T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BÖLEN FONKSİYONLARI İLE ÜÇGENSEL SAYILARIN İLİŞKİSİ VE ATOMLARIN ENERJİ SEVİYELERİNDE ÜÇGENSEL SAYILARIN GÖZLEMLENMESİ

HAMİYET BÜŞRA BOZOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ (Tez Danışmanı)**

Prof. Dr. Fırat ATEŞ

Dr. Öğr. Üyesi Aysun YURTTAŞ GÜNEŞ

BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Bölen Fonksiyonları ile Üçgensel Sayıların İlişkisi ve Atomların Enerji Seviyelerinde Üçgensel Sayıların Gözlemlenmesi**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Hamiyet Büşra BOZOĞLU

(imza)

ÖZET

BÖLEN FONKSİYONLARI İLE ÜÇGENSEL SAYILARIN İLİŞKİSİ VE ATOMLARIN ENERJİ SEVİYELERİNDE ÜÇGENSEL SAYILARIN GÖZLEMLENMESİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
HAMİYET BÜŞRA BOZOĞLU
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NAZLI YILDIZ İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, TEMMUZ - 2023

Bu çalışmada üçgensel sayılar ve bazı özel tanımlı bölen fonksiyonları arasında bağlantılar bulunmuştur. Ayrıca üçgensel sayılar her maddenin atom yapısında gözlemlenmiştir.

Birinci bölümde bölen fonksiyonları ile üçgensel sayılar tanıtılmış ve tezin amacından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde üçgensel sayılar, bölen fonksiyonları ve özel tanımlı bölen fonksiyonları ile ilgisi bulunan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde özel tanımlı bölen fonksiyonları için eşitlikler bulunmuştur. Üçgensel sayılar ile özel tanımlı bölen fonksiyonları arasında ilişkiyi veren sonuçlar elde edilmiştir. Bundan başka üçgensel sayılar ile bir maddenin kimyasal ve fiziksel yapısını belirlemede önemli olan her atomdaki elektron sayısı arasında bir bağlantı bulunmuştur.

Son bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Üçgensel sayı, bölen fonksiyonu, elektron sayısı.

Bilim Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 44

ABSTRACT

THE RELATIONSHIP BETWEEN DIVISOR FUNCTIONS AND TRIANGULAR NUMBERS AND THE EXAMINATION OF TRIANGULAR NUMBERS IN THE ENERGY LEVELS OF ATOMS
MSC THESIS
HAMİYET BÜŞRA BOZOĞLU
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: DOÇ. DR. NAZLI YILDIZ İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, JULY - 2023

In this study, connections were obtained between the triangular numbers and some specially defined the divisor functions. In addition, the triangular numbers have been observed in the atomic structure of each substance.

In the first chapter, the divisor functions and the triangular numbers are introduced and the purpose of the thesis is mentioned.

In the second chapter, basic definitions and theorems related to the triangular numbers, the divisor functions and special defined the divisor functions are given.

In the third chapter, equations for specially defined the divisor functions are obtained. Results giving the relationship between the triangular numbers and specially defined the divisor functions were obtained. Furthermore, a correlation was found between the triangular numbers and the number of electrons in each atom which is important in determining the chemical and physical structure of a substance.

In the last section, conclusions and recommendations are given.

KEYWORDS: Triangular number, divisor function, number of electrons.

Science Codes : 20401 Page Number : 44

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın hazırlanmasında bana sürekli destek olan sevgili danışman hocam Doç. Dr. Nazlı YILDIZ İKİKARDEŞ'e teşekkürlerimi sunmak isterim. Sabırlı rehberliği, değerli önerileri ve motive edici desteği ile bu çalışmayı tamamlamak benim için mümkün oldu.
Tüm eğitim hayatım boyunca yardımlarını esirgemeyip beni her konuda destekleyen Lisans, Yüksek Lisans eğitimim süresince her zaman yanımda olup yol gösterici olan kıymetli kuzenim Öğr. Gör. Dr. Ümit SARP'a sonsuz minnet ve teşekkürlerimi sunarım.
Yüksek Lisans eğitimi başında tanıştığım, süreç boyunca birbirimize yol arkadaşı olup güzel ve öğretici paylaşımlar deneyimlediğim değerli arkadaşım Pelin OKAN'a teşekkür ederim.
Beni her zaman destekleyen eğitim hayatımın her anında yer almış kıymetli öğretmenlerime, aileme ve yakın arkadaşlarıma en derin sevgilerimle teşekkürler.

Balıkesir, 2023 Hamiyet Büşra Bozoğlu

1. GİRİŞ

Aritmetik fonksiyonlar ve çokgensel sayılar, sayılar teorisinde asırlardır çalışılmış önemli konulardır. Aralarındaki ilişki birçok bilim insanı tarafından incelenmiştir ve incelenmeye devam etmektedir.

Aritmetik bir değişken ile başka bir değişken arasındaki ilişkiyi tanımlayan fonksiyonlara, aritmetik fonksiyon denilmektedir ve matematiksel analizde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu fonksiyonlar, sayılar arasındaki ilişkileri anlamamıza yardımcı olurken, matematiksel problemlerin çözümünde ve modellenmesinde önemli bir rol oynamaktadır. Bu önemli fonksiyonlardan bazıları; bölen fonksiyonu, Möbius fonksiyonu, Euler'in totient fonksiyonu ve Liouville fonksiyonudur.

Liouville, 1856-1857 yıllarında tam sayıların ikinci dereceden gösterimleriyle ilgili çeşitli eşitlikler keşfetmiştir. İki yıl gibi kısa bir sürede sayılar teorisi için temel alınabilecek birtakım sonuçlara ulaşmıştır. Fakat yaşadığı sağlık problemleri nedeniyle bulduğu teoremlerin ispatlarını tamamlayamamıştır. Ardından Jacobi, Kroneker ve diğer meslektaşları Liouville'nin keşfettiği fakat ispatlarını tamamlayamadığı teoremleri ispatlayarak matematik dünyasına kazandırmışlardır [1].

Bölen fonksiyonu $k \in \mathbb{C}$ ve $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere bir tam sayının pozitif bölenlerinin k. kuvvetlerinin toplamı şeklinde tanımlanır ve

$$\sigma_k(n) = \sum_{\substack{d \in Z^+ \\ d|n}} d^k$$

ile gösterilir. Bölen fonksiyonu, Euler'in 18. yüzyılda yaptığı çalışmalarla sayılar teorisinde yerini almıştır. Ayrıca geçmişten günümüze kadar daha birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır ve çalışılmaya devam edilmektedir [2, 3, 4, 5, 6, 7, 8].

Kim, Bayad ve Yıldız İkikardeş; 2015 yılında çeşitli bölen fonksiyonlarını kullanarak belirli kombinatorik konvolüsyon toplamlarını Bernoulli ve Euler polinomlarıyla ifade etmişlerdir [9].

Bayad ve Kim; 2017 yılında bölen fonksiyonunun tek bölenleri toplamıyla bağlantılı olan çokgensel sayıların özelliklerini incelemiştir [10].

Figürsel sayılar, şekillerin bir kurala göre sıralandığı ve geometrik bir düzen oluşturduğu sayı dizilerini ifade eder.

Bu sayı dizileri sayılar teorisinde uzun yıllarca çalışılmıştır ve birçok matematikçinin ilgisini çekmiştir.

E. Deza ve M. M. Deza; 2012 yılında figürsel sayılar ve çokgen sayılar ile ilgili “Figurate Numbers” isimli kapsamlı bir kitap yayınlamıştır [11].

n bir doğal sayı, $3 \le m \le 30$, $m \in \mathbb{N}$ olmak üzere n'inci $m-gonal$ figürsel sayı

$$S_m(n) = \frac{n[(m-2)n - m + 4]}{2}$$

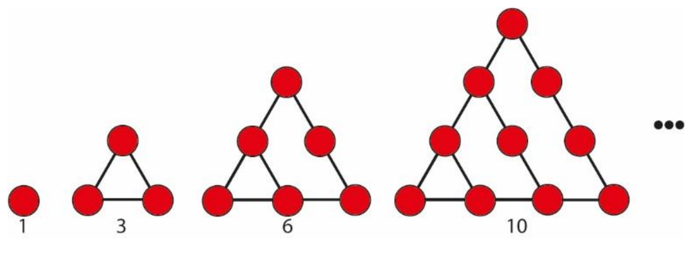
şeklinde ifade edilir [11].

$m=3$ için n. üçgensel sayı $S_3(n) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ eşitliğinde n yerine ardışık pozitif tam sayılar yazılarak 1, 3, 6, 10, 15, ... şeklinde sayı dizisi,

$m=4$ için n. karesel sayı $S_4(n) = \dfrac{n(2n)}{2}$ eşitliğinde n yerine ardışık pozitif tam sayılar yazılarak 1, 4, 9, 16, 25, ... şeklinde sayı dizisi,

$m=5$ için n. beşgensel sayı $S_5(n) = \dfrac{n(3n-1)}{2}$ eşitliğinde n yerine ardışık pozitif tam sayılar yazılarak 1, 5, 12, 22, 35, ... şeklinde sayı dizisi elde edilir [11].

Çokgensel sayılar, iki boyutlu figürsel sayılardır. Bilinen en eski ve en çok çalışılmış çokgensel sayılar ise üçgensel sayılardır. Üçgensel sayılar, düzlemde Şekil 1.1.'deki gibi üçgen oluşturacak biçimde sırasıyla ardışık tam sayıların (noktaların) toplamı olarak $1,\ 1+2=3,\ 1+2+3=6,\ 1+2+3+4=10,\ \ldots$ şeklinde ifade edilir.



Şekil 1.1: Üçgensel sayılar.

İlk defa M.Ö. 6. yüzyılda antik Yunan matematikçi Pisagor ve öğrencileri tarafından derinlemesine incelenmiştir. Pisagor sayıların babası olarak bilinmektedir. “Evrenin hâkimi sayıdır.” ve “Sayılar evreni yönetiyor.” gibi cümleleri söylediği düşünülmektedir. Bu cümleleri açıklayan bir hikâyede; Pisagor, 10 sayısının çok önemli olduğundan bahsetmektedir. $1+2+3+4=10$ eşitliğini şu şekilde açıklamıştır:

“1; uzayda bir noktayı (ateş),

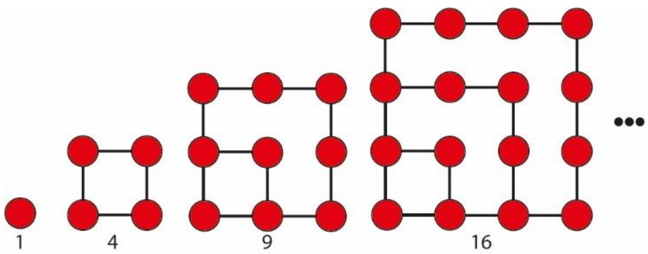
2; noktaları birbirine bağlayan doğru parçasını (su),

3; doğru parçalarının bir araya gelmesi sonucunda oluşacak yüzeyi (hava),

4; yüzeylerin üst üste gelmesi sonucunda oluşacak hacmi (toprak) ifade eder.” demiştir.

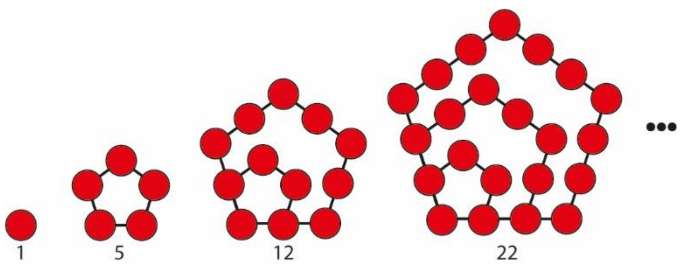
Pisagor’un çalışmalarından sonra üçgensel sayılar ve karesel sayıların birleşimi olan beşgensel sayıları, M.Ö. 3. yüzyılda Yunan matematikçi Theano incelemiştir.

Karesel sayılar bir tam sayının kendisiyle çarpımı sonucunda elde edilen başka bir deyişle bir sayının karekökü olarak ifade edilebilen gerçek sayılardır [12].



Şekil 1.2: Karesel sayılar.

Beşgensel sayılar düzlemde bir geometrik şekil olan beşgenin kenar sayısına ve köşe sayısına dayanan sayılardır [11].



Şekil 1.3: Beşgensel sayılar.

Hintli matematikçi Brahmagupta ise ilk n doğal sayının karelerinin ve küplerinin toplamını ifade eden formülleri bulmuştur. Fakat bu formüllerin ispatlarını yayınlamadığından dolayı Brahmagupta'nın bu işlemlere nasıl eriştiği günümüzde bilinmemektedir [13].

Kim ve Bayad, 2013'te yaptıkları çalışmada, L tek asal sayı ve T_L bir üçgensel sayı olmak üzere

$$T_L = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2L-1}(-1)^{m+1}\sigma_1^*(m).\sigma_1^*(2L-m)$$

eşitliği ile bazı üçgensel sayıları özel tanımlı bölen fonksiyonları cinsinden ifade etmişlerdir [14].

Bu çalışmada ise $n \in \mathbb{Z}^+$, $L \geq 1$, $L \in \mathbb{Z}$ ve T_L üçgensel sayısını, özel tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu cinsinden ifade etmeyi amaçladık ve bazı özgün eşitlikler elde ettik.

Evrenin dili matematiktir. Her yerde ve her şeyde matematik vardır. Matematik bazen gözümüzün önünde apaçık dururken bazen gizli, saklı bir yerlerde keşfedilmeyi bekler. Üçgensel sayılar acaba nerelerde saklanmış olabilir? Bunu düşünürken belli kurallara göre düzenlenmiş periyodik tablo aklımıza geldi. Bu harika tabloda üçgensel sayılar saklı olabilir miydi? Periyodik tabloyla alakalı birçok bilgi edindikten sonra üçgensel sayılar ile her elementin yapısında bulunan elektron sayısı arasında bir bağlantı fark ettik.

Bu tezin ilk bölümünde bölen fonksiyonları ve üçgensel sayılar ile ilgili genel bilgiler verilmiştir.

Sonraki bölümde üçgensel sayılar, bölen fonksiyonları ve özel tanımlı bölen fonksiyonları ile alakalı önemli bazı tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde özel tanımlı bölen fonksiyonları için eşitlikler bulunmuştur. Üçgensel sayılar ile özel tanımlı bölen fonksiyonları arasında ilişkiyi veren sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca üçgensel sayılar ile elektron sayısı arasındaki ilişkiyi veren yeni bir eşitlik bulunmuştur.

En son bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

2. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Çalışmanın bu bölümünde üçgensel sayılar ve bölen fonksiyonlarıyla ilgili sonraki bölümlerle kullanılacak olan ilgili literatürde bilinen bazı temel tanımlar ve teoremler yer almaktadır.

2.1 Üçgensel Sayılar

Üçgensel sayılar; üçgen formda olan çokgenlerle ilişkilendirilebilen sayılardır. Bir noktadan başlayarak o noktaya iki nokta eklenerek bir eşkenar üçgen, daha sonra üç nokta eklenerek altı noktalı bir eşkenar üçgen, daha sonra dört nokta eklenerek on noktalı bir eşkenar üçgen elde edilir. Bu şekilde devam eden dizinin elemanlarından oluşan bu sayılar üçgensel sayılar olarak adlandırılır.

2.1.1 Tanım 1'den başlayıp ardışık k tane doğal sayının toplamı şeklinde yazılabilen sayılara üçgensel sayı denir. Üçgensel sayılar

$$T_k = 1 + 2 + ... + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

eşitliği ile elde edilir.

2.1.2 Örnek Bazı üçgensel sayılar**;** $T_1 = 1$, $T_2 = 3$, $T_3 = 6$, $T_4 = 10$, $T_5 = 15$, $T_6 = 21$, $T_7 = 28$, $T_8 = 36 \ldots$ şeklindedir.

Tablo 2.1: İlk yirmi üçgensel sayı.

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_k	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55
k	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
T_k	66	78	91	105	120	136	153	171	190	210

2.1.3 Uyarı Bu sayıların üçgensel sayı olarak adlandırılmasının sebebi, sayının değeri kadar olan eş noktanın düzlemde bir eşkenar üçgen oluşturulabilmesidir.

2.1.4 Teorem Bir sayının üçgensel sayı olması için gerek ve yeter koşul n, 1'den büyük bir tamsayı olmak üzere

$$\frac{n(n+1)}{2}$$

formunda yazılabilmesidir [15].

2.1.5 Teorem $n \geq 1$ olmak üzere T_n tamsayısının üçgensel sayı olması için gerek ve yeter koşul $8T_n + 1$ formunun bir tek tamsayının karesi şeklinde yazılabilmesidir [16]. Dolayısıyla

$$8T_n + 1 = (2n+1)^2$$

eşitliği vardır.

2.1.6 Teorem T_n bir üçgensel sayı olmak üzere

$$n = \frac{\sqrt{8T_n + 1} - 1}{2}$$

eşitliği pozitif bir tamsayıdır [16].

2.1.7 Teorem $n \geq 1$ tamsayısı ve T_n üçgensel sayısı için

$$T_n = \binom{n+1}{2}$$

eşitliği vardır [15].

2.1.8 Teorem İki ardışık üçgensel sayının toplamı, her zaman tam kare bir sayıya eşit olur [16].

Örneğin;

$$T_1+T_2=1+3=4=2^2$$

$$T_2+T_3=3+6=9=3^2$$

$$T_3+T_4=6+10=16=4^2$$

$$T_4+T_5=10+15=25=5^2$$

$$T_5+T_6=15+21=36=6^2$$

$$T_6+T_7=21+28=49=7^2$$

2.1.9 Teorem n bir pozitif tamsayı ve T_n üçgensel sayı olmak üzere

$$T_{2n}-2T_n=n^2$$

eşitliği vardır [17].

2.1.10 Teorem n bir pozitif tamsayı ve T_n üçgensel sayı olmak üzere

$$T_{2n-1}-2T_{n-1}=n^2$$

eşitliği sağlanır [17].

2.1.11 Teorem $n>0$ ve T_n ve T_{n+1} ardışık iki üçgensel sayı olmak üzere

$$T_n+T_{n+1}=(n+1)^2$$

eşitliği vardır [16].

2.1.12 Teorem $n>0$ ve T_n ve T_{n+1} ardışık iki üçgensel sayı ise

$$T_{n+1}-T_n=n+1$$

eşitliği elde edilir.

2.1.13 Sonuç n pozitif bir tamsayı ve T_n üçgensel sayı olmak üzere

$$(T_{n+1} - T_n)^2 = T_n + T_{n+1}$$

eşitliği yazılır.

2.1.14 Sonuç n pozitif bir tamsayı ve T_n üçgensel sayı ise

$$T_{n+1}^2 - T_n^2 = (n+1)^3$$

eşitliği vardır.

2.1.15 Teorem $m,n > 0$ tamsayılar ve T_m, T_n herhangi iki üçgensel sayı olsun. O halde

$$T_{m+n} = T_m + T_n + m.n$$

eşitliği sağlanır [18].

2.1.16 Teorem n bir pozitif tamsayı ve T_n bir üçgensel sayı olmak üzere

$$25T_n + 3 = T_{5n+2}$$

eşitliği vardır [17].

2.1.17 Teorem $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $\sigma(n) = 2n$ ise n sayısına mükemmel sayı denir [19].

2.1.18 Örnek 6, 28, 496, 8128, 33550336, ... sayıları mükemmel sayılardır.

2.1.19 Teorem p ve $2^p - 1$ asal sayı olsun. $n = (2^{p-1})(2^p - 1)$ sayısı çift mükemmel sayıdır [19].

İspat: p ve $2^p - 1$ asal sayı olsun. n sayısının mükemmel sayı olduğunu göstermek için n ’nin pozitif bölenleri toplamının, n ’nin iki katına eşit olduğunu ispatlamalıyız. Bundan dolayı

$$\begin{aligned}\sigma(n) &= \sigma(2^{p-1}(2^p - 1))\\ &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1)\\ &= \sigma(2^{p-1})\sigma(2^p - 1)\\ &= \frac{2^{p-1+1} - 1}{2-1}(2^p - 1 + 1)\\ &= 2.2^{p-1}(2^p - 1)\\ &= 2n\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Dolayısıyla n hem çift hem de mükemmel sayıdır.

2.1.20 Teorem Her çift mükemmel sayı, bir üçgensel sayıdır [20].

2.1.21 Sonuç p ve $2^p - 1$ asal sayılar ise

$$n = 2^{p-1}(2^p - 1)$$

eşitliği bir üçgensel sayıdır.

2.1.22 Teorem $n > 0$ tamsayı olacak şekilde n tane üçgensel sayının toplamı

$$T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

şeklinde ifade edilir [16].

2.1.23 Teorem $n > 0$ tamsayı olmak üzere n tane karesel sayının toplamı

$$1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

şeklinde ifade edilir [16].

2.1.24 Teorem $k \in \mathbb{Z}$ ve T_{k-1} ve T_k birer üçgensel sayı olmak üzere

$$T_{k-1} + T_k = k^2$$

şeklinde ifade edebiliriz [21].

2.1.25 Teorem n, k birer tamsayı ve T_k bir üçgensel sayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} T_k = n^2$$

eşitliği vardır [21].

İspat: Matematiksel tümevarım yardımıyla ispatını kolayca görebiliriz. Eşitlik $n=1$ tamsayısı için

$$\sum_{k=1}^{1} (-1)^{k+1} T_k = (-1)^{1+1} T_1 = T_1 = 1 = 1^2$$

doğrudur. $n=t$ için doğru olduğunu kabul edelim.

$$\sum_{k=1}^{2t-1} (-1)^{k+1} T_k = t^2$$

olsun. Yani

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + (-1)^{2t-1+1}.T_{2t-1} = t^2$$
$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + T_{2t-1} = t^2$$

olsun. Şimdi de $n = t+1$ için doğruluğunu gösterelim.

$$\sum_{k=1}^{2(t+1)-1} (-1)^{k+1} T_k \overset{?}{=} (t+1)^2$$

$$\sum_{k=1}^{2t+1} (-1)^{k+1} T_k = T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \dots + T_{2t-1} + (-1)^{2t+1}.T_{2t} + (-1)^{2t+1+1}.T_{2t+1}$$

$$= T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + ... + T_{2t-1} - T_{2t} + T_{2t+1}$$

$$= t^2 - T_{2t} + T_{2t+1}$$

$$= t^2 - \frac{2t.(2t+1)}{2} + \frac{(2t+1).(2t+2)}{2}$$

$$= \frac{2t^2 - 4t^2 - 2t + 4t^2 + 4t + 2t + 2}{2}$$

$$= \frac{2.(t^2 + 2t + 1)}{2}$$

$$= t^2 + 2t + 1$$

$$= (t+1)^2$$

Dolayısıyla iddia $n = t$ için doğru iken $n = t+1$ için de doğru olur. Böylece ispat tamamlanır.

2.1.26 Sonuç n, k birer tamsayı ve T_{k-1} ve T_k birer üçgensel sayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{2n-1} (-1)^{k+1} T_k = T_{n-1} + T_n$$

şeklinde ifade edebiliriz [21].

2.2 Bölen Fonksiyonları

2.2.1 Tanım: $m, n, r \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $m.n = r$ ise m ve n tamsayılarına r 'nin çarpanları denir. r sayısına da m ve n'nin bir katı denilir. m , r 'nin bir böleni (çarpanı) ise $m \mid r$ şeklinde gösterilir [19].

2.2.2 Tanım: $n > 1$ tamsayısının kendisi ve 1 dışında pozitif böleni yoksa n sayısına asal sayı denir. Asal olmayan sayılara ise birleşik sayı denir. Her birleşik sayının da bir asal çarpanı vardır [19].

2.2.3 Tanım $A \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $f : N^+ \to A \subset \mathbb{C}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyona **aritmetik fonksiyon** denir [22].

2.2.4 Tanım $k,l \in \mathbb{Z}^+$ ve $(k,l)=1$ iken $f(k.l)=f(k).f(l)$ oluyor ise f aritmetik fonksiyonuna **çarpımsal fonksiyon** adı verilir [22].

2.2.5 Tanım n pozitif bir tamsayı olmak üzere n 'nin pozitif tamsayı bölenleri toplamı

$$\sigma(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{Z}^+ \\ d|n}} d$$

şeklinde tanımlanır [1].

2.2.6 Sonuç $\sigma(n)$ bir çarpımsal fonksiyondur.

2.2.7 Sonuç n bir asal sayı olmak üzere $\sigma(n)=n+1$ şeklinde yazılabilir.

2.2.8 Tanım $n \in \mathbb{Z}^+$, d ise n sayısının pozitif tamsayı bölenleri olmak üzere

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sum_{\substack{d\in Z^+ \\ d|n}} (-1)^{\frac{n}{d}-1}.d^k$$

şeklinde özel tanımlı fonksiyona $\hat{\sigma}_k(n)$ **Bölen Fonksiyonu** adı verilir [1].

2.2.9 Örnek $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonunu daha açık şekilde görmek için örnekler verebiliriz.

$n=1$, $k=1$ için $\hat{\sigma}(1)=1$,

$n=2$, $k=3$ için $\hat{\sigma}_3(2)=(-1)^{\frac{2}{1}-1}.1^3+(-1)^{\frac{2}{2}-1}.2^3=-1+8=7$,

$n=3$, $k=1$ için $\hat{\sigma}(3)=(-1)^{\frac{3}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{3}{3}-1}.3=1+3=4$,

$n=4$, $k=1$ için $\hat{\sigma}(4)=(-1)^{\frac{4}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{4}{2}-1}.2+(-1)^{\frac{4}{4}-1}.4=-1-2+4=1$

değerlerini alır.

2.2.10 Tanım $n \in \mathbb{Z}^+$, d ise n sayısının pozitif tamsayı bölenleri olmak üzere

$$\sigma_k^*(n) = \sum_{\substack{d \in Z^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d}\ tek}} d^k$$

şeklinde özel tanımlı fonksiyona $\sigma_k^*(n)$ **Bölen Fonksiyonu** adı verilir [1].

2.2.11 Örnek $\sigma_k^*(n)$ bölen fonksiyonunu daha net görmek için örnekler verebiliriz.

$n=1$, $k=1$ için $\sigma^*(1)=1$,

$n=2$, $k=1$ için $\sigma^*(2)=2$,

$n=3$, $k=1$ için $\sigma^*(3)=1+3=4$,

$n=4$, $k=1$ için $\sigma^*(4)=4$,

$n=5$, $k=2$ için $\sigma_2^*(5)=1^2+5^2=26$

elde edilir.

2.2.12 Teorem p bir asal sayı ve $a \in \mathbb{Z}$ olacak şekilde

$$\sigma_k(p^a) = 1 + p^k + p^{2k} + \ldots + p^{ak} = \frac{p^{(a+1)k} - 1}{p^k - 1}$$

eşitliği sağlanır [1].

2.2.13 Örnek $k=2$, $p=2$ ve $a=3$ için

$$\sigma_2(2^3) = 1 + 2^2 + 2^{2.2} + 2^{3.2} = \frac{2^{4.2}-1}{2^2-1} = \frac{255}{3} = 85$$

sonucu elde edilir.

2.2.14 Sonuç a pozitif bir tamsayı iken

$$\sigma_k(2^a) = \frac{2^{(a+1)k} - 1}{2^k - 1}$$

şeklinde olur [1].

2.2.15 Sonuç Eğer a negatif olmayan bir tamsayı ise

$$\sigma_k^*(2^a) = 2^{ak}$$

şeklinde yazılır [1].

2.2.16 Teorem n pozitif bir tamsayı, k bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{\substack{d \in Z^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d}\ \text{çift}}} d^k = \sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

biçimindedir [1].

2.2.17 Örnek $k=1$ ve $n=12$ ise n 'nin bölenleri $1, 2, 3, 4, 6, 12$ ‘dir. $\frac{n}{d}$ ise $12, 6, 4, 3, 2, 1$ ‘dir. Çift olan sayılar $12, 6, 4, 2$ ‘dir. O halde biz $1, 2, 3, 6$ bölenlerini almalıyız. Sonuçta $1+2+3+6=12=\sigma_1\left(\frac{12}{2}\right)$ olur.

2.2.18 Teorem n pozitif bir tamsayı, k bir tamsayı olmak üzere

$$\sum_{\substack{d \in Z^+ \\ d|n \\ \frac{n}{d}\ tek}} d^k = \sigma_k(n) - \sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

şeklindedir [1].

2.2.19 Örnek $k=1$ ve $n=18$ ise n 'nin bölenleri 1, 2, 3, 6, 9, 18 'dir. $\frac{n}{d}$ ise 18, 9, 6, 3, 2, 1 'dir. Tek olan sayılar 9, 3, 1 'dir. O halde biz 2, 6, 18 bölenlerini almalıyız. Sonuçta $2+6+18=26=\sigma_1(18)-\sigma_1\left(\frac{18}{2}\right)$ olur.

2.2.20 Teorem n pozitif bir tamsayı ve k bir tamsayı olmak üzere

$$\hat{\sigma}_k(n)=\sigma_k(n)-2^k.\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$$

eşitliği sağlanır [1].

2.2.21 Örnek $k=1$ ve $n=6$ ise n 'nin bölenleri 1, 2, 3, 6 'dir. $\hat{\sigma}_1(6)$ ifadesini tanımdan yararlanarak hesaplarsak

$$\hat{\sigma}_1(6)=(-1)^{\frac{6}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{6}{2}-1}.2+(-1)^{\frac{6}{3}-1}.3+(-1)^{\frac{6}{6}-1}.6=-1+2-3+6=4$$

elde ederiz. Şimdi bunu teoremden yararlanarak hesaplarsak

$$\hat{\sigma}_1(6)=\sigma_1(6)-2^1.\sigma_1\left(\frac{6}{2}\right)=12-2.\sigma_1(3)=12-2.4=4$$

doğal olarak aynı sonucu buluruz.

2.2.22 Sonuç n pozitif bir tamsayı ve $k=1$ olmak üzere

$$\hat{\sigma}(n)=\sigma(n)-2.\sigma\left(\frac{n}{2}\right)$$

yazılabilir [1].

2.2.23 Teorem L tek asal sayı ve T_L üçgensel sayı olmak üzere

$$T_L = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{2L-1}(-1)^{m+1}\sigma^*(m).\sigma^*(2L-m)$$

eşitliği vardır [14].

2.2.24 Teorem $q \in \mathbb{Z}$ ve $L = 2q-1$ tek asal sayı olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{L-1}(-1)^m \sigma^*(m).\sigma^*(2L-m) = q$$

eşitliği sağlanır [14].

3. ÜÇGENSEL SAYILARIN BÖLEN FONKSİYONLARI YARDIMIYLA İFADESİ

3.1 Özel Tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ Bölen Fonksiyonu ile Üçgensel Sayıların İlişkisi

3.1.1 Teorem n tek tamsayı iken

$$\hat{\sigma}_k(n) = \sigma_k(n)$$

eşitliği vardır.

İspat: (2.2.20) Teorem'e göre $\hat{\sigma}_k(n) = \sigma_k(n) - 2^k.\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right)$ denklemini düşünelim. n tek tamsayı iken $\frac{n}{2}$ tamsayı olamayacağından bölen fonksiyonu tanımı gereği $\sigma_k\left(\frac{n}{2}\right) = 0$ olur. Buradan da $\hat{\sigma}_k(n) = \sigma_k(n)$ eşitliği elde edilir.

3.1.2 Örnek Teoremi daha iyi anlamak için örnek verebiliriz.
$n = 15,\ k = 1$ için $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu tanımından

$$\hat{\sigma}(15) = (-1)^{\frac{15}{1}-1}.1 + (-1)^{\frac{15}{3}-1}.3 + (-1)^{\frac{15}{5}-1}.5 + (-1)^{\frac{15}{15}-1}.15 = 1+3+5+15 = 24$$

eşitliğini elde ederiz. Şimdi teoremden yararlanarak hesaplayacak olursak $n = 15$ tek sayı olduğundan $\hat{\sigma}(15) = \sigma(15) = 1+3+5+15 = 24$ buluruz.

3.1.3 Teorem n tek asal sayı ise

$$\hat{\sigma}(n) = n+1$$

eşitliği vardır.

İspat: (3.1.1) Teorem'e göre n tek tamsayı iken $\hat{\sigma}_k(n) = \sigma_k(n)$ eşitliği vardır. Burada $k = 1$ alırsak $\hat{\sigma}(n) = \sigma(n)$ olur. n aynı zamanda bir asal sayı olduğundan (2.2.7) Sonuç'a göre $\sigma(n) = n+1$ dir. Dolayısıyla bu iki eşitlikten $\hat{\sigma}(n) = n+1$ elde edilir.

3.1.4 Örnek Teoreme bir örnek verelim.

$n=7$, $k=1$ için $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonu tanımından

$\hat{\sigma}(7)=(-1)^{\frac{7}{1}-1}.1+(-1)^{\frac{7}{7}-1}.7=1+7=8$

elde ederiz. Yukarıdaki teoremden yararlanarak hesaplayacak olursak $n=7$ tek asal sayı olduğundan $\hat{\sigma}(7)=7+1=8$ olur.

3.1.5 Teorem a bir doğal sayı olmak üzere daima

$$\hat{\sigma}(2^a)=1$$

eşitliği vardır.

İspat: $a\in\mathbb{N}$ olsun. (2.2.22) Sonuç'taki $\hat{\sigma}(n)=\sigma(n)-2.\sigma\left(\frac{n}{2}\right)$ eşitliğinde $n=2^a$ yazalım.

$$\hat{\sigma}(2^a)=\sigma(2^a)-2.\sigma\left(\frac{2^a}{2}\right)=\frac{2^{a+1}-1}{2-1}-2.\frac{2^a-1}{2-1}=2^{a+1}-1-2.2^a+2=1$$

eşitliği elde edilir. O halde ispat tamamlanır.

3.1.6 Örnek $\hat{\sigma}(2^4)=\sigma(16)-2.\sigma\left(\frac{16}{2}\right)=31-2.15=31-30=1$

3.1.7 Teorem L bir doğal sayı ve $L\geq 1$ olmak üzere

$$\sum_{a=0}^{L-1}\hat{\sigma}(2^a)=L$$

eşitliği vardır.

İspat: $L \in \mathbb{N}$ ve $L \geq 1$ olsun.

$$\sum_{a=0}^{L-1} \hat{\sigma}(2^a) = \hat{\sigma}(2^0) + \hat{\sigma}(2^1) + \hat{\sigma}(2^2) + ... + \hat{\sigma}(2^{L-1})$$

biçiminde yazabiliriz. (3.1.5) Teorem'e göre $\hat{\sigma}(2^a) = 1$ olduğundan

$$\sum_{a=0}^{L-1} \hat{\sigma}(2^a) = 1 + 1 + 1 + ... + 1 = L$$

aranan sonuç bulunur ve ispat tamamlanır.

3.1.8 Örnek $\sum_{a=0}^{5} \hat{\sigma}(2^a) = 1+1+1+1+1+1 = 6$

3.1.9 Teorem p ve $2^p - 1$ asal sayı olsun. $n = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$ üçgensel sayısı için

$$\hat{\sigma}(2^{p-1}(2^p - 1)) = 2^p$$

eşitliği vardır.

İspat: p ve $2^p - 1$ asal sayı ise (2.1.19) Teorem'e göre $n = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$ çift mükemmel sayıdır. (2.1.20) Teorem'e göre her çift mükemmel sayı üçgensel sayıdır. Dolayısıyla $n = 2^{p-1}(2^{p-1} - 1)$ sayısı bir üçgensel sayıdır. $\hat{\sigma}(2^{p-1}(2^p - 1))$ bölen fonksiyonunu hesaplamak için $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonunun çarpımsal ve $\left(2^{p-1}, (2^{p-1} - 1)\right) = 1$ olduğunu kullanarak ardından (3.1.5) Teorem ve (3.1.3) Teorem'den yararlanarak

$$\hat{\sigma}(2^{p-1}.(2^p - 1)) = \hat{\sigma}(2^{p-1})\hat{\sigma}(2^p - 1) = 1.\hat{\sigma}(2^p - 1) = 1.(2^p - 1 + 1) = 2^p$$

elde edilir.

3.1.10 Örnek $p = 2$ için $n = 2^{2-1}.(2^2 - 1) = 2.3 = 6$, $\hat{\sigma}(6) = 4 = 2^2$ ve

$p = 3$ için $n = 2^{3-1}.(2^3 - 1) = 2^2.7 = 28$, $\hat{\sigma}(28) = 8 = 2^3$ elde ederiz.

3.1.11 Teorem n pozitif bir tam sayı, $L \geq 1$, $L \in \mathbb{Z}$ ve T_L üçgensel sayı olmak üzere

$$T_L = \sum_{n=1}^{L} n.\hat{\sigma}(2^n)$$

biçiminde T_L üçgensel sayısını, özel tanımlı $\hat{\sigma}(n)$ bölen fonksiyonu cinsinden ifade edebiliriz.

İspat: $n \in \mathbb{Z}^+$, $L \geq 1$ ve $L \in \mathbb{Z}$ olsun. $\sum_{n=1}^{L} n.\hat{\sigma}(2^n)$ toplamını açık bir şekilde yazacak olursak

$$\sum_{n=1}^{L} n.\hat{\sigma}(2^n) = 1.\hat{\sigma}(2^1) + 2.\hat{\sigma}(2^2) + ... + L.\hat{\sigma}(2^L)$$

elde edilir. (3.1.5) Teorem'den yararlanılarak

$$\sum_{n=1}^{L} n.\hat{\sigma}(2^n) = 1.1 + 2.1 + 3.1 + ... + L.1 = 1 + 2 + 3 + ... + L = \frac{L(L+1)}{2} = T_L$$

eşitliği bulunur ve ispat tamamlanır.

3.1.12 Örnek Teoreme örnekler verelim.

$L = 1$ yazarsak $T_1 = 1$ üçgensel sayısı

$$T_1 = \sum_{n=1}^{1} n.\hat{\sigma}(2^n) = 1.\hat{\sigma}(2) = 1.1 = 1,$$

$L = 2$ yazarsak $T_2 = 3$ üçgensel sayısı

$$T_2 = \sum_{n=1}^{2} n.\hat{\sigma}(2^n) = 1.\hat{\sigma}(2^1) + 2.\hat{\sigma}(2^2) = 1.1 + 2.1 = 3,$$

$L = 3$ yazarsak $T_3 = 6$ üçgensel sayısı

$$T_3=\sum_{n=1}^{3}n.\hat{\sigma}(2^n)=1.\hat{\sigma}(2^1)+2.\hat{\sigma}(2^2)+3.\hat{\sigma}(2^3)=1.1+2.1+3.1=6$$

elde edilir.

3.1.13 Teorem n, k ve l pozitif tamsayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}l.\hat{\sigma}(2^l)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $n\in\mathbb{Z}^+$ $k\in\mathbb{Z}^+$ $l\in\mathbb{Z}^+$ olsun. (2.1.23) Teorem'e göre $\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ ve (3.1.11) Teorem'e göre $T_L=\sum_{n=1}^{L}n.\hat{\sigma}(2^n)$ eşitlikleri vardır. O halde (2.1.23) Teorem'inde T_k yerine (3.1.11) Teoremi'ndeki eşitliği yazarsak ispat tamamlanır.

3.1.14 Örnek $n=2$ olsun.

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{k}l.\hat{\sigma}(2^l)=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{k}l.\hat{\sigma}(2^l)=\frac{2.(2+1)(2+2)}{6}$$

$$\sum_{l=1}^{1}l.\hat{\sigma}(2^l)+\sum_{l=1}^{2}l.\hat{\sigma}(2^l)=\frac{2.3.4}{6}$$

$$1.\hat{\sigma}(2^l)+1.\hat{\sigma}(2^l)+2.\hat{\sigma}(2^2)=\frac{2.3.4}{6}$$

$$1+1+2=4$$
$$4=4$$

3.1.15 Teorem $n \geq 1$, n bir tamsayı, $k \leq n$, k bir tamsayı , $l \leq 2k-1$, l bir tamsayı olsun. T_l bir üçgensel sayı olmak üzere

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} T_l$$

eşitliği vardır.

İspat: n ve k pozitif bir tamsayı olmak üzere

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

biçimindedir. (2.1.26) Teorem'den yararlanılarak $l \leq 2k-1$ ve $l \in \mathbb{Z}$ olmak üzere k^2 yerine $\sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} T_l$ yazabiliriz. O halde $1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} T_l$ eşitliği elde edilir.

3.1.16 Örnek (3.1.15) Teoremi için örnekler verelim;

$n = 1$ için

$$1 = \sum_{k=1}^{1} \sum_{l=1}^{1} (-1)^{l+1} T_l = (-1)^{1+1} = T_1 = 1$$

$$1 = 1$$

elde ederiz.

$n = 2$ için

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 &= \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} T_l \\ 5 &= \sum_{l=1}^{1} (-1)^{l+1} T_l + \sum_{l=1}^{3} (-1)^{l+1} T_l \\ 5 &= (-1)^{1+1}.T_1 + (-1)^{1+1}.T_1 + (-1)^{2+1}.T_2 + (-1)^{3+1}.T_3 \\ 5 &= T_1 + T_1 - T_2 + T_3 \\ 5 &= 1 + 1 - 3 + 6 \\ 5 &= 5 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir ve aynı şekilde

$n = 3$ için

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2 &= \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l \\
14 &= \sum_{l=1}^{1}(-1)^{l+1}T_l+\sum_{l=1}^{3}(-1)^{l+1}T_l+\sum_{l=1}^{5}(-1)^{l+1}T_l \\
14 &= T_1+T_1-T_2+T_3+T_1-T_2+T_3-T_4+T_5 \\
14 &= 1+1-3+6+1-3+6-10+15 \\
14 &= 14
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

3.1.17 Teorem $n\geq 1$ ve n bir tamsayı, T_n bir üçgensel sayı olmak üzere

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{T_n}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

dir.

İspat: $n\in\mathbb{Z}^+$ ve T_n bir üçgensel sayı olmak üzere (2.1.24) Teorem'e göre

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

eşitliği vardır. $\frac{n(n+1)}{2}=T_n$ ve (3.1.7) Teorem'e göre $n\geq 1$ iken $\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)=n$ olduğundan yararlanılarak

$$
\begin{aligned}
1^2+2^2+3^2+...+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.\frac{(2n+1)}{3} \\
&= T_n.\frac{1}{3}.(2n+1) \\
&= \frac{T_n}{3}.(2n+1) \\
&= \frac{T_n}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.1.18 Örnek Teoremin anlaşılabilmesi için örnekler verelim;

$n=1$ için

$$1^2=\frac{T_1}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{0}\hat{\sigma}(2^t)\right]=\frac{1}{3}[1+2.1]=\frac{3}{3}=1,$$

$n=2$ için

$$1^2+2^2=\frac{T_2}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{1}\hat{\sigma}(2^t)\right]=\frac{3}{3}[1+2.(1+1)]=5,$$

$n=3$ için

$$1^2+2^2+3^2=\frac{T_3}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{2}\hat{\sigma}(2^t)\right]=\frac{6}{3}[1+2.(1+1+1)]=14$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.19 Sonuç $n\geq 1$, n bir tamsayı , $k\leq n$, k bir tamsayı , $l\leq 2k-1$, l bir tamsayı olsun. T_l bir üçgensel sayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l=\frac{T_n}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

vardır.

İspat: $n\geq 1$ ve n bir tamsayı , $k\leq n$ ve k bir tamsayı , $l\leq 2k-1$ ve l bir tamsayı olmak üzere

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l$$

ve

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{T_n}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

eşitliklerinden faydalanılarak ispat kolayca görülür.

3.1.20 Örnek Teoremi daha iyi anlamak için örnek verebiliriz.

$n=1$ için

$$\sum_{k=1}^{1}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l=\frac{T_1}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{1-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

$$-1)^{1+1}.T_1=\frac{T_1}{3}\left[1+2.1\right] \qquad ,$$

$$T_1=T_1$$

$$1=1$$

$n=2$ için

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l=\frac{T_2}{3}\left[1+2.\sum_{t=0}^{2-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

$$\sum_{l=1}^{1}(-1)^{l+1}T_l+\sum_{l=1}^{3}(-1)^{l+1}T_l=\frac{T_2}{3}\left[1+2.(1+1)\right]$$

$$\sum_{l=1}^{1}(-1)^{l+1}T_l+\sum_{l=1}^{3}(-1)^{l+1}T_l=\frac{T_2}{3}\left[1+2.(1+1)\right]$$

$$(-1)^{1+1}.T_1+(-1)^{1+1}.T_1+(-1)^{2+1}.T_2=T_2.\frac{5}{3}$$

$$T_1+T_1-T_2+T_3=T_2.\frac{5}{3}$$

$$2T_1-T_2+T_3=T_2.\frac{5}{3}$$

$$2.1-3+6=3.\frac{5}{3}$$

$$5=5$$

elde edilir.

3.1.21 Teorem $n\geq 1$ bir tamsayı ve T_n üçgensel sayı olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l=\left(\frac{T_{n+1}-T_n}{6}\right).\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\left[1+2.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]$$

dir.

İspat: n **,** 1'den büyük ya da eşit bir tamsayı, T_n bir üçgensel sayı olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l = 1^2+2^2+3^2+...+n^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\\ &= n.(n+1).\frac{(2n+1)}{6}\\ &= n.\left[T_{n+1}-T_n\right].\frac{(2n+1)}{6}\\ &= \sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t).(T_{n+1}-T_n).\frac{(2n+1)}{6}\\ &= (T_{n+1}-T_n).\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t).\frac{1}{6}(1+2n)\\ &= \frac{(T_{n+1}-T_n)}{6}.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t).(1+2n)\\ &= \frac{(T_{n+1}-T_n)}{6}.\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t).(1+2\sum_{t=0}^{n-1}\hat{\sigma}(2^t))\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

3.1.22 Örnek Teoreme örnek verelim;

$n=1$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{1}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l &= \left(\frac{T_2-T_1}{6}\right).\sum_{t=0}^{1-1}\hat{\sigma}(2^t)\left[1+2.\sum_{t=0}^{1-1}\hat{\sigma}(2^t)\right]\\ (-1)^{l+1}T_1 &= \frac{T_2-T_1}{6}.1.\left[1+2.1\right]\\ 1 &= \frac{3-1}{6}.1.3\\ 1 &= 1\end{aligned}$$

,

$n=2$ için

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{2}\sum_{l=1}^{2k-1}(-1)^{l+1}T_l &= \left(\frac{T_3-T_2}{6}\right).\sum_{t=0}^{1}\hat{\sigma}(2^t)\left[1+2.\sum_{t=0}^{1}\hat{\sigma}(2^t)\right]\\ \sum_{l=1}^{1}(-1)^{l+1}T_l+\sum_{l=1}^{3}(-1)^{l+1}T_l &= \frac{T_3-T_2}{6}(1+1)\left[1+2.(1+1)\right]\\ T_1+T_1-T_2+T_3 &= \frac{T_3-T_2}{6}.2.5\\ 1+1-3+6 &= \frac{6-3}{6}.10\\ 5 &= 5\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.23 Sonuç $n \geq 1,\ n$ bir tamsayı ve $L = 2n-1$ tek asal sayı olmak üzere

$$n = \sum_{t=0}^{n-1} \hat{\sigma}(2^t) = \sum_{m=1}^{L-1} (-1)^m \sigma^*(m).\sigma^*(2L-m)$$

eşitliği vardır.

İspat: (3.1.7) Teorem ve (2.2.24) Teorem'lerinde gerekli indis değişiklikleri yapılarak ispat kolayca görülür.

3.1.24 Örnek Bir önceki teoremi daha iyi anlamak için örnek verelim;

$n = 2$ ise $L = 2.2 - 1 = 3$ tek asal sayı olur. O halde (3.1.23) Teorem'inde L yerine 3 yazalım

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{3-1} (-1)^m \sigma^*(m).\sigma^*(6-m) &= (-1)^1.\sigma^*(1).\sigma^*(5) + (-1)^2.\sigma^*(2).\sigma^*(4) \\ &= -1.6 + 2.4 \\ &= 2 \\ &= n \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 3$ ise $L = 2.3 - 1 = 5$ tek asal sayısını eşitlikle yerine yazalım. O halde

$$\sum_{m=1}^{4} (-1)^m \sigma^*(m).\sigma^*(10-m)$$

$$\begin{aligned} &= (-1)^1.\sigma^*(1).\sigma^*(9) + (-1)^2.\sigma^*(2).\sigma^*(8) + (-1)^3.\sigma^*(3).\sigma^*(7) + (-1)^4.\sigma^*(4).\sigma^*(6) \\ &= -1.13 + 2.8 - 4.8 + 4.8 \\ &= 3 \\ &= n \end{aligned}$$

elde edilir.

$n = 4$ ise $L = 2.4 - 1 = 7$ tek asal sayını eşitlikte yerine yazalım. O halde

$$\sum_{m=1}^{6} (-1)^m \sigma^*(m).\sigma^*(14-m)$$

$$
\begin{aligned}
&= (-1)^1.\sigma^*(1).\sigma^*(13) + (-1)^2.\sigma^*(2).\sigma^*(12) + (-1)^3.\sigma^*(3).\sigma^*(11) + (-1)^4.\sigma^*(4).\sigma^*(10) \\
&+(-1)^5.\sigma^*(5).\sigma^*(9) + (-1)^6.\sigma^*(6).\sigma^*(8) \\
&= -1.14 + 2.16 - 4.12 + 4.12 - 6.13 + 8.8 \\
&= 4 \\
&= n
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir.

3.2 Üçgensel Sayıların Atomların Yapısında Gözlemlenmesi

Kimyasal elementleri sınıflandırarak oluşturulmuş tabloya Periyodik Tablo adı verilmektedir.

Tablo 3.1: Periyodik Tablo.

GRUP PERİYOT	1 Hidrojen & Alkali Metaller	2 Toprak Alkali Metaller		3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13 Triels	14 Tetrels	15 Azot Grubu	16 Kalkojenler	17 Halojenler	18 Soygazlar
1	H 1																		He 2
2	Li 3	Be 4												B 5	C 6	N 7	O 8	F 9	Ne 10
3	Na 11	Mg 12												Al 13	Si 14	P 15	S 16	Cl 17	Ar 18
4	K 19	Ca 20		Sc 21	Ti 22	V 23	Cr 24	Mn 25	Fe 26	Co 27	Ni 28	Cu 29	Zn 30	Ga 31	Ge 32	As 33	Se 34	Br 35	Kr 36
5	Rb 37	Sr 38		Y 39	Zr 40	Nb 41	Mo 42	Tc 43	Ru 44	Rh 45	Pd 46	Ag 47	Cd 48	In 49	Sn 50	Sb 51	Te 52	I 53	Xe 54
6	Cs 55	Ba 56	*	Lu 71	Hf 72	Ta 73	W 74	Re 75	Os 76	Ir 77	Pt 78	Au 79	Hg 80	Tl 81	Pb 82	Bi 83	Po 84	At 85	Rn 86
7	Fr 87	Ra 88	*	Lr 103	Rf 104	Db 105	Sg 106	Bh 107	Hs 108	Mt 109	Ds 110	Rg 111	Cn 112	Nh 113	Fi 114	Mc 115	Lv 116	Ts 117	Og 118

*	La 57	Ce 58	Pr 59	Nd 60	Pm 61	Sm 62	Eu 63	Gd 64	Tb 65	Dy 66	Ho 67	Er 68	Tm 69	Yb 70
*	Ac 89	Th 90	Pa 91	U 92	Np 93	Pu 94	Am 95	Cm 96	Bk 97	Cf 98	Es 99	Fm 100	Md 101	No 102

Her elementin bütün özelliklerini taşıyan bir en küçük yapısı vardır. Bu yapıya atom adı verilmektedir. Atomun içinde ise kendisinden daha küçük parçalar bulunmaktadır. Proton ve nötron atomun çekirdeğinde, elektronlar ise çekirdeğin etrafında bir bulut gibi yer alırlar [23, 24].

Periyodik tablo, kimyasal elementlerin bir sınıflandırılmasıdır. Grup adı verilen sütunlardan ve periyot adı verilen satırlardan oluşmaktadır. Tablo, bilinen elementlerin artan atom numaralarına (proton sayılarına) göre düzenlenmiştir. Ayrıca atom çekirdeği etrafında yer alan elektronların bulunduğu yörüngeler vardır. Elektronların bu yörüngelerdeki konumu veya belli bir yerde bulunma ihtimalini açıklayan bu matematiksel fonksiyon yörüngelerdir. Bu yörüngelere enerji seviyesi (katman) adı verilir [23, 24].

Elektronlar enerji seviyelerine belirli kurallara göre yerleşebilirler. Her enerji seviyesinin bir elektron kapasitesi vardır. Bu enerji seviyeleri 1, 2, 3, 4, 5, 6 ve 7 sayıları ile ifade edilir. Bu sayılara baş kuantum sayısı denir ve k ile gösterilir. Enerji seviyesinin sayısı ile enerji seviyesinin atomun çekirdeğine uzaklığı doğru orantılıdır. Bir enerji seviyesinde kaç tane elektron olduğunu hesaplamak için $2k^2$ değişkeni kullanılır [24].

Her enerji seviyesi daha alt enerji seviyeleri içerirler. Bu alt enerji seviyeleri s, p, d, f harfleri ile gösterilir. s alt enerji seviyesinde en fazla 2 elektron, p alt enerji seviyesinde en fazla 6 elektron, d alt enerji seviyesinde en fazla 10 elektron ve f alt enerji seviyesinde en fazla 14 elektron bulunabilir [24]. Buna göre;

1. Enerji seviyesi s^2 en fazla 2 elektron,

2. Enerji seviyesi $2s^2 2p^6$ en fazla 8 elektron,

3. Enerji seviyesi $3s^2 3p^6 3d^{10}$ en fazla 18 elektron,

4. Enerji seviyesi $4s^2 4p^6 4d^{10} 4f^{14}$ en fazla 32 elektron,

5. Enerji seviyesi $5s^2 5p^6 5d^{10} 5f^{14}$ en fazla 32 elektron,

6. Enerji seviyesi $6s^2 6p^6 6d^{10}$ en fazla 18 elektron,

7. Enerji seviyesi $7s^2 7p^6$ en fazla 8 elektron bulundurur.

Enerji seviyeleri ve bulundurdukları maksimum elektron sayıları incelendiğinde üçgensel sayılar ile ilişkili olduğu görülebilir.

İlk dört enerji seviyesine bakıldığında her birinde maksimum 2, 8, 18, 32 tane elektron bulunabilir. Her bir seviyeyi k ile gösterirsek, T_k bir üçgensel sayı ve $T_0 = 0$ olmak üzere, elektron sayılarını da $2(T_{k-1} + T_k)$ ile elde edebiliriz.

$$k = 1 \Rightarrow 2(T_{k-1} + T_k) = 2(T_0 + T_1) = 2(0+1) = 2 \ \textit{elektron} \rightarrow \textit{1. Enerji seviyesi}$$

$$k = 2 \Rightarrow 2(T_{k-1} + T_k) = 2(T_1 + T_2) = 2(1+3) = 8 \ \textit{elektron} \rightarrow \textit{2. Enerji seviyesi}$$

$$k = 3 \Rightarrow 2(T_{k-1} + T_k) = 2(T_2 + T_3) = 2(3+6) = 18 \ \textit{elektron} \rightarrow \textit{3. Enerji seviyesi}$$

$$k = 4 \Rightarrow 2(T_{k-1} + T_k) = 2(T_3 + T_4) = 2(6+10) = 32 \ \textit{elektron} \rightarrow \textit{4. Enerji seviyesi}$$

3.2.1 Teorem $k \in \mathbb{Z}$, $1 \le k \le 4$, k enerji seviyesi ve $T_0 = 0$ iken T_k bir üçgensel sayı olmak üzere, enerji seviyeleri ve üçgensel sayılar arasında

$$k^2 = T_{k-1} + T_k$$

bağıntısı vardır.

3.2.2 Teorem $k \in \mathbb{Z}$, $1 \le k \le 4$, k enerji seviyesi ve $T_0 = 0$ iken T_k bir üçgensel sayı olmak üzere, enerji seviyelerindeki elektron sayısı ile üçgensel sayılar arasında

$$\textit{Elektron Sayısı}_{(k)} = 2(T_{k-1} + T_k)$$

bağıntısı vardır.

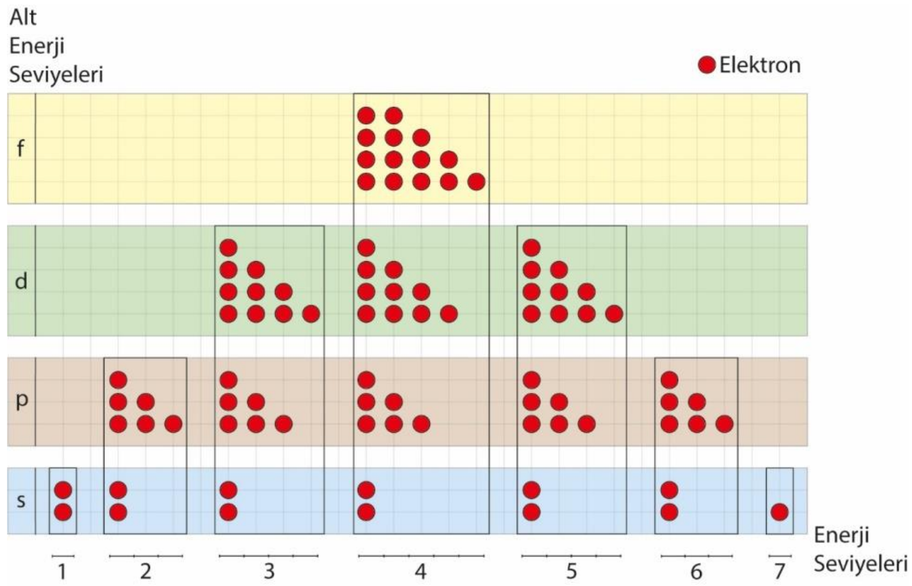
3.2.3 Teorem $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere enerji seviyelerindeki elektron sayısı ile üçgensel sayılar arasında

$$\textit{Elektron Sayısı}_{(k)} = \sum_{l=1}^{2k-1} (-1)^{l+1} 2T_l$$

bağıntısı vardır.

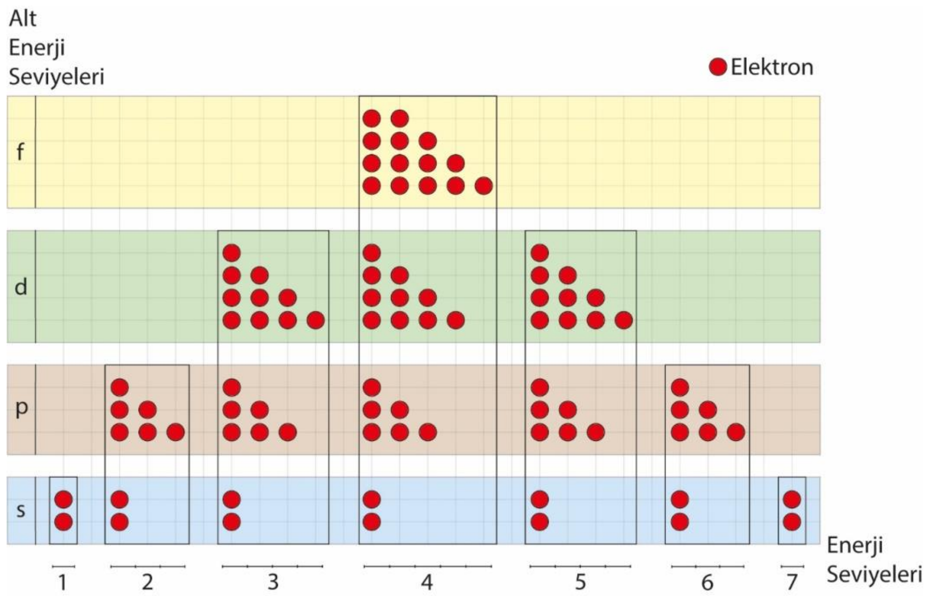
Aşağıdaki şekillerde periyodik tabloda, her grupta en fazla elektron bulunduran elementlerin elektron dağılımları ve üçgensel sayılarla ilişkisi ifade edilmiştir.

1A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (87) bulunduran Fransiyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



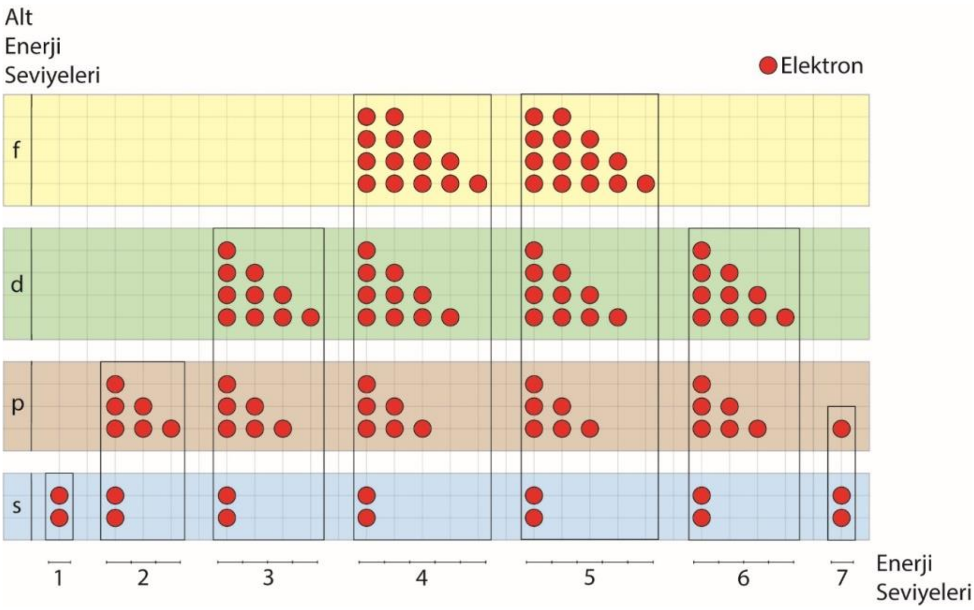
Şekil 3.1: Fransiyum elementinin elektron dağılımı.

2A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (88) bulunduran Radyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



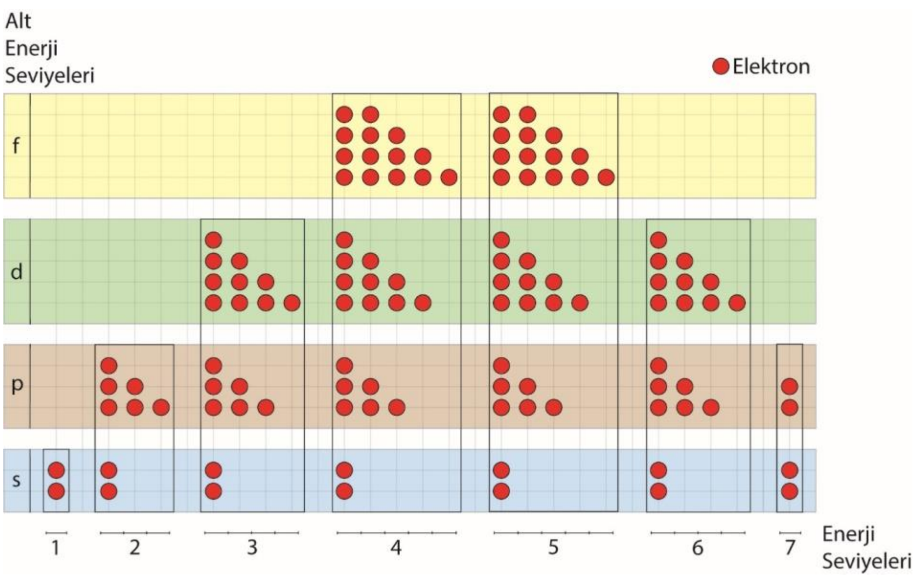
Şekil 3.2: Radyum elementinin elektron dağılımı.

3A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (113) bulunduran Nihonyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



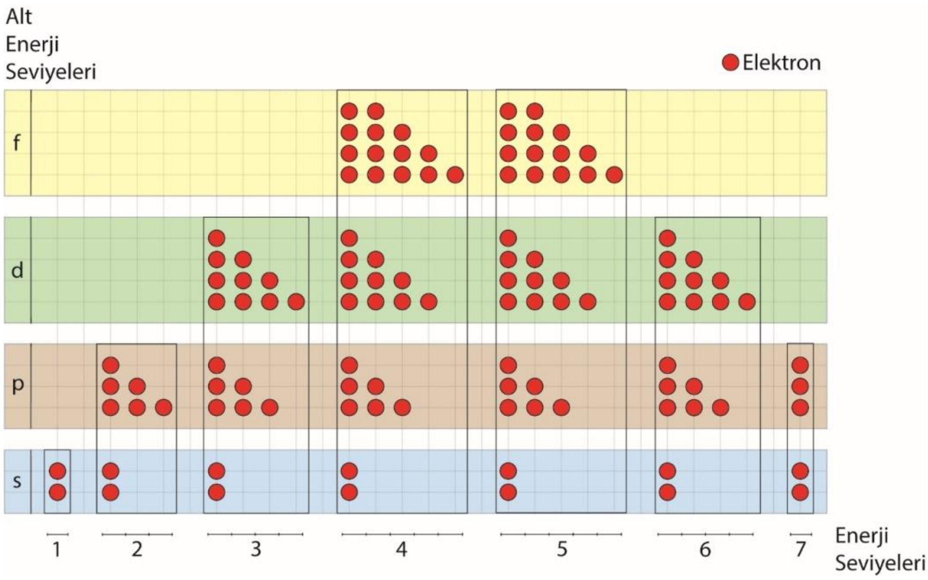
Şekil 3.3: Nihonyum elementinin elementinin elektron dağılımı.

4A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (114) bulunduran Fleroviyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



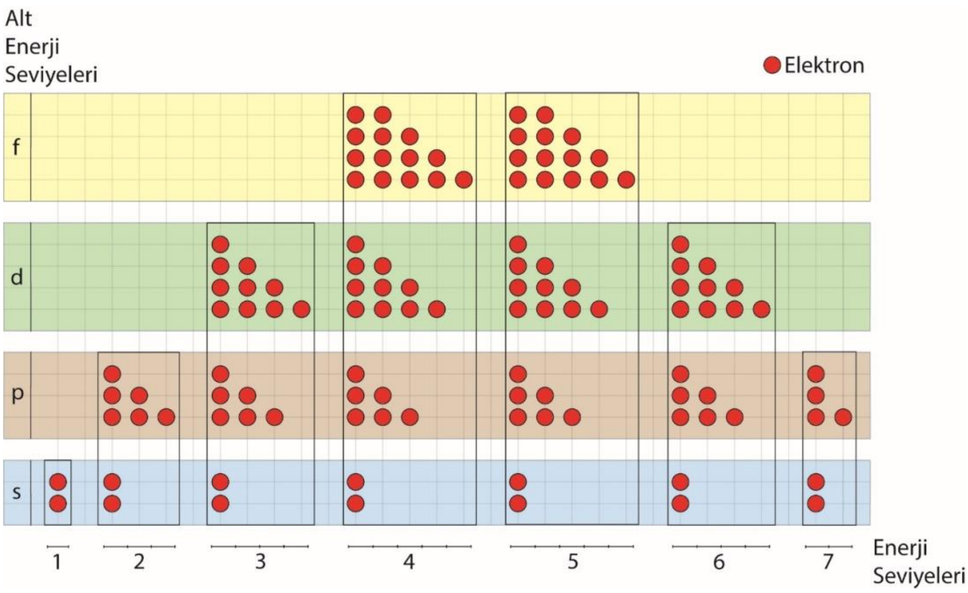
Şekil 3.4: Fleroviyum elementinin elektron dağılımı.

5A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (115) bulunduran Moskoviyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



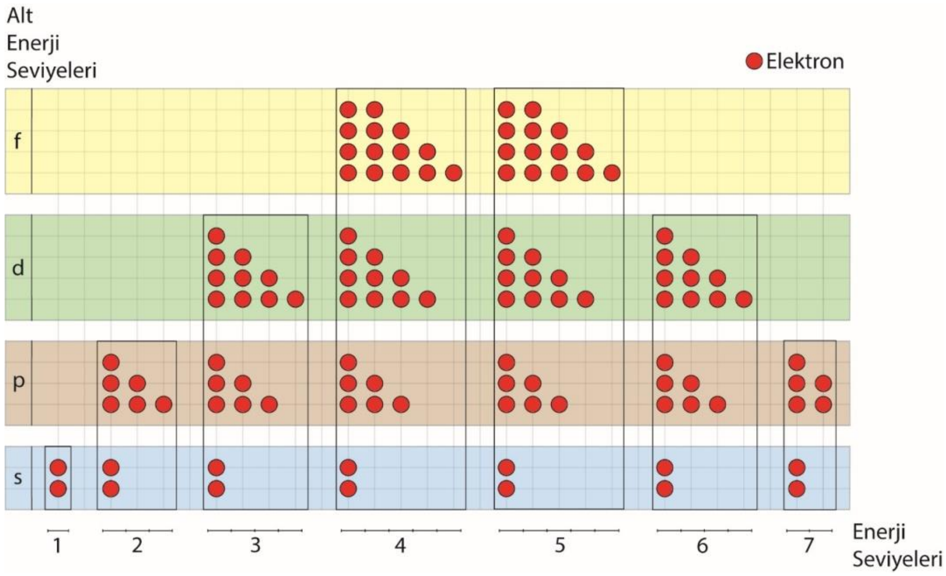
Şekil 3.5: Moskoviyum elementinin elektron dağılımı.

6A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (116) bulunduran Livermoriyum elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



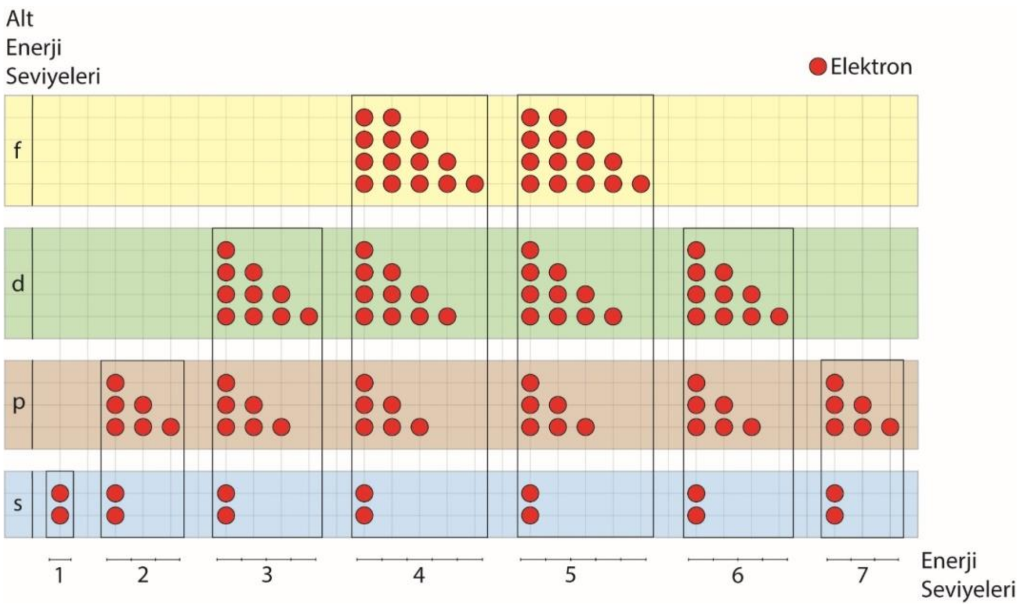
Şekil 3.6: Livermoriyum elementinin elektron dağılımı.

7A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (117) bulunduran Tennesin elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.7: Tennesin elementinin elektron dağılımı.

8A grubunda yer alan ve bu grupta en fazla elektron (118) bulunduran Oganesson elementinin elektron dağılımı aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.8: Oganesson elementinin elektron dağılımı.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde üçgensel sayılar ile özel tanımlı $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonları arasında ilişkiler elde edilmiştir. Buna ek olarak üçgensel sayılar ve maddelerin yapısında yer alan elektronlar arasında bir bağlantı gözlemlenmiştir.

Birinci bölümde bölen fonksiyonları ile üçgensel sayılar tanıtılmıştır.

İkinci bölümde üçgensel sayılar, bölen fonksiyonları ve özel tanımlı bölen fonksiyonları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Sonraki bölümde özel tanımlı bölen fonksiyonları için yeni eşitlikler elde edilmiştir. Üçgensel sayılar ile özel tanımlı bölen fonksiyonları arasındaki bağlantıyı gösteren denklemler yer almıştır. Üçgensel sayılar ile elektron sayısı arasındaki ilişkiyi veren özgün bir eşitlik elde edilmiştir.

Son bölümde sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Bu çalışmada elde edilen üçgensel sayılar ve $\hat{\sigma}_k(n)$ bölen fonksiyonları arasında ilişkilere benzeyen ilişkiler $\sigma_k^*(n)$ bölen fonksiyonu ile olup olmadığı araştırılabilir.

Ayrıca $m \equiv 2L - m \pmod 2$ tek asal sayı olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{L-1}(-1)^{m+1}\sigma^*(m).\sigma^*(2L-m) = \frac{\sigma^*(L)}{2}\left[L+(-1)^L\sigma^*(L)\right]$$

ve L tek tamsayı iken

$$\sum_{m=1}^{L-1}(-1)^{m}\sigma^*(m).\sigma^*(2L-m) = \frac{\sigma^*(L)}{2}\left[\sigma^*(L)-1\right]$$

eşitliklerinden yararlanarak üçgensel sayılar ile ilgili yeni bağlantılar bulunabilir [14].

5. KAYNAKLAR

[1] K. S. Williams, Number Theory in the Spirit of Liouville, vol. 76, Cambridge University Press, 2010.

[2] L. Euler, Introductio in Analysin Infinitorum, vol. 2, Apud Marcum-Michaelem Bousquet & Socios, 1748.

[3] L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, cilt 256, Carnegie Institution of Washington, 1917.

[4] R. Guy, Unsolved Problems in Number Theory, cilt 1, Springer Science & Business Media, 2004.

[5] W. Sierpinski, "Elementary Number Theory", *Polska Akademia Nauk Monografie Matematyczne,* no. 46, 1964.

[6] K. Ireland ve M. Rosen, A Classical Introduction to Modern Number Theory, Springer Science & Business Media, 1990.

[7] G. E. Andrews, Number Theory, Courier Corporation, 1994.

[8] H. Iwaniec ve E. Kowalski, Analytic Number Theory, cilt 53, American Mathematical Soc., 2021.

[9] D. Kim, A. Bayad ve N. Yıldız İkikardeş, "Certain Combinatoric Convolution Sums and Their Relations to Bernoulli and Euler Polynomials", 2015.

[10] A. Bayad ve D. Kim, "Polygon Numbers Ossociated with The Sum of Odd Divisors Function", *Experimental Mathematics*, vol. 26, no. 3, pp. 287-297, 2017.

[11] E. Deza ve M. M. Deza, Figurate Numbers, Singapore: World Scientific, 2012.

[12] L. Goodman ve E. W. Weisstein, "Square Number", From MathWorld-A Wolfram Web Resource, [Çevrimiçi]. Available: https://mathworld.wolfram.com/SquareNumber.html.[Erişildi: Haziran 2023].

[13] J. J. O'Connor ve E. F. Robertson, "Brahmagupta-Quick Info", MacTutor, School of Mathematics and Statistics, University of St Andrews, Scotland, [Çevrimiçi]. Available: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta. [Erişildi: Haziran 2023].

[14] D. Kim ve A. Bayad, "Convolution Identities for Twisted Eisenstein Series and Twisted Divisor Functions", *Fixed Point Theory and Applications,* no. 2013, pp. 1-23, 2013.

[15] J. P. Donald, A Study of Triangular and Oblong Numbers, Central Missouri State University, 1998.

[16] T. J. Trotter, “Some Identities for the Triangular Numbers”, *Journal of Recreational Mathematics,* vol. 2, no. 6, pp. 128-135, 1973.

[17] V. Hoggat JR ve M. Bicknell, “Triangular Numbers”, *Fibonacci Q,* vol. 12, pp. 221-230, 1974.

[18] A. S. Garge ve S. A. Shirali, “Triangular Numbers”, *Resonance,* vol. 17, no. 7, pp. 672-681, 2012.

[19] İ. N. Cangül, Sayılar Teorisi, Bursa: DORA, 2015.

[20] T. Muche, M. Lemma, G. Tessema ve A. Atena, “Perfect If and Only If Triangular”, *Advances in Theoretical and Applied Mathematics,* vol. 12, no. 1, pp. 39-50, 2017.

[21] E. W. Weisstein, “Triangular Number”, MathWorld-A Wolfram Web Resource, [Online]. Available: https://mathworld.wolfram.com/TriangularNumber.html. [Erişildi: 08 Nisan 2023].

[22] T. M. Apostol, Introduction to Analytic Number Theory, Springer Science & Business Media, 1998.

[23] K. C. Timberlake ve W. Timberlake, Basic Chemistry, Benjamin Cummings, 2008.

[24] A. J. Ihde, The Development of Modern Chemistry, Courier Corporation, 1984.

EKLER

EKLER

EK A: $\hat{\sigma}(n)$ fonksiyonunun değerleri ($1 \leq n \leq 100$)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\hat{\sigma}(n)$	1	1	4	1	6	4	8	1	13	6
n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
$\hat{\sigma}(n)$	12	4	14	8	24	1	18	13	20	6
n	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\hat{\sigma}(n)$	32	12	24	4	31	14	40	8	30	24
n	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
$\hat{\sigma}(n)$	32	1	48	18	48	13	38	20	56	6
n	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
$\hat{\sigma}(n)$	42	32	44	12	78	24	48	4	57	31
n	51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
$\hat{\sigma}(n)$	72	14	54	40	72	8	80	30	60	24
n	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
$\hat{\sigma}(n)$	62	32	104	1	84	48	68	18	96	48
n	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
$\hat{\sigma}(n)$	72	13	74	38	124	20	96	56	80	6
n	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
$\hat{\sigma}(n)$	121	42	84	32	108	44	120	12	90	78
n	91	92	93	94	95	96	97	98	99	100
$\hat{\sigma}(n)$	112	24	128	48	120	4	98	57	156	31

EK B: $\hat{\sigma}(n)$ fonksiyonun Maple 13 kodları

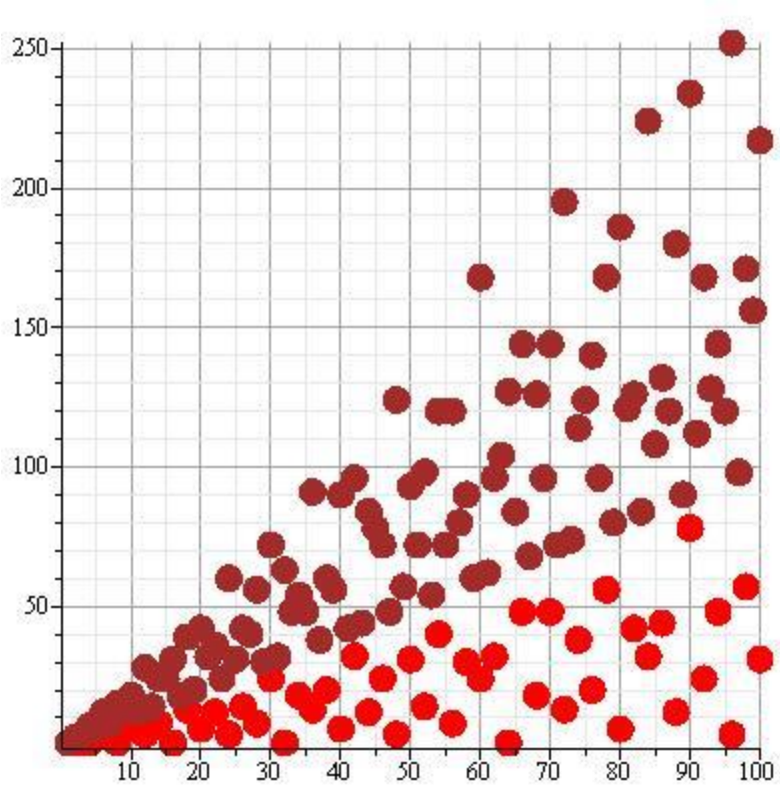
```
Maple 13 Codes
[> restart:
[>with(numtheory):
[>ssigma := proc (n, k)
   local Div, List, m;
   Div := divisors(n);
   List := convert(Div, 'list');
   add((-1)^(n/List[m]-1)*List[m]^k, m = 1 .. tau(n))
   end proc:
[>for n to 10 do for k to 1 do
   print('SSIGMA'[k](n) = ssigma(n, k))
   end do
   end do
```

EK C: $\hat{\sigma}(n)$ ve $\sigma(n)$ fonksiyonun Maple 13 grafik kodları

Maple 13 Codes

```
[> restart:
[>with(numtheory); with(Statistics); with(plots)
[>G := [seq(ssigma(n, 1), n = 1 .. 100)];
    F := [seq(sigma(n), n = 1 .. 100)];
    GG := PointPlot(G, axes = normal, color = red, thickness = 3, symbol =
solidcircle, symbolsize = 30, gridlines = true);
    FF := PointPlot(F, axes = normal, color = brown, thickness = 3, symbol =
solidcircle, symbolsize = 30, gridlines = true);
[>print(display({FF, GG}))
```

EK D: $\hat{\sigma}(n)$ ve $\sigma(n)$ fonksiyonun Maple 13 grafik gösterimi



Not: Maple kodlarının hata vermeden çalışabilmesi için Ek B ve Ek C sırasıyla işleme alınmalıdır.