşteydi. Ancak zaman içinde bakterilerden patojenlere kadar çeşitli hastalık etmenleri, onları çok başarılı bir şekilde yok eden kimyasallara karşı direnç göstermeye başladı. Sonra 1961’de yedinci kolera pandemisi, 1975’te Lyme hastalığı, 1981’de AIDS (Kazanılmış Bağışıklık Yetmezliği Sendromu), 1993’te hantavirüs ortaya çıktı. Bu hastalıklar gelişmekte olan ülkelerde yayılmaya devam etmiş ve insanların başlıca ölüm nedenleri haline gelmiştir. Endüstriyelmiş ülkelerde de kanser veya kronik hastalıklar gibi bulaşıcı hastalıklar büyük etkiler göstermiştir. Hastalıklar gelişebilir, yeni tiplerde ortaya çıkabilir ve mevcut olanların insidansı artabilir [1]. Yakın tarihte sosyal ve bireysel hayatımızda birçok olumsuz değişikliği beraberinde getiren COVID-19 pandemisi durumun bir örneğidir. Koronavirüs kökenli olan hastalık, geçmişte SARS ve MERS salgınlarında rol alırken, bugün farklı değişimler göstererek varyantları oluşmuştur. Günümüzde nüfusun büyümesi, insan göçleri veya hayvan istilaları, küresel ısınma, çevresel bozulma, genişleyen küresel seyahat ve ekonomik kalıplardaki değişiklikler nedeniyle ekosistemlerin bozulması da yeni ve mevcut hastalıkların yayılmasına izin verir [2].

Ortaya çıkan ve yeniden üreyen hastalıklar, dünya çapında birçok disiplinden araştırmacının odak noktası olmuştur. Son yıllarda bulaşıcı hastalıkların yayılmasını ve kontrolünü anlamak, analiz etmek, gelecek adına tahminde bulunabilmek için matematiksel modeller oldukça önemli araçlar haline gelmiştir [3,4]. Bulaşıcı hastalıkların yayılmasının matematiksel modellemesi birçok ülkede epidemiyoloji politikası karar verme sürecinin bir parçasıdır. Modellemedeki son yaklaşımlar arasında deterministik modeller ve bilgisayar simülasyonları çok ilgi görmektedir. Uygun varsayımlar ile değişkenler ve parametreler kullanılarak temas oranı, temel üreme sayısı, eşik değerler gibi çeşitli sonuçlar elde edilir. Bu teknikler genellikle hesaplamalı olarak uygulanır ve hastalık insidansı ile popülasyonun demografik verileri kullanılır. Hastalığın bulaşma niteliklerini anlamak, bu enfeksiyonların yayılımıyla başa çıkmak için daha iyi yollar sunabilir. Hastalığın süreci ve etkileri için genel

tahminler yaparak toplanması gereken temel bilgileri önerebilir ve epidemiyolojik anlayışa katkıda bulunabilirler [5].

18. yüzyıldan beri, bilim insanları kamu politikasını bilgilendirmek için bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellerini kullanmaktadır [6]. 1766'da Bernoulli, çiçek hastalığının insanlara nasıl bulaştığı gibi çoğu fikir eksikliklerine rağmen, ölüm oranı analiz edilerek "aşılama"nın faydasını tartıştı [7]. 1854'te, John Snow kolera salgınında vakaların haritasını çıkararak hastalığın kaynağı olan tek bir su pompasını belirledi ve epidemiyolojinin bir bilim olarak gelişmesine katkıda bulundu. 21. yüzyılın başlarında kızamık (Hamer, 1906) ve sıtma (Ross, 1910) için modeller geliştirildi [8] ve Kermack ve McKendrick (1927, [9]) hastalığın matematiksel teorisini oluşturdu. 21. yüzyılın ikinci yarısı, insan patojenlerinin istilası ve kalıcılığı için matematiksel modellerde daha fazla iyileştirme gördü. Hem tarımsal hem de doğal alanlarda hayvan ve bitki hastalıklarının yayılmasının araştırılmasına benzer teknikler uygulandı [3]. Sonuç olarak, salgınların nasıl yayıldığına ve çok çeşitli patojenlere, konakçı popülasyonlara ve ortamlara uygulanabilecek kontrol önlemlerinin nasıl uygulanması gerektiğine dair bir teori ortaya çıktı.

Hastalıkların modellenmesinin yanında birçok karmaşık modelde, gerçek bir dünya sisteminin tanımından bir diferansiyel denkleme geçilir ve genellikle bir görselleştirme aracı olarak bir akış diyagramı kullanılır. Sistemin mantıksal bir analizine izin vererek, denklemleri formüle etmemize yardımcı olurlar [10]. Bu tezde, biyolojik bir sistemin matematiksel modeli geliştirilmiş ve hafızanın sistemin davranışı üzerindeki etkisi ele alınmıştır. Buradaki hafıza kavramı çeşitli süreçleri, insan popülasyonları içinde yayılım sırasında ve sonrasında davranışları ile yayılımın kontrolünü etkileyebilir [11]. Hafıza etkilerini modellemeye yönelik birçok farklı yaklaşım, hastalık yayılmasının matematiksel modellerinde kullanılmıştır. Örneğin, kuluçka dönemi olan bir hastalığın modellenmesi, mevcut enfeksiyon oranının, geçmişte belirli bir zamanda (kuluçka dönemi) enfekte ve enfekte olmayan popülasyon arasındaki temas düzeyine bağlı olmasına izin verebilir. Bununla birlikte, geçmiş ve gelecek davranışların sürekli bir zaman periyodu üzerindeki etkisine ihtiyaç vardır. Bu durumu açıklamada çok başarılı oldukları deneyimlenen, yerel olmayan operatörler içeren kesirli diferansiyel denklemler kullanılmıştır [12]. Bir fonksiyonun kesirli türevi, fonksiyonun değeri hakkında geçmişten şimdiye kadar her zamanı için bilgi sağlarken, tamsayı türevi fonksiyonun sadece o anki davranışı hakkında

bilgi verir [13]. Daha genel bir ifadeyle, kesirli hesap genellikle türevleri ve integralleri tamsayı veya tamsayı olmayan, gerçek veya karmaşık keyfi bir düzene genellemek için kullanılır. Klasik matematik, uygulamalı bilimlerde incelenen birçok olguyu modellemek için güçlü araçlar sağlasa da, doğada karşılaşılan karmaşık sistemler içindeki bazı anormal dinamiklerin titiz bir şekilde ele alınmasına izin vermez. Deneysel sonuçlar, bu karmaşık sistemlere bağlı birkaç işlemin, uzun vadeli etkileri içeren, yerel olmayan dinamik bir davranışa sahip olduğunu ve kesirli türevlerin bu özelliklerin bazılarıyla benzerliklere sahip olduğunu göstermiştir [14].

Kesirli hesap kavramı, 1695 yılında bir anlam uzantısı sorununun fikir yürütülmesi ile ortaya çıkmıştı, ancak son zamanlarda çeşitli faydaları ve ilginç özellikleri tanımlama yeteneği nedeniyle birçok araştırma dalı ve araştırmacının dikkatini çekmiştir. Keyfi dereceden türev kavramı, heterojenliklere sahip bir fenomene bağlı karmaşıklıklar nedeniyle gün geçtikçe daha da gelişti. Doğrusal olmayan karmaşık bir sistem için analitiklik, kalıtsallık, yerel olmama ve hafıza etkisi gibi olumlu özellikleri çok önemlidir. Bilgisayar programları, matematiksel teknikler ve yazılımın hızlı büyümesi, alandaki literatürü daha da zenginleştirmiştir. Özellikle uygulamalı bilimlerle ilişkilendirilmiş ve insan hastalıklarına, kaos teorisine, kontrol teoriye, optiklere, nanoteknolojiye ve daha pek çok alana yelpazesi açılmıştır [15-20].

Kesirli türevler için literatürde birden çok tanım mevcuttur. Bunların arasından en iyisi olarak seçilebilecek olanı yoktur, hepsinin avantaj ve dezavantajları söz konusudur. Her türevin tanımından kaynaklı sınırlamaları vardır. Problemin tipine göre uygun olan türevi seçme fırsatı sunarlar. Bu tezin içeriğinde biyolojik bir hastalık için geliştirilen modelde kullanılan, son zamanlarda matematikçilerin kesirli dereceye sahip yeni bir türev ve integral olarak tanıttığı Atangana ve Baleanu operatörüdür. Bu operatör tekil olmayan ve yerel olmayan çekirdek olarak genişletilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu yardımıyla tanımlanır. Atangana-Baleanu türevi, kesirli türevlerin tüm temel özelliklerini kabul eder ve diğerlerinin yanı sıra problemlerin doğasını ve fiziksel davranışını analiz etmede daha etkili olduğu gözlemlenmiştir. Önceden tanımlanan kesirli operatörler, tüm temel ve önemli özellikleri yerine getirmek için gereken koşulları karşılayamıyordu. Örneğin, Riemann-Liouville operatörü, başlangıç koşulunun fiziksel anlamını sunmakta başarısızdır ve sabit fonksiyonun türevinin klasik koşulunu karşılayamaz. Daha sonra Caputo, yukarıda belirtilen sınırlamaları

karşılayan yeni bir operatör olarak türetilmiştir ve çeşitli fiziksel ve biyolojik modelleri incelemek için yaygın şekilde kullanılmıştır. Birçok matematikçi ve fizikçi, ısı bilimi ve akışkanlar mekaniğinde ortaya çıkan modellerin bazı spesifik özelliklerini incelerken bu operatörün eksiklerine dikkat çekmiş ve bunların üstesinden gelmek için Caputo ve Fabrizio yeni bir kesirli operatör türetmiştir. Yakın tarihte Atangana ve diğer bazı araştırmacılar, Caputo-Fabrizio operatörünün tekil olmayan ve yerel olmayan çekirdeklerle ilgili sınırlamasına dikkat çekmiştir. Bunlar bazı özel ve fiziksel davranışları örneklendirirken hayati roller oynar [21-25].

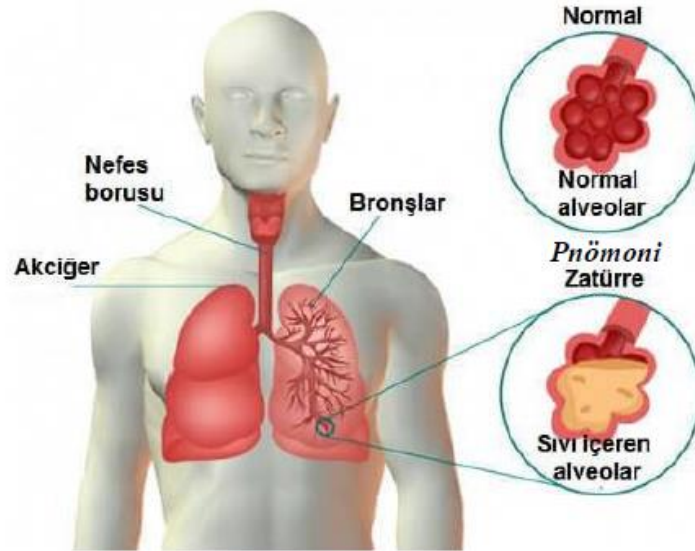
Bulaşıcı hastalıkları modellemenin yanında disiplinler arası fayda sağlayabilmek için bunların kontrol önlemlerini düşünmek de en az modellenmesi kadar önemlidir. Ortaya çıkan hastalıkların başarılı bir şekilde kontrol altına alınması, yalnızca tıbbi altyapıya değil, aynı zamanda bulaşma özelliklerini tanıma ve optimal tıbbi ve lojistik politikaları uygulama kapasitesine de bağlıdır. Halk sağlığı genellikle şu bilgilere ihtiyaç duyar: kaç kişiye bulaşacak, kaç kişinin hastaneye kaldırılması gerekiyor, belirli bir zamanda hasta olan maksimum insan sayısı nedir ve salgın ne kadar sürecek? Eğitim, aşılama kampanyaları, koruyucu ilaç uygulaması ve gözetim programları, yetkililerin hastalıkları önlemek için göz önünde bulundurması gereken önleme yöntemlerine bunlara örnektir. Müdahale stratejileri, hastalığın savaşını nasıl etkileyeceğini anlamak amacıyla modellenabilir. Mali kaynaklar sınırlı olduğundan, hastalıkları önleme ve mücadele için yatırımları optimize etmeye yönelik acil bir ihtiyaç vardır. Geleneksel olarak, hastalık dinamiği çalışmaları, salgınlardan sorumlu mekanizmaları belirlemeye odaklanmıştır, ancak kontrol stratejilerini analiz ederken ekonomik kısıtlamalar çok az dikkate alınmıştır. Öte yandan, ekonomik modeller, sınırlı kaynaklar tarafından dayatılan kısıtlamalar altında optimal kontrol teorisinde fikir vermiştir, ancak bunlar, hastalığın mekansal ve zamansal dinamikleri tarafından sıklıkla göz ardı edilmektedir. Bu nedenle bulaşıcı hastalıkların modellenmesinde daha iyi bir çalışma sunabilmek için epidemiyolojik ve ekonomik faktörlerin bir kombinasyonunu gerektirir.

Optimal kontrol teorisi, belirlenen bir durum sisteminin iyileştirilmesine yönelik bir performans indeksini en aza indirmek(veya en çoka çıkarmak) için belirli bir süre boyunca dinamik sistemin kontrol edilebilirliği doğrulama ve ilgili kontrolleri belirleme sürecidir [26]. Tarihsel olarak, varyasyon hesabının bir uzantısıdır. Oluşturulan optimal kontrol problemi için temel teknik, optimal kontrol ve durum sisteminin karşılaması gereken "gerekli

koşullar" kümesini çözmektir. Burada optimal çözümü bulmak için gerekli koşulları gösteren ve bir dönüm noktası kabul edilen sonuçtan yararlanır. 1950'lerin ortalarında Lev Pontryagin ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen ünlü "*Pontryagin'in maksimum ilkesi*".

Bu tezde işlenen bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellenmesi ve optimal kontrol stratejileri kapsamında salgınlarmın en yaygın biçimlerinden biri olan çocukluk çağı hastalıklarından biri incelenmiştir. Çocukluk çağı hastalıklarıyla ilişkili önemli morbidite ve mortalite, bunların nispeten basit epidemiyolojisi ve çocukluk çağı hastalık insidansını (birim zaman başına yeni vaka sayısı) tanımlayan verilerin yaygın olarak bulunması bu alanda epidemik modeller geliştirmek için uygunluk sağlar [27-29]. Çocukluk çağında kızamıkçık, çocuk felci ve kızamık tanınmış çocukluk hastalıklarıdır. Bu hastalıklar genellikle çocukları etkiler çünkü çocukların nüfusu aşırı fazladır ve bu hastalıklara yetişkinlerden daha fazla eğilimlidirler. Çocukluk çağında ağır etkileri ile geçmişte ve halen günümüzde gelişmekte olan ülkelerde endişe verici olmaya devam eden bir hastalık pnömonidir. Tezde ele alınan ve geliştirilen model çocukluk çağında halk dilinde zatürre olarak bilinen pnömoni hastalığıdır.

Pnömoni, virüs veya bakteri gibi patojenlerin neden olduğu akut solunum yolu enfeksiyon hastalıklarından biridir [30]. Bunlar arasında bakteriyel pnömoni en yaygın olanıdır ve



Şekil 1.1: Pnömoni hastalığı olan bireylerde sıvı içeren alveoller ile normal alveollerin görseli [32].

pnömokok olarak da bilinen Streptococcus Pneumonia'nın neden olduğu ve solunum sistemini özellikle akciğerleri, alveolleri etkiler. Pnömoni hastalığı olan bireylerde alveoller, akciğer dokularının iltihaplanmasıyla bu hava keseciklerinin iltihap veya sıvı ile dolarak solunan oksijenin kan dolaşımına girmesini engeller. Bu da pnömonili çocuklarda nefes ve oksijen almayı zorlaştırır ve sonuçta yüksek ölüm riski taşır [31]. Şekil 1.1 ile sağlıklı ve pnömoni hastalığı olan bireylerdeki alveoller gösterilmiştir.

Küresel olarak alt akut solunum yolu enfeksiyonları hastalıkları arasında yer alan pnömoni, bebekler ve beş yaşın altındaki çocuklar arasında önde gelen ölüm nedenlerinden biridir. Birleşmiş Milletler Çocuklara Yardım Fonu'ndan elde edilen bir veriye göre, 2015 yılında bir saat içinde 100 çocuk pnömoni hastalığına yakalanarak buna bağlı nedenlerle ölmüştür [33].

Pnömoninin tezin kapsamı yönünde literatür taraması; tam sayı mertebeden modellenenler, kesirli mertebeden modellenenler ve optimal kontrol çalışmaları olarak sınıflandırılarak ele alınmıştır. Bu bağlamda literatürde mevcut olan tamsayı mertebeden bazı pnömoni modelleri $SCIR$ [34], SIT [35], SI_cIT [36], $SVTR$ [37], S_uS_aIR [38], $SVC_{Sy}C_{Asy}IR$ [39], S_1S_2CIR [40] adi diferansiyel denklem sistemleriyle tanıtılmıştır. Yakın zamanlarda Peter ve diğ. tarafından yapılan $SCIR$ modelini içeren [41]'deki çalışma ile Yasmin tarafından yapılan [42]'deki $SCJRV$ modelinin çalışması pnömoni yayılımının dinamiklerini kesirli mertebeden türevler ile ifade etmiştir. Ayrıca pnömoninin optimal kontrol çalışmaları olarak literatürde mevcut olan çalışmalar tamsayı mertebededir [43-48]. Bu açıdan kesirli mertebeden geliştirilen model üzerinde optimal kontrol analizi içeren bir çalışmaya rastlanılmamıştır. Bu açıdan tez çalışması çocukluk çağındaki pnömoni hastalığı için kesirli operatör kullanılarak optimal kontrol çalışmasını ele alan ilk çalışma niteliğindedir. Bunun yanında benzer yayılım dinamiklerini esas alarak modellenen literatürde mevcut pek çok kesirli optimal kontrol çalışmaları mevcuttur. Örneğin kanser [49], kabakulak [50], kolera [51], COVID-19 [52], bilgisayar virüsleri [53-55] gibi yayılım gösteren dinamik sistemler kesirli operatörler ile genelleştirilerek uygun optimal kontroller adapte edilerek analiz edilmiştir.

Tezin organizasyon şeması kapsamında çocukluk çağında pnömoni hastalığının zaman içindeki davranışını öngörebilmek, uygun kontrol önlemlerinin geliştirilmesini sağlayabilmek için bir matematiksel model diferansiyel denklem sistemi olarak ele alınır. Birçok hastalığın çapraz geçişli davranışları, tamsayı dereceli türevleri ve singüler çekirdekli kesirli türevleri modelleme için yetersiz kılabilir. Bu nedenle, yeni nesil kesirli türevler arasından Atangana-Baleanu türevi, singüler olmayan Mittag-Leffler çekirdeği sayesinde, hastalığın yayılmasının başlangıcında ve sonunda hastalığın evrimi hakkında daha iyi içgörü sağlar. Buradan hareketle optimal kontrol probleminin üzerine inşa edildiği model Atangana-Baleanu türevi ile donatılmıştır. Sistemin biyolojik ve matematiksel olarak anlamlı olduğunu gösterecek gerekli özellikleri tanımlanır. Ayrıca hastalığın salgın durumunun belirlenmesinde bir eşik değer olan temel üreme sayısı hesaplanır ve denge noktalarında kararlılık analizi incelenir. Ardından matematiğin bir diğer alanı olan optimal kontrol teori hastalığın yayılmasının kontrolünde ve gerekli stratejilerin planlanmasında kullanılır. Pnömoni hastalığının popülasyonda durdurulması ve hatta eradike edilmesi düşüncesi ile dört kontrol fonksiyonu aşılama, koruyucu önlem, tarama ve tedavi stratejileri sisteme adapte edilmiştir. Belirli başlangıç koşulları altında optimallik koşulları elde edilir ve Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici yöntemi ile ileri-geri süpürme yöntemi birleştirilerek nümerik yöntemle çözülür. Yöntemin MATLAB programı yardımıyla grafikleri elde edilir ve yorumlanır.

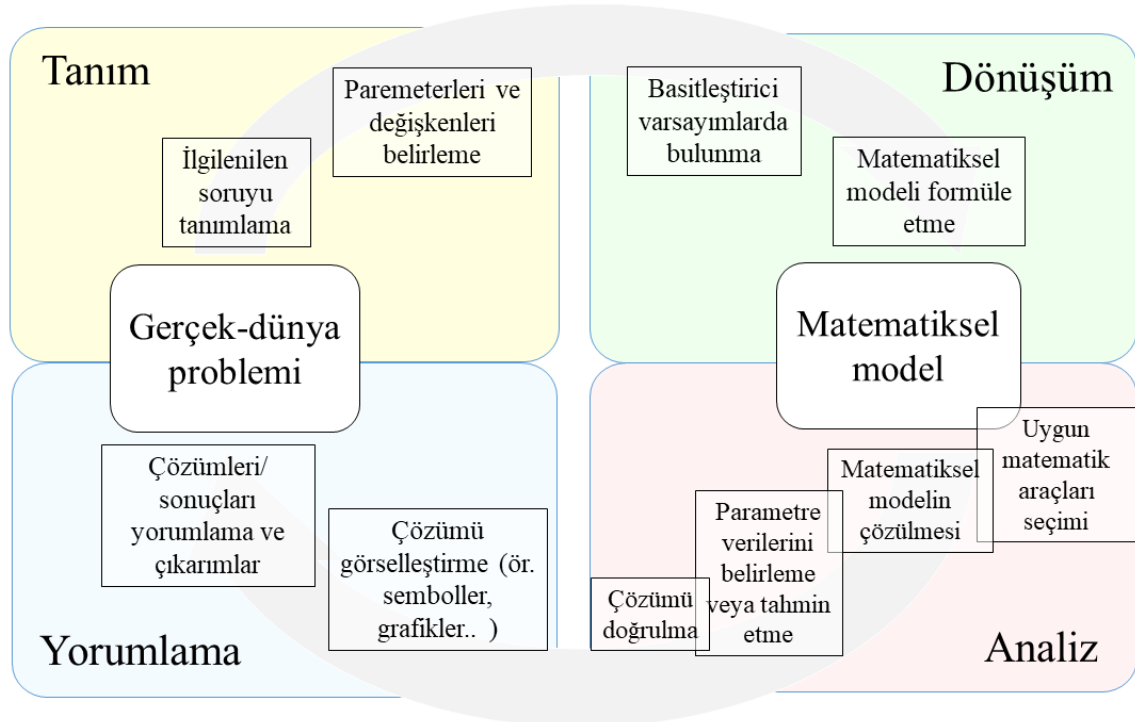
2. ÖN BİLGİLER VE TEMEL TANIMLAR

Bu bölümde tezin gelecek bölümlerinde kullanılacak olan temel tanım, teorem ve ön bilgilere yer verilecektir.

2.1 Bulaşıcı Hastalıkların Matematiksel Modellemesi

Literatürde bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellemesi üzerine olan çalışmalarda tezin kapsamı doğrultusundaki terminoloji ve ön bilgiler ele alınmıştır.

Matematiksel modeller, gerçek dünya problemini matematiksel dilde tanımlamak için kullanılır [56]. Bir matematiksel modeli formüle etme süreci, matematiksel modelleme olarak bilinir. Öncelikle karşılaşılan problem ve parametreleri belirlenir. Model formülasyonu oluşturmak için basitleştirici tahminlerde bulunulur. Daha sonra uygun araç ve yöntemler ile çözümler sonuçlar üzerine çıkarımlar yapılır. Şekil 2.1’de görüldüğü gibi gerçekliği ile örtüşen model oluşturulana dek süren bir döngü sürecidir. Bir model, bir sistemi açıklamaya ve farklı bileşenlerin etkilerini incelemeye ve davranış hakkında tahminlerde bulunmaya yardımcı olur. Buradaki matematiksel dil, denklem veya bilgisayar koduyla ifade edilebilir. Matematiksel modelin doğa bilimleri, biyoloji, ekoloji, mühendislik, fizik, evrim, immünoloji, meteoroloji, bilgisayar bilimleri ve sosyal bilimlerde birçok uygulaması vardır.



Şekil 2.1: Gerçek dünya problemini matematiksel model olarak tanımlama süreci.

Matematiksel modelleme, birçok disiplinindeki çalışmalarla beraber epidemiyoloji alanında giderek artan bir etkiye sahip olmuştur. *Epidemiyolojik modeller*, bulaşıcı hastalık salgınlarına uygun yönetim yanıtlarını belirlemek, gelecekteki salgınlar durumunda hastalık yönetimi hakkında kamu politikasını bilgilendirmek, kontrol stratejilerini tasarlamak ve değerlendirmek için kullanılır [57].

Bulaşıcı hastalıklara virüs, bakteri veya parazit gibi organizmalar neden olur. Bu organizmalar vücudumuzun içinde veya üzerinde yaşar; doğrudan fiziksel temas (yatay bulaş), anneden bebeğe (dikey bulaş), havadaki su damlacığı, yiyecek veya enfeksiyon vektörleri gibi birçok bulaşma yolu ile hastalık vücuda alınır. Bulaşıcı bir hastalığın modeli, yayılma mekanizmalarını karakterize etmeyi ve tanımlamayı amaçlar. Bu şu şekilde ifade edilerek oluşturulur: enfeksiyon taşıyıcısı, duyarlı bir konakçı popülasyonla karşılaştığında, hastalık diğer bireylere bulaşır. Enfeksiyöz bir ajanı barındıran ve hastalık vakası olarak teşhis edilen kişiye *enfekte birey* denir. Popülasyonda enfeksiyon ile karşılaşan ve hastalığa karşılığı duyarlı olan veya enfeksiyon kapma potansiyeli olan kişiye *duyarlı birey* denir. Her hastalığın yayılım dinamiğine göre bu karakterizasyonlar ele alınarak toplam nüfus kompartımanlara bölünür. *Kompartıman modeller*, alanın yaygın olarak kullanılan bir yaklaşımıdır. Şekil 2.2 ile 1927’de ilk epidemiyolojik model formülasyonunu oluşturan Kermack-McKendrick modeli verilmiştir.

$$\begin{aligned}
 S' &= - \text{(enfeksiyon oluşma oranı)} & &= -\beta SI \\
 I' &= \text{(enfeksiyon oluşma oranı)} - \text{(iyileşme oranı)} & &= \beta SI - \gamma I \\
 R' &= \text{(iyileşme oranı)} & &= \gamma I
 \end{aligned}$$

Şekil 2.2: Kermack-McKendrick modelinin oluşumu ve formülasyonu.

SIR modeli olarak adlandırılan bu modelde, popülasyon üç bölmeye ayrılmıştır: Tüm bireylerin hastalığa duyarlı olduğu duyarlı kompartıman S , tüm bireylerin hastalık tarafından enfekte olduğu enfekte kompartıman I , tüm bireylerin I sınıfından iyileşerek kalıcı bağışıklığa sahip olduğu iyileşen kompartıman R yer alır. Modelin diferansiyel denklemlerini oluşturmak için her sınıftaki değişim oranı belirlenmiştir. Burada β enfekte bireyin duyarlı bireyle temasındaki hastalığı bulaştırma oranını gösterir. βSI terimi, popülasyonda birim zamanda türeyen yeni bulaşıcı vakalar olarak tanımlanan **insidans oranı**dır. İnsidans oranı genellikle bir insidans fonksiyonu ile karakterize edilir. Bu fonksiyon, epidemiyolojik modellerde kilit bir rol oynar ve hastalık dinamiklerinin makul bir niteliksel analizinin oluşturulmasını sağlar. Literatürde en yaygın olarak kullanılan ve bu modelde yer alan bilinear insidans fonksiyonudur. Matematiksel biçimleri $\frac{\beta SI}{N}$, $\frac{\beta SI}{1+aI}$, $\frac{\beta SI}{1+aI+bS}$, $\frac{\beta SI}{S+I}$ olan standart, doymuş, Beddington-DeAngelis gibi diğer çeşitli doğrusal olmayan insidans oranları da literatürde mevcuttur [58-62]. Modeldeki γ ise enfekte bireylerin iyileşme oranını temsil eder. Temel olarak, Kermack-McKendrick modeli insan demografik değişikliklerini içermez ve nüfus kapalıdır, yani doğum yoktur, ölüm yoktur ve herhangi bir göç durumu düşünülmemiştir. Bu varsayımlar oldukça kısıtlı ve gerçekçi değildir. Problemlerin ana özelliklerini yakalamak için çeşitli faktörlerin dahil edilmesiyle bu model ilerleyen çalışmalarda geliştirilmiştir. Ancak bu tür bir değişiklik doğal olarak modelin karmaşıklığını artırır ve analizi zorlaştırır, hatta bazen çözümleri imkansız hale getirir. Bu nedenle hastalık dinamiklerini incelemek için matematiksel modelleme yaklaşımı kullanılırken, bir modelin rasyonelitesini ve matematiksel uygulanabilirliğini dengelemek her zaman önemli bir konu olmaya devam etmektedir.

Epidemiyolojik modelleri incelemenin ana hedeflerinden biri, altta yatan ilkeleri anlamaya çalışmak için bir hastalığın yayılmasını analiz etmektir. Bunun nedeni ise salgının şiddeti ve süresi hakkında bazı sonuçlara varabilmektir. Elbette şu önemli sorulara cevap verebilmek istenir: Salgın olacak mı? Eğer olursa ne kadar sürecek? Ne kadar tehlikeli olabilir? Hastalık kontrol önlemleri ile ortadan kaldırılabiliyor mu?

Salgınları ifade etmek için kullanılan ve boyutları hakkında bilgi veren üç temel kavram: **Endemi**: Belirli bir coğrafi bölgede veya popülasyonda hastalığın sürekli olarak var olması

anlamına gelir. Afrika'nın bazı bölgelerinde insanların yaşamında yakalanması beklenen sıtma, endemik bir hastalıktır.

Epidemi: Bir hastalığın beklenenin üzerinde aniden artması olarak ifade edilir. Bu olay küçük çaplı bir salgın veya hastalık patlaması olarak tanımlanabilir.

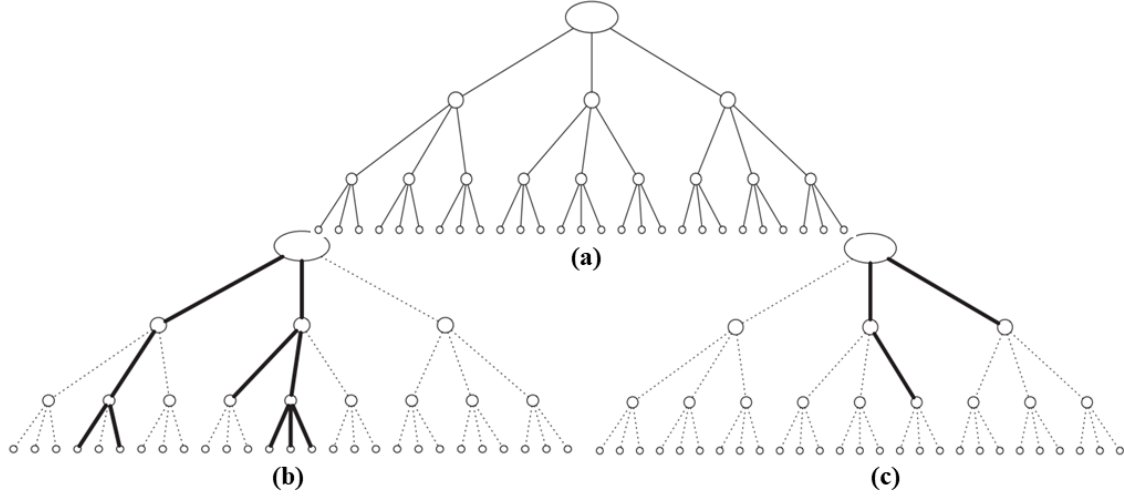
Pandemi: Bir epideminin küresel alana yayılması ve çok hızla artması pandemi olarak tanımlanmaktadır.

Burada önemli bir nokta, hastalıkların zaman içinde değişen özelliklere sahip olması ve farklı kavramlarla tanımlanabilmesidir. Örneğim, HIV/AIDS öncelikle bir epidemiyken daha sonra bir pandemi olarak kabul edilmiş ve günümüzde ise endemik ve kronik bir hastalık olarak adlandırılmaktadır. Aynı şekilde, bazı hastalıklar zaman zaman endemik ve epidemik çizgiler arasında farklı noktalarda yer alabilmektedir.

Bir hastalığın kalıcılığını veya yok olmasını belirleyen eşikler, epidemiyolojide çok önemlidir [63]. Bu nedenle bulaşıcı hastalığı modellemedeki amaç, hastalığın yok edilmesini sağlayacak sistemin parametrelerine ve yapısına bağlı kriterler oluşturmaktır. Sıklıkla kullanılan eşik değer, *temel üreme sayısı* R_0 'dır. Tamamen duyarlı bir popülasyonda enfekte bir birey tarafından kaynaklanan ikincil enfeksiyonların ortalama sayısı olarak tanımlanır [64]. Bu eşik değerini kıyaslandığı aşağıdaki ölçütler önemlidir:

- $R_0 < 1$, hastalık yayılma hızı zamanla azalır ve yok olur.
- $R_0 = 1$, hastalık yayılma hızı durağan seviyededir, nüfus var oldukça aynı düzeyde devam eder, bu endemi durumunu gösterir.
- $R_0 > 1$, hastalık yayılımı hızla artar, bu pandemi durumunu gösterir.

Şekil 2.3 ile verilen bir hastalık yayılımının dallanma süreci ile ilgili durumlar mevcuttur. (a) ile popülasyonda herhangi bir enfeksiyon ajanının var olmadığı durumda bir kişinin temas ağı görülür. (b) ile popülasyonda enfeksiyon varlığında ve yüksek bulaşma oranındaki salgın potansiyeli görülür. Enfekte her kişi ortalama bir kişiden fazlasını enfekte eder, bu $R_0 > 1$ durumudur. (c) ile popülasyonda enfeksiyon varlığında ve düşük bulaşma oranındaki durum görülür. Enfekte kişiler ortalama bir kişiden azını enfekte eder, zamanla hastalık yok olur ve $R_0 < 1$ sağlanır.



Şekil 2.3: Bireyler arasındaki temas ağı ve bulaş oranlarına göre hastalık yayılımının dallanma süreci üzerine bir çerçeve [65].

Bulaşıcı hastalıkların matematiksel modellenmesi için genel terminolojiden sonra literatürde özellikle modellerin kararlılık analizi çalışmaları oldukça fazladır. Bu tezde de dinamik sistemler için denge noktalarını ve bu noktaların kararlılığını bulmaya yönelik çalışma başlığına yer verilmiştir. Jacobian matrisin özdeğerlerini kullanan bu yaklaşım, daha sonra inceleyeceğimiz kesirli sistemler üzerine ele alınmıştır. Bunun için öncelikle ihtiyaç duyulacak temel tanım ve teoremler klasik sistemler üzerinde verilmiştir.

Diferansiyel denklem, bir fonksiyonu bağımsız değişken(ler)e göre türevleriyle birlikte içeren denkleme denir. Diferansiyel denklemler iki tiptir; **adi ve kısmi diferansiyel denklemler**. Adi bir diferansiyel denklem bir tek bağımsız değişken içerirken, kısmi diferansiyel denklem ise birden fazla bağımsız değişkeni olan fonksiyon içerir. Tezde adi diferansiyel denklemler ele alınmıştır. Çoğu epidemiyolojik model, şu şekilde yazılabilen otonom sistemlerdir:

$$\dot{x} = f(x) \quad (2.1)$$

Burada $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, x durum değişkeninin noktasal zaman türevlerini temsil eder. (2.1) denklemi ile birlikte sistemin başlangıç durumu hakkında bilgi verildiğinde ortaya çıkan denklem bir **başlangıç-değer problemi** olarak adlandırılır ve şu şekildedir:

$$\dot{x} = f(x), x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \quad (2.2)$$

$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ve $x \in \mathbb{R}^n$ için adi diferansiyel denklem sistemi:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{bmatrix} \quad (2.3)$$

Burada $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

Tanım 2.1.1: Tüm $1 \leq i \leq n$ için, $f_i(\bar{x}) = 0$ denklemini sağlıyorsa $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ noktası, (2.3) sisteminin denge noktasıdır.

Adi diferansiyel denklem sisteminin bir denge noktası etrafında lineerleştirilmesi şunu sağlar:

$$\frac{dx}{dt} = Jx \quad (2.4)$$

Burada J denge noktasında alınan Jacobian matristir ve (2.3) sisteminin Jacobian matrisi:

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

Jacobian matrisinin önemi, bir denge noktası yakınında türevlenebilir bir fonksiyona en iyi lineer yaklaşımı temsil etmesi gerçeğindedir. (2.4)'ün çözümleri:

$$x = x_0 e^{\lambda t} \quad (2.6)$$

Burada x_0 bir sabit vektör ve λ özdeğerleri karakteristik denklemin kökleridir:

$$|J - \lambda I| = 0 \quad (2.7)$$

I birim matrisi temsil eder.

Teorem 2.4.1: (2.4) diferansiyel denklem sistemi için; eğer tüm λ özdeğerleri negatif gerçel kısımlara sahipse çözüm kararlıdır. En az bir λ özdeğeri pozitif gerçel kısma sahipse çözüm kararsızdır.

Örneğin aşağıdaki diferansiyel denklem sistemini düşünelim:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

J yine denge noktasında alınan Jacobian matristir. Bu nedenle çözümün kararlılığı, J 'nin özdeğerleri olan λ_1 ve λ_2 'ye bağlıdır. Çözümlerin olası tüm davranışları, özdeğerlerin gerçel veya karmaşık, negatif veya pozitif gerçel kısımlara sahip olup olmamalarına göre değişir ve Tablo 2.1 ile verilmiştir.

Tablo 2.1: J Jacobian matrisinin özdeğerlerine karşılık gelen kararlılık veya kararsızlık durumları.

Özdeğerler	Kararlılık
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Kararsız
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Asimptotik kararlı
$\lambda_2 < 0 < \lambda_1$	Kararsız
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Asimptotik kararlı
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Kararsız
$\lambda_1, \lambda_2 = r + i\mu$	
$r > 0$	Kararsız
$r < 0$	Asimptotik kararlı
$\lambda_1 = i\mu, \lambda_2 = -i\mu$	Kararlı

Kararlılık kriterleri göz önüne alındıktan sonra diğer bir önemli kısım kararlılığı sağlamak için negatif reel kısımlara sahip özdeğerlerin sayısının belirlenmesidir. Burada ele alınan yöntemlerden biri Routh-Hurwitz kriteridir [66]. Eğer sistem (2.4) n . mertebeden ise, karakteristik denklem şu şekildedir:

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (2.9)$$

a_i katsayıları $i = 0, 1, \dots, n$ tümü reeldir. $P(\lambda)$ 'nın köklerinin $\text{Re } \lambda < 0$ olması gibi a_i üzerindeki gerekli ve yeterli koşullar Routh-Hurwitz koşullarıdır,

$$D_1 = a_1 > 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ 1 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ 1 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} > 0, \quad (2.10)$$

$$D_k = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & a_2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdot & \cdot \\ 0 & 1 & a_2 & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & a_k \end{vmatrix} > 0, \quad k = 1, 2, \dots, n.$$

$i > n$ için $a_i = 0$ 'dır.

2.2 Kesirli Analize İlişkin Ön Bilgiler ve Temel Tanımlar

Klasik Analiz'in temel kavramları fonksiyonların türevleri ve integralleridir. Bir $f(t)$ fonksiyonu ile başlayıp türevlerini sol tarafa, integrallerini ise sağ tarafa devam ettirirsek, her iki tarafta da sonsuz bir dizi elde ederiz.

$$\dots \frac{d^2 f(t)}{dt^2}, \quad \frac{df(t)}{dt}, \quad f(t), \quad \int_a^t f(s) ds, \quad \int_a^{s_1} \int_a^{s_1} f(s) ds ds_1 \dots \quad (2.11)$$

Kesirli Analiz bu diziyi interpolasyon yapmaya çalışır, böylece bu işlem klasik türevleri ve integralleri birleştirir ve keyfi derece için genelleştirir [67]. 1695 yılında G.W.Leibniz'den L'Hospital'e gelen mektuptaki tamsayı dereceden olmayan türevin anlamı üzerine sorusu birçok kaynakta Kesirli Analiz'in doğum tarihi kabul edilmiştir. Leibniz'in yanıtı: "Bir gün faydalı sonuçların çıkarılacağı bariz bir paradoks." olmuş ve bu sorgulamayı öncelikle matematikteki en iyi beyinlere ayrılmış birçok çalışma takip etmiştir. 20. yüzyılın ortalarına kadar bu teoriye P. S. Laplace (1812), J. B. J. Fourier (1822), N. H. Abel (1823-1826), J. Liouville (1832-1873), B. Riemann (1847), A. K. Grünwald (1867- 1872), A.V.Letnikov (1868-1872), J. Hadamard (1892), O. Heaviside (1892-1912), H. Weyl (1917), A. Erdelyi (1939-1965), M. Riesz (1949) gibi isimlerin pek çok katkısı bilinmektedir. Teorik disiplinden sonra Kesirli Analiz ve uygulamaları üzerine ilk özel konferans 1974'te B. Ross'a aittir. Aynı yıl Kesirli Analiz'e adanmış bir kitap yayınlayan K.B. Oldham ve J. Spanier, yarı türevler ve integraller ile kütle ve ısı transferi problemlerini ele almıştır. Şimdilerde "Kesirli Analiz'in ansiklopedisi" olarak anılan S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev'e [68] ve takiben K. S. Miller, B. Ross [67], I. Podlubny [69] 'ye ait olan kitaplar çok sayıda çalışmanın referansı olmuşlardır.

Kesirli veya keyfi mertebeden hesap kavramı, neredeyse tamsayı mertebeli hesabın doğuşuna kadar uzanmasına rağmen yüzyıllarca saf matematiğin sınırlı kapsamında kalmıştır. Bunun sebebi henüz pratik uygulaması olmadığı için, birçok araştırmacı tarafından soyut bir alan olarak görülmesiydi. Aksine tamsayı mertebeli türevlerin fiziksel ve geometrik anlamı açık, uygulaması anlaşılırdır. Bu durumda, fiziksel fenomenlerin kesirli türevler çerçevesindeki yorumu da sağlam olduğunda gerçek dünya problemlerini tanımlamak için etkili bir dil olarak hizmet edebilir.

Bu sorunu çözmek için 2002 yılında oldukça özverili bir çalışma [69] Podlubny tarafından yapılmıştır. Kesirli integrasyonun iki farklı zaman ölçeğinde, yani homojen -eşit şekilde akan- ve homojen olmayan -eşit şekilde akmayan, değişen (dinamik)- zaman ölçeği açısından fiziksel bir yorumunu sağlar. Hareket eden bir cismin uzay-zamanda konumu değiştikçe tüm uzay-zamandaki yer çekimi de bu hareket ile değişmektedir. Bu hesaplama tekniği, fiziksel gerçekliğin gerekliliklerini karşılamak için elverişli olduğu gün geçtikçe ancak anlaşılabilir. Tamsayı mertebeli diferansiyel operatör lokal bir operatörken, kesirli mertebeli diferansiyel operatör lokal değildir. Bu, bir sistemin gelecekteki durumu

için yalnız mevcut durumuna değil, aynı zamanda tüm tarihsel durumlarına bağlı olarak cevaplanmasını sağlar. Böylece çeşitli süreçlerin hafızasını ve kalıtsal özelliklerini karakterize etmeye yardımcı olur. Örneğin viskoelastik malzemeler hafızalı olma özelliklerinden kaynaklı Kesirli Analiz'in uygulama problemlerinde büyük ilgi görmüştür.

Kesirli diferansiyel denklemler, lokal olmayan türevler barındırdığından doğal fenomenlerin daha gerçekçi bir yorumunu verebilir. Bugün kesirli mertebeden diferansiyel denklemler akışkanlar mekaniği, viskoelastisite, görüntü ve sinyal işleme, kontrol teori, fizik, mühendislik ve biyoloji alanlarındaki çeşitli uygulamalarda sık sık ortaya çıkmalarından dolayı birçok çalışmanın odak noktasıdır. Örneğin birçok gerçek dinamik sistem, kesirli türev veya integrale dayalı tamsayı olmayan mertebeden dinamik model kullanılarak daha iyi tanıtılır. Bu bağlamda Kesirli Analiz çalışmaları Klasik Analiz'in boşluklarını doldurarak yeni uygulama alanlarında faydalı sonuçlar elde edebileceği açıktır.

2.2.1 Bazı Özel Fonksiyonlar

Tanım 2.2.1.1 (Gamma Fonksiyonu): $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için $\Gamma(\cdot)$ ile gösterilen Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt, \quad \text{Re}(z) > 0 \quad (2.12)$$

integrali ile tanımlanır [69]. Gamma fonksiyonu $n!$ faktöriyel fonksiyonunun bir genelleştirmesidir. Yani $n \in \mathbb{N}$ için $\Gamma(n) = (n-1)!$ dir. Buradaki n 'yi tam sayı olmayan, kompleks sayılara genelleştirmiştir. Bazı önemli özellikleri aşağıdaki gibidir:

- i. Kısmi integrasyon ile görülür: $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$,
- ii. Gamma fonksiyonu tüm $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ için analitiktir,
- iii. $\Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 2, \Gamma(4) = 6, \dots, \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z!$,
- iv. $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$,
- v. $\Gamma(0) = \infty, \Gamma(\infty) = 0$.

Gamma fonksiyonu ile doğrudan ilişkili olan Beta fonksiyonu, bazen onun yerine kolaylık sağlamak için kullanılır ve aşağıdaki gibi tanımlanır:

Gamma fonksiyonu faktöriyel fonksiyonun bir genelleştirmesi iken, şimdi tanıtılacak olan Mittag-Leffler fonksiyonu da üstel fonksiyonun bir genelleştirmesidir. İlk olarak kuvvet serisi ile tek parametrelilik olarak Mittag-Leffler tarafından tanıtılmıştır. Daha sonra Kesirli Analiz açısından büyük önem taşıyan iki parametrelilik tanımı Agarwal tarafından yapılmıştır. Lineer adi diferansiyel denklemlerin çözümünde görülen üstel fonksiyona benzer şekilde, kesirli mertebeden diferansiyel diferansiyel denklemlerin çözümünde doğal olarak ortaya çıkar.

Tanım 2.2.1.2 (Mittag-Leffler Fonksiyonu): $z \in \mathbb{C}$ için $E_\alpha(z)$ bir parametrelilik Mittag-Leffler fonksiyonu [70]

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0 \quad (2.13)$$

olarak tanımlanır ve $E_{\alpha,\beta}(z)$ iki parametrelilik Mittag-Leffler fonksiyonu ise

$$E_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \alpha, \beta > 0. \quad (2.14)$$

biçimindedir. Bu fonksiyonun bazı temel özellikleri aşağıdakilerdir [71]:

i. $|z| < 1$ için genelleştirilmiş Mittag-Leffler fonksiyonu

$$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(t^\alpha z) dt = \frac{1}{z-1}.$$

ii. $|z| < 1$ için $E_\alpha(z^\alpha)$ Mittag-Leffler fonksiyonunun Laplace dönüşümü

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} E_\alpha(z^\alpha) dt = \frac{1}{z - z^{1-\alpha}}.$$

iii. $E_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1)} = \frac{1}{1-z},$

$$\begin{aligned}
\text{iv.} \quad E_1(z) &= E_{1,1}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z, \\
\text{v.} \quad E_2(z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \cosh(z), \\
\text{vi.} \quad E_2(-z^2) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{(2k)!} = \cos(z), \\
\text{vii.} \quad E_{1,2}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!} = \frac{e^z - 1}{z}, \\
\text{viii.} \quad E_{2,1}(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(2k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{(2k)!} = \cosh \sqrt{z}.
\end{aligned}$$

2.2.2 Kesirli Operatörler

Kesirli türevler için literatürde birçok tanım mevcuttur. Bunların arasından en iyisi olarak seçilebilecek olanı yoktur, hepsinin avantaj ve dezavantajları söz konusudur. Her türevin tanımından kaynaklı sınırlamaları vardır. Problemin tipine göre uygun olan türevi seçme fırsatı sunarlar.

Tanım 2.2.2.1 (Riemann-Liouville Kesirli İntegralleri): $[a, b]$ aralığında tanımlı $f \in L_1$ fonksiyonunun $\alpha > 0$ mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville integralleri sırası ile

$${}_a I_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t > a, \quad (2.15)$$

$${}_t I_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, \quad t < b. \quad (2.16)$$

biçiminde tanımlanır [69].

Tanım 2.2.2.2 (Riemann-Liouville Kesirli Türevleri): $[a, b]$ aralığında tanımlı $f \in L_1$ fonksiyonunun $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) için α . mertebeden sol ve sağ Riemann-Liouville kesirli türevleri

$${}_a D_t^\alpha f(t) = \left(\frac{d}{dt}\right)^n ({}_a I_t^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.17)$$

$${}_t D_b^\alpha f(t) = \left(-\frac{d}{dt}\right)^n ({}_t I_b^{n-\alpha} f(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.18)$$

şeklinde tanımlanır [69].

Tanım 2.2.2.3 (Caputo Kesirli Türevleri): $[a, b] \subset \mathbb{R}$ aralığında tanımlı f , n . mertebeden sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere ve $n-1 < \alpha < n$ ($n \in \mathbb{N}^+$) için α . mertebeden sol ve sağ Caputo kesirli türevleri

$${}_a^c D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \left(\frac{d}{dt}\right)^n f(\tau) d\tau \quad (2.19)$$

$${}_t^c D_b^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_t^b (\tau-t)^{n-\alpha-1} \left(-\frac{d}{dt}\right)^n f(\tau) d\tau \quad (2.20)$$

olarak tanımlanır [69].

Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevleri $\frac{(t-\tau)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ ve $\frac{(\tau-t)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$ kuvvet çekirdek

fonksiyonlarına sahip integral dönüşümlerdir. Bu çekirdeklerin her ikisi de $t = \tau$ için singülerdir. Bundan sonra tanıtılacak olan yeni kesirli türevler singüler olmayan çekirdek fonksiyonuna sahiptir. Bu yeni operatörlerin formülasyonu, Caputo kesirli türevlerinin kuvvet çekirdek fonksiyonunu singüler olmayan bir fonksiyonla değiştirmeye dayanmaktadır. 2015 yılında tanıtılan Caputo-Fabrizio kesirli türevi için üstel bir çekirdek

dikkate alınır; $(t-\tau)^{-\alpha}$ yerine $\exp\left(-\frac{\alpha(t-\tau)}{1-\alpha}\right)$ ve katsayı $\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}$ yerine $\frac{M(\alpha)}{1-\alpha}$ ile

değiştirilir. 2016 yılında tanıtılan Atangana-Baleanu kesirli türevinin tanımında ise çekirdekte Mittag-Leffler fonksiyonu yer almaktadır. Bu yeni kesirli türevlerin tanımları ve ardından aralarındaki avantaj ve dezavantajlarına değinilecektir.

Tanım 2.2.2.3 (Caputo-Fabrizio Kesirli Türevi): $H^1(a,b)$ aşağıdaki gibi tanımlanan bir boyutlu Sobolev uzayı olmak üzere

$$H^1(a,b) = \{f \in L^2(a,b) : f' \in L^2(a,b)\} \quad (2.21)$$

buradaki

$$L^2(a,b) = \left\{ f(t) : \left(\int_a^b f^2(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} < \infty \right\}. \quad (2.22)$$

$f \in H^1(a,b)$, $a < b$ ve $\alpha \in [0,1]$ için sol ve sağ Caputo-Fabrizio kesirli türevleri

$${}^{CF}_a D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_a^t \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] f'(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

$${}^{CF}_t D_b^\alpha f(t) = -\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_t^b \exp\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)\right] f'(\tau) d\tau \quad (2.24)$$

olarak tanımlanır [72]. $M(\alpha) > 0$, $M(0) = M(1) = 1$ şartını sağlayan bir normalleştirme fonksiyonudur.

Tanım 2.2.2.4 (Caputo Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi):

$f \in H^1(a,b)$, $a < b$ ve $\alpha \in [0,1]$ için Caputo anlamında sol ve sağ Atangana-Baleanu kesirli türevleri

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right] f'(\tau) d\tau \quad (2.25)$$

$${}^{ABC}_b D_t^\alpha f(t) = -\frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \int_b^t E_\alpha\left[-\frac{\alpha}{1-\alpha}(t-\tau)^\alpha\right] f'(\tau) d\tau \quad (2.26)$$

şeklinde tanımlanır [21]. Buradaki $M(\alpha)$, yine Caputo-Fabrizio türevindeki normalleştirme fonksiyonu olup aynı özelliklere sahiptir.

Bu tanım, gerçek dünya problemlerine oldukça yardımcı olacak bir çekirdek fonksiyonu içermekte ve ayrıca bazı fiziksel problemleri başlangıç koşullarıyla çözmek için Laplace dönüşümünü kullanırken büyük avantaj sağlamaktadır. Ayrıca belirli problemle uğraşırken bir seçenek olması adına aşağıdaki tanım da önerilmiştir.

Tanım 2.2.2.5 (Riemann-Liouville Anlamında Atangana-Baleanu Kesirli Türevi): $f \in H^1(a, b)$, $a < b$ ve $\alpha \in [0, 1]$ için Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevi

$${}^{ABR}D_t^\alpha f(t) = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{df}{dt} \int_b^t f(\tau) E_\alpha \left[-\frac{\alpha}{1-\alpha} (t-\tau)^\alpha \right] d\tau \quad (2.27)$$

olarak tanımlanır [21].

Tanım 2.2.2.6 (Atangana-Baleanu Kesirli Türevlerinin Laplace Dönüşümleri): Bir $f(t)$ fonksiyonu için Riemann-Liouville anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\left\{{}^{ABR}D_t^\alpha(f(t))\right\}|s| = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}}, \quad (2.28)$$

ve Caputo anlamında Atangana Baleanu kesirli türevinin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L}\left\{{}^{ABC}D_t^\alpha(f(t))\right\}|s| = \frac{M(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha \mathcal{L}\{f(t)\}(s) - s^{\alpha-1} f(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} \quad (2.29)$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.2.2.7 (Atangana-Baleanu Kesirli İntegrali): $f \in H^1(a,b)$, $a < b$ ve $\alpha \in [0,1]$ için Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli integrali

$${}^{AB}I_t^\alpha (f(t)) = \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha-1)} \int_a^t f(\tau)(t-\tau)^{\alpha-1} d\tau \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır [21].

Tüm bu kesirli mertebeden türev tanımlarının avantaj ve dezavantajlarını belirtmek çok önemlidir [73].

Kesirli Türevlerin Avantajları:

- 1) Riemann-Liouville kesirli türevi ile keyfi bir fonksiyonun orijinde sürekli olması ve türevlenebilir olması gerekmez.
- 2) Caputo kesirli türevinin en büyük avantajlarından biri, geleneksel başlangıç ve sınır koşullarının problemin formülasyonuna dahil edilmesine izin vermesidir. Bu durum problemin elde edilen çözümü için fiziksel yorumunu sağlar. Ayrıca bir sabit için türevi sıfırdır.
- 3) Atangana-Baleanu türevinin avantajlarından biri maddesel heterojenlikleri ve bazı yapı veya ortamları tasvir edebilme gücüdür. Türevin tanımındaki yeni çekirdeğin singüler ve yerel olmaması, RL ve Caputo kesirli türevleri ve ayrıca Caputo-Fabrizio tipi türev ile tanımlanamayan yapı ve ortam içindeki belleğin daha iyi tanımlanmasına izin verir. Atangana-Baleanu türevi bu nedenle fen, mühendislik ve teknolojinin birçok problemini tanımlamada çok faydalı olacaktır.

Kesirli Türevlerin Dezavantajları:

- 1) Riemann-Liouville türevinin gerçek dünya olaylarını kesirli diferansiyel denklemlerle modellemeye çalışırken bazı dezavantajları vardır. Bir sabitin Riemann-Liouville türevi sıfır değildir. Ek olarak, keyfi bir fonksiyon orijinde sabitse, kesirli türevi orijinde bir tekilliğe sahiptir, örneğin üstel ve Mittag-Leffler fonksiyonları. Bu dezavantajlar, Riemann-Liouville kesirli türevinin uygulama alanını azaltır.

- 2) Caputo kesirli türevi, türevlenebilirlik için daha yüksek koşulları gerektirir: Bir fonksiyonun Caputo anlamında kesirli türevini hesaplamak için önce türevini hesaplamalıyız. Caputo türevleri yalnızca türevlenebilir fonksiyonlar için tanımlanabilir.
- 3) Caputo–Fabrizio türevinde çekirdek yereldir ve türevin mertebesi sıfır olduğunda başlangıç fonksiyonunu vermez.

2.3 Optimal Kontrolle İlişkin Temel Tanım ve Teoremler

Doğa, yapay zeka, beynimiz ve günlük hayatımızdaki hemen hemen çoğu fiziksel sürecin ortak amacı optimize etmeye çalışmak; mevcut alternatifler arasından en iyisini seçmeye odaklanmaktır. Doğal olarak ortaya çıkan soru, "*en iyi*" sonucu elde etmek için bu unsurun tam olarak nasıl kontrol edileceğidir. Bu soruları yanıtlamanın ardındaki matematiksel teori, dinamik optimizasyonun hatta varyasyon hesabının bir genellemesi kabul edilen optimal kontrol teorisinde cevap bulmuştur. Bu bağlamda optimal kontrol teorisi biyolojik bilimlerden ekonomiye, fizik ve mühendisliğe, yöneylem araştırmasına, işletme yönetimine kadar sayısız alanda uygulama bulmuştur. Ticari havacılıkta, gemi yolculuğunda en iyi yakıt kullanımı, robotikte teknolojik bir görev için harcanan zaman ve enerjinin verimi yahut insan popülasyonundaki bir enfeksiyonu yok etmeye veya en aza indirmeye yönelik makul stratejinin belirlenmesi gibi problemlerde kontrollerin uygun şekilde adapte edilmesiyle fiziksel sürecin işleyişi geliştirilebilir ve iyileştirilebilir. Optimal kontrolün temel amacı bir sürecin bazı fiziksel kısıtlamalarını karşılarken aynı zamanda seçilen bir performans kriterini (performans indeksi, maliyet fonksiyonu, amaç fonksiyoneli) optimize (maksimize veya minimize) eden kontrolleri belirlemektir [26]. Bir optimal kontrol probleminin formülasyonu için öncelikle ele alınan dinamik sistemin davranışı, bir *durum değişkeni/değişkenleri* ile tanımlanır. Bu sisteme etki etmesi öngörülen *kontrol fonksiyonu/fonksiyonları* belirlenir. Kontrol, diferansiyel denklemler ile tanımlanan sisteme girer ve durum dinamiklerini etkiler. *Performans indeks*, problemin amacı doğrultusundaki gereken maliyeti gösterir. Durum sistemi ve kontrol fonksiyonları üzerindeki sınır koşulları ile fiziksel kısıtlamalar ifade edilir.

Klasik optimal kontrol problemlerinin genel bir formu olarak görülen kesirli optimal kontrol problemleri (KOKP) son yıllarda oldukça ilgi gören araştırma alanlarından. KOKP, sistem

dinamikleri kesirli diferansiyel denklemler tarafından karakterize edilen veya performans indeks bir kesirli operatör ile ifade edilenlere denir. KOKP için ilk çalışmalar Agrawal ve çalışma arkadaşlarına aittir. 2004'te Agrawal [74], RL kesirli türevi ile KOKP için genel bir formülasyon, 2007'de Agrawal ve Baleanu [75] yine RL türevi ile KOKP için Hamilton formülasyonu sunar. Bu çalışmalarda bir durum ve bir kontrol değişkeni ve bir kesirli durum denklemi dikkate alınmıştır. Ayrıca, durum değişkeni yalnızca başlangıç noktasında belirtilir. 2008'de Caputo türevi ile KOKP Frederico ve Torres tarafından [76] çalışmasında ele alınmıştır. Bu makalede, KOKP'leri n durum değişkeni ve m kontrol (n kesirli durum denklemi, $n \in \mathbb{N}$) ile formüle edilmiştir. Ayrıca singüler olmayan çekirdeğe sahip yeni türevi içeren optimal kontrol çalışması [77] ile 2017'de Baleanu ve diğ. tarafından, Atangana-Baleanu türevi ile KOKP formülasyonunu sunmaktadır. Tez çalışmasında ele alınacak sistem dinamikleri Atangana-Baleanu kesirli operatörü ile tanıtılarak optimal kontrol problemini araştırmayı hedeflediği için oluşturulacak problem şeması aşağıdaki gibidir:

$x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ ve $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T \in \mathbb{R}^m$ sırasıyla sistemin durum ve kontrol vektörleri, $t \in [t_0, t_f] \in \mathbb{R}$ zaman değişkeni olmak üzere kesirli dinamik sistem

$${}^{ABC}D_t^\alpha x(t) = f(x(t), u(t), t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (2.31)$$

burada ${}^{ABC}D_t^\alpha x(t)$ ifadesi Atangana-Baleanu kesirli türevini, f bir vektör fonksiyonu ve $x_0 \in \mathbb{R}^n$ başlangıç durum vektörünü belirtir. Şimdi performans indeksi oluşturmak için sistemin amacı doğrultusunda, optimize edildiğinde istendik şekilde çalıştığını gösteren matematiksel bir ifade tanımlanmaya çalışılır. Bir performans indeksi seçmek, sistemin fiziksel gereksinimlerinin matematiksel terimlere dönüştürülmesidir. (2.31) kesirli dinamik sistemi için performans indeks

$$J = \int_{t_0}^{t_f} L(x(t), u(t), t) dt \quad (2.32)$$

burada L bir skaler fonksiyondur. (2.31) denklemini ile tanımladığımız sistem için (2.32) performans indeksini (maliyet fonksiyonelini) en aza indiren optimal kontrol $u(t)$ fonksiyonunu bulmak, problemimizi oluşturur.

Oluşturulan optimal kontrol problemi için temel teknik, optimal kontrol ve durum sisteminin karşılaması gereken "gerekli koşullar" kümesini çözmektir. Burada optimal çözümü bulmak için gerekli koşulları gösteren ve bir dönüm noktası kabul edilen sonuçtan yararlanır. 1950'lerin ortalarında Lev Pontryagin ve çalışma arkadaşları tarafından geliştirilen ünlü "*Pontryagin'in maksimum ilkesi*". Bu koşullar aşağıdaki gibi tanımlanan Hamilton fonksiyonundan yararlanılarak elde edilir.

$$\mathcal{H}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda(t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.33)$$

Pontryagin, diferansiyel denklemini performans indekse adapte etmek için "yardımcı durum" fonksiyonları fikrini ortaya atmıştır. (2.33) deki $\lambda(t)$ fonksiyonu adjoint değişkeni olarak da bilinen yardımcı durum fonksiyonudur. Yardımcı durum fonksiyonları, Lagrange çarpanlarıyla benzer bir amaca sahiptir; bu, maksimize edilecek veya minimize edilecek değişkenlerin fonksiyonuna kısıtlamalar ekler.

2.3.1 Teorem (Pontryagin'in Maksimum İlkesi): Eğer $u^*(t)$ ve $x^*(t)$, (2.31) ve (2.32) ile verilen problem için optimal çözüm ise, her t ($t_0 \leq t \leq t_f$) zamanındaki tüm u kontrol fonksiyonları için

$$\mathcal{H}(x^*(t), \lambda(t), u(t), t) \leq \mathcal{H}(x^*(t), \lambda(t), u^*(t), t) \quad (2.34)$$

biçiminde parçalı türevlenebilir bir $\lambda(t)$ yardımcı durum fonksiyonu vardır ve \mathcal{H} olarak gösterilen Hamilton fonksiyonu

$$\mathcal{H}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = L(x(t), u(t), t) + \lambda(t) f(x(t), u(t), t) \quad (2.35)$$

biçimindedir. Buradan gerekli optimallik koşulları

$${}^{ABC}D_{t_0}^\alpha x(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \lambda}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = f(x(t), u(t), t), \quad (\text{Durum denklemi}) \quad (2.36)$$

$${}^{ABC}D_{t_f}^\alpha \lambda(t) = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x}(x(t), \lambda(t), u(t), t), \quad (\text{Yardımcı durum denklemi}) \quad (2.37)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial u}(x(t), \lambda(t), u(t), t) = 0. \quad (\text{Kontrol denklemi}) \quad (2.38)$$

elde edilir.

Performans indeksi maksimize veya minimize eden kontroller arasında ayırım yapmak için içbükeylik koşullarını da değerlendirebiliriz. Eğer u^* da,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} < 0 \quad (2.39)$$

ise maksimizasyon problemi,

$$\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial u^2} > 0 \quad (2.40)$$

ise minimizasyon problemini oluşturur.

3. ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞI DİNAMİKLERİNİN MODELLENMESİ VE SİSTEM ANALİZİ

3.1 Model Formülasyonu

Bir hastalığın epidemiyolojisini analiz etmek için kullanılan en iyi teknik matematiksel modellemedir. Tezin ilk amacı çocukluk çağında pnömoni halk arasında zatürre olarak bilinen hastalığın yayılım dinamiklerini kesirli operatör kullanarak optimal önlem ve tedavi stratejilerinden oluşan model ile tanıtmak ve bunu takiben model analizini incelemektir. Bu tez çalışması ile geliştirilecek olan model, literatürde Legesse ve diğ. tarafından 2022 yılında klasik türev kullanılarak önerilmiştir [40]. Referans alınan çalışmada model analizi kapsamında denge noktaları ile R_0 temel üreme sayısı hesaplanmış, lokal ve global kararlılık analizi yapılmıştır.

[40] ile önerilen model aşağıdaki gibidir :

$$\left. \begin{aligned} \frac{dS_1}{dt} &= (1-\pi)b - (1-q)\phi S_1 + \delta R - \mu S_1 \\ \frac{dS_2}{dt} &= \pi b - (1-q)k\phi S_2 - \mu S_2 \\ \frac{dC}{dt} &= (1-q)\rho\phi S_1 + (1-q)k\rho\phi S_2 + (1-p)\eta I - (\sigma + \gamma + \mu)C \\ \frac{dI}{dt} &= (1-q)(1-\rho)\phi S_1 + (1-q)(1-\rho)k\phi S_2 + \gamma C - (\eta + \varepsilon + \mu)I \\ \frac{dR}{dt} &= \sigma C + p\eta I - (\mu + \delta)R \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

(3.1) modeli ile 5 yaşın altındaki çocuk popülasyonunda bulaşıcı pnömoni hastalığının dinamik davranışı ifade edilmektedir. Önerilen model için t zamanındaki toplam popülasyon $N(t)$, hastalık durumlarına göre beş kompartımana ayrılmıştır.

$$N(t) = S_1(t) + S_2(t) + C(t) + I(t) + R(t) \quad (3.2)$$

Bu kompartımanlar Őu Şekildedir: Emzirilmeyen duyarlı ocuklar $S_1(t)$, emzirilen duyarlı ocuklar $S_2(t)$, taşıyıcı ocuklar $C(t)$, enfekte ocuklar $I(t)$ ve iyileşen ocuklar $R(t)$ olarak ifade edilmiştir.

(3.1) modeli için parametre tanımlarını ve model geçiŐlerini açıklayalım.

Dikkat edilirse modeldeki duyarlı ocuk sınıfı emzirilen ve emzirilmeyen çocuklar olarak iki sınıfa ayrılmıŐtır. Emzirilen duyarlı ocukların ($S_2(t)$), emzirilmeyen duyarlı ocuklara ($S_1(t)$) kıyasla pnömoniye karŐı daha iyi bağıŐıklıĝa sahip olduĝu dűŐüncesi esas alınmıŐtır. Bu nedenle, emzirilmeyen duyarlı ocuklar ($S_1(t)$), emzirilen duyarlı ocuklara ($S_2(t)$) kıyasla daha yüksek oranda enfekte popűlasyonlarla ($C(t)$ ve $I(t)$) temas halinde enfekte olacaktır. Bu durumda, emzirilmeyen duyarlı ocuklar ($S_1(t)$) için enfeksiyon kapma oranı, emzirilen duyarlı ocuklara ($S_2(t)$) gűre daha yüksek kabul edilmelidir. Duyarlı bir ocuĝun, enfekte olmuŐ bir çocukla etkili temasa geçmesi durumunda pnömoni ile enfekte olabileceĝi oran enfeksiyonun gűcűnű tanımlar. ($S_1(t)$) ve ($S_2(t)$) sınıfları için enfeksiyon gűleri sırasıyla $\phi = \psi \left(\frac{I + \omega C}{N} \right)$ ve $k\phi$ olarak verilmiŐtir ve $\phi \geq 0$ dir. Burada k emzirilen çocukların, emzirilmeyenlere kıyasla enfeksiyondaki azalmasını temsil eder ve $0 \leq k \leq 1$ dir. β temas oranını ve κ temas gerçekleŐtikten sonra hastalıĝın bulaŐma oranını (etkin temas oranı) temsil etmek üzere bileŐik bir parametre $\psi = \kappa\beta \geq 0$ olarak verilmiŐtir. ϕ terimindeki $\left(\frac{I + \omega C}{N} \right)$ ifadesi popűlasyondaki enfekte ve taŐıyıcı bireylerin yoĝunluĝunu yani prevalansı temsil eder. Buradaki ω taŐıyıcı bireylerin hastalıĝı bulaŐtırabilirliĝindeki azalma oranıdır. Modelde gűrűldűĝű üzere belirli bir popűlasyonda ve zamanda hastalık oluŐumunu ifade eden insidans oranı modelde lineer deĝildir. İnsidans oranının lineer olmaması, bulaŐıcı hastalık modellerinin gerçek yapısı ile daha iyi űrtűsmektedir.

Modelde emzirilmeyen veya emzirilen çocukların bir kez enfekte olup iyileŐtiklerinde doĝuŐtan gelen bağıŐıklıklarını geri kazanamayacakları varsayılmıŐtır. Dolayısıyla iyileŐen çocuklar yeniden enfekte olabilirler ve enfeksiyon dűneminde bağıŐıklıklarının bir kısmını kaybettiklerinden bağıŐıklıklarının dűŐűk olması nedeniyle emzirilmeyen duyarlı sınıfa girerler.

Modelin temel özelliklerinin ardından geri kalan parametreler şunlardır: b , çocukların popülasyona katılım oranını temsil eder, bu durum doğum veya göç ile sağlanabilir. π , emzirilme oranı ve $1-\pi$ popülasyona girerken emzirilmeye karşı hassas kalan yani emzirilmeden popülasyona dahil edilen çocukların oranıdır. Her iki duyarlı sınıftan çocuklar, etkin teması göre enfeksiyon gücüyle enfekte olacaktır. Bunlardan ρ oran kadar taşıyıcı çocuk sınıfı $C(t)$ ye ve $1-\rho$ oran kadar enfekte çocuk sınıfı $I(t)$ ye geçiş yapabilir. Toplam çocuk nüfusu, μ ve ε olmak üzere iki farklı oranda azalmaktadır; burada μ , tüm kompartıman popülasyonlarını azaltan doğal ölüm oranını, ε ise pnömoni kaynaklı ölüm oranıdır ve yalnızca enfekte çocuk sınıfın popülasyonunu azaltır. Ek olarak, taşıyıcı çocuk sınıfı hastalık belirtisi gösteriyorsa, o zaman γ oranıyla enfekte çocuk sınıfa geçebilir ve kişi başına σ oranı kadar doğal bağışıklık kazanabilirse iyileşen çocuk sınıfı $R(t)$ geçebilir. Enfekte bölmedeki çocuklar η oranında doğal bağışıklıkları ile iyileşme gösterebilirler. Bunlar ya p oranında iyileşen sınıfına geçerler ya da $1-p$ oranında taşıyıcı sınıfa geçerek hastalığı kamufle ederler. Doğal bağışıklıkları ile iyileşen çocuklar doğduklarındaki bağışıklıklarını geri kazanamadıkları için δ oranında duyarlı çocuk sınıfına yeniden katılabilirler. Son olarak q oranı, çocuklar için hijyen etkinliğini temsil eder.

Tezin temel amacı sistem dinamikleri ve parametreleri tanımlanan (3.1) modeli için kesirli optimal kontrol problemi tasarlamaktır. Bunun için öncelikle kesirli operatörlerin gerçek dünya problemlerini tanımlamadaki faydaları göz önüne alınarak referansta tamsayı mertebeden verilen diferansiyel denklemleri Caputo anlamında Atangana-Baleanu kesirli türevini kullanarak genelleştiriyoruz. Atangana-Baleanu kesirli operatörünün seçimi, diğer kesirli operatörlere kıyasla yerel olmayan ve singüler olmayan çekirdeğindeki avantajlarından kaynaklanmaktadır. Salgın modellerin çaprazlama özelliği bu operatör aracılığıyla daha iyi açıklanabilmektedir. Diğer bir avantajı, Caputo ve Caputo-Fabrizio gibi diğer kesirli operatörlere göre daha fazla hassasiyet ve daha az enfeksiyon yakalama yeteneğidir. Bu modeli geliştirmenin amacı, kesirli mertebeden türevin hastalık dinamikleri üzerindeki etkisini incelemek ve sonrasında kontrol stratejisini belirlemektir. Optimal kontrol analizinin, insan popülasyonundaki bir enfeksiyonu yok etmeye veya en aza indirmeye yönelik makul kontrol stratejileri sağlamak için çok etkili bir araç olduğu bilinmektedir. Birçok araştırmacı, hastalıkları ortadan kaldırmadaki davranış dinamiklerini anlamak ve hızlı sonuçlar elde etmek için kesirli optimal kontrol problemlerini uygulamıştır. Bu nedenle KOKP'ler, zaman belleği ile ilgili biyolojik sistemleri modelleme ve analiz

etmede potansiyel olarak en esnek araç haline gelmiştir. Bu tezin konusu olan çocukluk çağında pnömoni hastalığının önlenmesi ve tedavisi doğrultusunda dört optimal kontrol fonksiyonunu sisteme adapte ediyoruz. Kontrol fonksiyonları

- $u_1(t)$: Beslenme ve çevresel yaşam koşullarını iyileştirme; hijyen, sanitasyon
- $u_2(t)$: Aşılama
- $u_3(t)$: Test-tarama
- $u_4(t)$: Tedavi

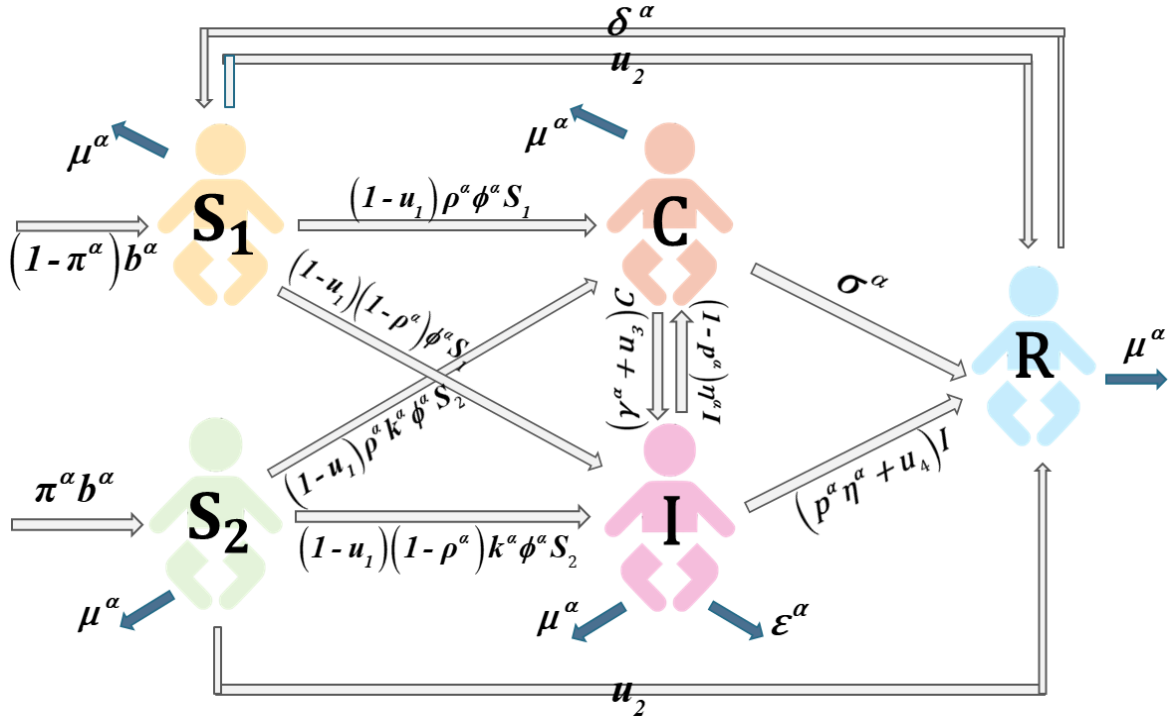
temsil etmek üzere, Lebesgue ölçülebilir olan kabul edilebilir kontrol fonksiyonları kümesi

$$U_{ad} = \{u_i(t) \in L^2[0, t_f] : u_i(t) \in [0, 1], \forall t \in [0, t_f], i = 1, 2, 3, 4\} \quad (3.3)$$

biçiminde tanımlanır. Model için dikkate alınan bir diğer önemli unsur ise kesirli operatörler ile tanımlanan sistemlerde boyut uygunluğu veya birim uygunluğu olarak da görebileceğimiz meselesidir. Sistemin sol tarafında verilen türevlerdeki zamanın α boyutları, sağ tarafındaki parametreler için de uygulayarak aynı boyutlarda çalıştığımızdan emin oluyoruz. Tüm bu öngörülecek gelişimler doğrultusunda genelleştirdiğimiz sistem:

$$\left. \begin{aligned} {}^{ABC}_0 D_t^\alpha S_1(t) &= (1 - \pi)^\alpha b^\alpha - (1 - u_1(t)) \phi^\alpha S_1(t) + \delta^\alpha R(t) - \mu^\alpha S_1(t) - u_2(t) S_1(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha S_2(t) &= \pi^\alpha b^\alpha - (1 - u_1(t)) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) - \mu^\alpha S_2(t) - u_2(t) S_2(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha C(t) &= (1 - u_1(t)) \rho^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1 - u_1(t)) \rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \\ &\quad + (1 - p^\alpha) \eta^\alpha I(t) - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3(t)) C(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha I(t) &= (1 - u_1(t)) (1 - \rho)^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1 - u_1(t)) (1 - \rho) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \\ &\quad + (\gamma^\alpha + u_3(t)) C(t) - (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4(t)) I(t) \\ {}^{ABC}_0 D_t^\alpha R(t) &= \sigma^\alpha C(t) + p^\alpha \eta^\alpha I(t) - (\mu^\alpha + \delta^\alpha) R(t) \\ &\quad + u_2(t) S_1(t) + u_2(t) S_2(t) + u_4(t) I(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Ayrıca Şekil 3.1 ile genelleştirilen sistem (3.4) için çocuk kompartımanları arasındaki geçişi gösteren ve nispeten anlam kolaylığı yaratan akış diyagramı verilmiştir.



Şekil 3.1: Çocukluk çağında pnömoni yayılımının akış diyagramı.

3.2 Pozitif Çözüm Bölgesi ve Sınırlılık

Bu bölümde (3.4) sistemi için çözümlerin pozitif ve sınırlı olan uygun bölgede yer aldığını garantiliyoruz. Bu özellikler çözümlerin bölgede iyi tanımlı, biyolojik açıdan anlamlı bir sistem olduğunu gösterdiği için oldukça önemlidir.

Önerilen (3.4) modeli için popülasyon aşağıda verilen negatif olmayan başlangıç koşulları ile ele alınmaktadır.

$$S_1(0) = S_{10} > 0,$$

$$S_2(0) = S_{20} > 0,$$

$$C(0) = C_0 \geq 0, \tag{3.5}$$

$$I(0) = I_0 \geq 0,$$

$$R(0) = R_0 \geq 0.$$

Oluşturulan bu başlangıç probleminin çözümlerinin de negatif bölgede kalmaması gerekir. Bu nedenle pozitif invaryant kümesi incelenerek pozitif çözüm bölgesi oluşturulur.

Teorem 3.2.1: $\Omega_+ = \{(S_1, S_2, C, I, R) \in \mathbb{R}^5; S_1 \geq 0, S_2 > 0, C \geq 0, I \geq 0, R \geq 0\}$ bölgesi (3.4) ile verilen sistem için pozitif invaryant kümedir.

İspat: (3.4) sistemi için aşağıdaki eşitsizlikler açıkça görülebilir:

$${}^{ABC}D_t^\alpha S_1 \Big|_{S_1=0} = (1-\pi)^\alpha b^\alpha + \delta^\alpha R$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha S_2 \Big|_{S_2=0} = \pi^\alpha b^\alpha$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha C \Big|_{C=0} = (1-u_1) \rho^\alpha \phi^\alpha S_1 + (1-u_1) \rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha S_2 + (1-p^\alpha) \eta^\alpha I \tag{3.6}$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha I \Big|_{I=0} = (1-u_1)(1-\rho)^\alpha \phi^\alpha S_1 + (1-u_1)(1-\rho) k^\alpha \phi^\alpha S_2 + (\gamma^\alpha + u_3) C$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha R \Big|_{R=0} = \sigma^\alpha C + p^\alpha \eta^\alpha I + u_2 S_1 + u_2 S_2 + u_4 I$$

Eğer (3.6)'dan $(S_1(0), S_2(0), C(0), I(0), R(0)) \in \Omega_+$ ise azalmayan fonksiyon olduklarından $(S_1(t), S_2(t), C(t), I(t), R(t))$ çözümü $S_1 = 0, S_2 = 0, C = 0, I = 0, R = 0$

hiperdüzlemlerinden Ω_+ içinde kalır. Böylece çözümlerin Ω_+ bölgesinde pozitif invaryant olduğu ispatlanmıştır.

Şimdi aşağıda verilen teorem ile pozitif değişmezliği kanıtlanan uygun bölgenin sınırlılığının gösterelim.

Teorem 3.2.2:

$$\Omega = \left\{ (S_1, S_2, C, I, R) \in \mathbb{R}^5; S_1 \geq 0, S_2 > 0, C \geq 0, I \geq 0, R \geq 0, S_1 + S_2 + C + I + R \leq \frac{b^\alpha}{\mu^\alpha} \right\}$$

olarak ifade edilen Ω bölgesi, sistem (3.4) için sınırlıdır.

İspat: Sistem (3.4)'te verilen beş denklem taraf tarafa toplandığında, (3.2)'de verilen toplam popülasyon için aşağıdakini elde ederiz.

$${}^{ABC}D_t^\alpha N(t) = b^\alpha - \mu^\alpha (S_1(t) + S_2(t) + C(t) + I(t) + R(t)) - \varepsilon^\alpha I(t) \quad (3.7)$$

Yine (3.2) ile (3.7) tekrar ifade edilirse

$${}^{ABC}D_t^\alpha N(t) = b^\alpha - \mu^\alpha N(t) - \varepsilon^\alpha I(t) \quad (3.8)$$

(3.8) denkleminde aşağıdaki açıkça görülür.

$${}^{ABC}D_t^\alpha N(t) \leq b^\alpha - \mu^\alpha N(t) \quad (3.9)$$

Bu eşitsizliğin Laplace dönüşümü

$$\mathcal{L} \left[{}^{ABC}D_t^\alpha N(t) \right] (s) = \frac{b^\alpha}{s} - \mu^\alpha \mathcal{L} [N(t)] (s), \quad (3.10)$$

$$\frac{B(\alpha)}{1-\alpha} \frac{s^\alpha \bar{N}(s) - s^{\alpha-1} N(0)}{s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}} + \mu^\alpha \leq \frac{b^\alpha}{s} - \mu^\alpha \bar{N}(s), \quad (3.11)$$

Burada $\bar{N}(s) = [N(t)](s)$ ve $N(0)$ başlangıçtaki toplam çocuk nüfusunu temsil eder.

Ardından $\bar{N}(s)$ 'yi yalnız bırakırsak,

$$\left(\frac{B(\alpha)s^\alpha}{(1-\alpha)\left(s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)} + \mu^\alpha \right) \bar{N}(s) \leq b^\alpha s^{\alpha-(\alpha+1)} + \frac{B(\alpha)s^{\alpha-1}N(0)}{(1-\alpha)\left(s^\alpha + \frac{\alpha}{1-\alpha}\right)}, \quad (3.12)$$

$$\bar{N}(s) \leq \frac{b^\alpha [(1-\alpha)s^\alpha + \alpha] s^{\alpha-(\alpha+1)} + B(\alpha)s^{\alpha-1}N(0)}{B(\alpha)s^\alpha + \mu^\alpha (1-\alpha)s^\alpha + \alpha\mu^\alpha}, \quad (3.13)$$

$$\begin{aligned} \bar{N}(s) &\leq \frac{b^\alpha \alpha}{B(\alpha) + \mu^\alpha (1-\alpha)} \frac{s^{\alpha-(\alpha+1)}}{s^\alpha + \frac{\alpha\mu^\alpha}{B(\alpha) + \mu^\alpha (1-\alpha)}} \\ &+ \frac{s^{\alpha-1} [b^\alpha (1-\alpha) + B(\alpha)N(0)]}{s^\alpha [(1-\alpha)\mu^\alpha + B(\alpha)] + \alpha\mu^\alpha} \end{aligned} \quad (3.14)$$

(3.14)'e ters Laplace dönüşümü uygulandığında

$$\begin{aligned} N(t) &\leq \frac{b^\alpha \alpha t^\alpha}{(1-\alpha)\mu^\alpha + B(\alpha)} E_{\alpha, \alpha+1} \left(-\frac{\alpha\mu^\alpha t^\alpha}{(1-\alpha)\mu^\alpha + B(\alpha)} \right) \\ &+ \left[\frac{b^\alpha (1-\alpha) + B(\alpha)N(0)}{(1-\alpha)\mu^\alpha + B(\alpha)} \right] E_{\alpha, 1} \left(-\frac{\alpha\mu^\alpha t^\alpha}{(1-\alpha)\mu^\alpha + B(\alpha)} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

elde edilir. (2.14) ile ifade ettiğimiz iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu tanımından

$$N(t) \leq \frac{b^\alpha}{\mu^\alpha} \quad (3.16)$$

elde edilir. Buradaki iki parametrelili Mittag-Leffler fonksiyonu $\forall t > 0$ için sınırlıdır ve asimptotik bir davranışa sahiptir. (3.16) eşitsizliğinden, $t \rightarrow \infty$ için $N(t) \leq \frac{b^\alpha}{\mu^\alpha}$ dır.

Böylece (3.4) sisteminin toplam çocuk popülasyonunu ifade eden $N(t)$ ile çözümlerinin Ω bölgesinde sınırlı olduğu ispatlanmıştır.

3.3 Denge Noktaları ve Temel Üreme Sayısı

Bu bölümde (3.4) sisteminin öncelikle hastalısız denge noktası ile endemik denge noktası, ardından salgının seyri hakkında bilgi veren bir eşik değer olan temel üreme sayısı bulunacaktır.

Öncelikle (3.4) sistemini aşağıdaki gibi gösterelim:

$${}^{ABC}D_t^\alpha S_1(t) = g_1(S_1, S_2, C, I, R, t, u)$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha S_2(t) = g_2(S_1, S_2, C, I, R, t, u)$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha C(t) = g_3(S_1, S_2, C, I, R, t, u)$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha I(t) = g_4(S_1, S_2, C, I, R, t, u)$$

$${}^{ABC}D_t^\alpha R(t) = g_5(S_1, S_2, C, I, R, t, u)$$

Burada

$$g_1(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = (1 - \pi)^\alpha b^\alpha - (1 - u_1(t)) \phi^\alpha S_1(t) + \delta^\alpha R(t) \\ - \mu^\alpha S_1(t) - u_2(t) S_1(t)$$

$$g_2(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = \pi^\alpha b^\alpha - (1 - u_1(t)) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) - \mu^\alpha S_2(t) - u_2(t) S_2(t)$$

$$g_3(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = (1 - u_1(t)) \rho^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1 - u_1(t)) \rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \\ + (1 - p^\alpha) \eta^\alpha I(t) - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3(t)) C(t)$$

$$g_4(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = (1 - u_1(t)) (1 - \rho)^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1 - u_1(t)) (1 - \rho) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \\ + (\gamma^\alpha + u_3(t)) C(t) - (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4(t)) I(t)$$

$$g_5(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = \sigma^\alpha C(t) + p^\alpha \eta^\alpha I(t) - (\mu^\alpha + \delta^\alpha) R(t) \\ + u_2(t) S_1(t) + u_2(t) S_2(t) + u_4(t) I(t)$$

Burada (3.4) sisteminin denge noktaları

$$g_1(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = 0 \quad (3.17)$$

$$g_2(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = 0 \quad (3.18)$$

$$g_3(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = 0 \quad (3.19)$$

$$g_4(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = 0 \quad (3.20)$$

$$g_5(S_1, S_2, C, I, R, t, u) = 0 \quad (3.21)$$

denklemlerinin çözülmesiyle elde edilir.

3.3.1 Hastaliksız Denge Noktası

Hastaliksız denge noktası, popülasyonda pnömoni enfeksiyonunun var olmadığı durumu ifade eder. Yani $I = 0$ 'dır ve dolayısıyla $C = R = 0$ olması gerektiği açıktır. Hastaliksız denge noktasını bulmak için (3.17)-(3.21) eşitliklerinden I, C, R durum değişkenlerinin yerine sıfır yazılmalıdır. Buradan E_0 ,

$$E^0 = (S_1^0, S_2^0, C^0, I^0, R^0) = \left(\frac{(1-\pi)^\alpha b^\alpha}{\mu^\alpha}, \frac{\pi^\alpha b^\alpha}{\mu^\alpha}, 0, 0, 0 \right) \quad (3.22)$$

hastaliksız denge noktası elde edilmiş olur.

3.3.2 Endemik Denge Noktası

(3.4) sisteminin (3.22) dışında bir diğer denge noktası olan endemik denge noktaları popülasyonda pnömoni enfeksiyonun varlığındaki durumu ifade eder. Bu denge noktasını bulmak için aynı şekilde (3.17)-(3.21) arasındaki eşitlikler çözülmelidir. E^* endemik denge noktası aşağıdaki şekildedir:

$$E^* = (S_1^*, S_2^*, C^*, I^*, R^*) \quad (3.23)$$

$$S_1^* = \frac{(1-\pi)^\alpha b^\alpha + \delta^\alpha R^*}{(1-u_1)\phi^\alpha + \mu^\alpha + u_2},$$

$$S_2^* = \frac{\pi^\alpha b^\alpha}{(1-u_1)k^\alpha \phi^\alpha + \mu^\alpha + u_2},$$

$$C^* = \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \phi^\alpha (b^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) + \delta^\alpha R^*) + (1-p^\alpha)\eta^\alpha I^* A_1 A_2}{A_1 A_2 A_3},$$

$$I^* = \frac{(1-u_1)\phi^\alpha (b^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) + \delta^\alpha R^*) ((1-\rho^\alpha) A_3 + \rho^\alpha A_5)}{A_1 A_2 (A_3 A_4 - (1-p^\alpha)\eta^\alpha A_5)},$$

$$R^* = \frac{\sigma^\alpha C^* + (p^\alpha \eta^\alpha + u_4) I^* + u_2 (S_1^* + S_2^*)}{\mu^\alpha + \delta^\alpha}.$$

Ayrıca buradaki

$$\begin{aligned}
A_1 &= (1-u_1)\phi^\alpha + \mu^\alpha + u_2 \\
A_2 &= (1-u_1)k^\alpha\phi^\alpha + \mu^\alpha + u_2 \\
A_3 &= \sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3 \\
A_4 &= \eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4 \\
A_5 &= \gamma^\alpha + u_3
\end{aligned}$$

olarak kısaltma amacıyla alınmıştır.

3.3.3 Temel Üreme Sayısı

(3.4) sisteminin temel üreme sayısı hesaplanırken [78] takibinde yeni nesil matris tekniği kullanılacaktır. Bu teknik ile öncelikle ihtiyaç duyulacak \mathcal{F} ve \mathcal{V} matrisleri oluşturulur. \mathcal{F} kompartımanlarda yeni enfeksiyonların ortaya çıkma oranını gösterirken, \mathcal{V} kompartımanlar arasındaki geçiş oranlarını ifade eden matrislerdir ve aşağıdaki biçimdedirler:

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (1-u_1)\rho^\alpha\phi^\alpha S_1 + (1-u_1)\rho^\alpha k^\alpha\phi^\alpha S_2 \\ (1-u_1)(1-\rho)^\alpha\phi^\alpha S_1 + (1-u_1)(1-\rho)^\alpha k^\alpha\phi^\alpha S_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{V} = \begin{bmatrix} -(1-\pi)^\alpha b^\alpha + (1-u_1)\phi^\alpha S_1 - \delta^\alpha R + \mu^\alpha S_1 + u_2 S_1 \\ \pi^\alpha b^\alpha - (1-u_1)k^\alpha\phi^\alpha S_2 - \mu^\alpha S_2 - u_2 S_2 \\ -(1-p^\alpha)\eta^\alpha I + (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3)C \\ -(\gamma^\alpha + u_3)C + (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4)I \\ -\sigma^\alpha C - p^\alpha\eta^\alpha I + (\mu^\alpha + \delta^\alpha)R - u_2 S_1 - u_2 S_2 - u_4 I \end{bmatrix}$$

Yeni nesil matris tekniğine göre \mathcal{FV}^{-1} matrisinin spektral yarıçapı temel üreme sayısını hesaplamamızı sağlayacaktır. Bunun için \mathcal{F} ve \mathcal{V} matrislerini (3.22)'de ifade edilen

hastaliksız denge noktasında \mathcal{F}_0 ve \mathcal{V}_0 olarak oluşturduktan sonra, \mathcal{F}_0 ve \mathcal{V}_0^{-1} matrislerinin çarpımının en büyük özdeğeri hesaplanır ve daha sonra R_0 şu şekilde elde edilir:

$$R_0 = \frac{(1-u_1)\kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha)(\gamma^\alpha + \mu^\alpha - \mu^\alpha \rho^\alpha + \sigma^\alpha - \rho^\alpha \sigma^\alpha + u_3 + A\omega^\alpha)}{(\gamma^\alpha + \mu^\alpha + \rho^\alpha + u_3)(\mu^\alpha + u_4 + \varepsilon^\alpha) + \eta^\alpha (\mu^\alpha + \sigma^\alpha + p^\alpha (\gamma^\alpha + u_3))} \quad (3.24)$$

Buradaki $A = (\eta^\alpha + \eta^\alpha p^\alpha (\rho^\alpha - 1) + \rho^\alpha (\varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4))$ 'dir.

3.4 Yerel Kararlılık Analizi

Bu bölümde (3.4) ile kesirli mertebeden tanımladığımız ve optimal kontrol fonksiyonları ile geliştirdiğimiz sistemin denge noktaları için yerel kararlılığını inceleyeceğiz. Bunun için daha önce 2. Bölüm'de tamsayı mertebeden sistemler için temel bilgilerini verdiğimiz kararlılık analizi kısmını kesirli sistemler için açıklayalım. Öncelikle kesirli sistemlerin denge noktaları tamsayı sistemlerin denge noktaları ile aynıdır. Değişen durum sistemler arasındaki kararlılık bölgeleridir.

Başlangıç koşulları $x(t_0) = x_0$ olan herhangi bir kesirli sistemin genel formu

$$D^\alpha x(t) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3.25)$$

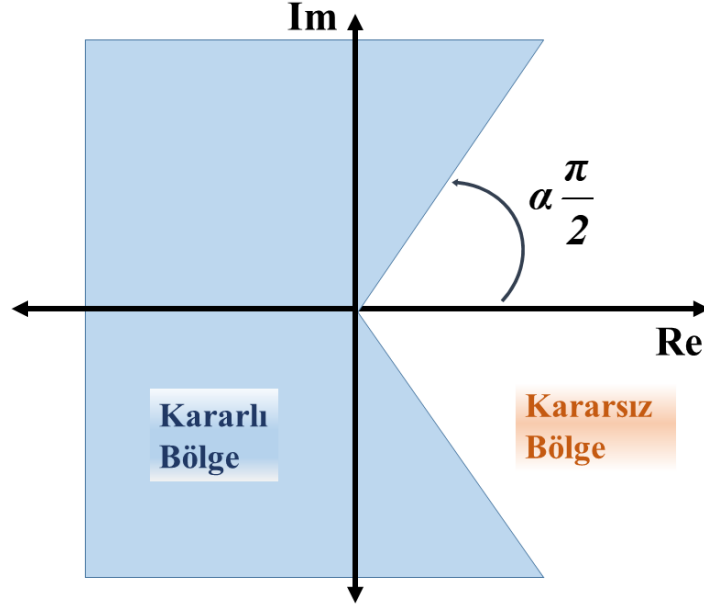
olmak üzere kararlılık bölgesini veren lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 3.4.1: Lineer olmayan $D_t^\alpha x = f(x)$ sisteminin bir denge noktası \bar{x} olmak üzere, $J(\bar{x})$ Jacobian matrisinin tüm λ özdeğerleri için aşağıdaki koşul sağlanırsa

$$|\arg \lambda| > \alpha \frac{\pi}{2} \quad (3.26)$$

\bar{x} denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

Şekil 3.2 kesirli bir sistem için kararlılık bölgesini gösterir.



Şekil 3.2: Kesirli mertebeden bir sistemin kararlılık bölgesi [79].

Şimdi (3.4) sistemimiz için (3.22) ile ifade edilen hastaliksız denge noktasındaki yerel kararlılığını gösteren aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.4.1: (3.4) ile verilen kesirli mertebeden pnömoni modeli E_0 hastaliksız denge noktasında aşağıdaki koşullar sağlandığında asimptotik kararlıdır:

$$\begin{aligned} (1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) \omega^\alpha &< (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3) \\ (1-u_1)(1-\rho^\alpha) \kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) &< (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4) \end{aligned} \quad (3.27)$$

İspat: (3.4) sisteminin (3.22) hastaliksız denge noktasındaki Jakobiyen matrisi $J_{(E_0)}$

$$= \begin{bmatrix} -\mu^\alpha - u_2 & 0 & -(1-u_1)\kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi)^\alpha \omega^\alpha & -(1-u_1)\kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi)^\alpha & \delta^\alpha \\ 0 & -\mu^\alpha - u_2 & -(1-u_1)k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha \pi^\alpha \omega^\alpha & -(1-u_1)k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha \pi^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 & 0 \\ 0 & 0 & B_3 & B_4 & 0 \\ u_2 & u_2 & \sigma^\alpha & p^\alpha \eta^\alpha + u_4 & -(\mu^\alpha + \delta^\alpha) \end{bmatrix}$$

Burada

$$\begin{aligned}
B_1 &= (1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha)\omega^\alpha - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3) \\
B_2 &= (1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) + (1-p^\alpha)\eta^\alpha \\
B_3 &= (1-u_1)(1-\rho^\alpha)\kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha)\omega^\alpha + \gamma^\alpha + u_3 \\
B_4 &= (1-u_1)(1-\rho^\alpha)\kappa^\alpha \beta^\alpha (1-\pi^\alpha + k^\alpha \pi^\alpha) - (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4)
\end{aligned}$$

olmak üzere $J_{(E_0)}$ matrisinin özdeğerleri $|J_{(E_0)} - \lambda I| = 0$ ile elde edilen karakteristik polinomu çözülerek hesaplanır. Routh-Hurwitz kriterine göre bu karakteristik polinomun tüm özdeğerleri negatif reel değere sahipse (3.4) sistemi, E_0 hastalıksız denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır. Buradan $J_{(E_0)}$ matrisinin bazı özdeğerleri

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= -(\mu^\alpha + u_2) \\
\lambda_3 &= -(\mu^\alpha + \delta^\alpha)
\end{aligned} \tag{3.28}$$

olarak hesaplanır. (3.28) ile verilen bu özdeğerlerin negatif olduğu aşıkardır. Geriye kalan iki özdeğer polinom bölmesi ile elde edeceğimiz aşağıdaki denklemden hesaplanır.

$$\lambda^2 + A\lambda + B = 0 \tag{3.29}$$

Buradan $A, B > 0$ veya $A^2 - 4B < 0$ koşulunu sağlıyorsa (3.29) denkleminin negatif reel kısımlı iki özdeğeri vardır $\left(\left(|\arg(\lambda_i)| > \frac{\alpha\pi}{2}, i = 4, 5 \right) \right)$. Böylece (3.4) sistemi E_0 hastalıksız denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

Benzer şekilde (3.4) sisteminin (3.23) ile verilen endemik denge noktasındaki Jakobiyen matrisi yardımıyla yerel kararlılık incelemesi yapalım.

Teorem 3.4.2: (3.4) ile verilen kesirli mertebeden pnömoni modeli E^* endemik denge noktası (3.23)'te aşağıdaki koşullar sağlandığında asimptotik kararlıdır:

$$\begin{aligned} \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)(\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I)}{N^2} &< (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3), \\ \frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)\kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)(S_1 + S_2 + C + R - \omega^\alpha C)}{N^2} &< (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4) \end{aligned} \quad (3.30)$$

İspat: (3.4) sisteminin (3.23) endemik denge noktasındaki Jakobiyen matrisi $J_{(E^*)}$

$$J_{(E^*)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & b_{25} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & b_{35} \\ b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

olmak üzere buradaki,

$$b_{11} = -\frac{(1-u_1)\phi^\alpha (S_2 + C + I + R)}{N} - \mu - u_2, \quad b_{12} = \frac{(1-u_1)\phi^\alpha S_1}{N},$$

$$b_{13} = -\frac{(1-u_1)\kappa^\alpha \beta^\alpha S_1 (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I)}{N^2},$$

$$b_{14} = -\frac{(1-u_1)\kappa^\alpha \beta^\alpha S_1 (S_1 + S_2 + C + R - \omega^\alpha C)}{N^2}, \quad b_{15} = \frac{\delta^\alpha + (1-u_1)\phi^\alpha S_1}{N},$$

$$b_{21} = \frac{(1-u_1)k^\alpha \phi^\alpha S_2}{N}, \quad b_{22} = -\frac{(1-u_1)k^\alpha \phi^\alpha (S_1 + C + I + R)}{N} - \mu^\alpha - u_2,$$

$$b_{23} = -\frac{(1-u_1)k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha S_2 (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I)}{N^2},$$

$$b_{24} = -\frac{(1-u_1)k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha S_2 (S_1 + S_2 + C + R - \omega^\alpha C)}{N^2}, \quad b_{25} = \frac{(1-u_1)k^\alpha \phi^\alpha S_2}{N^2},$$

$$b_{31} = \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \phi^\alpha (S_2 + C + I + R - k^\alpha S_2)}{N}, \quad b_{32} = \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \phi^\alpha (k^\alpha (S_1 + C + I + R) - S_1)}{N},$$

$$b_{33} = \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)(\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I)}{N^2} - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3),$$

$$b_{34} = \frac{(1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)((S_1 + S_2 + C + R - \omega^\alpha C))}{N^2} - (1-p^\alpha)\eta^\alpha,$$

$$b_{35} = -\frac{(1-u_1)\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)}{N^2}, \quad b_{41} = \frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)^\alpha \phi^\alpha (S_2 + C + I + R - k^\alpha S_2)}{N},$$

$$b_{42} = \frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)\phi^\alpha (k^\alpha (S_1 + C + I + R) - S_1)}{N^2},$$

$$b_{43} = \frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)\kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)(\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I)}{N^2} + (\gamma^\alpha + u_3),$$

$$b_{44} = \frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)\kappa^\alpha \beta^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)(S_1 + S_2 + C + R - \omega^\alpha C)}{N^2} - (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4),$$

$$b_{45} = -\frac{(1-u_1)(1-\rho^\alpha)\phi^\alpha (S_1 + k^\alpha S_2)}{N}, \quad b_{51} = u_2, \quad b_{52} = u_2,$$

$$b_{53} = \sigma^\alpha, \quad b_{54} = p^\alpha \eta^\alpha + u_4, \quad b_{55} = -(\mu^\alpha + \delta^\alpha).$$

olmak üzere $J_{(E^*)}$ matrisinin özdeğerleri $|J_{(E^*)} - \chi I| = 0$ ile elde edilen karakteristik polinomu çözülerek hesaplanır. Routh-Hurwitz kriterine göre bu karakteristik polinomun tüm özdeğerleri negatif reel değere sahipse (3.4) sistemi, E^* endemik denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır. Buradan $J_{(E^*)}$ matrisinin bazı özdeğerleri

$$\chi_1 = -\frac{(1-u_1)\phi^\alpha (S_2 + C + I + R)}{N} - \mu - u_2,$$

$$\chi_2 = -\frac{(1-u_1)k^\alpha \phi^\alpha (S_1 + C + I + R)}{N} - \mu^\alpha - u_2,$$

$$\chi_3 = -(\mu^\alpha + \delta^\alpha).$$

negatif olduğu aşıkardır. (3.4) sistminin E^* endemik noktasında da asimptotik kararlı olabilmesi için tüm özdeğerlerin negatif olması gerekir. Geriye kalan iki özdeğer polinom bölmesi ile elde edeceğimiz aşağıdaki denklemden hesaplanır.

$$\chi^2 + A\chi + B = 0 \quad (3.32)$$

Buradan $A, B > 0$ veya $A^2 - 4B < 0$ koşulunu sağlıyorsa (3.32) denkleminin negatif reel kısmı iki özdeğeri vardır $\left(\left(\left| \arg(\lambda_i) \right| > \frac{\alpha\pi}{2} \right), i = 4, 5 \right)$. Böylece (3.4) sistemi (3.30) koşulunu sağlarsa E^* endemik denge noktasında yerel asimptotik kararlıdır.

4. ÇOCUKLUK ÇAĞINDA PNÖMONİ HASTALIĞININ OPTİMAL KONTROLÜ

Bu bölümde çocukluk çağında bulaşıcı pnömoni hastalığı için Atangana-Baleanu türev ile geliştirilen (3.4) modelinin optimal kontrol stratejilerini sunacağız. Model için belirli sürede hastalığın enfeksiyon gücünü yavaşlatmasını ve hatta ortadan kaldırmasını sağlayacak dört kontrol fonksiyonu düşünülmüştür. Bunları aşağıdaki gibi detaylıca tekrar hatırlatacak olursak:

- i. $u_1(t)$: Beslenme ve çevresel yaşam koşullarını iyileştirecek koruyucu önlemler; hijyen, sanitasyon
- ii. $u_2(t)$: Pnömoniye karşı duyarlı çocuklara uygulanacak aşılama
- iii. $u_3(t)$: Hastalık yayılımını kontrol altına almak için taşıyıcı çocuklara tarama, test uygulaması
- iv. $u_4(t)$: Hastalığa yakalanan enfekte çocuklar için tedavi

Bu kapsamda problemimizde optimize edilmesi hedeflenen duruma göre performans indeksi, diğer adları ile amaç fonksiyoneli veya maliyet fonksiyoneli aşağıdaki gibi belirlenmiştir:

$$J(S_1, S_2, C, I, R, t, u_i) = \min \int_0^{t_f} \left[C(t) + I(t) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 w_i u_i^2(t) \right] dt, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (4.1)$$

Burada w_i olarak verilen katsayı pozitif ağırlık sabitleridir. İntegral içerisindeki birimleri ve uygulanacak kontrol yöntemlerinden kaynaklı maliyeti dengeleyen bir özelliğe sahiptir.

Şimdi Pontryagin' in Maksimum İlkesi takip edilerek hesaplanan (2.36)-(2.38) arasında verilen optimallik koşullarını belirlemek için Hamilton fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\mathcal{H}(S_1, S_2, C, I, R, u_i, \lambda_i, t) = L(C, I, u_i, t) + \lambda_i(t) {}^{ABC}D_t^\alpha X(t) \quad (4.2)$$

Burada $L(C, I, u_i, t) = C(t) + I(t) + \frac{1}{2}(w_1 u_1^2(t) + w_2 u_2^2(t) + w_3 u_3^2(t) + w_4 u_4^2(t))$ Lagrange

fonksiyonudur. Ayrıca $i = 1, 2, 3, 4, 5$ olmak üzere $u_i(t)$ 'ler kontrol fonksiyonlarını,

$\lambda_i(t)$ 'ler yardımcı durum fonksiyonlarını yani adjoint değişkenleri

$$u_i(t) = (u_1(t), u_2(t), u_3(t), u_4(t), u_5(t))$$

$$\lambda_i(t) = (\lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t), \lambda_4(t), \lambda_5(t))$$

ifade eder.

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & C(t) + I(t) + \frac{1}{2}(w_1 u_1^2(t) + w_2 u_2^2(t) + w_3 u_3^2(t) + w_4 u_4^2(t)) \\ & + \lambda_1(t) \left\{ (1-\pi)^\alpha b^\alpha - (1-u_1(t)) \phi^\alpha S_1(t) + \delta^\alpha R(t) - \mu^\alpha S_1(t) - u_2(t) S_1(t) \right\} \\ & + \lambda_2(t) \left\{ \pi^\alpha b^\alpha - (1-u_1(t)) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) - \mu^\alpha S_2(t) - u_2(t) S_2(t) \right\} \\ & + \lambda_3(t) \left\{ (1-u_1(t)) \rho^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1-u_1(t)) \rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \right. \\ & \quad \left. + (1-p^\alpha) \eta^\alpha I(t) - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3(t)) C(t) \right\} \\ & + \lambda_4(t) \left\{ (1-u_1(t)) (1-\rho)^\alpha \phi^\alpha S_1(t) + (1-u_1(t)) (1-\rho) k^\alpha \phi^\alpha S_2(t) \right. \\ & \quad \left. + (\gamma^\alpha + u_3(t)) C(t) - (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4(t)) I(t) \right\} \\ & + \lambda_5(t) \left\{ \sigma^\alpha C(t) + p^\alpha \eta^\alpha I(t) - (\mu^\alpha + \delta^\alpha) R(t) \right. \\ & \quad \left. + u_2(t) S_1(t) + u_2(t) S_2(t) + u_4(t) I(t) \right\} \end{aligned} \quad (4.3)$$

Böylece Hamilton fonksiyonu (4.3) ile tanımlanır.

4.1 Gerekli Optimallik Koşulları

(3.4) sistemi ile (4.1) ile verilen performans indeks için gerekli optimallik koşulları aşağıdaki teorem ile verilecektir.

Teorem 4.1.1: (3.4) sisteminin optimal durum çözümleri S_1^*, S_2^*, C^*, I^* ve R^* ile (4.1) performans indeksini minimize eden optimal kontrol fonksiyonları $u_1^*, u_2^*, u_3^*, u_4^*$ olsun. O halde aşağıda verilen yardımcı durum denklemlerini karşılayan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$ yardımcı durum değişkenleri mevcuttur:

$$\begin{aligned} {}_t^{ABC} D_{t_f}^\alpha \lambda_1 = & -\lambda_1 \left[(1-u_1) \frac{\phi^\alpha}{N} (S_2 + C + I + R) + \mu^\alpha + u_2 \right] + \lambda_2 \left[(1-u_1) \frac{k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\ & + \lambda_3 \left[(1-u_1) \frac{\rho^\alpha \phi^\alpha}{N} (S_2 + C + I + R) - (1-u_1) \frac{\rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\ & + \lambda_4 \left[(1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha \phi^\alpha}{N} (S_2 + C + I + R) - (1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\ & + \lambda_5 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_t^{ABC} D_{t_f}^\alpha \lambda_2 = & \lambda_1 \left[(1-u_1) \frac{\phi^\alpha}{N} S_1 \right] - \lambda_2 \left[(1-u_1) \frac{k^\alpha \phi^\alpha}{N} (S_1 + C + I + R) + \mu^\alpha + u_2 \right] \\ & - \lambda_3 \left[(1-u_1) \frac{\rho^\alpha \phi^\alpha}{N} S_1 - (1-u_1) \frac{\rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} (S_1 + C + I + R) \right] \\ & - \lambda_4 \left[(1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha \phi^\alpha}{N} S_1 - (1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} (S_1 + C + I + R) \right] \\ & + \lambda_5 u_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}_t^{ABC} D_{t_f}^\alpha \lambda_3 = & -\lambda_1 \left[(1-u_1) \frac{\kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} S_1 (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I) \right] \\ & - \lambda_2 \left[(1-u_1) \frac{k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} S_2 (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I) \right] \\ & + \lambda_3 \left[(1-u_1) \frac{\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I) (S_1 + k^\alpha S_2) - (\sigma^\alpha + \gamma^\alpha + \mu^\alpha + u_3) \right] \\ & + \lambda_4 \left[(1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} (\omega^\alpha (S_1 + S_2 + I + R) - I) (S_1 + k^\alpha S_2) + \gamma^\alpha + u_3 \right] \\ & + \lambda_5 \sigma^\alpha + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_t^{ABC} D_{t_f}^\alpha \lambda_4 = & -\lambda_1 \left[(1-u_1) \frac{\kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} S_1 (S_1 + S_2 + (1-\omega^\alpha)C + R) \right] \\
& -\lambda_2 \left[(1-u_1) \frac{k^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} S_2 (S_1 + S_2 + (1-\omega^\alpha)C + R) \right] \\
& +\lambda_3 \left[(1-u_1) \frac{\rho^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} (S_1 + S_2 + (1-\omega^\alpha)C + R) (S_1 + k^\alpha S_2) + (1-p)\eta^\alpha \right] \\
& +\lambda_4 \left[(1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha \kappa^\alpha \beta^\alpha}{N^2} (S_1 + S_2 + (1-\omega^\alpha)C + R) (S_1 + k^\alpha S_2) \right] \\
& -\lambda_4 (\eta^\alpha + \varepsilon^\alpha + \mu^\alpha + u_4) + \lambda_5 (p^\alpha \eta^\alpha + u_4) + 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_t^{ABC} D_{t_f}^\alpha \lambda_5 = & \lambda_1 \left[(1-u_1) \frac{\phi^\alpha}{N} S_1 + \delta^\alpha \right] + \lambda_2 \left[(1-u_1) \frac{k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\
& -\lambda_3 \left[(1-u_1) \frac{\rho^\alpha \phi^\alpha}{N} S_1 + (1-u_1) \frac{\rho^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\
& -\lambda_4 \left[(1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha \phi^\alpha}{N} S_1 + (1-u_1) \frac{(1-\rho)^\alpha k^\alpha \phi^\alpha}{N} S_2 \right] \\
& -\lambda_5 (\mu^\alpha + \delta^\alpha)
\end{aligned}$$

$\lambda_i(t_f) = 0$ sınır koşulu olmak üzere optimal kontrol fonksiyonları

$u_1^* = u_1^*(t), u_2^* = u_2^*(t), u_3^* = u_3^*(t), u_4^* = u_4^*(t)$ aşağıdaki gibidir:

$$u_1^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\phi^\alpha}{w_1} \left(-\lambda_1 S_1^* - \lambda_2 k^\alpha S_2^* + \lambda_3 \rho^\alpha (S_1^* + k^\alpha S_2^*) + \lambda_4 (1-\rho)^\alpha (S_1^* + k^\alpha S_2^*) \right), 1 \right\}, 0 \right\}$$

$$u_2^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{\lambda_1 S_1^* + \lambda_2 S_2^* - \lambda_5 (S_1^* + S_2^*)}{w_2}, 1 \right\}, 0 \right\}$$

$$u_3^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\lambda_3 - \lambda_4) C^*}{w_3}, 1 \right\}, 0 \right\}$$

$$u_4^* = \max \left\{ \min \left\{ \frac{(\lambda_4 - \lambda_5) I^*}{w_4}, 1 \right\}, 0 \right\}$$

Burada $\lambda_i = \lambda_i(t)$ ve $S_1^* = S_1^*(t)$, $S_2^* = S_2^*(t)$, $C^* = C^*(t)$, $I^* = I^*(t)$, $R^* = R^*(t)$ olacak şekilde ifade edilmiştir.

5. NÜMERİK ÇÖZÜMLER VE KONTROL STRATEJİLERİ

Bu bölümde analitik sonuçları oluşturulan optimallik koşullarını çözmek için nümerik bir yöntem kullanılacaktır. Bu, Adams-tipte tahmin edici-düzeltilici yöntem ile ileri-geri-süpürme yönteminin birlikte uygulanmasıdır. Öncelikle [80,81] referanslarını takiben programın algoritmasını oluşturacağız. Daha sonra kesirli pnömoni modeline adapte edilen optimal kontrollerin etkilerini görebilmek için MATLAB kullanarak nümerik simülasyonlarını sunacağız.

5.1 Algoritma

1. Adım: Sistemin parametreleri ile $S_1(0) = S_{10}$, $S_2(0) = S_{20}$, $C(0) = C_0$, $I(0) = I_0$ ve $R(0) = R_0$ başlangıç koşulları tanımlanır.

2. Adım: $[0, t_f]$ zaman aralığı eşit uzunluktaki N alt aralığa bölünür ve böylece her zaman düğümü aşağıdaki gibi ayarlanır.

$$h = \frac{t_f}{N}, \quad t_n = nh, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

3. Adım: $n = 0, 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $u_i = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ kontrolleri için bir başlangıç tahmini yapılır.

4. Adım: Kontrol fonksiyonları için yapılan bu başlangıç tahminleri ile $(S_{10}, S_{20}, C_0, I_0, R_0)$ başlangıç koşulu ve $\lambda_i(t_f) = 0$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) sınır koşulları ile birlikte (3.4) sistemi ileri yönlü zaman ayrıklaşması ile çözülür. Durum denklemleri Atangana-Baleanu kesirli integral denklemi olarak

$$x(t) = x(0) + \frac{1-\alpha}{M(\alpha)} f(t, x(t), u(t)) + \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau, x(\tau), u(\tau)) d\tau \quad (5.1)$$

ifade edilir. Daha sonra bu durum denklemlerine tahmin edici-düzeltilici yöntem aşağıdaki biçimde uygulanır.

$$\begin{aligned}
S_1(t_{n+1}) &= S_1(0) + \psi \left[f_1(t_{n+1}, S_1^p(t_{n+1}), S_2^p(t_{n+1}), C^p(t_{n+1}), I^p(t_{n+1}), R^p(t_{n+1}), u_i(t_{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f_1(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
S_1^p(t_{n+1}) &= S_1(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f_1(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
S_2(t_{n+1}) &= S_2(0) + \psi \left[f_2(t_{n+1}, S_1^p(t_{n+1}), S_2^p(t_{n+1}), C^p(t_{n+1}), I^p(t_{n+1}), R^p(t_{n+1}), u_i(t_{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f_2(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
S_2^p(t_{n+1}) &= S_2(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f_2(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
C(t_{n+1}) &= C(0) + \psi \left[f_3(t_{n+1}, S_1^p(t_{n+1}), S_2^p(t_{n+1}), C^p(t_{n+1}), I^p(t_{n+1}), R^p(t_{n+1}), u_i(t_{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f_3(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
C^p(t_{n+1}) &= C(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f_3(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
I(t_{n+1}) &= I(0) + \psi \left[f_4(t_{n+1}, S_1^p(t_{n+1}), S_2^p(t_{n+1}), C^p(t_{n+1}), I^p(t_{n+1}), R^p(t_{n+1}), u_i(t_{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f_4(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
I^p(t_{n+1}) &= I(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f_4(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
R(t_{n+1}) &= R(0) + \psi \left[f_5(t_{n+1}, S_1^p(t_{n+1}), S_2^p(t_{n+1}), C^p(t_{n+1}), I^p(t_{n+1}), R^p(t_{n+1}), u_i(t_{n+1})) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} f_5(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right] \\
R^p(t_{n+1}) &= R(0) + \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} f_5(t_n, S_1(t_n), S_2(t_n), C(t_n), I(t_n), R(t_n), u_i(t_n)) \right]
\end{aligned}$$

Burada $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$ ve $j = 0, 1, 2, \dots, n$ dir. Ayrıca ψ , $a_{j,n+1}$ ve $b_{j,n+1}$ katsayıları

$$\psi = \frac{h^\alpha}{(\alpha+1)M(\alpha)\Gamma(\alpha)}, \quad (5.2)$$

$$a_{j,n+1} = \begin{cases} n^{\alpha+1} - (n-\alpha)(n+1)^\alpha, & j=0 \\ (n-j+2)^{\alpha+1} + (n-j)^{\alpha+1} - 2(n-j+1)^{\alpha+1}, & 1 \leq j \leq n \\ 1, & j=n+1 \end{cases} \quad (5.3)$$

$$b_{j,n+1} = \begin{cases} 1 + \frac{(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{h^\alpha}, & j=n \\ (n-j+1)^\alpha - (n-j)^\alpha, & j=0,1,2,\dots,n-1 \end{cases} \quad (5.4)$$

5. Adım: $\lambda_i(t_f) = 0$ $i=1,2,3,4,5$ sınır koşulu altında Teorem 4.1.1 ile verilen yardımcı durum denklemleri ileri yönlü zaman ayrıklaşması ile çözülür. Yardımcı durum denklemleri Atangana-Baleanu kesirli integral denklemi olarak

$$\begin{aligned} \lambda(t_f - t) &= \frac{(1-\alpha)}{M(\alpha)} f(t_f - t, x(t_f - t), u_i(t_f - t)) \\ &+ \frac{\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{\partial H}{\partial x}(t_f - \tau, x(t_f - \tau), u_i(t_f - \tau), \lambda(t_f - \tau)) d\tau \end{aligned} \quad (5.5)$$

ifade edilir. Ardından yardımcı durum denklemlerine Adams tipi tahmin edici-düzeltilici yöntem aşağıdaki gibi uyarlanır.

$$\begin{aligned} \lambda(t_{N-n-1}) &= \frac{h^\alpha}{(\alpha+1)M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\frac{\partial H}{\partial x}(t_{N-n-1}, x(t_{N-n-1}), u_i(t_{N-n-1}), \lambda_i^p(t_{N-n-1})) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=0}^n a_{j,n+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{N-j}, x(t_{N-j}), u_i(t_{N-j}), \lambda_i(t_{N-j})) \right], \quad (5.6) \\ \lambda^p(t_{N-n-1}) &= \frac{h^\alpha}{M(\alpha)\Gamma(\alpha)} \left[\sum_{j=0}^n b_{j,n+1} \frac{\partial H}{\partial x}(t_{N-j}, x(t_{N-j}), u_i(t_{N-j}), \lambda_i(t_{N-j})) \right]. \end{aligned}$$

Burada $n=0,1,2,\dots,N$ ve $j=0,1,2,\dots,k$ dır. Ayrıca (5.6) denklemlerindeki $a_{j,n+1}$ ve $b_{j,n+1}$ katsayıları 4. adımda verilenlerdir.

6. Adım: 4. adımda ve 5. adımda elde edilen yinelemeli değerler kullanılarak, u_i kontrol fonksiyonlarının değerleri güncellenir.

7. Adım: Son olarak yardımcı durum ve durum fonksiyonları için hata tolerans değerleri belirlenir. Eğer fonksiyonların ardışık değerleri arasındaki fark belirlenen tolerans aralığında kalıyorsa hesaplama sonlanır ve elde edilen sonuçlar optimal çözümlere karşılık gelir. Değerler bu tolerans aralığında kalmıyorsa 3. adıma tekrar geri dönlür.

5.2 Kontrol Stratejileri

(3.4) sisteminde görüldüğü üzere dört kontrol fonksiyonu yer almaktadır. Bu kontrol fonksiyonlarının etkinliğini inceleyebilmek için olası tüm durumları ve bu durumlardan ortaya çıkacak tüm kombinasyonları stratejilerle bu bölümde ele alacağız.

A Durumu: Tek Kontrol

Strateji 1: Sistemde sadece u_1 kontrol fonksiyonun olduğu durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 = 0$$

Strateji 2: Sistemde sadece u_2 kontrol fonksiyonun olduğu durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0, u_4 = 0$$

Strateji 3: Sistemde sadece u_3 kontrol fonksiyonun olduğu durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0, u_4 = 0$$

Strateji 4: Sistemde sadece u_4 kontrol fonksiyonun olduğu durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 \neq 0$$

B Durumu: İkili Kontrol Kombinasyonları

Strateji 5: Sistemde u_1 ve u_2 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0, u_4 = 0$$

Strateji 6: Sistemde u_1 ve u_3 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0, u_4 = 0$$

Strateji 7: Sistemde u_1 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 = 0, u_4 \neq 0$$

Strateji 8: Sistemde u_2 ve u_3 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_4 = 0$$

Strateji 9: Sistemde u_1 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0, u_4 \neq 0$$

Strateji 10: Sistemde u_3 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0, u_4 \neq 0$$

C Durumu: Üçlü Kontrol Kombinasyonları

Strateji 11: Sistemde u_1, u_2 ve u_3 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_4 = 0$$

Strateji 12: Sistemde u_1, u_2 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 = 0, u_4 \neq 0$$

Strateji 13: Sistemde u_1, u_3 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 = 0, u_3 \neq 0, u_4 \neq 0$$

Strateji 14: Sistemde u_2, u_3 ve u_4 kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 = 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_4 \neq 0$$

D Durumu: *Dörtlü Kontrol*

Strateji 15: Sistemde u_1, u_2, u_3 ve u_4 olan tüm kontrol fonksiyonlarının birlikte adapte edildiği durumu temsil eder.

$$u_1 \neq 0, u_2 \neq 0, u_3 \neq 0, u_4 \neq 0$$

5.3 Nümerik Sonuçlar ve Tartışma

(3.4) ile verilen sisteme göre optimal kontrol problemimizin amacı dört kontrol fonksiyonunu takiben, pnömoni hastalığına karşı önlem oluşturabilmek, popülasyonda enfekte çocuklar oluştuğunda derhal tespit edebilmek ve enfekte çocuklara etkili tedavi uygulayabilmekten geçer. Bu bağlamda enfekte çocukların sayısının azalması, iyileşen çocukların sayısının artması istendik durumlardır. Bir önceki alt başlıkta algoritması verilen Atangana-Baleanu türevi için Adams-tipi tahmin edici-düzeltilici nümerik yöntem, çeşitli kontrol stratejileri için MATLAB programı kullanılarak oluşturulmuştur. Bunun için [40] referansından yararlanılarak parametre değerleri, ağırlık katsayıları ve başlangıç koşulları aşağıdaki gibi alınmıştır.

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = 0.02, \\ w_2 = 0.1, \\ w_3 = 0.02, \\ w_4 = 0.35 \end{array} \right\} \text{ağırlık katsayıları}$$

$$\left. \begin{array}{l} S_1(0) = 200, \\ S_2(0) = 260, \\ C(0) = 50, \\ I(0) = 45, \\ R(0) = 40 \end{array} \right\} \text{başlangıç koşulları}$$

Tablo 5.1: Modeldeki parametreler ve değerleri.

Parametreler	Değerleri
π	0.867
b	$595 * \mu$
δ	0.2
η	0.0238
β	5
κ	0.9
ε	0.33
ω	0.001124
ρ	0.338
σ	0.0116
p	0.5

İlk olarak Şekil 5.1’de A Durumu olarak ele aldığımız her bir kontrol fonksiyonun tek başına sisteme adapte edildiğindeki oluşan stratejilerin kıyaslaması mevcuttur. Burada α keyfi olarak 0.9 değeri seçilmiştir. Her bir kontrolün davranışına bakıldığında seçilen zaman aralığında uzun vadede devam eden davranışlar sergilemişlerdir. Bu istendik bir durumdur ki, kontrollerin oldukça etkin ve amacına uygun çalışabileceğini ifade eder. Strateji 1 sistemde yalnızca u_1 kontrolünün varlığında popülasyona beslenme ve çevresel yaşam koşullarını iyileştirmeye yönelik hijyen, sanitasyon gibi uygulamalardır ve duyarlı çocuk sınıflarından $(1-u_1)$ oran kadarı insidans oranından çıkartılarak etki eder. Bu durum çocukların taşıyıcı ve enfekte sınıflarına geçiş oranını yüksek oranda azaltıcı etki göstermiştir. A durumundaki dört strateji arasından enfekte çocukların sayısını en kısa zamanda azaltan Strateji 1’dir. Strateji 2 sistemde yalnızca u_2 kontrolünün varlığını yani pnömoni hastalığına karşı aşılama uygulamasını temsil eder. Çocukların hastalığa karşı duyarlı sınıflardan çıkarak bağışıklık kazanmış duruma gelmesini sağlamaktadır. Şekilde

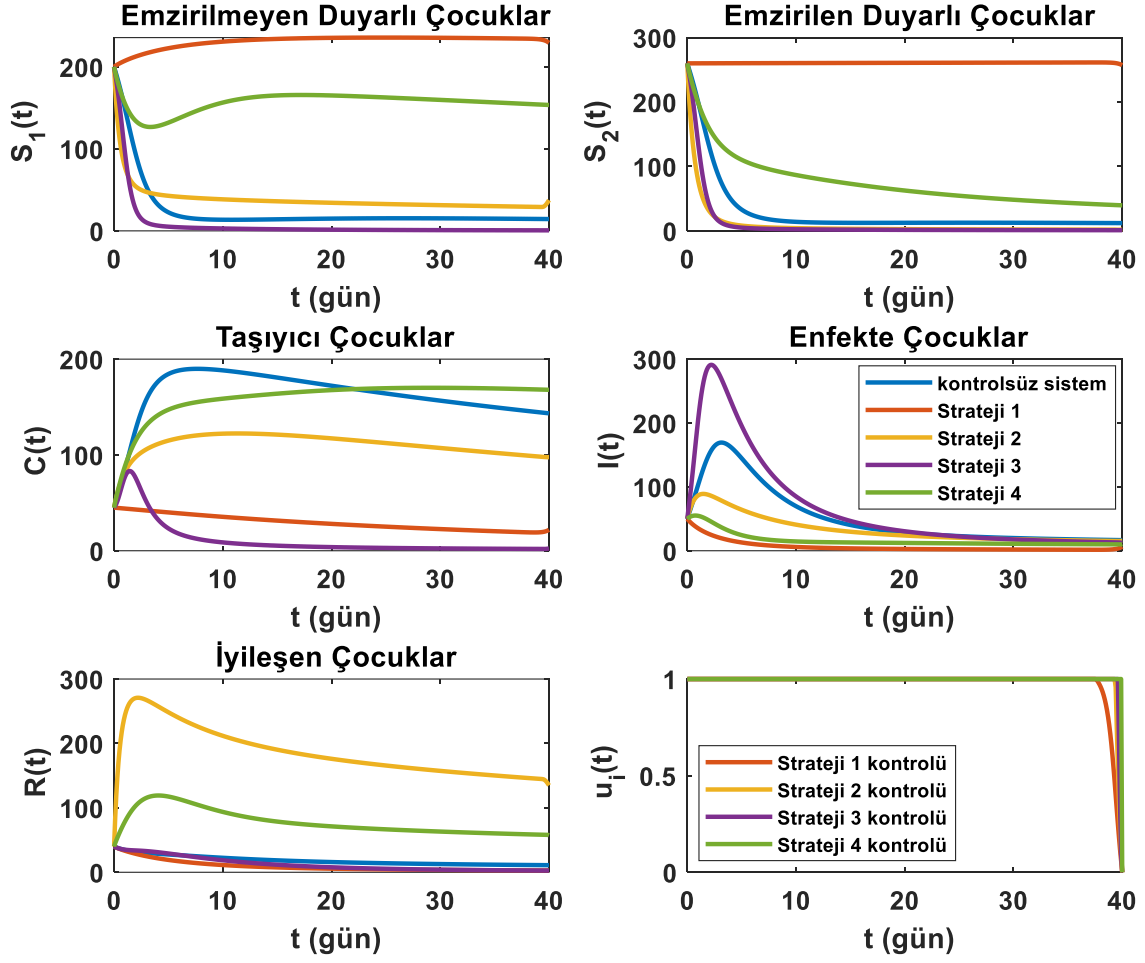
görüldüğü üzere iyileşen çocukların sayısının en çok arttığı durum Strateji 2'dir. Test ve tarama için etkili bir kontrol olan u_3 ün tek başına sisteme adapte edilmesi Strateji 3 ile gösterilmiştir. Taşıyıcı sınıftaki çocukların tespit edilerek enfekte sınıfına geçmesini sağladığı için şekilden de görüldüğü gibi enfekte çocukların sayısı arttırmıştır. Strateji 4 ile pnömoniden enfekte olan çocuklara uygulanacak etkili tedavi yöntemidir ve istendik biçimde enfekte çocukların sayısının hızlıca azaldığı, iyileşen çocukların sayısının da arttığı gözlemlenmiştir.

Şekil 5.2 ile B Durumu olarak ele aldığımız ikili kontrol seçimlerinin sisteme adapte edilmesi ile oluşan farklı stratejileri ve kontrolsüz sistemin karşılaştırmasını sunar. Buradan açıkça görülür ki taşıyıcı çocukların sayısı en kısa zamanda en aza indiren Strateji 6'dır. u_1 ve u_3 kontrollerinin yani hastalığa karşı önlem ile test-tarama uygulamalarının taşıyıcı çocuk sınıfında etkisi istendik şekilde yüksektir. Enfekte çocukların sayısını en kısa zamanda en aza indiren Strateji 7'dir. u_1 ve u_4 kontrollerinin yani hastalığa karşı önlem ile etkin tedavi uygulaması enfekte çocuk sınıfının azalmasında en başarılı sonuç olmuştur. Ayrıca optimal kontrolün bir diğer önemli amacını karşılayan iyileşen çocuk sınıfının artmasındaki oldukça etkili olan birbirine yakın iki strateji 5 ve 9'dur. Buradaki önemli ortak kısım u_2 kontrolünün varlığıdır. Duyarlı tüm çocuklara aşılama uygulamasını ifade eden bu yöntem oldukça etkili biçimde iyileşen çocuk sınıfını hastalığa karşı bağışıklık kazandırarak arttırmıştır. Şekil 5.3 ile B durumundaki her bir stratejideki ikili seçimlerle alınan bu kontrollerin davranışları sunulmuştur.

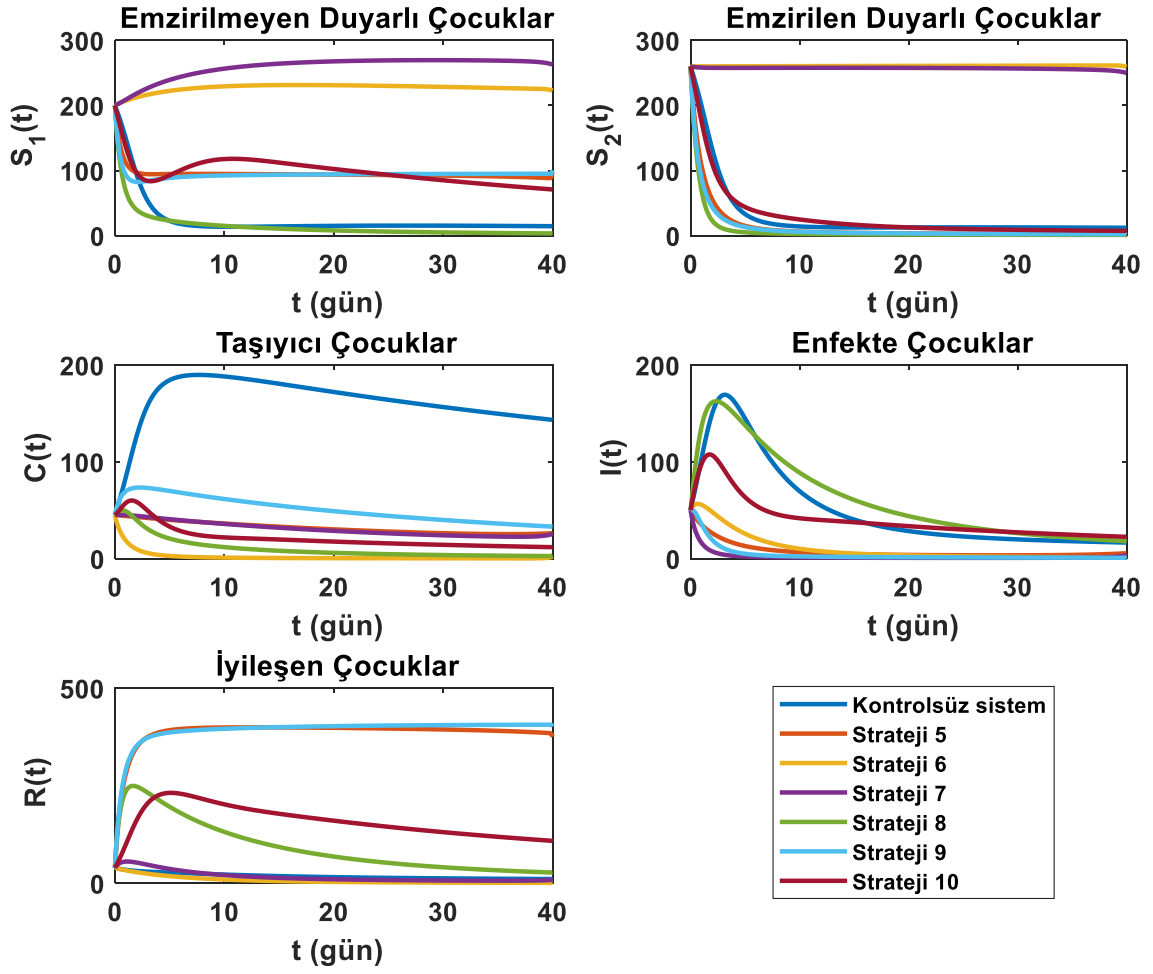
Şekil 5.4'te C Durumu olarak ele aldığımız üçlü kontrol seçimlerinin sisteme adapte edilmesi ile oluşan farklı stratejileri ve kontrolsüz sistemin karşılaştırmasını sunar. Şekilden açıkça görülür ki bu stratejiler arasından en başarılı sonuç Strateji 12'ye aittir. u_1, u_2 ve u_4 kontrollerinin sisteme aynı anda adapte edilmesi optimal kontrol probleminin iki önemli amacına da en iyi yanıtları vermiştir. Önlem, aşılama ve tedavi kapsamında etki etmesini planladığımız bu kontroller enfekte çocuk sayısını en aza indirirken iyileşen çocuk sayısını en üst düzeye çıkaran strateji olmuştur. Şekil 5.5 ile C durumundaki her bir stratejideki üçlü seçimlerle alınan kontrollerin davranışları sunulmuştur.

Şekil 5.6 ile D durumu olarak ele aldığımız dört kontrolün sisteme aynı anda uyarlanması olan Strateji 15 ve kontrolsüz sistemin kıyaslanması yer almaktadır. Sanitasyon ve hijyen gibi önlem uygulamaları, popülasyondaki tüm duyarlı çocuklara aşılama, taşıyıcı olarak popülasyonda hastalığı bulaştıran çocukların test-tarama ile hızlıca tespit edilmesi ve enfekte çocuklara etkin tedavi yöntemleri öngörüldüğü gibi oldukça başarılı biçimde kontrolsüz sisteme etki etmiştir. Şekil 5.7 ile D durumundaki Strateji 15’te yer alan dört kontrolün aynı anda adapte edilmesindeki davranışları sunulmuştur.

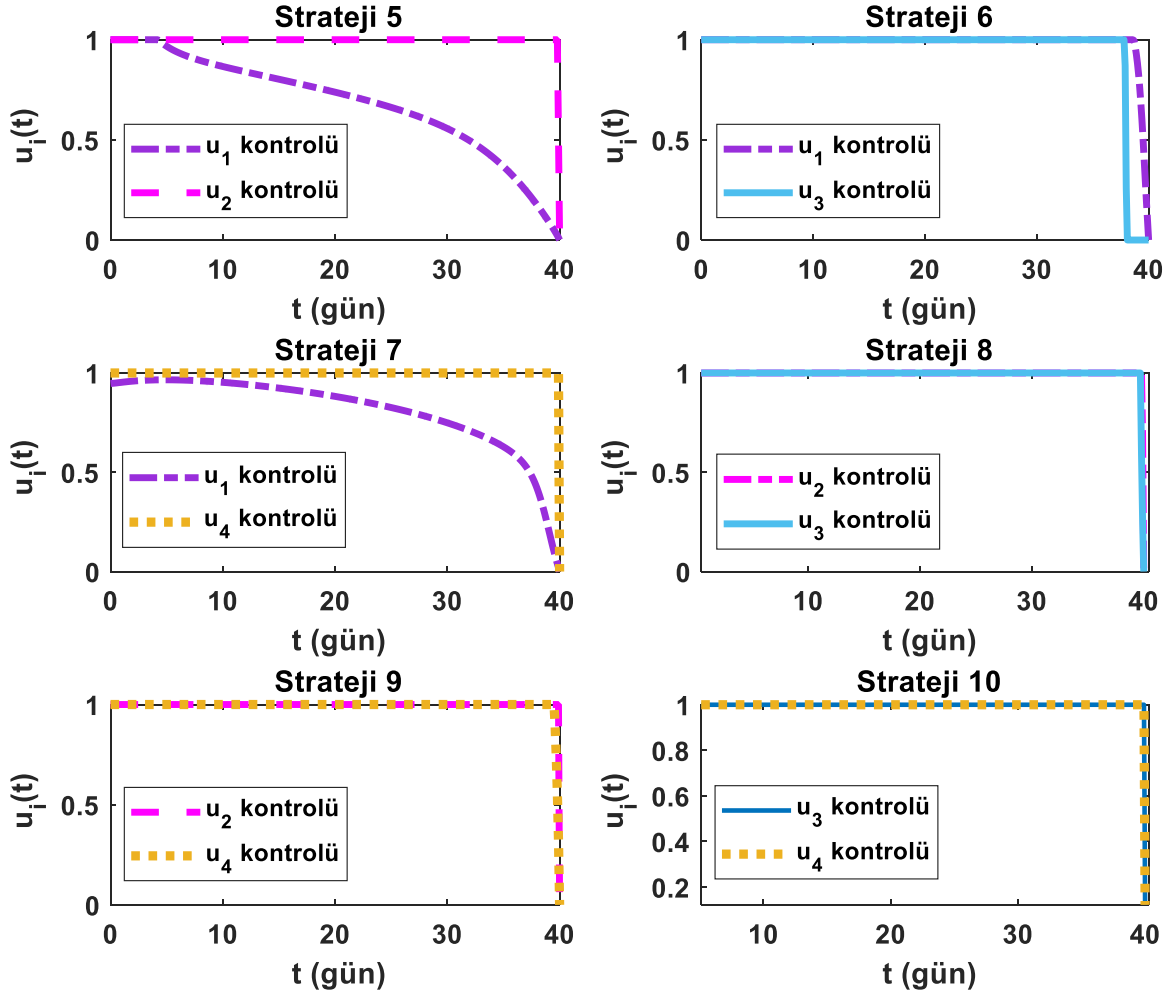
İncelenen tüm stratejiler arasından şekillerde görüldüğü üzere en iyi değerlere ulaştığımız dört kontrolün aynı anda uygulandığı durumdur. Ancak bu az gelişmiş veya gelişmekte olan ülkeler göz önüne alındığında sosyal ve ekonomik açıdan zorlayıcı olabilir. Bu tezin de amacını oluşturan tüm durumlardaki en iyi stratejiler detaylıca incelenerek gerçek dünya ile tutarlı bir çalışma oluşturulmasıdır.



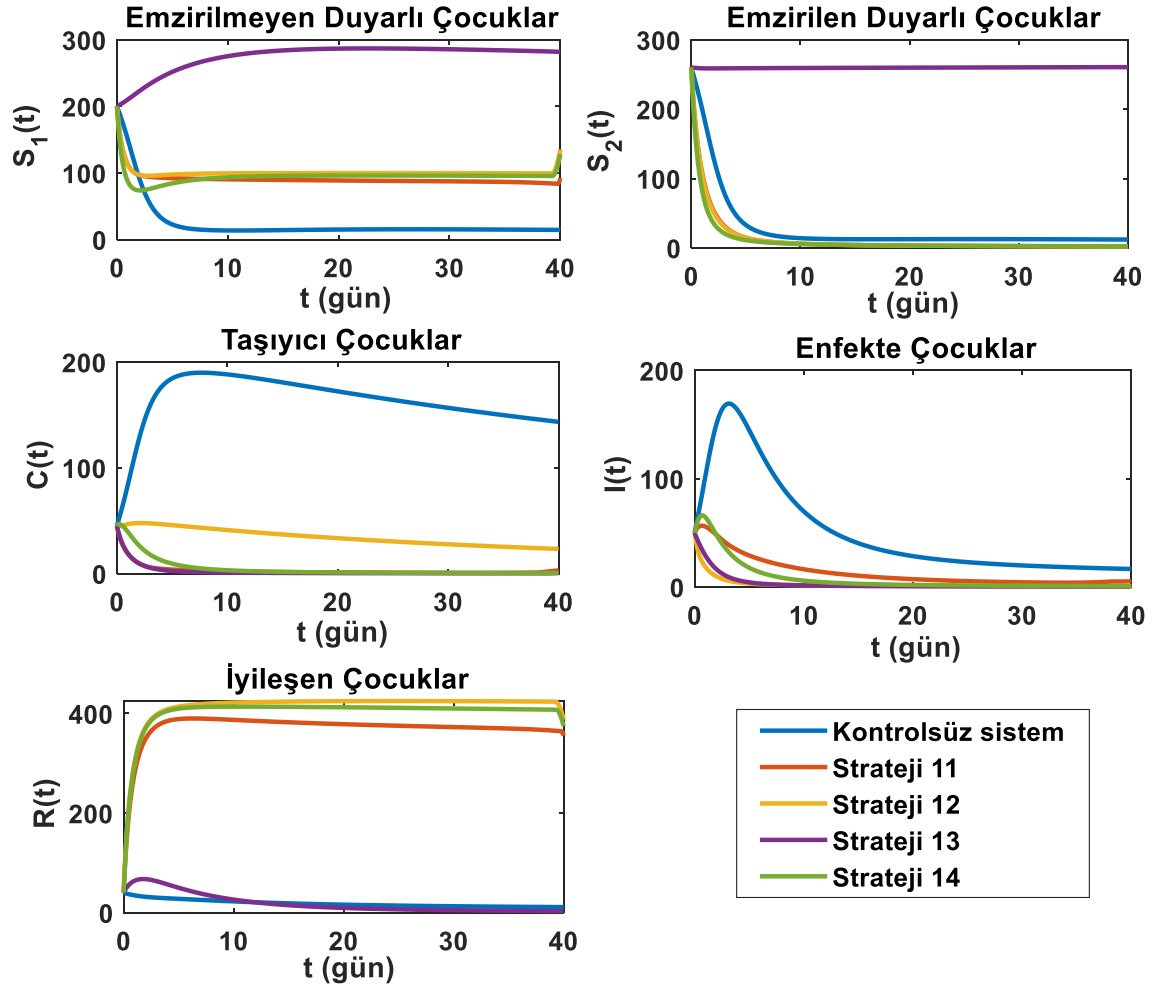
Şekil 5.1: $\alpha = 0.9$ için A durumundaki tek kontrollü stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.



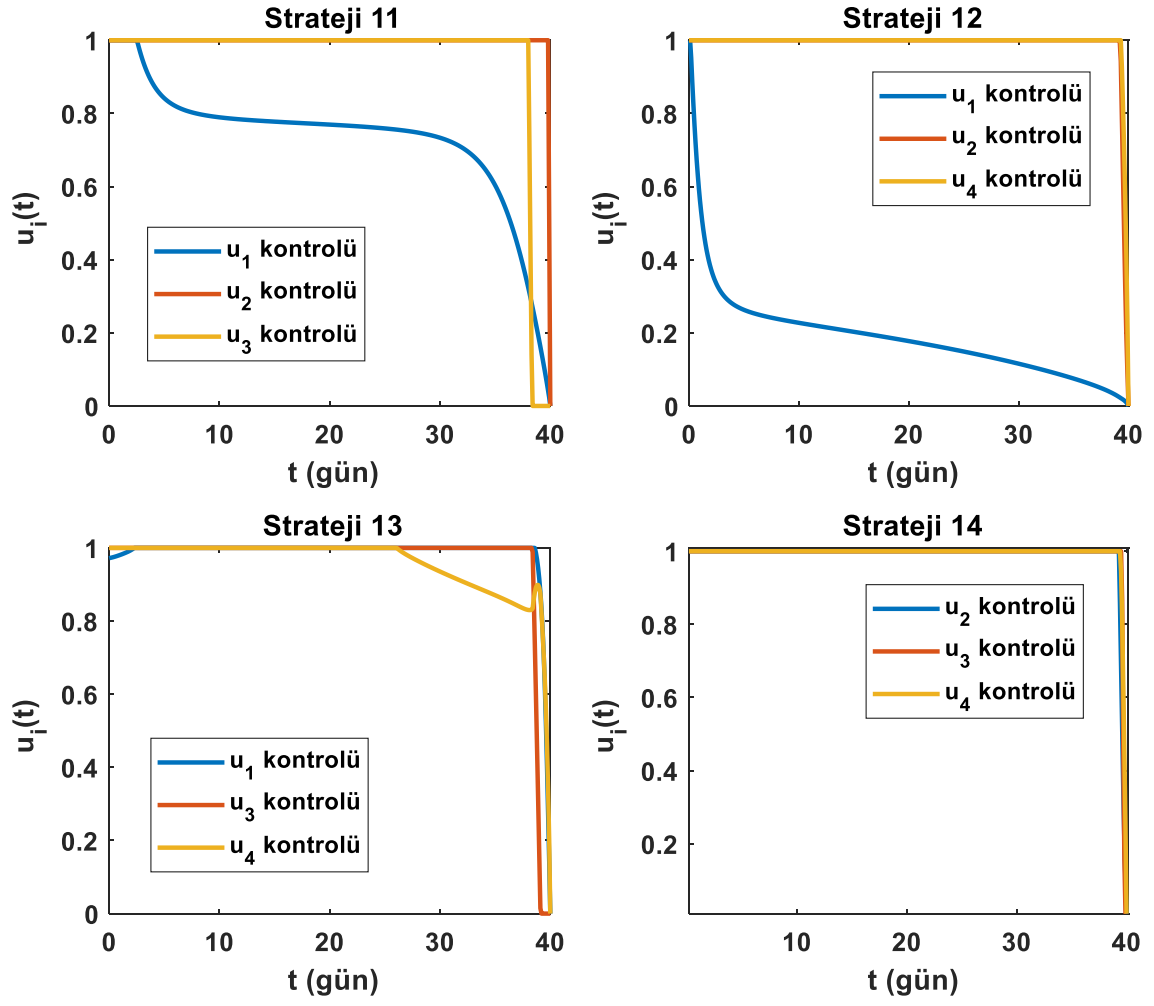
Şekil 5.2: $\alpha = 0.9$ için B durumundaki ikili kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.



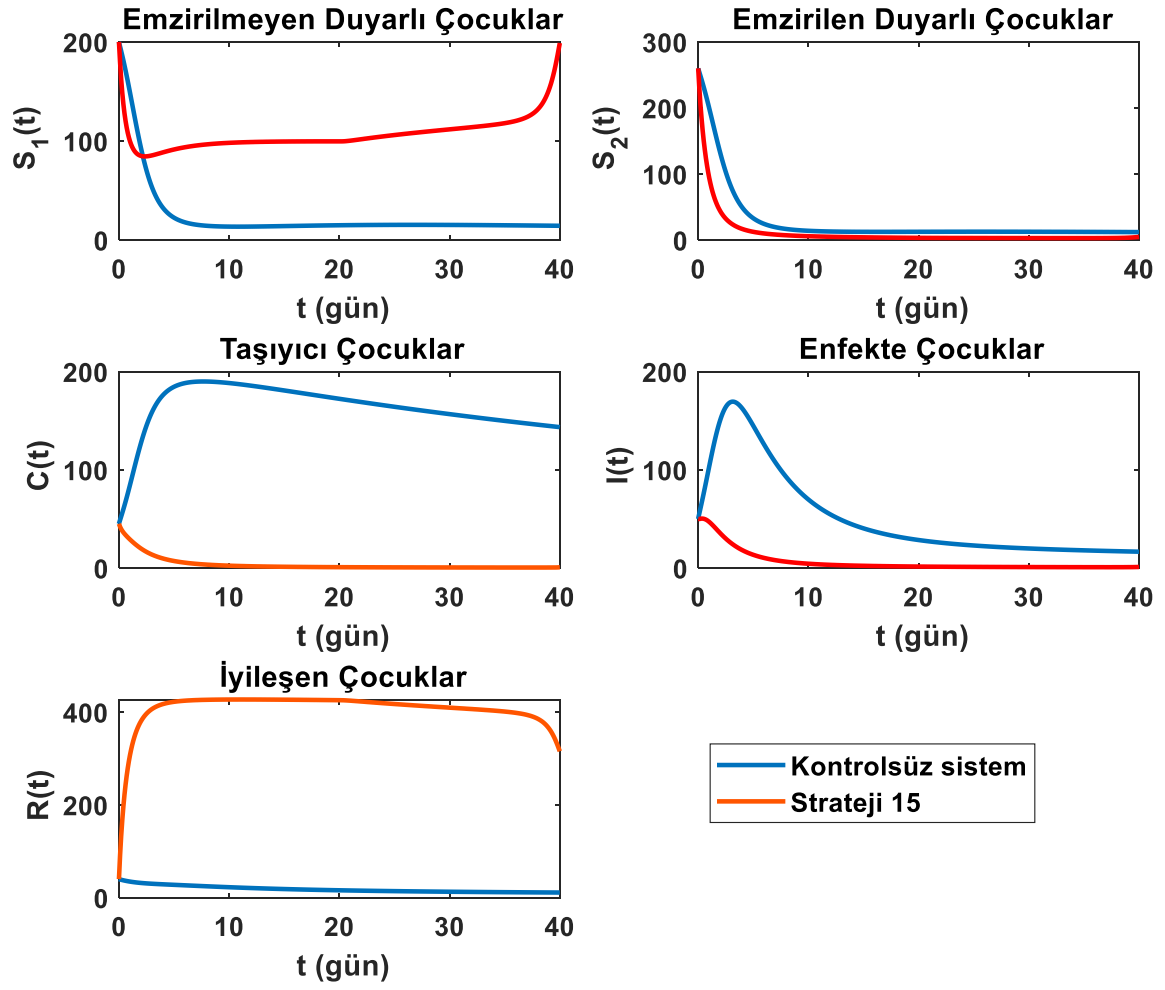
Şekil 5.3: $\alpha = 0.9$ için B durumundaki ikili kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilere göre kontrollerin davranışları.



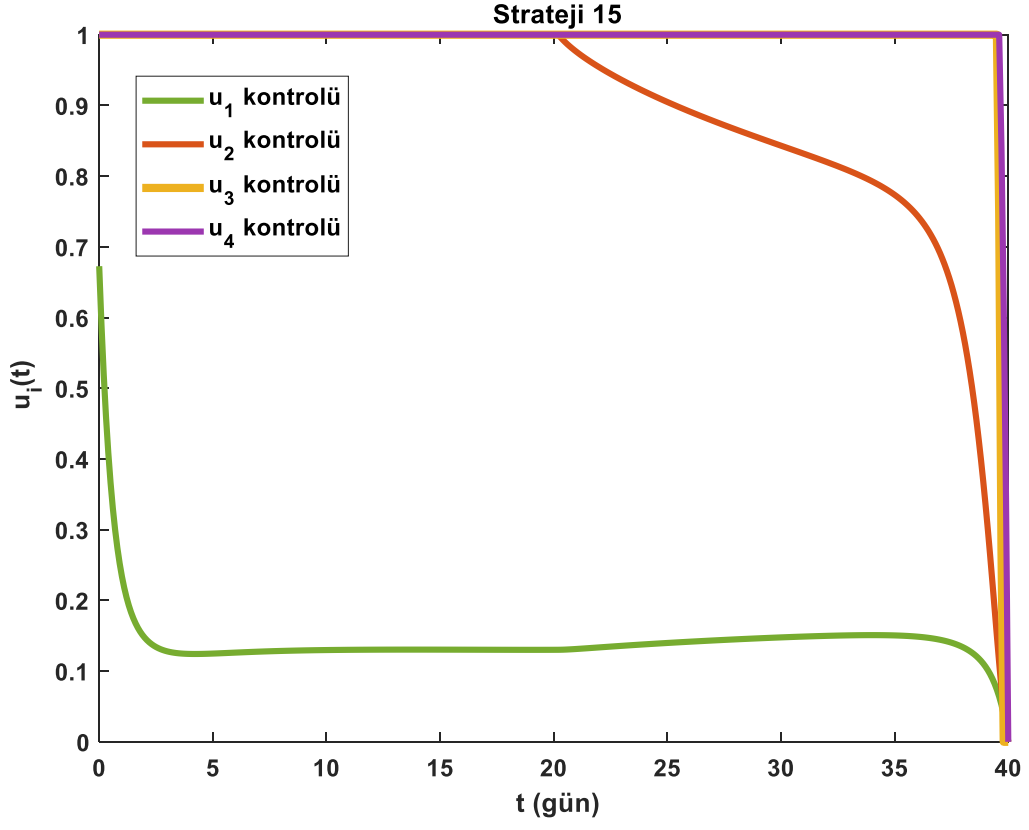
Şekil 5.4: $\alpha = 0.9$ için C durumundaki üçlü kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilerin ve kontrolsüz sistemin karşılaştırılması.



Şekil 5.5: $\alpha = 0.9$ için C durumundaki üçlü kontrol kombinasyonlarından oluşan stratejilere göre kontrollerin davranışları.



Şekil 5.6: $\alpha = 0.9$ için D durumundaki dörtlü kontrolden oluşan strateji ve kontrolsüz sistemin karşılaştırması.



Şekil 5.7: $\alpha = 0.9$ için D durumundaki dörtlü kontrolden oluşan stratejiye göre kontrollerin davranışları.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışması, çocukluk çağında ağır etkileri ile bilinen pnömoni hastalığının bulaşından doğacak büyük etkileri önlemek ve kontrol altına alabilmek için gerekli stratejileri analiz etmektedir. Buradan hareketle öncelikle hastalığın yayılım dinamiklerini açıklamak için hastalığa karşı güçlü bir bağışıklık yaratan anne sütüyle beslenme durumlarını dikkate alan [40] çalışmasındaki matematiksel modelin geliştirilmesi hedeflenir. Hastalıkların çapraz geçişli davranışları, tamsayı mertebeden türevleri ve singüler çekirdekli kesirli türevleri modellemek için yetersiz bırakabilir. Bu nedenle tamsayı mertebeden verilen referans çalışmadaki model, gerçeğe en yakın ve özellikleri ile oldukça faydalı olduğu bilinen Atangana-Baleanu kesirli türevi ile birim uygunluğu da dikkate alınarak yeniden ifade edilir. Bu türevin singüler olmayan çekirdeği sayesinde, hastalığın yayılmasının başlangıcında ve sonunda hastalığın evrimi hakkında daha iyi içgörü sağlar.

Bulaşıcı hastalıkların modellenmesinde disiplinlerarası fayda göz önüne alınarak daha iyi bir çalışma sunabilmek için epidemiyolojik ve ekonomik faktörlerin bir kombinasyonunu barındıran optimal kontrol teori tezin temel amacını oluşturur. Çocukluk çağındaki pnömoniye karşı aşılama, koruyucu önlem, test-tarama ve tedavi olarak düşünülen dört kontrol fonksiyonu sisteme adapte edilerek hastalığın taşıyıcı ve enfekte çocuk sayılarını azaltması ek olarak bu kontrol maliyetlerinin en azda tutulması esastır. Kontrol müdahaleleri eklenen ve Atangana-Baleanu kesirli türevi ile geliştirilen model için analiz aşamaları pozitif ve sınırlı çözüm bölgesi, denge noktaları ve hastalığın yayılımında eşik değer kabul edilen temel üreme sayısının bulunması ve denge noktalarındaki yerel kararlılık analizini takip eder. Ardından optimallik koşulları belirlenen sistem için Adams-tipte tahmin edici-düzeltilici yöntem ile ileri-geri süpürme yöntemi birlikte kullanılmıştır. Dört kontrol fonksiyonun etkinliğini inceleyebilmek için olası tüm durumları ve bu durumlardan ortaya çıkacak tek, ikili, üçlü ve dörtlü tüm seçim kombinasyonları stratejiler halinde ele alınmıştır. En avantajlı stratejinin problemde öngörüldüğü üzere dört kontrolün aynı anda uygulandığı durum olmuştur.

Tezde işlenen çocukluk çağındaki pnömoni hastalığının ilk kez Atangana-Baleanu türevi ile ifade edilmesi ve ilk kez bu hastalık için kesirli optimal kontrol probleminin oluşturuluyor

olması literatür için kıymetli ve kapsamlıdır. Ek olarak bu çalışma ışığında var olan model farklı insidans oranlarında incelenerek analiz edilebilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] R. Levins, T. Awerbuch, U. Brinkmann, I. Eckardt, P. Epstein, N. Makhoul, C. de Possas, C. Puccia, A. Spielman, M. Wilson, “The emergence of new diseases.”, *American Scientist*, 82(1), 52-60, 1994.
- [2] P. Martens. “How will climate change affect human health? The question poses a huge challenge to scientists. Yet the consequences of global warming public health remain largely unexplored.”, *American Scientist*, 87(6), 534-541, 1999.
- [3] S. Ma and Y. Xia, *Mathematical understanding of infectious diseases dynamics*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2008.
- [4] L. Cai and X. Z. Li, “Analysis of a SEIV epidemic model with a nonlinear incidence rate,” *Appl. Math. Model*, 33(7), 2919-2926, 2009.
- [5] H. W. Hethcote, *The Mathematics of Infectious Diseases*. SIAM Review, 2000.
- [6] J. M. Tchuente and C. Chiyaka, *Infectious diseases modelling research progress*, Nova Science Publishers, Inc., New York, 2009.
- [7] D. Bernoulli, “Essai d’une nouvelle analyse de la mortalite causee par la petite verole”, *Mem Math Phy Acad Roy Sci Paris*, 1766. (English translation In *Smallpox Inoculation: An Eighteenth Century Mathematical Controversy*, L. Bradley Adult Education Department: Nottingham, 1971.)
- [8] R. Ronald, *Malaria-Prevention, Malaria*, New York, E.P. Dutton & company, University of California Libraries, 1910.
- [9] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, “A Contribution to the mathematical theory of epidemics”, *Proc. Roy. Soc. Ser A* 115, 700-721, 1927.
- [10] P. Turchin, *Complex Population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis*, Princeton University Press, 2003.
- [11] N. Vitanov and M. Ausloos, “Knowledge epidemics and population dynamics models for describing idea diffusion.” *In Models of Science Dynamics*, pp 69-125. Springer, 2011.

- [12] Z. Alqahtani, M. El-Shahed and N. Mottram, “Derivative-order-dependent stability and transient behaviour in a predator-prey system of fractional differential equations.” *Letters in Biomathematics*, 6(1), 32-49, 2019.
- [13] R. Caponetto, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, vol. 72, World Scientific Publishing, 2010.
- [14] C. Monje, Y. Chen, B. Vinagre, D. Xue and V. Feliu-Batlle, *Fractional- Order Systems and Controls: Fundamentals and Applications*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [15] N. Özdemir, O. P. Agrawal, D. Karadeniz and B. B. İskender, “Analysis of an axis-symmetric fractional diffusion-wave problem.” *J. Phys. A Math. Theor.*, 42(35), 355208, 2009.
- [16] D. Baleanu, G. C. Wu and S. D. Zeng, “Chaos analysis and asymptotic stability of generalized Caputo fractional differential equations.” *Chaos Solit. Fractals*, 102, 99–105, 2017.
- [17] D. Avcı, B. B. İ. Eroğlu and N. Özdemir, “The Dirichlet problem of a conformable advection-diffusion equation.” *Therm. Sci.*, 21 (1), 9-18, 2017.
- [18] P. Veeresha, D. G. Prakasha and H. M. Baskonus, “Solving smoking epidemic model of fractional order using a modified homotopy analysis transform method.” *Math. Sci.*, 13(2), 115–128, 2019.
- [19] H. M. Baskonus, T. A. Sulaiman and H. Bulut, “On the new wave behavior to the Klein-Gordon-Zakharov equations in plasma physics.” *Indian J. Phys.*, 93(3), 393–399, 2019.
- [20] J. Singh, “A new analysis for fractional rumor spreading dynamical model in a social network with Mittag-Leffler law.” *Chaos*, 29(013137), 2019.
- [21] A. Atangana and D. Baleanu, “New Fractional Derivatives with Nonlocal and NonSingular Kernel: Theory and Application to Heat Transfer Model”, *Therm. Sci.*, 20(2), 763-769, 2016.
- [22] J. Singh, D. Kumar, Z. Hammouch and A. Atangana, “A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative.” *Appl. Math. Comput.*, 316, 504–515, 2018.

- [23] D. Avcı and A. Yetim, “Cauchy and source problems for an advection-diffusion equation with Atangana–Baleanu derivative on the real line.” *Chaos Solit. Fractals*, 118, 361–365, 2019.
- [24] S. Uçar, E. Uçar, N. Özdemir and Z. Hammouch, “Mathematical analysis and numerical simulation for a smoking model with Atangana–Baleanu derivative.” *Chaos Solit. Fractals*, 118, 300–306, 2019.
- [25] K. M. Owolabi and Z. Hammouch, “Mathematical modeling and analysis of two-variable system with noninteger-order derivative.” *Chaos*, 29(1), 2019.
- [26] D. S. Naidu, *Optimal control systems*, CRC Press, Boca-Raton, 2002.
- [27] P. Rohani, D. J. Earn, B. Finkenstadt and B. T. Grenfell, “Population dynamic interference among childhood diseases.” *Proc. R. Soc. Lond.*, 265, 2033–2041, 1998.
- [28] M. Bai, L. Ren, “An SEIV epidemic model for childhood diseases with partial permanent immunity.” *Comput. Math. Methods Med.*, 1–13, 2015.
- [29] H. Singh, J. Dhar, H. S. Bhatti and S. Chandok, “An epidemic model of childhood disease dynamics with maturation delay and latent period of infection.” *Model. Earth Syst. Environ.*, 2(79), 2016.
- [30] M. Kizito and T. Julius, ”A mathematical model of treatment and vaccination interventions of pneumococcal pneumonia infection dynamics.”, *J. Appl. Math.*, 2018.
- [31] M. Sonogo, M. C. Pellegrin, G. Becker and M. Lazzerini, ”Risk factors for mortality from acute lower respiratory infections (ALRI) in children under five years of age in low and middle-income countries: a systematic review and meta-analysis of observational studies.”, *PloS one*, 10(1), 2015.
- [32] M. J. López, “Zatürre Belirtileri ve Tedavisi Nelerdir?”, SağlıkAbirAdım, Şub. 2022. [Online] Erişim adresi: <https://sagligabiradim.com/zaturre-belirtileri-ve-tedavileri/>
- [33] V. N. Sutriana, M. N. Sitaresmi and A. Wahab. “Risk factors for childhood pneumonia: a case-control study in a high prevalence area in indonesia”, *Clinical and experimental pediatrics*, 64(11), 588, 2021.
- [34] M. J. Otieno and O. Paul, “Mathematical model for pneumonia dynamics with carriers.”, *Int. Journal of Math. Analysis*, 7(50), 2457 – 2473, 2013.

- [35] C. G. Ngari, D. M. Malonza and G. G. Muthuri, “A model for childhood pneumonia dynamics.”, *J. Life Sci. Res.*, 1(2), 31-40, 2014.
- [36] E. J. Ndelwa, M. Kgosimore, E. S. Massawe and L. Namkinga, “Mathematical modelling and analysis of treatment and screening of pneumonia.”, *Math. Theory Model.*, 5(10), 21-39, 2015.
- [37] C. G. Ngari, G. P. Pokhariyal and J. K. Koske, “Analytical model for childhood pneumonia, a case study of Kenya.”, *Br. J. Math. Comput. Sci.*, 12(2), 1-28, 2016.
- [38] F. K. Mbabazi, J. Y. T. Mugisha and M. Kimathi, “Global stability of pneumococcal pneumonia with awareness and saturated treatment.”, *J. Appl. Math.*, 1-12, 2020.
- [39] D. Otoo, P. Opoku, S. Charles and A. P. Kingsley, “Deterministic epidemic model for (SVCSyCAsyIR) pneumonia dynamics, with vaccination and temporal immunity.”, *Infectious disease modelling*, 5, 42-60, 2020.
- [40] F. M. Legesse, K. P. Rao and T. D. Keno, “Mathematical Modeling of a Bimodal Pneumonia Epidemic with Non-breastfeeding Class”, *Appl. Math*, 17(1), 95-107, 2023.
- [41] O. J. Peter, A. Yusuf, K. Oshinubi, F. A. Oguntolu, J. O. Lawal, A. I. Abioye and T. A. Ayoola, “Fractional order of pneumococcal pneumonia infection model with Caputo Fabrizio operator.”, *Results in Physics*, 29, 104581, 2021.
- [42] H. Yasmin, “Effect of vaccination on non-integer dynamics of pneumococcal pneumonia infection.”, *Chaos Solit. Fractals*, 158, 112049, 2022.
- [43] G.T. Tilahun, O. D. Makinde and D. Malonza, “Modelling and optimal control of pneumonia disease with cost-effective strategies.”, *Journal of biological dynamics*, 11(2), 400-426, 2017.
- [44] G. T. Tilahun, O. D. Makinde and D. Malonza, “Co-dynamics of pneumonia and typhoid fever diseases with cost effective optimal control analysis.”, *Applied Mathematics and Computation*, 316, 438-459, 2018.
- [45] M. C. Swai, N. Shaban and T. Marijani, “Optimal control in two strain pneumonia transmission dynamics.”, *J. Appl. Math.*, 2021, 1-21, 2021.

- [46] S. Saber, A. M. Alghamdi, G. A. Ahmed and K. M. Alshehri, “Mathematical Modelling and optimal control of pneumonia disease in sheep and goats in Al-Baha region with cost-effective strategies.”, *AIMS Mathematics*, 7(7), 12011-12049, 2022.
- [47] T. K. Yano and J. Bitok, “Computational Modelling of Pneumonia Disease Transmission Dynamics with Optimal Control Analysis.”, *Appl. Comput. Math.*, 11(5), 130-139, 2022.
- [48] F. S. Tessema, B. K. Bole and P. K. Rao, “Optimal control strategies and cost effectiveness analysis of Pneumonia disease with drug resistance.”, *Int. J. Nonlinear Anal. Appl.*, 14(1), 903-917, 2023.
- [49] N. H. Sweilam, S. M. Al-Mekhlafi, T. Assiri and A. Atangana, “Optimal control for cancer treatment mathematical model using Atangana–Baleanu–Caputo fractional derivative.”, *Adv. Differ. Equ.*, 2020(1), 1-21, 2020.
- [50] H. Mohammadi, S. Kumar, S. Rezapour and S. Etemad, “A theoretical study of the Caputo–Fabrizio fractional modeling for hearing loss due to Mumps virus with optimal control.”, *Chaos Solit. Fractals*, 144, 110668, 2021.
- [51] S. Rosa and D. F. Torres, “Fractional-order modelling and optimal control of cholera transmission.”, *Fractal and Fractional*, 5(4), 261, 2021.
- [52] B. B. İ. Eroğlu and D. Yapişkan, “An optimal control strategy to prevent the spread of COVID-19.” *In Conference Proceedings of Science and Technology*, 5(1), 182-186, 2022.
- [53] D. Avcı and F. Soytürk, “A Comparative Study on Optimal Control of a Computer Virus Spread.” *In Conference Proceedings of Science and Technology*, 5(1), 192-202, 2022.
- [54] D. Avcı and F. Soytürk, “Optimal control strategies for a computer network under virus threat.”, *J. Comput. Appl. Math.* 419, 114740, 2023.
- [55] B. B. İ. Eroğlu and D. Yapişkan, “Comparative analysis on fractional optimal control of an SLBS model.” *J. Comput. Appl. Math.*, 421, 114840, 2023.
- [56] M. S. Klamkin, *Mathematical Modelling: Classroom Notes in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 1987.

- [57] F. Brauer and C. Castillo-Chavez, *Mathematical models in population biology and epidemiology*, vol. 40. Springer, 2001.
- [58] J. J. Wang, J. Z. Zhang and Z. Jin, “Analysis of an SIR model with bilinear incidence rate,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 11(4), 2390-2402, 2010.
- [59] C. Lv, L. Huang and Z. Yuan, “Global stability for an HIV-1 infection model with Beddington–DeAngelis incidence rate and CTL immune response.”, *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 19(1), 121-127, 2014.
- [60] G. Rahman, R. P. Agarwal and Q. Din “Mathematical analysis of giving up smoking model via harmonic mean type incidence rate.” *Appl. Math. Comput.*, vol. 354, pp. 128-148, 2019.
- [61] I. A. Baba, R. A. Abdulkadir and P. Esmaili, “Analysis of tuberculosis model with saturated incidence rate and optimal control.”, *Physica A*, vol. 540, Article ID 123237, 2020.
- [62] D. Avcı, “Optimal Control for A SEIR Epidemiological Model Under the Effect of Different Incidence Rates.”, *Düzce Üniversitesi Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 11(2), 699-716, 2023.
- [63] Z. Ma, Y. Zhou and J. Wu, *Modelling and dynamics of infectious diseases*, Higher Education Press, World Sci. Pub., 2009.
- [64] R. M. Anderson, R. M. May and B. Anderson, *Infectious diseases of humans: dynamics and control*, vol. 28. Wiley Online Library, 1992.
- [65] D. Easley and J. Kleinberg, *Networks, crowds, and markets: Reasoning about a highly connected World*, Cambridge: Cambridge university press, vol. 1, 2010.
- [66] J. Murray, *Mathematical Biology: I. An Introduction*, Springer Science & Business Media, vol. 17, 2007.
- [67] K. S. Miller and B. Ross, *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, Wiley, New York, 1993.
- [68] S. G. Samko and A. A. Kilbas and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives*, Yverdonles-Bains, Switzerland: Gordon and breach science publishers, Yverdon, vol. 1, 1993.

- [69] I. Podlubny, *Fractional differential equations*, Academic Press, New York, 1999.
- [70] I. Podlubny, “Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation”, *Fract. Calc. Appl. Anal.* 5, 367-386, 2002.
- [71] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi and S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*, p. 540, New York, NY, USA: Springer, 2020
- [72] M. Caputo and M. Fabrizio, “A New Definition of Fractional Derivative Without Singular Kernel”, *Prog. Fract. Differ. Appl.*, vol. 1, no. 2, pp. 73-85, 2015.
- [73] A. Atangana, *Fractional operators with constant and variable order with application to geo-hydrology*, Academic Press, 2017.
- [74] O. P. Agrawal, “A general formulation and solution scheme for fractional optimal control problems”, *Nonlinear Dyn.*, vol. 38, no. 1, pp. 323-337, 2004.
- [75] O. P. Agrawal and D. Baleanu, “A Hamiltonian formulation and a direct numerical scheme for fractional optimal control problems”, *J. Vib. Control*, vol. 13, no. 9-10, pp. 1269- 1281, 2007.
- [76] G. Frederico and D. Torres, “Fractional optimal control in the sense of caputo and the fractional noethers theorem.”, *International Mathematical Forum*, 3(10), 479–493, 2008.
- [77] D. Baleanu, A. Jajarmi and M. Hajipour, “A new formulation of the fractional optimal control problems involving Mittag–Leffler nonsingular kernel”, *J. Optim. Theory Appl.*, 175, 718-737, 2017.
- [78] P. Van den Driessche and J. Watmough, “Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission”, *Math. Biosci.*, vol. 180, no. 1-2, pp. 29-48, 2002.
- [79] R. Caponetto, *Fractional Order Systems: Modeling and Control Applications*, World Scientific Publishing, vol. 72, 2010.
- [80] H. Kheiri and M. Jafari, “Optimal control of a fractional-order model for the HIV/AIDS epidemic”, *Int. J. Biomath*, 11(7), 2018, Article ID 1850086.

- [81] D. Baleanu, A. Jajarmi, S. S. Sajjadi and D. Mozyrska, “A new fractional model and optimal control of a tumor-immune surveillance with non-singular derivative operator”, *Chaos*, 29(8), 2019, Article ID 083127.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : MİNE YURTOĞLU

Doğum tarihi ve yeri : 1997/BURSA

e-posta : mine.yurtoglu91@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü	2020-2023
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik	2016-2020
Lise	Bursa Erkek Lisesi	2012-2016