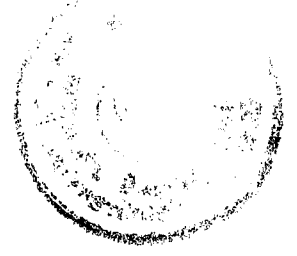


T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



83675

GRUP SUNUŞLARINDA ETKİLİLİK KAVRAMI

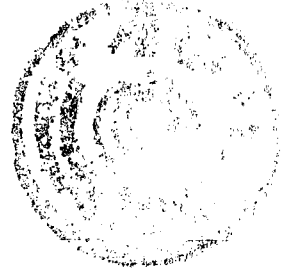
YÜKSEK LİSANS TEZİ

Figen AÇIL

T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANI NO : M.21.1/1999

Balıkesir, 1999

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI



GRUP SUNUŞLARINDA ETKİLİLİK KAVRAMI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Figen AÇIL

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 08.07.1999

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Şerif Yenigül
Prof. Dr. Musa Erdem
Yrd. Doç. Dr. A. Sinan Çevik

Balıkesir, 1999

ÖZET

GRUP SUNUŞLARINDA ETKİLİLİK KAVRAMI

Figen AÇIL
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Yüksek Lisans Tezi / Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 1999

Bu tez, G sonlu bir grup olmak üzere, G 'nin bir \mathcal{P} sunuşunun etkililiğini, bazı sonlu grup örnekleri üzerinde incelemektedir. Bu inceleme, geometrik (\mathcal{P} sunuşu üzerinde üreteç resimlerinin tanımlanması ve bu resimler üzerinde n -Cockcroftluğa bakılması) ve homolojik (\mathcal{P} sunuşunun Euler karakteristiğinin G grubunun alt sınırına eşit olup olmadığına bakılması) olmak üzere iki ayrı metod ile yapılmıştır.

Bu yüksek lisans tezi dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, yukarıda adı geçen iki metodun standart açıklamaları yapıp, bunların örneklemeleri ve bilinen sonuçları verilmiştir.

İkinci bölümde bazı grup genişlemelerinin (yarı-direkt, direkt ve serbest çarpım grupları) etkililiği homolojik olarak incelenmiş olup, etkililik için gerek ve yeter koşullar ispatlanıp, ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise genel grafik çarpım grubu tanımlanıp, bu tür grubun özel durumları için geometrik metod ile etkililikleri gösterilmiş ve bu gösterimle ilgili örnekler verilmiştir.

Son bölümde ise etkililikleri veya etkili olmadıkları bilinen bazı özel gruplar (Coxeter, D_{2m}^n ve $PSL(2,p)^n$) için temel teoremler, kaynaklar gösterilerek, verilmiştir.

ANAHTAR SÖZCÜKLER : etkililik / Euler karakteristik / grafik / grup sunuşu / ikinci homoloji grubu / n -Cockcroftluk / resimler / Schur çarpanı



ABSTRACT

THE EFFICIENCY OF THE GROUP PRESENTATIONS

Figen AÇIL

**Balıkesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics**

(M. Sc. Thesis / Supervisor : Yrd. Doç. Dr. A. Sinan ÇEVİK)

Balıkesir-Turkey, 1999

Let G be a finite group and let \mathcal{P} be a presentation for G . In this thesis it is examined that the efficiency of \mathcal{P} over some finite group examples. In this work it has been used two different methods, namely geometric (which is defining pictures on \mathcal{P} and checking the n -Cockcroft property on these pictures) and homological (which is the equality between the Euler characteristic of \mathcal{P} and the lower boundary of G).

This thesis contains four chapters.

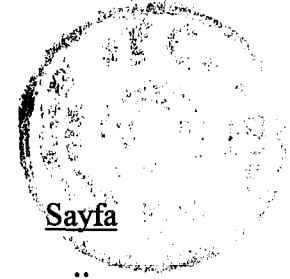
Chapter 1 covers the basic definitions and some standard explanations about the methods named as above and also gives some examples and known results on them.

In Chapter 2, it is investigated that the efficiency on some group extensions, namely semi-direct product, direct product and free product of groups, by the homological way and then proved necessary and sufficient conditions on these groups to be efficient. End of this chapter is giving some related examples.

Third chapter is defined the general graph product of groups and then, by taking some special cases on this type of product, it has been proved the necessary and sufficient conditions on these special types of groups to be p -Cockcroft. At the final part of this chapter there are giving some examples about the results in this chapter.

In the last chapter, by pointing the related references, it has been giving some results on some special groups (Coxeter, D_{2m}^n and $PSL(2,p)^n$) which their efficiency or inefficiency are known and proved by the homological way.

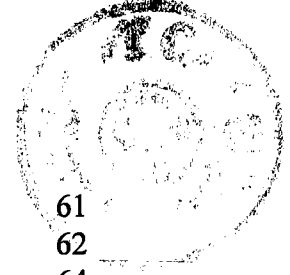
KEY WORDS : efficiency / Euler characteristic / graph / n -Cockcroft / picture / presentation of group / Schur multiplier / second homology group



Sayfa

İÇİNDEKİLER

ÖZET, ANAHTAR SÖZCÜKLER	ii
ABSTRACT, KEY WORDS	iii
İÇİNDEKİLER	iv
SEMBOL LİSTESİ	vi
ŞEKİL LİSTESİ	viii
ÖNSÖZ	ix
1. GİRİŞ	1
1.1 Kelimeler	1
1.2 Grup Sunuşları	2
1.2.1 Tietze Dönüşümleri	4
1.2.2 Grup Sunuşları Üzerinde Resimler	4
1.2.3 $\pi_2(\mathcal{P})$ Üzerinde Bazı Tam Diziler	11
1.2.4 $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin Üreteçlerinin Hesaplanma Nedenleri	12
1.2.5 Aspherical ve n-Cockcroft ($n \in \mathbb{N}$) Sunuşlar	15
1.2.6 Grup Sunuşlarının Etkililiği	17
1.3 Grafikler	23
2. BAZI GRUP GENİŞLEMELERİ ÜZERİNDE ETKİLİLİK	25
2.1 Giriş	25
2.2 Yarı-Direkt Çarpım Grubu	26
2.2.1 Yarı-Direkt Çarpım Grubunun Sunuşu	28
2.2.2 Bazı Yarı-Direkt Çarpım Gruplarının İkinci Homoloji Grupları ve Sunuşlarının Etkililiği	29
2.3 Direkt Çarpım Grubu	31
2.3.1 Direkt Çarpım Grubunun Sunuşu	32
2.3.2 Direkt Çarpım Grubunun İkinci Homoloji Grubu	32
2.3.3 Direkt Çarpım Grubunun Sunuşunun Etkililiği	33
2.4 Serbest Çarpım Grubu	42
2.4.1 Serbest Çarpım Grubunun Sunuşu	46
2.4.2 Serbest Çarpım Grubunun İkinci Homoloji Grubu	46
2.4.3 Serbest Çarpım Grubunun Etkililiği	46
3. GENEL GRAFİK ÇARPIMI	52
3.1 Giriş	52
3.2 $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin Üreteç Kümesi	53
3.2.1 Diğer Yardımcı Üreteç Kümeleri	54
3.3 \mathcal{P} 'nin p-Cockcroftluğu	57
3.4 Genel Grafik Çarpım Grubunun Özel Durumları	61



3.4.1 Grafik Grup	61
3.4.2 Genel Grafik Çarpım Grubuyla Tanımlanan Serbest Çarpım Grubu	62
3.4.3 Genel Grafik Çarpım Grubuyla Tanımlanan Direkt Çarpım Grubu	64
4. ETKİLİLİĞİ BİLİNEN BAZI GRUPLAR	70
4.1 Coxeter Gruplar	70
4.1.1 Coxeter Grupların Tanımı ve Sunuşu	70
4.1.2 Coxeter Grupların İkinci Homoloji Grubu	71
4.1.3 Coxeter Grupların Etkililiği	72
4.1.4 Etkili Olmayan Bazı Coxeter Gruplar	74
4.2 D_{2m}^n ($n=2, 3$) Grubunun Etkililiği	74
4.3 $PSL(2,p)^n$ ($n=2, 3$ ve $p \geq 5$) Grubunun Etkililiği	79
KAYNAKLAR	82



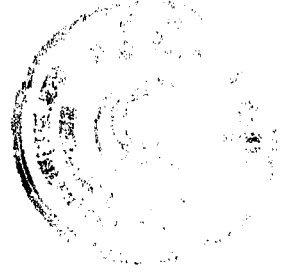
SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı	Tanımı/Değeri
$G \times H$	İki grubun direkt çarpımı	
$G \oplus H$	İki değişmeli grubun direkt toplamı	
$G \otimes H$	İki değişmeli grubun tensor çarpımı	
$G \rtimes_{\theta} H$	G'nin H ile θ etkisi altında yarı-direkt çarpımı	
G/H	G'nin H normal alt grubu ile bölüm grubu	
$G \cong H$	G'nin H ye izomorf olması	
$G^{ab}, H_1(G)$	G'nin birinci homoloji (abelianization) grubu	
$H_2(G)$	G'nin ikinci homoloji grubu	=Schur çarpanı
$[a, b]$	a ile b'nin değişme bağıntısı	$[a, b] = ab a^{-1} b^{-1}$
\mathbb{Z}_n	n mertebeli devirli grup	
$\mathbb{Z}G$	Grup halkası	
\mathcal{P}	Grup sunuşu	$\mathcal{P} = \langle \mathbf{x}; \mathbf{r} \rangle$
\mathbf{x}	Üreteç sembollerinin kümesi	
\mathbf{r}	Bağıntıların kümesi	
$F(\mathbf{x})$	\mathbf{x} ile üretilen serbest grup	
$G(\mathcal{P})$	\mathcal{P} sunuşu ile tanımlanan grup	$G(\mathcal{P}) \cong F(\mathbf{x}) / N$
N	$\{ [R] : R \in \mathbf{r} \}$ kümesinin normal kapanışı	
$[W]$	W kelimesini içeren serbest denklik sınıfı	
\overline{W}	$G(\mathcal{P})$ 'nin W ile temsil edilen elemanı	
$L(W)$	W'nin uzunluğu	
$L_x(W)$	x'e bağlı olarak W'nin uzunluğu	
$\exp_x(W)$	x'in W içindeki üstel toplamı	
\sim	Serbest olarak eşit denklik bağıntısı	
$\sim_{\mathcal{P}}$	\mathcal{P} 'ye bağlı denklik bağıntısı	
$\chi(\mathcal{P})$	\mathcal{P} 'nin Euler karakteristiği	$\chi(\mathcal{P}) = 1 - \mathbf{x} + \mathbf{r} $
$\chi(G)$	G'nin Euler karakteristiği	$\chi(G) = \min \{ \chi(\mathcal{P}) : \mathcal{P}, G \text{ grubu için sonlu bir sunuş} \}$
$\delta(G)$	G'nin homolojik alt sınırı	$\delta(G) = 1 - \text{rk}_{\mathbb{Z}}(H_1(G)) + d(H_2(G))$
$\text{rk}_{\mathbb{Z}}()$	Torsion serbest kısmın \mathbb{Z} -rankı	
$D()$	Minimal üreteç sayısı	
(T1), (T2), (T3), (T4)	Tietze dönüşümleri	
\mathbb{P}	\mathcal{P} üzerinde bir resim	
$\partial\mathbb{P}$	\mathbb{P} nin sınırı	
$W(\mathbb{P})$	\mathbb{P} nin sınırının etiketi	



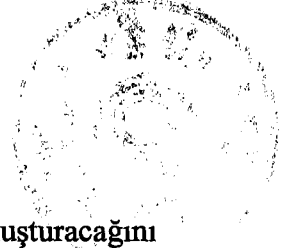
$\langle \mathbb{P} \rangle$	\mathbb{P} resmini içeren denklik sınıfı
$\Pi_2(\mathcal{P})$	\mathcal{P} 'nin ikinci homotopi modülü
$\exp_R(\mathbb{P})$	R bağıntısının \mathbb{P} resmi içindeki üstel toplamı
Δ	\mathbb{P} resmi içindeki bir bağıntı diski
$\partial\Delta$	Δ 'nın sınırı
γ	Transfer yol
$W(\gamma)$	Transfer yolun etiketi
$\underline{\gamma}$	Sprey
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$	$\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin üreteç resimlerinin kümesi
$M(\mathcal{P})$	\mathcal{P} sunuşu üzerindeki bağıntı modülü
Γ	Grafik
\mathbf{v}	Γ 'nın köşe kümesi
\mathbf{e}	Γ 'nın kenar kümesi
\mathbf{e}^+	Γ 'nın yönlendirilmiş kenar kümesi
\mathbf{I}	Γ 'da başlangıç fonksiyonu
τ	Γ 'da bitiş fonksiyonu
$^{-1}$	Γ 'da ters fonksiyon
$\mathbf{i}(\mathbf{e})$	$e \in \mathbf{e}$ kenarının başlangıç noktası
$\tau(\mathbf{e})$	$e \in \mathbf{e}$ kenarının bitiş noktası
$A \cup B$	A ile B kümelerinin birleşimi
$A \subseteq B$	A alt küme B
$ A $	A kümesinin eleman sayısı
(a, b)	a ile b'nin en büyük ortak böleni

$$\Gamma = (\mathbf{v}, \mathbf{e}, \mathbf{i}, \tau, ^{-1})$$



ŞEKİL LİSTESİ

Şekil Numarası	Adı	Sayfa
Şekil 1.1	1.2.3 Örnekteki \mathcal{P} sunuşu üzerinde küresel olmayan bir Resim.	6
Şekil 1.2	1.2.3 Örnekteki \mathcal{P} sunuşu üzerinde küresel bir resim.	7
Şekil 1.3	1.2.3 Örnekteki \mathcal{P} sunuşu üzerinde spreylere gösteren küresel olmayan bir resim.	7
Şekil 1.4	1.2.3 Örnekteki \mathcal{P} sunuşu üzerinde spreylere gösteren küresel bir resim.	8
Şekil 1.5	Γ grafiğinde herhangi iki köşe arasındaki kenar.	23
Şekil 3.1	Γ grafiğinde bir $\{u, v, w\}$ ($u, v, w \in V$) üçgeni.	54
Şekil 3.2	Z -üreteç kümesindeki küresel bir resim.	54
Şekil 3.3	Y -üreteç kümesindeki küresel bir resim.	55
Şekil 3.4	Y -üreteç kümesindeki küresel bir resim.	55
Şekil 3.5	Sonlu devirli köşe gruplarına sahip Γ grafiği.	64
Şekil 3.6	Z -üreteç kümesinden, $(rel X \cup Y)$ göre elde edilen küresel bir resim.	68



ÖNSÖZ

İleride devam etmesini istediğim çalışmalarına, bir temel oluşturacağını düşündüğüm, Grup Sunuşları Üzerinde Etkililik Kavramını, konu alan bu çalışmam süresince zamanını ayırıp yardımlarını esirgemeyen, bana güvenen değerli hocam ve danışmanım Yrd. Doç. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Matematiği bana sevdiren ve yetişmemde büyük emeği olan başta, değerli hocam Prof. Dr. Seyit Ahmet KILIÇ olmak üzere hocalarım Prof. Dr. Musa ERDEM, Prof. Dr. Turgut BAŞKAN'a teşekkür ederim.

Ayrıca hayatım boyunca benden yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime teşekkürü bir borç biliyorum.

Balıkesir, 1999

Figen AÇIL





1. GİRİŞ

Giriş Bölümünde tanımlanan aşağıdaki bazı bilgiler standarttır ve [1], [15] gibi kaynaklarda bulunabilir.

1.1 Kelimeler

x boştan farklı bir küme olsun. Bu durumda, x kümesine bire bir karşılık gelen x^{-1} kümesini tanımlayalım ($x \leftrightarrow x^{-1}$, $x \in x$) ve $x^{\pm} = x \cup x^{-1}$ olsun. x^{\pm} kümesinin her bir elemanına **harf** denir. $n \geq 0$, $x_i \in x$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} \quad (1.1)$$

ifadesine x kümesi üzerinde bir **kelime** denir. Bu kelimeyi W ile gösterirsek, W kelimesinin **başlangıç harfi** $i(W) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve **bitiş harfi** $\tau(W) = x_n^{\varepsilon_n}$ olur. Eğer $n=0$ ise W kelimesine **boş kelime** denir ve 1_W (veya sadece 1) ile gösterilir. $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, $n=0$ ve $n > 0$ durumlarından biri varken, $\varepsilon_i = +1$ oluyorsa W kelimesine **pozitif kelime** denir. Bir W kelimesinin tersi ise

$$x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \dots x_1^{-\varepsilon_1}$$

şeklinde tanımlanan kelimedir ve W^{-1} ile gösterilir.

W , (1.1) ile verilen bir kelime olsun. W kelimesinin *uzunluğu*, W içindeki harflerin sayısıdır ve $L(W)$ ile gösterilir. W kelimesinin içindeki bir x elemanın uzunluğu $\sum_{x_i=x} |\varepsilon_i|$ ile hesaplanır ve $L_x(W)$ ile gösterilir. Aynı zamanda bir x elemanının W kelimesi içindeki *üstel toplamı* da $\sum_{x_i=x} \varepsilon_i$ ile bulunur ve $\exp_x(W)$ şeklinde gösterilir. Eğer W boş kelime ise $L_x(W) = 0 = \exp_x(W)$ olur. Ayrıca W pozitif bir kelime iken $L_x(W) = \exp_x(W)$ olduğu kolayca görülür.

x kümesi üzerinde iki kelime W ve U olsun. W ve U kelimelerinin *çarpımını*, W kelimesinin arkasına U kelimesini getirip yanyana koyarak elde ederiz ve bu çarpımı WU ile gösteririz.

Kelimeler Üzerinde İşlemler:

(1) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime üzerindeki $x^{\varepsilon} x^{-\varepsilon}$ şeklindeki

ters harf çiftleri silinir.

$(1)^{-1} \varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime üzerine $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenir.

x kümesi üzerinde iki kelime W ve W' olsun. Eğer bu kelimelerden biri, diğerine yukarıdaki işlemlerin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye **serbest olarak eşit** deriz ve bunu $W \sim W'$ ile gösteririz.

\sim serbest olarak eşitlik bir denklik bağıntısı olup, herhangi bir W kelimesini içeren serbest denklik sınıfı $[W]$ ile gösterilir. x kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesi $F(x)$ olsun. $F(x)$ kümesi üzerinde çarpma işlemi

$$[W][U] = [WU]$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca görülebilir. Bu çarpma işlemi altında $F(x)$ kümesi bir grup olur. Bu gruba x üzerinde **serbest (free) grup** denir [25]. Bazen, herhangi bir karışıklığa neden olmayacaksa, x kümesi üzerindeki herhangi bir W kelimesinin $[W]$ serbest denklik sınıfı için basitçe W yazılabilir.

Eğer $W' = UWV$ (U , W ve V x kümesi üzerinde kelimeler) ise W kelimesine, W' kelimesinin **alt kelimesi** denir. x kümesi üzerinde herhangi bir kelime, $x^\varepsilon x^{-\varepsilon}$ ($x \in x$, $\varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içermiyorsa bu kelimeye **indirgenmiş kelime** denir. Ayrıca $x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n}$ ($n \geq 0$, $x_i \in x$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$) kelimesi indirgenmiş ve $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye **devirsel indirgenmiş kelime** denir.

Aşağıdaki teoremin ispatı [14]'de bulunabilir.

1.1.1 Teorem: (Normal Form Teoremi) Her denklik sınıfı içinde en fazla bir tane indirgenmiş kelime vardır.

1.2 Grup Sunuşları

x bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve x kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme r (bağıntıların kümesi) olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{P} = \langle x ; r \rangle \tag{1.2}$$

ikilisine bir grup sunuşu denir. x ve r kümelerinin her ikisi de sonlu ise \mathcal{P} sunuşunun da sonlu olduğunu söyleriz.

x kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki (1) ve (1)⁻¹ işlemlerine ek olarak aşağıdaki işlemleri kullanarak, \mathcal{P} sunuşu ile bir grup tanımlarız. Bunun için x kümesi üzerinde bir kelime W olsun.

(2) W kelimesi R^ε ($R \in r, \varepsilon = \pm 1$) şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

(2)⁻¹ W kelimesi içinde herhangi bir yere R^ε ($R \in r, \varepsilon = \pm 1$) alt kelimesini ekleriz.

x kümesi üzerinde iki kelime W_1 ve W_2 olsun. Eğer W_1 kelimesinden W_2 kelimesine ulaşan (1) ^{± 1} , (2) ^{± 1} tipindeki işlemlerin sonlu bir zinciri var ise, W_1 ve W_2 kelimelerine \mathcal{P} sunuşuna bağlı olarak **denk kelimeler** denir ve bu denklik $W_1 \sim_{\mathcal{P}} W_2$ ile gösterilir. Buradaki $\sim_{\mathcal{P}}$ bağıntısı x kümesindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. W kelimesini içeren denklik sınıfını $[W]_{\mathcal{P}}$ ile gösterelim. Bu denklik sınıfları üzerinde çarpma işlemi $[W_1]_{\mathcal{P}} [W_2]_{\mathcal{P}} = [W_1 W_2]_{\mathcal{P}}$ şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğunu görmek kolaydır. Bu çarpma işlemi altında tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup olur. Bu grup \mathcal{P} ile tanımlanır ve $G(\mathcal{P})$ ile gösterilir. $G(\mathcal{P})$ grubunun birim elemanı $[1]_{\mathcal{P}}$ dir. $[W]_{\mathcal{P}}$ yerine sadece \overline{W} yazmak çoğu zaman işlemleri kolaylaştıracaktır.

Eğer $G \cong G(\mathcal{P})$ ise G grubu \mathcal{P} ile *sunuluyor* (ya da *tanımlanıyor*) denir.

Ayrıca $N, \{ [R] : R \in r \}$ kümesinin *normal kapanışı* olmak üzere aşağıdaki sonuç elde edilebilir.

1.2.1 Önteorem:

$$G(\mathcal{P}) \cong F(x) / N$$

İspat: \mathcal{P} sunuşu ile tanımlanan $G(\mathcal{P})$ grubu ve x kümesi için,

$$\theta : x \longrightarrow G(\mathcal{P})$$

$$x \mapsto [x]_{\mathcal{P}}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Burada, “genel dönüşüm özelliği” teoremine göre [14], θ nın, değer kümesi $F(x)$ üzerinde tanımlı tek bir genişlemesi vardır. Diğer bir deyişle

$$\varphi : F(\mathbf{x}) \longrightarrow G(\mathcal{P})$$

$$[W] \mapsto [W]_{\mathcal{P}}$$

homomorfizması vardır ve $\varphi|_{\mathbf{x}=\theta}$ dir. Buradaki φ homomorfizması örtendir. Ayrıca $\text{Ker}\varphi = N$ dir. Böylece 1. izomorfizma teoremi ile

$$G(\mathcal{P}) \cong F(\mathbf{x}) / N$$

elde edilir. \diamond

1.2.1 Tietze Dönüşümleri

$\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} ; \mathbf{r} \rangle$ bir grup sunuşu olsun. \mathcal{P} sunuşundan bir takım işlemler ile aynı grubun başka bir sunuşu elde edilebilir. \mathcal{P} üzerindeki bu işlemlerden biri *Tietze dönüşümleridir* ve aşağıdaki dört madde ile tanımlanır.

(T1) \mathbf{x} kümesi üzerindeki kelimelerin sonlu bir kümesi s olsun. Eğer s kümesindeki her eleman, \mathbf{r} kümesindeki elemanlardan elde edilebiliyorsa (yani, $[S]$, $\{[R] : R \in \mathbf{r}\}$ kümesinin normal kapanışının bir elemanıysa) \mathcal{P} sunuşunu

$$\langle \mathbf{x} ; \mathbf{r}, s \rangle$$

ile değiştiririz.

(T2) (T1) dönüşümünün tersidir.

(T3) \mathbf{x} kümesindeki sembollerden farklı olan sembollerin sonlu bir kümesi t olsun. \mathbf{x} kümesi üzerinde bir kelime $U_t (t \in t)$ ise \mathcal{P} sunuşunu

$$\langle \mathbf{x}, t ; \mathbf{r}, t^{-1} U_t (t \in t) \rangle$$

ile değiştiririz.

(T4) (T3) dönüşümünün tersidir.

Aşağıdaki teoremin ispatı [33]'de bulunabilir.

1.2.2 Teorem: (Tietze Teoremi) \mathcal{P}_1 ve \mathcal{P}_2 sunuşlarının aynı grubu tanımlaması için gerekli ve yeterli koşul birinin, sonlu sayıda (T1), (T2), (T3), (T4) dönüşümleriyle, diğerine dönüşmesidir.

1.2.2 Grup Sunuşları Üzerinde Resimler

Bu bölümdeki bilgiler [7] ve [36] içinde de bulunabilir.



$\mathcal{P} = \langle \mathbf{x} ; \mathbf{r} \rangle$ bir grup sunuşu olsun. \mathcal{P} üzerinde bir \mathbb{P} resmi aşağıdaki şartları sağlayan geometrik bir şekildir.

(1) $D^2, \partial D^2$ sınırı üzerinde O başlangıç noktası olan bir *disk* olsun.

(2) D^2 diskinin iç kısmında birbirinden farklı *diskler* $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ ler olmak üzere, her Δ_n diskinin $\partial \Delta_n$ sınırında O_i şeklinde bir başlangıç noktası vardır.

(3) $D^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ nın kapanışında bulunan sonlu sayıda *yaylar* $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$

ler olmak üzere, bu yaylar $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2 \cup \dots \cup \partial \Delta_n$ ile kesişen basit kapalı bir eğri ya da $\partial D^2 \cup \partial \Delta_1 \cup \partial \Delta_2 \cup \dots \cup \partial \Delta_n$ nın, iki noktasının birinden başlayıp diğerine birleştiren kapalı olmayan basit bir eğridir. Her yay kendisini kesen bir ok ile gösterilen bir yöne (normal orientationa) sahiptir. Ayrıca her yay $\mathbf{x} \cup \mathbf{x}^{-1}$ kümesinin bir elemanı ile *etiketlenir* ve buna yayın *etiketi* denir.

(4) $\partial \Delta_i$ etrafında O_i başlangıç noktasından başlayarak saat yönünde bir defa dönülüp, karşılaşılan yayların etiketleri okunursa $\mathbf{r} \cup \mathbf{r}^{-1}$ kümesine ait olan bir kelime elde edilir. Bu kelimeye $\partial \Delta_i$ nin *etiketi* denir (Biz \mathbf{x} etiketli dediğimiz bir yayı normal orientation yönünde işaretlersek \mathbf{x} diye okuruz, eğer yayı ters orientation yönünde işaretlersek \mathbf{x}^{-1} diye okuruz.). \mathbf{r} kümesinin bir alt kümesi \mathbf{s} ise $\mathbf{s} \cup \mathbf{s}^{-1}$ kümesinin bir elemanı ile etiketli diske bir *s-disk* denir.

\mathbb{P} resminin disklerinden söz ettiğimizde, dış cephedeki D^2 diskinin değil, $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ disklerini anlatırız. \mathbb{P} resminin içinde, etrafını sardığı disk ya da yay olmayan kapalı bir alana **kapalı çember** denir.

Bir \mathbb{P} resminin dışındaki D^2 diskinin ∂D^2 sınırını $\partial \mathbb{P}$ olarak tanımlarız. $\partial \mathbb{P}$ etrafında O başlangıç noktasından başlayarak saat yönünde bir defa dönülmesiyle okunan kelimeye \mathbb{P} üzerindeki *etiket* denir ve $W(\mathbb{P})$ ile gösterilir.

Eğer $\partial \mathbb{P}$ ye ulaşan hiç bir yay yoksa, \mathbb{P} resmine **küresel resim** diyeceğiz. Eğer \mathbb{P} küresel resim ise $\partial \mathbb{P}$ yi gözardı ederiz. (Çünkü $\partial \mathbb{P} = [1]_W$.)

$D^2 - \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$ nın kapanışında bulunan ve \mathbb{P} resmi içindeki yayların sonlu

tanısının kesişimi olan yola bir **transfer yol** denir ve γ ile gösterilir. Bir transfer



yolun başlangıç noktasından bitiş noktasına doğru hareket edildiğinde, karşılaşılan yayların üzerindeki etiketlerin okunmasıyla x kümesi üzerinde bir kelime elde edilir. Bu kelime $W(\gamma)$ ile gösterilir. \mathbb{P} resmi içinde basit kapalı bir transfer yol γ olsun. \mathbb{P} resminin γ ile çevrelenen kısmına \mathbb{P} resminin alt resmi denir. Eğer γ yaylar ile kesişmiyorsa, \mathbb{P} resminin γ ile çevrelenen kısmına \mathbb{P} resminin küresel alt resmi denir.

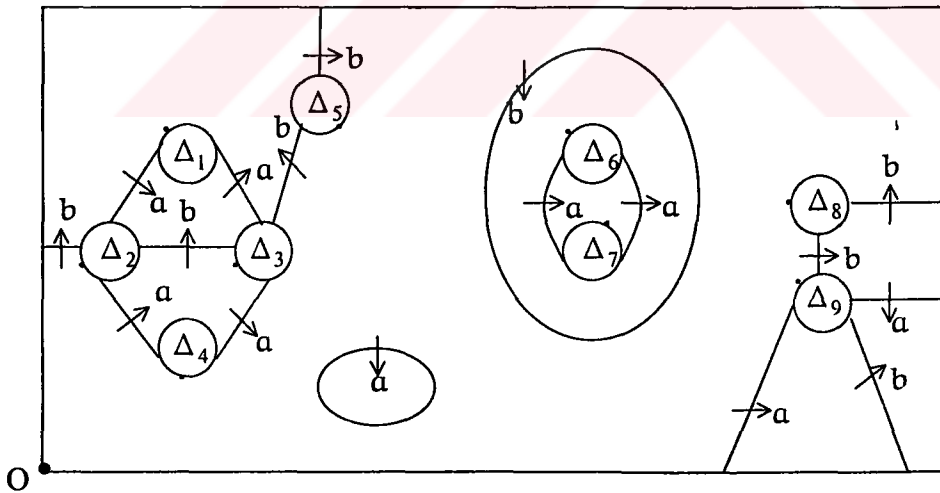
Aşağıdaki şartları sağlayan basit transfer yolların $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ gibi bir dizisine \mathbb{P} resmi için bir sprej denir.

(1) $i = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, γ_i transfer yolu O noktasından başlar ve Δ_i diskinin O_i başlangıç noktasında biter.

(2) $1 \leq i < j \leq n$ olmak üzere, γ_i ve γ_j transfer yolları sadece O başlangıç noktasında kesişir.

(3) \mathbb{P} resmi içinde O başlangıç noktası etrafında saat yönünde gidildiğinde sıra ile $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ transfer yolları ile karşılaşılır.

1.2.3 Örnek: $\mathcal{P} = \langle a, b; a^2, b^2, [a, b] \rangle$ olsun. Buradan,

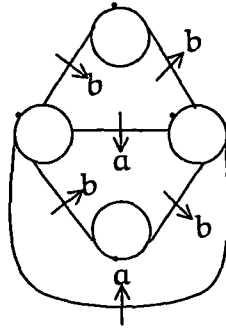


Şekil 1.1

Şekil 1.1 ile verilen resim, \mathcal{P} üzerinde bir resimdir. Bu resmin içinde $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_9$ olmak üzere 9 tane disk ve bu disklerin $\partial\Delta_i$ sınırlarının üzerinde birer O_i başlangıç

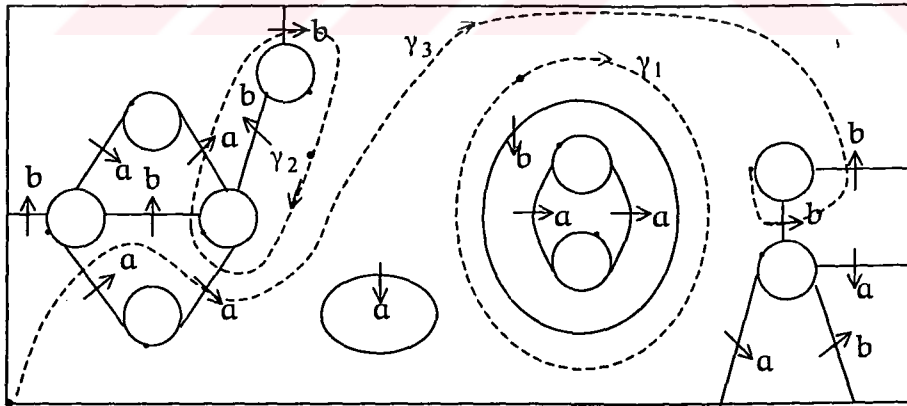
noktaları vardır. Δ_4 diskinin etiketi a^2 , Δ_5 diskinin etiketi b^2 ve Δ_2 diskinin etiketi $[a,b]^{-1}$ dir. a ile etiketli kapalı yay, kapalı bir çember iken b ile etiketli kapalı yay kapalı bir çember değildir. Ayrıca \mathbb{P} resminin etiketi $W(\mathbb{P})=bb^{-1}ab^{-1}a^{-1}$ dir.

\mathcal{P} üzerinde küresel bir resim Şekil 1.2 deki gibi bulunabilir.



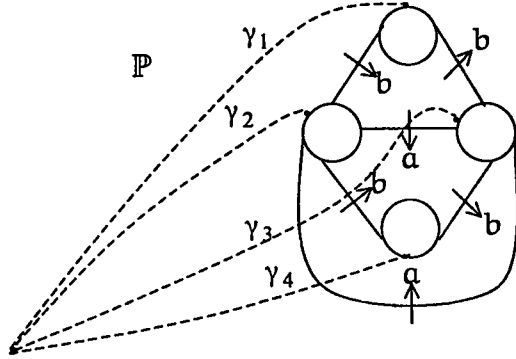
Şekil 1.2

Aşağıda Şekil 1.3 ile verilen resim içinde γ_1 , γ_2 basit kapalı transfer yolu, γ_3 de kapalı olmayan transfer yolu gösterir.



Şekil 1.3

Şekil 1.3 ile verilen resim içinde, γ_1 ile ayrılan kısım küresel bir alt resim ve γ_2 ile ayrılan kısım ise küresel olmayan bir alt resmidir. Ayrıca $W(\gamma_1)=1$, $W(\gamma_2)=a^{-1}bab$ ve $W(\gamma_3)=a^2b^{-2}$ dir.



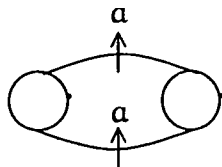
Şekil 1.4

Şekil 1.4 ile verilen resimde, $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4)$ bir sprey ve $W(\gamma_1)=1$, $W(\gamma_2)=1$, $W(\gamma_3)=aba^{-1}$, $W(\gamma_4)=a$ dir. □

P resmi içinde, başlangıç noktaları aynı bölge içinde bulunan ve iki diskten oluşan alt küresel resme **silinebilir çift** denir. Bunun anlamı, örneğin



silinebilir çiftlerdir, fakat



değildir.

Küresel Resimler Üzerinde İşlemler:

Küresel resimler üzerinde bazı temel işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

(A) Kapalı çemberler silinir.



(A)⁻¹ Kapalı çemberler eklenir.

(B) Silinebilir çiftler silinir.

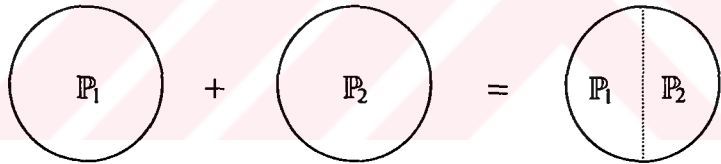
(B)⁻¹ Silinebilir çiftler eklenir.

(C) Köprü operasyonu :



İki küresel resimden biri diğerine sonlu sayıda (A), (A)⁻¹, (B), (B)⁻¹, (C) işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme **denk küresel resimler** denir.

\mathcal{P} sunuşu üzerinde iki küresel resim \mathbb{P}_1 ve \mathbb{P}_2 olsun. Buradan \mathbb{P}_1 küresel resminin *ters görüntüsünü* $-\mathbb{P}_1$ ile gösteririz. Ayrıca \mathbb{P}_1 küresel resminin yanına \mathbb{P}_2 küresel resminin konulmasıyla elde edilen resim $\mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2$ dir. Bunu aşağıdaki gibi şekillendirebiliriz.



$\mathbb{P}_1 + (-\mathbb{P}_2)$ yerine $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_2$ yazılır.

\mathcal{P} sunuşu üzerinde herhangi bir küresel resim \mathbb{P} olmak üzere, \mathbb{P} küresel resmini içeren denklik sınıfı $\langle \mathbb{P} \rangle$ ile gösterilir. \mathcal{P} sunuşu üzerindeki küresel resimlerin tüm denklik sınıflarının kümesi

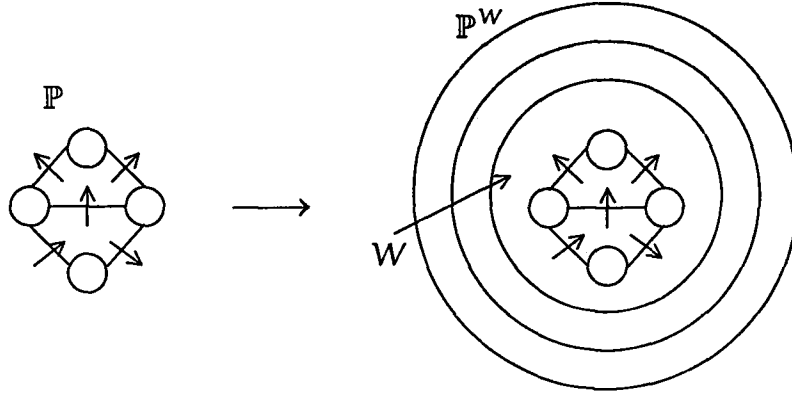
$$\langle \mathbb{P}_1 \rangle + \langle \mathbb{P}_2 \rangle = \langle \mathbb{P}_1 + \mathbb{P}_2 \rangle$$

iyi tanımlı işlemi ile değişmeli bir grup olur.

x kümesi üzerinde bir kelime W ve \mathcal{P} sunuşu üzerinde bir küresel resim \mathbb{P} olsun. \mathbb{P} küresel resminin etrafının, etiketi W olan yaylarla çevrilmesiyle \mathcal{P} sunuşu



üzerinde yeni bir küresel resim oluşturulur. Bu küresel resim \mathbb{P}^W ile gösterilir. Bunu aşağıdaki gibi şekillendirebiliriz.



Küresel resimlerin denklik sınıfları üzerinde

$$\overline{W} \cdot \langle \mathbb{P} \rangle = \langle \mathbb{P}^W \rangle \quad (\overline{W} \in G(\mathcal{P}))$$

ile verilen (iyi tanımlı) bir $G(\mathcal{P})$ -etkisi vardır. Buradan bir $\mathbb{Z}G(\mathcal{P})$ -modül elde edilir. Bu modüle \mathcal{P} sunuşunun **ikinci homotopi modülü** denir ve $\pi_2(\mathcal{P})$ ile gösterilir.

$\pi_2(\mathcal{P})$ den $\bigoplus_{R \in \mathcal{R}} \mathbb{Z}G(\mathcal{P})t_R$ (ki burada $\bigoplus_{R \in \mathcal{R}} \mathbb{Z}G(\mathcal{P})t_R, \{t_R : R \in \mathcal{R}\}$ tabanlı free $\mathbb{Z}G(\mathcal{P})$ -modüldür) içine aşağıdaki gibi tanımlanan bir μ_2 gömme dönüşümü vardır [7], [9], [36].

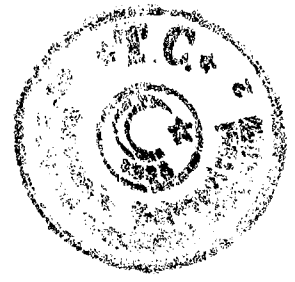
$\langle \mathbb{P} \rangle \in \pi_2(\mathcal{P})$ alalım. \mathbb{P} küresel resmi, sırasıyla $R_1^{\epsilon_1}, R_2^{\epsilon_2}, \dots, R_n^{\epsilon_n}$ etiketli $\Delta_1, \Delta_2, \dots, \Delta_n$ disklerine sahip olsun. ($R_i \in \mathcal{R}, \epsilon_i = \pm 1, i=1, 2, \dots, n$) Daha önce tanımladığımız gibi $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ bir sprey olmak üzere $W(\gamma_i), G(\mathcal{P})$ grubunun bir elemanını gösteren γ_i nin etiketi idi. Buradan,

$$\mu_2(\langle \mathbb{P} \rangle) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \overline{W(\gamma_i)} t_{R_i}$$

değeri elde edilir.

Genelde $\mu_2(\langle \mathbb{P} \rangle)$ yerine $\mu_2(\mathbb{P})$ yazarız.

1.2.3 Örnek: (Devam) Şekil 1.4 ile verilen küresel resim için



$$\mu_2(\mathbb{P}) = (-1 + \bar{a}) t_{b^2} - (1 + \overline{aba^{-1}}) t_{[a,b]}$$

bulunur.□

\mathcal{P} üzerindeki küresel resimlerin bir kolleksiyonun X olduğunu düşünelim.

Küresel resimler üzerindeki işlemlere aşağıdaki iki yeni işlem eklenebilir.

(D) $X \cup -X$ kümesinin bazı elemanlarının bir kopyası olan küresel alt resimler silinir.

(D)⁻¹ (D) işleminin tersidir.

İki küresel resimden biri, sonlu sayıdaki $(A)^{\pm 1}$, $(B)^{\pm 1}$, (C) , $(D)^{\pm 1}$ işlemlerinin uygulanmasıyla, diğerine dönüşüyorsa bu iki küresel resme, X 'e göre **denk küresel resimler** denir ve bu denklik (rel X) ile gösterilir. Buradan [36] ile aşağıdaki teorem elde edilir. (Theorem 2.6, Corollary1)

1.2.4 Teorem: $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün $\langle \mathbb{P} \rangle$ ($\mathbb{P} \in X$) elemanlarıyla üretilmesi için gerekli ve yeterli koşul her küresel resmin (rel X) göre boş resme denk olmasıdır.

$\pi_2(\mathcal{P})$ modülü $\langle \mathbb{P} \rangle$ ($\mathbb{P} \in X$) elemanlarıyla üretiliyorsa, X kümesi $\pi_2(\mathcal{P})$ 'yi üretir (ya da X , üreteç resimlerinin bir kümesidir) denir.

1.2.3 $\pi_2(\mathcal{P})$ Üzerinde Bazı Tam Diziler

$\mathcal{P} = \langle x ; r \rangle$ ve $\pi_2(\mathcal{P})$ modülü için bir üreteç kümesi X olsun. x üzerinde serbest grup $F(x)$ ve $F(x)$ üzerinde r kümesinin normal kapanışı N olmak üzere, \mathcal{P} ile tanımlanan grup $G(\mathcal{P}) \cong F(x)/N$ idi (1.2.1 Önteorem). Bir \mathcal{P} sunuşunun $M(\mathcal{P})$ bağıntı modülü,

$$WN.UN' = WUW^{-1}N' \quad (W \in F(x), U \in N)$$

işlemi ile verilen, $G(\mathcal{P})$ -etkili bir sol $\mathbb{Z}G(\mathcal{P})$ -modül olup, aslında N kümesinin N/N' abelianization grubudur.

$$P_3 = \bigoplus_{\mathbb{P} \in X} \mathbb{Z}G(\mathcal{P}) t_{\mathbb{P}}, \quad P_2 = \bigoplus_{R \in r} \mathbb{Z}G(\mathcal{P}) t_R, \quad P_1 = \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z}G(\mathcal{P}) t_x, \quad P_0 = \mathbb{Z}G(\mathcal{P})$$

olsun. Burada P_3 , $\{t_{\mathbb{P}} : \mathbb{P} \in X\}$ tabanlı ve P_1 , $\{t_x : x \in X\}$ tabanlı free $\mathbb{Z}G(\mathcal{P})$ -modüllerdir. Buradan aşağıdaki tam diziyi elde ederiz [1].



$$0 \longrightarrow \pi_2(\mathcal{P}) \xrightarrow{\mu_2} P_2 \xrightarrow{\rho_2} M(\mathcal{P}) \longrightarrow 0$$

(1.3)

$$\langle \mathbb{P} \rangle \mapsto \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \overline{W(\gamma_i)} t_{R_i} \quad (\mathbb{P} \in X)$$

$$t_R \mapsto RN' \quad (R \in r)$$

Buradaki μ_2 dönüşümü 1.2.2 Alt Bölümde tanımlanan gömme dönüşümdür.

Ayrıca, $G(\mathcal{P})$ grubunun her elemanını 1'e taşıyan $\varepsilon : P_0 \rightarrow \mathbb{Z}$ augmentation dönüşümü vardır. Bu dönüşümün çekirdeğine *augmentation ideal* denir ve IG ile gösterilir.

$$0 \longrightarrow IG \xrightarrow{\text{incl}} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \longrightarrow 0 \quad (1.4)$$

$$0 \longrightarrow M(\mathcal{P}) \xrightarrow{\mu_1} P_1 \xrightarrow{\rho_1} IG \longrightarrow 0 \quad (1.5)$$

$$WN' \mapsto \sum_{x \in X} \rho \left(\frac{\partial W}{\partial x} \right) t_x \quad (W \in N)$$

$$t_x \mapsto xN-1 \quad (x \in X)$$

(Burada $\frac{\partial}{\partial x} : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}F$ Fox türevidir [31] ve $\rho : \mathbb{Z}F \rightarrow \mathbb{Z}G$ dönüşümü $F \rightarrow G$ doğal epimorfizmasıyla indirgenir.)

Ayrıca μ_1, μ_2 dönüşümleri *standart bire bir* ve ρ_1, ρ_2 dönüşümleri *standart örtendir*.

Eğer (1.3), (1.4), (1.5) deki bu üç diziyi birleştirirsek, bu bize aşağıdaki tam diziyi verir.

$$P_3 \xrightarrow{\partial_3} P_2 \xrightarrow{\partial_2} P_1 \xrightarrow{\partial_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \quad (1.6)$$

$$\partial_3 : t_{\mathbb{P}} \longrightarrow \mu_2(\mathbb{P})$$

$$\partial_2 = \mu_1 \rho_2$$

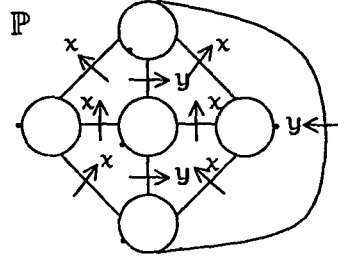
$$\partial_1 = \rho_1$$

1.2.4 $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin Üreteçlerinin Hesaplanma Nedenleri

Bu bölümde $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteç kümesinin neden hesaplanması gerektiği ile ilgili bazı sonuçları değerlendireceğiz.

\mathcal{P} sunuşu üzerinde herhangi bir resim \mathbb{P} olsun. Herhangi bir $R \in \mathfrak{r}$ için R bağıntısının \mathbb{P} resmi içindeki *üstel toplamı*, \mathbb{P} resminin R etiketli disklerin sayısı ile R^{-1} etiketli disklerin sayısının farkıdır ve $\exp_R(\mathbb{P})$ ile gösterilir.

1.2.5 Örnek: $\mathcal{P} = \langle x, y; x^3, [x, y] \rangle$ ve $S = x^3$, $R = [x, y]$ olsun.



Burada, $\exp_S(\mathbb{P}) = 1 - 1 = 0$ ve $\exp_R(\mathbb{P}) = 3$ bulunur. \square

(a) Bağıntılar arasındaki birimler

1.2.2 Alt Bölümde tanımlandığı gibi, $\pi_2(\mathcal{P})$ modülü bağıntı kümesindeki bağıntılardan oluşturulur. Böylece $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteçlerini hesaplamak, \mathcal{P} sunuşunun bağıntıları arasındaki birimlerin bir koleksiyonunu belirlemek anlamına gelir. Çünkü diğer bütün bağıntılar birimlerden üretilir.

(b) Bağıntı modülleri ve homoloji

X kümesinden $M(\mathcal{P})$ modülü için (1.3) ile verilen (kısa) tam dizi,

$$\langle t_R (R \in \mathfrak{r}); \mu_2(\mathbb{P}) = 0 (\mathbb{P} \in X) \rangle$$

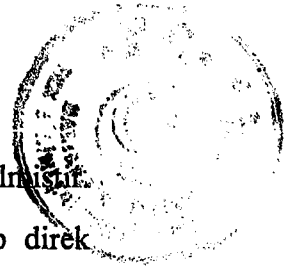
sunuşunu verir [1]. Böylece bazı durumlarda $M(\mathcal{P})$ modülünü yapısı hakkında bilgi sahibi olabiliriz.

(1.4) ve (1.5) den

$$0 \longrightarrow M(\mathcal{P}) \xrightarrow{\mu_1} P_1 \xrightarrow{p_1} P_0 \xrightarrow{\varepsilon} 0$$

elde ederiz. Buradan boyut kuramı incelenerek, [32]'de,

$$H_{n+2}(G, -) \cong \text{Tor}_n^G(-, M(\mathcal{P})), \quad n \geq 1$$



elde edilir. Burada, $\text{Tor}_n^G(\)$ grubunun tanımı, [32]'de detaylı olarak verilmiştir. Ancak tezimizin ilgili konularında, yukarıdaki izomorfizmayı kullanmayıp direkt olarak $H_n(\)$ grubunun tanımından yararlanılmıştır. Diğer bir deyişle $n=0$ alınarak $H_2(\)$ grubu üzerinde çalışılmıştır. Aslında, [27]'de belirtildiği gibi, G 'nin ikinci homoloji grubu ile G üzerinde tanımlanan *Schur multiplier* (Schur çarpanı) aynı kavramı ifade eder.

Kısaca, $M(\mathcal{P})$ modülünün yapısını biliyorsak, G 'nin yüksek homoloji gruplarını hesap edebiliriz.

(c) $H_2(G)$ grubunun hesaplanması (Schur multiplier)

Eğer A herhangi bir (sağ) modül ise (1.6) dan

$$H_2(G, A) = \frac{\text{çek } 1 \otimes \partial_2}{\text{gör } 1 \otimes \partial_3}$$

elde ederiz [43]. Özellikle $G(\mathcal{P})$ -etkisi özdeşlik dönüşümü ve $A = \mathbb{Z}$ alınırsa

$$\delta_2 : \bigoplus_{R \in \mathcal{R}} \mathbb{Z} t_R \longrightarrow \bigoplus_{x \in X} \mathbb{Z} t_x, \quad t_R \mapsto \sum_{x \in X} \exp_x(R) t_x$$

$$\delta_3 : \bigoplus_{\mathbb{P} \in X} \mathbb{Z} t_{\mathbb{P}} \longrightarrow \bigoplus_{R \in \mathcal{R}} \mathbb{Z} t_R, \quad t_{\mathbb{P}} \mapsto \sum_{R \in \mathcal{R}} \exp_R(\mathbb{P}) t_R$$

olmak üzere,

$$H_2(G) = \text{çek } \delta_2 / \text{gör } \delta_3$$

bulunur [43].

(d) Diğer homoloji özellikleri

1.2.3 Alt Bölümdeki tam dizilere ek olarak aşağıdaki tam dizi Pride tarafından [36]'da geliştirilmiştir.

$$0 \longrightarrow H_3(G) \xrightarrow{\delta'} \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{C}} \pi_2(\mathcal{P}) \xrightarrow{\delta} \text{çek } \delta_2 \longrightarrow H_2(G) \longrightarrow 0.$$

Tam dizi tanımından $\text{çek } \delta = \text{gör } \delta'$, δ örten ve δ' bire bir olduğundan, 1.izomorfizma teoremi kullanılarak $H_3(G) \cong \text{çek } \delta$ bulunur. Böylece $\pi_2(\mathcal{P})$ 'yi oluşturabilirsek $H_3(G)$ hakkında bazı bilgiler elde edebiliriz.

Not: Baik [1]'de, $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteçlerinin hesaplama nedenlerine ek olarak, aşağıda başlık olarak verdiğimiz ancak tezimizin hiç bir aşamasında kullanmadığımız özellikler tanımlamıştır.

- (b') Bağlantı modülleri ve cohomoloji,
- (c') $H^2(G)$ grubunun hesaplanması,
- (d') Diğer cohomoloji grup özellikleri.

Cohomoloji tanımı [32]'de bulunabilir.

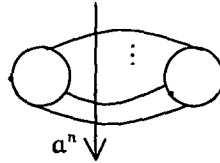
1.2.5 Aspherical ve n-Cockcroft ($n \in \mathbb{N}$) Sunuşlar

1.2.6 Tanım: \mathcal{P} , (1.2) ile verilen bir sunuş olsun. $\pi_2(\mathcal{P}) = 0$ ise \mathcal{P} sunuşuna *aspherical* denir. Eğer bir G grubu *aspherical* bir sunuşla tanımlanırsa bu G grubuna *aspherical* denir.

Bütün serbest grupların ve bir bağıntılı torsion-free (serbest) grupların aspherical olduğunu hatırlatalım [30]. *Aspherical* sunuşlarla ilgili diğer örneklerin bazıları [8], [13], [36]'da bulunabilir.

1.2.7 Tanım: \mathcal{P} , (1.2) ile verilen bir sunuş olsun. $\pi_2(\mathcal{P})$ sadece iki disk içeren resimlerin bir kümesiyle üretiliyorsa, \mathcal{P} sunuşuna *combinatorial aspherical* (CA) denir. Eğer bir G grubu *combinatorial aspherical* bir sunuşla tanımlanırsa bu G grubuna *combinatorial aspherical* denir.

1.2.8 Örnek: $\mathcal{P} = \langle a ; a^n \rangle$, n mertebeli devirli grubun bir sunuşu olsun. [36]'da gösterildiği üzere $\pi_2(\mathcal{P})$ aşağıdaki tek resim ile üretilir.



Bu nedenle \mathcal{P} sunuşu (CA) bir sunuştur ve de $G = \mathbb{Z}_n$ grubu (CA) dır. \square

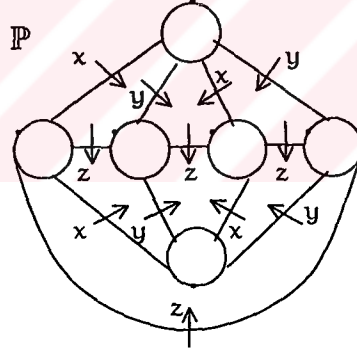
(CA) sunuşlarla ilgili diğer örneklerin bazıları [8], [13], [22], [23], [36]'da bulunabilir.

1.2.9 Tanım: \mathcal{P} , (1.2) ile verilen bir sunuş ve n pozitif bir tamsayı olsun. \mathcal{P} üzerindeki bütün \mathbb{P} küresel resimler ve tüm $R \in r$ için, $\exp_R(\mathbb{P}) \equiv 0 \pmod{n}$ oluyorsa, \mathcal{P} sunuşuna n -Cockcroft denir (Burada $\pmod{0}$ konguransı, eşitliği verir.). Bir G grubunun n -Cockcroft sunuşunun olduğu gösterilirse bu G grubuna n -Cockcroft denir.

1.2.10 Uyarı: Bir \mathcal{P} sunuşunun n -Cockcroft özelliğine sahip olup olmadığına bakmak için, X üreteç kümesi içindeki resimlerin n -Cockcroft olup olmadığına bakmak yeterli olur.

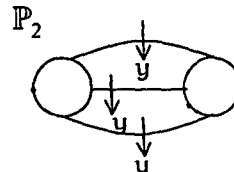
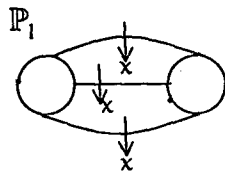
0 -Cockcroft özelliğine sadece Cockcroft denir. Ayrıca n yerine genelde 0 ya da bir p asal sayısı kullanılır.

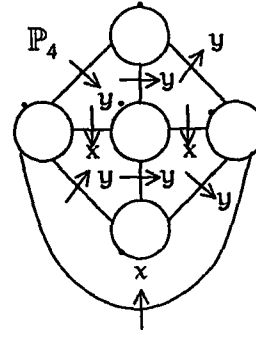
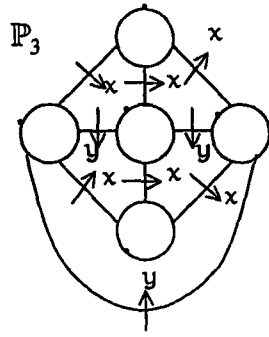
1.2.11 Örnek: $\mathcal{P} = \langle x, y, z; [x,y], [x,z], [y,z] \rangle$ olsun. $[3]$ 'de $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin



yukardaki \mathbb{P} küresel resmi ile üretildiği gösterilmiştir. Burada $\exp_{[x,y]}(\mathbb{P}) = 1 - 1 = 0$
 $\exp_{[x,z]}(\mathbb{P}) = \exp_{[y,z]}(\mathbb{P}) = 1 - 1 = 0$ olduğundan \mathcal{P} sunuşu Cockcroftdur. \square

1.2.12 Örnek: $\mathcal{P} = \langle x, y; x^3, y^3, [x,y] \rangle$ olsun. $[3]$ 'de $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin





küresel resmleri ile üretildiği gösterilmiştir. Burada $\exp_x(\mathbb{P}_1) = \exp_y(\mathbb{P}_2) = \exp_x(\mathbb{P}_3) = \exp_y(\mathbb{P}_4) = 1 - 1 = 0$ ve $\exp_{[x,y]}(\mathbb{P}_3) = \exp_{[x,y]}(\mathbb{P}_4) = -3$ olduğundan \mathcal{P} sunuşu 3-Cockcroftdur. \square

Not olarak :

$$\text{Aspherical} \Rightarrow (\text{CA}) \Rightarrow \text{Cockcroft} \Rightarrow n\text{-Cockcroft} (n \in \mathbb{N}).$$

1.2.6 Grup Sunuşlarının Etkililiği

\mathcal{P} , (1.2) ile verilen bir sunuş olsun. \mathcal{P} sunuşunun Euler karakteristiği

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 - |x| + |r|$$

ile tanımlanır. Ayrıca G grubunun

$$\delta(G) = 1 - \text{rk}_{\mathbb{Z}}(H_1(G)) + d(H_2(G)) \quad (1.7)$$

şeklinde bir alt sınırı vardır. Burada $\text{rk}_{\mathbb{Z}}(\)$, torsion-free (serbest) kısmının \mathbb{Z} -rankını gösterir ve $d(\)$ ise minimal üreteç sayısı anlamına gelir.

1.2.13 Tanım: A sonlu değişmeli bir grup olsun. Bu durumda

$$t(A) = \begin{cases} \text{İlk torsion (sonlu) sayısı,} & \text{eğer } A \neq 0 \text{ ise} \\ 0 & \text{, eğer } A = 0 \text{ ise} \end{cases}$$

tanımlayalım.

Sonlu değişmeli grupların minimal üreteç sayıları ile ilgili aşağıdaki önerme verilebilir.

1.2.14 Önerme: A ve B sonlu değişmeli gruplar olsun. $(t(A), t(B)) \neq 1$ ise

$$d(A \oplus B) = d(A) + d(B)$$

dir.

İspat: $(t(A), t(B)) \neq 1$ olsun. İlk olarak, $t(A)$ veya $t(B)$ den biri 0 ise, mesela $t(A)=0$ olsun. Bu durumda 1.2.13 Tanım gereği, $A=0$ olacaktır. O halde, açıkça görülebileceği gibi $d(A \oplus B) = d(B)$ elde edilir.

Şimdi de $t(A)$ ve $t(B)$ 'nin her ikisini de sıfırdan farklı alalım. Böylece, $m_i | m_{i+1}$, $1 \leq i \leq k-1$ olmak üzere,

$$A = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k}$$

yazılabilir [41]. O halde $t(A) = m_1$ dir. Benzer olarak, $n_i | n_{i+1}$, $1 \leq i \leq l-1$ olmak üzere,

$$B = \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_l}$$

yazılıp, $t(B) = n_1$ bulunur. Bu durumda,

$$A \oplus B = \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_l}$$

olacaktır. Şimdi $p|t(A)$ ve $p|t(B)$ olacak şekilde bir p asal sayısı alalım. O halde,

$$p | m_1, p | m_2, \dots, p | m_k, p | n_1, p | n_2, \dots, p | n_l$$

dir. Dolayısıyla,

$$\Phi_i : \mathbb{Z}_{m_i} \longrightarrow \mathbb{Z}_p \text{ ve } \Psi_j : \mathbb{Z}_{n_j} \longrightarrow \mathbb{Z}_p$$

($1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq l$) epimorfizmaları (örten homomorfizma) vardır. Buradan, bu epimorfizmaların genişlemeleri olan

$$\Phi = \bigoplus_{1 \leq i \leq k} \Phi_i : \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{(k)}$$

ve

$$\Psi = \bigoplus_{1 \leq j \leq l} \Psi_j : \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_l} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{(l)}$$

epimorfizmalarını elde ederiz. O halde,

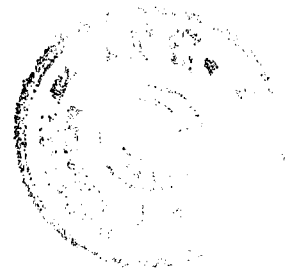
$$\Phi \oplus \Psi : \mathbb{Z}_{m_1} \oplus \mathbb{Z}_{m_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{m_k} \oplus \mathbb{Z}_{n_1} \oplus \mathbb{Z}_{n_2} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{n_l} \longrightarrow \mathbb{Z}_p^{(k+l)}$$

olur. Burada $\mathbb{Z}_p^{(k)}$, \mathbb{Z}_p üzerinde bir vektör uzayıdır [41, Lemma 6.2]. O halde, bir

vektör uzayının herhangi iki tabanında aynı sayıda eleman olacağından [24], $\mathbb{Z}_p^{(k)}$, k

sayısından daha az sayıda eleman tarafından üretilemez. Bu ise $\mathbb{Z}_p^{(k)}$ nın boyutudur.

Diğer bir deyişle,



$$d(\mathbb{Z}_p^{(k)}) = k$$

dır. Buradan,

$$d(A) \geq k$$

elde ederiz. (Çünkü bir grubun üreteçlerinin minimum sayısı, bu grubun herhangi bir homomorfik görüntüsünün üreteçlerinin minimum sayısından büyük veya eşittir.)

Diğer taraftan, A grubu

$$(1, 0, \dots, 0), (0, 1, \dots, 0), \dots, (0, 0, \dots, 1)$$

şeklinde k tane eleman ile üretilir. Dolayısıyla,

$$d(A) \leq k$$

dır. Tüm bunlar ise bize

$$d(A) = k$$

olduğunu verecektir.

A grubu için yukarıda yaptığımız işlemleri B grubu içinde tekrarlırsak,

$$d(B) = 1$$

elde ederiz.

Sonuç olarak

$$d(A \oplus B) = d(A) + d(B)$$

elde edilir. Bu da aranan sonuçtur. ◊

Bir \mathcal{P} sunuşu için

$$\chi(\mathcal{P}) \geq \delta(G)$$

daima doğrudur [3], [6], [19]. Ayrıca

$$\chi(G) = \min \{ \chi(\mathcal{P}) : \mathcal{P}, G \text{ grubu için sonlu bir sunuş} \}$$

kümesi G grubunun Euler karakteristiğini tanımlar.

1.2.15 Tanım: G bir grup olsun.

i) G grubu için bir \mathcal{P}_0 sunuşu, aynı G nin diğer tüm \mathcal{P} sunuşları için

$$\chi(\mathcal{P}_0) \leq \chi(\mathcal{P})$$

oluyorsa, bu \mathcal{P}_0 sunuşuna **minimal** denir.

ii) Bir \mathcal{P}_0 sunuşu

$$\chi(\mathcal{P}_0) = \delta(G)$$

eşitliğini sağlıyorsa, \mathcal{P}_0 sunuşuna etkili denir.

iii) Bir G grubu için

$$\chi(G) = \delta(G)$$

eşitliği sağlanıyorsa, bu G grubuna etkili denir.

1.2.16 Önteorem: i) $\chi(G) \leq 0$ ise G grubu sonsuzdur.

ii) G sonlu devirli bir grup ise $\chi(G) = 1$ dir.

İspat: i) $\chi(G) \leq 0$ olsun. $\chi(G)$ kümesinin tanımından, G grubu için $\chi(\mathcal{P}) = \chi(G)$ olan en az bir tane \mathcal{P} sunuşu vardır. $\mathcal{P} = \langle x ; r \rangle$ olsun. Şimdi olasılıkları inceleyelim.

I) $\chi(G) = 0$ ise $\chi(\mathcal{P}) = 0$ olur. Bu olasılık için iki durum söz konusudur.

1. Durum : $|x| = 1$ ve $|r| = 0$ ise $\chi(\mathcal{P}) = 1 - |x| + |r| = 1 - 1 + 0 = 0$ olur. Buradan $\mathcal{P} = \langle x ; \rangle$ elde edilir. Ayrıca $G(\mathcal{P}) \cong F(x) / N$ olduğundan ve bağıntı kümesinde eleman olmadığından $G(\mathcal{P}) \cong F(x)$ bulunur. $|x| = 1$ ise $F(x)$ sonsuz devirli bir gruptur [25]. Böylece $G(\mathcal{P})$ grubunda sonsuz devirli bir grup olur.

2. Durum : $|x| = |r| + 1$ ise $\chi(\mathcal{P}) = 1 - |x| + |r| = 1 - |r| - 1 + |r| = 0$ olur. Bu ikinci durumun anlamı $|r| < |x|$ olmasıdır ve ispatı aşağıdaki olasılıkta yapılacaktır.

II) $\chi(G) < 0$ ise $\chi(\mathcal{P}) < 0$ olur. Buradan,

$$\chi(\mathcal{P}) = 1 - |x| + |r| < 0$$

$$\Rightarrow 1 + |r| < |x|$$

$$\Rightarrow |r| < |x|$$

elde edilir. $|x| = m$ ve $|r| = n$ olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{P} = \langle x_1, x_2, \dots, x_m ; R_1, R_2, \dots, R_n \rangle$$

ve $m > n$ olur.

Şimdi C grubu, t ile üretilen sonsuz devirli bir grup olsun.

$$\theta : \{ x_1, x_2, \dots, x_m \} \longrightarrow C$$

fonksiyonu için $\theta(R_1) = \theta(R_2) = \dots = \theta(R_n) = 1$ oluyorsa *Temel Teorem* [14] ile θ fonksiyonunun bir genişlemesi olan

$$\psi : G(\mathcal{P}) \longrightarrow C$$

grup homomorfizması vardır. Aslında böyle bir homomorfizma elde etmek için üstel toplam kavramını kullanacağız. Bunun için, $i = 1, 2, \dots, m$ ve $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$a_{ij} = \exp_{x_i}(R_j)$$

olsun. Şimdi de

$$a_{11} \gamma_1 + a_{12} \gamma_2 + \dots + a_{1m} \gamma_m = 0$$

$$a_{21} \gamma_1 + a_{22} \gamma_2 + \dots + a_{2m} \gamma_m = 0$$

.....

$$a_{n1} \gamma_1 + a_{n2} \gamma_2 + \dots + a_{nm} \gamma_m = 0$$

şeklindeki doğrusal denklem sistemini düşünelim. Bu denklem sisteminde değişkenlerin sayısı denklem sayısından fazla olduğundan, bu denklem sistemi için sıfırdan farklı bir çözüm vardır. Bu çözüm, $i = 1, 2, \dots, m$ ve α_i lerin her biri bir tam sayı olmak üzere, $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ olsun. Ayrıca,

$$\theta(x_i) = t^{\alpha_i} \quad (x_i \in X)$$

olarak tanımlansın. Buradan $j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere,

$$\theta(R_j) = t^{\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i}$$

olarak bulunur. Böylece $\theta(R_j) = 1$ olması için $t^{\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i} = 1$ olmalıdır. C grubu t ile

üretilen sonsuz devirli bir grup olduğundan, ancak $\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i = 0$ olursa $t^{\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i} = 1$ olur.

Yukardaki doğrusal denklemin sıfırdan farklı çözümü $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ olduğundan

$j = 1, 2, \dots, n$ olmak üzere, $\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i = 0$ olur. Buradan da

$$\theta(R_j) = t^{\sum_{i=1}^m a_{ij} \alpha_i} = t^0 = 1$$

bulunur. Böylece θ dönüşümünün bir genişlemesi olan

$$\begin{aligned} \psi : G(\mathcal{P}) &\longrightarrow C \\ \bar{x}_i &\longmapsto t^{\alpha_i} \end{aligned}$$



grup homomorfizması vardır. Burada α_i lerin hepsi birden sıfır olmadığından $\text{Im } \Psi$ C sonsuz devirli grubunun aşikar olmayan bir alt grubudur. Böylece $\text{Im } \Psi$ sonsuz devirli bir grup olur. Buradan da istenen bulunur.

ii) $G(\mathcal{P})$, $\mathcal{P} = \langle x ; x^n \rangle$ sunuşuyla verilen n mertebeli devirli bir grup olsun. $\chi(G)$ kümesinin tanımdan, $\chi(G) \leq \chi(\mathcal{P})$ dir. Buradan $\chi(G) \leq 1$ bulunur. Fakat G sonlu bir grup olduğundan ve i)'den dolayı $\chi(G)$ değeri 1'den küçük olamaz. Böylece $\chi(G) = 1$ olur.◊

Sonlu üretilen değişmeli gruplar (Epstein [19]), kapalı 3-manifoldların temel grupları [19] ve denge sunuşlu sonlu gruplar (ki böyle sonlu grupların Schur çarpımları [20]'ye göre birdir) *etkili* grup örnekleridir. Sonlu metacyclic grupların *etkili* olduğu Beyl [4] ve Wamsley [42] tarafından gösterilmiştir. Bununla birlikte sonsuz metacyclic grupların *etkili* olması gerekmez. Bu [3]'de Baik ve Pride'in bir sonucudur. [20]'de Harlander, sonlu olarak sunulan bir grubun *etkili* bir grup içine gömülebileceğini ispatlamıştır. *Etkililik* konusunda daha farklı örnekler için Baik, Pride [2], Beyl, Rosenberger [5], Champbell, Robertson, Williams [10] (ve [11]) Çevik [15], [16] ve [17], Harlander [21], Johnson, Robertson [26], Kenne [28], Robertson, Thomas, Wotherspoon [40]'a bakılabilir.

Aşağıdaki sonuç Epstein'nin bir sonucudur ve [19]'da ([29], Theorem 2.1) bulunabilir.

1.2.17 Teorem: \mathcal{P} , (1.2) ile verilen sunuş olsun. \mathcal{P} sunuşunun *etkili* olması için gerekli ve yeterli koşul, bir p asal sayısı için, \mathcal{P} nin *p-Cockcroft* olmasıdır.

Yukardaki teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

1.2.18 Sonuç: \mathcal{P} , (1.2) ile verilen sunuş olsun. \mathcal{P} *Cockcroft* ise *etkilidir*.

Her ne kadar etkililik önemli bir konu ise, **etkili olmama** bu dalda çalışan bir çok matematikçinin üzerinde durduğu bir konudur. Baik ve Pride, Coxeter grupların etkililiği için gerekli şartları [2]'de vermiştir. Bununla birlikte etkili olmayan Coxeter



grupların bir $G_{n,k}$ ailesini bulmuşlardır ($n \geq 4$, k tek bir tam sayı). Burada sabit n için,

$$\chi(G_{n,k}) - \delta(G_{n,k}) \xrightarrow{n} \infty$$

olur. 4.1 Alt Bölümde Coxeter grupların etkililiği detaylı olarak incelenmiştir.

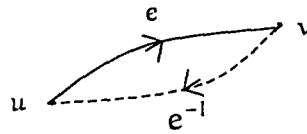
1.3 Grafikler

v ve e birbirinden farklı iki küme ve

$$i : e \rightarrow v, \tau : e \rightarrow v, {}^{-1} : e \rightarrow e$$

bu kümeler arasında, her $e \in e$ için, $i(e) = \tau(e^{-1})$, $(e^{-1})^{-1} = e$ ve $e \neq e^{-1}$ şartlarını sağlayan üç fonksiyon olsun. v , e kümelerinden ve i , τ , ${}^{-1}$ fonksiyonlarından oluşan $(v, e, i, \tau, {}^{-1})$ yapısına bir **grafik** denir ve Γ ile gösterilir. Burada v kümesine **köşe kümesi**, e kümesine **kenar kümesi**, i fonksiyonuna **başlangıç fonksiyonu**, τ fonksiyonuna **bitiş fonksiyonu**, ${}^{-1}$ fonksiyonuna **ters fonksiyon** denir. Ayrıca kenar kümesindeki bir e kenarı için $i(e)$ köşesine, e kenarının **başlangıç noktası** ve $\tau(e)$ köşesine, e kenarının **bitiş noktası** denir.

Bir grafik çiziminde, $i(e)=u$ ve $\tau(e)=v$ olan bir e kenarı, u köşesinden başlayıp v köşesinde biten yönlü bir doğru parçasıyla temsil edilir. Bu e kenarının tersi olan e^{-1} kenarı da, v köşesinden başlayıp u köşesinde biter ve ters yönde yönlendirilir. Şekil olarak;

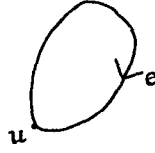
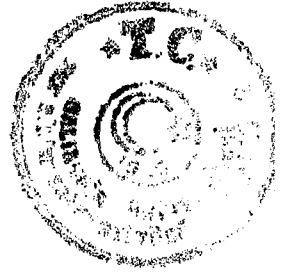


Şekil 1.5

ile gösterilir.

e kenar kümesindeki e , e^{-1} kenar çiftlerinden sadece birinin seçilmesiyle oluşturulan kümeye Γ grafiğinin **yönlendirilmiş kenar kümesi** denir ve e^+ ile gösterilir. Kenar kümesi e^+ olan grafiğe **yönlendirilmiş grafik** denir.

Bir $e \in e$ kenarı için $i(e)=\tau(e)$ oluyorsa bu e kenarına **halka** denir ve şekil olarak



ile gösterilir.

Bir Γ grafiğinde, $e_1, e_2 \in e$ için, $i(e_1)=i(e_2)$ ve $\tau(e_1)=\tau(e_2)$ varken $e_1=e_2$ oluyorsa, bu Γ grafiğine **basit grafik** denir. v, e kümelerinin her ikisinde sonlu ise Γ grafiği de sonludur. Basit bir Γ grafiği, herhangi farklı iki $u, v \in v$ köşesi için $i(e)=u$, $\tau(e)=v$ olan bir e kenarına sahipse bu Γ grafiğine **tam grafik** denir.

e_1, e_2, \dots, e_n kenarların sonlu bir dizisi olmak üzere, $i=1, 2, \dots, n-1$ için $\tau(e_i)=i(e_{i+1})$ oluyorsa, bu diziye Γ grafiği içinde bir **yol** denir. $e_1 e_2 \dots e_n$ yoluna, $i(e_1)=\tau(e_n)$ olan bir yol ise **kapalı yol**, her $1 \leq i \leq n$ için, $i(e_i)$ köşelerinin hepsi birbirinden farklı olan bir yol ise **basit yol** denir. v kümesindeki bir v köşesine **boş yol** denir ve 1_v ile gösterilir. Bu boş yolda kenar olmadığı ve her $v \in v$ için, $\tau(1_v)=i(1_v)=v$ ve $1_v=1_v^{-1}$ olduğu anlamına gelir.

v kümesinin bir alt kümesi v' ve e kümesinin bir alt kümesi de e' olsun. Herhangi bir $e' \in e'$ elemanı için,

i) $i(e'), \tau(e') \in v'$

ii) $(e')^{-1} \in e'$

şartları sağlanıyorsa, e' kenar kümesi ve v' köşe kümesinden oluşan Γ' grafiğine Γ grafiğinin **alt grafiği** denir.

Bir Γ grafiğinin içindeki herhangi iki köşeyi birleştiren bir yol varsa, bu Γ grafiğine **bağlantılı grafik** denir. Bir Γ grafiğinin bağlantılı bir alt grafiğini içine alan başka bir bağlantılı alt grafiği yoksa bu alt bağlantılı grafiğe, Γ grafiğinin **bileşeni** denir.

Bağlantılı olan ve içinde boştan farklı basit kapalı yolu olmayan bir Γ grafiğine **ağaç** (tree) denir. Ayrıca bağlantılı bir Γ grafiğinin T gibi bir alt grafiği,

i) T bir ağaç,

ii) T'nin köşe kümesiyle Γ grafiğinin köşe kümesi aynı,

şartlarını sağlıyorsa bu T gibi alt grafiğine **maksimal ağaç** denir. [1]'de her grafiğin en az bir tane maksimal ağacı olduğu gösterilmiştir.

2. BAZI GRUP GENİŞLEMELERİ ÜZERİNDE ETKİLİLİK

2.1 Giriş

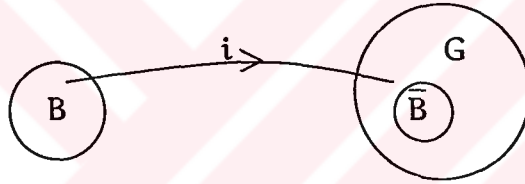
$$1 \rightarrow B \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 1 \quad (2.1)$$

şeklinde grupların bir dizisini alalım. (Burada gruplar arasındaki her bir ok, bu gruplar arasında bir homomorfizmayı gösterir.) Ayrıca (2.1) ile verilen diziyi *tam dizi* olarak kabul edelim. Diğer bir deyişle, $\text{göri}=\text{çekp}$, i birebir ve p örten olsun. Bu durumda G grubuna B nin A ile olan bir **genişlemesi** denir. Buna ek olarak, G grubu B ile A nın bir genişlemesi iken

$$d(G) = d(B) + d(A)$$

şartı sağlanıyorsa, G grubuna B nin A ile olan **dış genişlemesi** denir.

Şimdi, $\bar{B}=\text{göri}$ olsun. Öyleyse $\text{göri}=\text{çekp}$ olduğundan, $\bar{B}=\text{çekp}$ dir, dolayısıyla $\bar{B} \trianglelefteq G$ olur.



Ayrıca, $i : B \rightarrow \bar{B}$ bire bir (ve örten) bir homomorfizma olduğundan, $B \cong \bar{B}$ dir. O halde, 1. izomorfizma teoremi gereği,

$$G/\text{çekp} \cong \text{görp},$$

kısaca,

$$G / (B \cong \bar{B}) \cong A$$

elde ederiz, çünkü p örten bir homomorfizma olduğundan $\text{görp}=A$ dir.

O halde, (2.1) ile verilen bir dizide A , B ve G grupları için

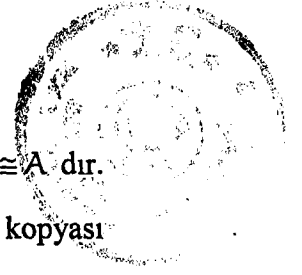
i) $B \trianglelefteq G$

ii) $G/B \cong A$

şartları sağlanıyorsa, G grubuna B nin A ile olan bir **genişlemesi** denir.

Eğer, $\bar{B} \leq Z(G)$ ise bu genişleme **merkezidir**.

Eğer $j : A \rightarrow G$ şeklinde bir homomorfizma var, öyleki $pj = 1_A$ ise bu genişlemeye **ayrık (split)** denir.



Şimdi de $\bar{A} = \text{görj}$ olsun. j bire bir homomorfizma olduğundan $\bar{A} \cong A$ dir.

Dolayısıyla G grubu içinde B nin \bar{B} gibi bir kopyası ve A nın \bar{A} gibi bir kopyası

vardır. $\bar{B} \trianglelefteq G$ olduğunu biliyoruz. Ayrıca,

$$i) \bar{B} \cap \bar{A} = 1$$

ve

ii) G grubunun her bir elemanı $\bar{b} \bar{a}$ ($\bar{b} \in \bar{B}, \bar{a} \in \bar{A}$) formunda tek bir şekilde yazılabilir.

Aslında G grubu, $\bar{B} (\cong B)$ nin $\bar{A} (\cong A)$ ile bir yarı-direkt çarpımıdır. (Yarı-direkt çarpımın başka bir tanımı 2.2.1 Tanımda verilmiştir.)

Tersine, G grubu B nin A ile bir yarı-direkt çarpımı ise G bir ayrık genişlemedir. Yani,

$$1 \rightarrow B \xrightarrow{i} G \xrightarrow{p} A \rightarrow 1$$

$$b \mapsto (b, 1)$$

$$(b, a) \mapsto a$$

$$(1, a) \xleftarrow{j} a$$

homomorfizmaları tanımlanır.

Son olarak, gruplar arasında tanımlanan direkt çarpım ve serbest çarpım da aslında birer grup genişlemeleridir. (Bu iki tür çarpım grubunun tanımları 2.3 ve 2.4 Alt Bölümlerde verilmiştir.)

2.2 Yarı-Direkt Çarpım Grubu

Bu bölümde tanımlanan bilgiler standarttır ve [16]'da bulunabilir.

A ve B gibi herhangi iki grup verilsin. Bu iki grubun kartezyen çarpımı

$$G = A \times B = \{ (a, b) : a \in A, b \in B \}$$

olarak tanımlanır.

2.2.1 Tanım: A, B herhangi iki grup ve

$$\theta : B \rightarrow \text{Aut}(A), \quad b \mapsto \theta_b$$

ile tanımlanan bir homomorfizma olsun. Ayrıca G kümesi de tüm $(a, b) \in A \times B$ sıralı ikililerinden oluşsun ve de G kümesi üzerinde bir ikili işlem

$$(a, b) (a_1, b_1) = (a \theta_b(a_1), b b_1)$$



olarak tanımlansın.

2.2.2 Teorem: G kümesi 2.2.1 Tanımla verilen işlem altında bir grup olur.

İspat: Burada, tüm $a \in A$ ve tüm $b \in B$ olacak şekilde bir

$$\theta : B \rightarrow \text{Aut}(A), \quad \theta_b(a) = ba b^{-1}$$

homomorfizması vardır. Ayrıca, $a \in A$, $b, b_1, 1 \in B$ olmak üzere,

$$\theta_b(\theta_{b_1}(a)) = \theta_{bb_1}(a)$$

ve

$$\theta_1(a) = a$$

eşitlikleri sağlanır [41].

2.2.1 Tanımla verilen işlemin birleşme özelliği vardır.

$a, a_1, a_2 \in A$, $b, b_1, b_2 \in B$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} [(a,b)(a_1,b_1)](a_2,b_2) &= (a\theta_b(a_1),bb_1)(a_2,b_2) \\ &= (a\theta_b(a_1)\theta_{bb_1}(a_2),bb_1b_2) \\ &= (aba_1b^{-1}bb_1a_2(bb_1)^{-1},bb_1b_2) \\ &= (aba_1b_1a_2b_1^{-1}b^{-1},bb_1b_2) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} (a,b)[(a_1,b_1)(a_2,b_2)] &= (a,b)(a_1\theta_{b_1}(a_2),b_1b_2) \\ &= (a\theta_b(a_1\theta_{b_1}(a_2)),bb_1b_2) \\ &= (a\theta_b(a_1b_1a_2b_1^{-1}),bb_1b_2) \\ &= (aba_1b_1a_2b_1^{-1}b^{-1},bb_1b_2) \end{aligned} \quad (2.3)$$

olarak bulunur. O halde (2.2) ve (2.3) eşitliklerinden tanımlanan işlemin birleşme özelliği olduğu görülür.

Birim eleman $A \times B$ kümesinin $(1,1)$ elemanıdır. Bunun için $a \in A$, $b \in B$ olmak üzere, $(a,b) \in G$ alalım. Böylece

$$(1,1)(a,b) = (1\theta_1(a),1b) = (1a,b) = (a,b)$$

ve

$$(a,b)(1,1) = (a\theta_b(1),b1) = (a1,b) = (a,b)$$

bulunur ve buradan, $(1,1) \in G$ olduğundan, $(1,1)$ birim elemandır.



Şimdi de (a,b) elemanın tersinin $((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1}, b^{-1})$ olduğunu gösterelim.

Diğer bir deyişle,

$$((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1}, b^{-1}) (a,b) = ((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1} \theta_{b^{-1}}(a), b^{-1} b) = (1,1)$$

ve

$$\begin{aligned} (a,b) ((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1}, b^{-1}) &= (a \theta_b((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1}), b^{-1} b) \\ &= (a \theta_b((b^{-1} a b)^{-1}), b^{-1} b) \\ &= (a \theta_b(b^{-1} a^{-1} b), b^{-1} b) \\ &= (a b b^{-1} a^{-1} b b^{-1}, 1) \\ &= (1,1) \end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. Dolayısıyla $((\theta_{b^{-1}}(a))^{-1}, b^{-1}) \in G$ elemanı (a,b) elemanının tersidir.

Böylece G kümesi 2.2.1 Tanımla verilen işlem altında bir grup olur. \diamond

2.2.3 Tanım: 2.2.2 Teorem ile bulunan bu gruba A grubunun B grubuyla yarı-direkt çarpım grubu denir ve özel olarak $G = A \rtimes_0 B$ ile gösterilir.

2.2.1 Yarı-Direkt Çarpım Grubunun Sunuşu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun yarı-direkt çarpım grubunun sunuşu [25, Proposition 10.1]'da aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.2.4 Teorem: $\theta : B \rightarrow \text{Aut}(A)$ bir homomorfizma olmak üzere, A ve B grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle x; s \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle y; t \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu durumda A grubunun B grubuyla yarı-direkt çarpımı olan $G = A \rtimes_0 B$ grubunun sunuşu aşağıdaki gibi olur.

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; s, t, r \rangle \quad (2.4)$$

Burada, $r = \{ x y \lambda_{x,y}^{-1} y^{-1}; x \in x, y \in y \}$ ve $\lambda_{x,y} = \theta_y(x)$, x kümesi üzerinde bir kelimedir.



2.2.2 Bazı Yarı-Direkt Çarpım Gruplarının İkinci Homoloji Grupları ve Sunuşlarının Etkililiği

Yarı-direkt çarpım gruplarının genel formları üzerinde, ikinci homoloji gruplarını formüle eden herhangi bir sonuç tanımlanmamıştır. Bununla birlikte Park [34]'de B grubunu p (p asal) mertebeli sonlu devirli bir grup ve A grubunu ise n ($n \in \mathbb{N}$) mertebeli sonlu devirli bir grup olarak, aşağıdaki teorem ile A grubunun B grubuyla yarı-direkt çarpım grubunun, ikinci homoloji grubunu tanımlamıştır.

A grubunu $\mathcal{P}_A = \langle x ; x^n \rangle$ ve B grubunu da $\mathcal{P}_B = \langle y ; y^p \rangle$ sunuşlarıyla tanımlayalım. Ayrıca, $r, d \in \mathbb{N}$ için

- (i) $(r, n) = 1$,
- (ii) $d = (r-1, n)$ olmak üzere $(r-1, nd) = d$ ve $d = p$,
- (iii) $r^p \equiv 1 \pmod{n}$,
- (iv) $|G| = np$,

şartlarının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $G = A \rtimes_0 B$ grubunun sunuşu, 2.2.4 Teorem ile,

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y ; x^n, y^p, y^{-1}xy = x^r \rangle \quad (2.5)$$

olarak bulunur.

2.2.5 Teorem: $G = A \rtimes_0 B$ olsun. Bu durumda $H_2(G)$, p mertebeli devirli bir gruptur.

2.2.5 Teoremi kullanarak, [16]'da Çevik aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

2.2.6 Teorem: (2.5) ile verilen 2-üreteçli \mathcal{P}_G sunuşu, G grubu için etkilidir.

İspat: İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. A ve B yukardaki sunuşlarla verilen ve (i), (ii), (iii), (iv) şartlarını sağlayan gruplar olmak üzere, $H_2(G)$ 2.2.5 Teorem ile p mertebeli devirli bir gruptur. (iv) özelliği gereğince G sonlu bir grup olduğundan

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$$

dir. Böylece

$$\delta(G) = 1 + 1 = 2$$

olarak bulunur.

Şimdi de \mathcal{P}_G sunuşunun Euler karakteristiğini hesaplayalım.

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - 2 + 3 = 2$$

olduğundan,

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

çıkar. Bu da bize \mathcal{P}_G sunuşunun G grubu için etkili bir sunuş olduğunu verir.

Son olarak, \mathcal{P}_G sunuşunun etkililiğinin 2-üreteç üzerinde gösterilebildiğini ispatlayalım. \mathcal{P}_G sunuşu 2 üretece sahip olduğundan, elbette

$$d(G) \leq 2$$

dir. Böylece $2 \leq d(G)$ olduğunu göstermemiz yetecektir. Bunun için, bir grubun minimum üreteç sayısının o grubun bölüm grubunun minimum üreteç sayısından büyük eşit olduğunu kullanacağız. G^{ab} , G grubunun abelinization grubunu göstermek üzere,

$$d(G) \geq d(G^{ab})$$

olur. Buradan $d(G^{ab}) = 2$ olduğunu göstermeliyiz. Gerçekten G^{ab} grubu

$$\mathcal{P}_{G^{ab}} = \langle x, y ; x^n, y^p, y^{-1}xy = x^r, [x, y] \rangle$$

sunuşuyla verilir [25]. $\mathcal{P}_{G^{ab}}$ sunuşuna Tietze dönüşümlerinin silme operasyonunu uyguladığımızda (1.2.1 Alt Bölüm)

$$\mathcal{P}_{G^{ab}} = \langle x, y ; x^n, y^p, [x, y] \rangle$$

sunuşunu elde ederiz. Böylece $\mathcal{P}_{G^{ab}} \cong A \oplus B$ bulunur. Burada A ve B değişmeli gruplar olduğundan,

$$d(G^{ab}) = d(B) + d(A)$$

olur [1.2.14 Önerme]. Aslında A ve B grupları devirli olduğundan, $d(A) = 1 = d(B)$ eşitlikleri vardır. Böylece

$$d(G^{ab}) = 2$$

elde edilir. Bu da ispatı bitirir. \diamond

2.2.7 Örnek: $D_{10} = \langle x, y ; x^{10}, y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$ sunuşuyla verilen 20 mertebeli dihedral grubu alalım.

Bu sunuş 2.2.2 Alt Bölümdeki dört şartı sağladığından, 2.2.5 Teorem ile $H_2(G) = \mathbb{Z}_2$ olur. Böylece 2.2.6 Teorem ile D_{10} grubunun yukarıdaki sunuşu 2-üreteç üzerinde etkili bir sunuş olur.□

Buradan 2.2.6 Teoremin bir uygulaması olarak, yukarıdaki örneği aşağıdaki gibi genelleştirebiliriz.

2.2.8 Sonuç: $2m$ ($m \geq 4$ ve m çift) mertebeli dihedral grubun

$$D_m = \langle x, y ; x^m, y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

sunuşu etkilidir.

İspat: Bu sunuşun 2.2.2 Alt Bölümdeki dört şartı sağladığını görmek kolaydır. Park [34]'de 2.2.5 Teoremin bir sonucu olarak $H_2(D_m)$ grubunu 2 mertebeli devirli bir grup olduğunu ispatlamıştır. Buradan 2.2.6 Teorem ile D_m sunuşu 2-üreteç üzerinde etkilidir.◊

2.2.9 Uyarı: 2.2.7 Örnekteki D_{10} dihedral grubunun, 20 mertebeli M gibi bir metacyclic gruba izomorfik olduğu gösterilebilir. Böylece 2.2.6 Teorem ile M grubunun 2-üreteç üzerinde etkili bir sunuşu olduğu söylenir. Gerçekten, bazı şartlar altında, bu iki grup arasındaki izomorfizmi bunların genel formlarına genişletebiliriz.

Böylece 2.2.5 Teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz [16].

2.2.10 Sonuç: M ,

$$\mathcal{P}_M = \langle a, b ; a^m, b^2, b^{-1}ab = a^{-1} \rangle$$

sunuşuyla verilen $2m$ ($m \geq 4$ ve m çift) mertebeli metacyclic bir grup olsun.

Buradan \mathcal{P}_M , M grubu için 2-üreteç üzerinde etkili bir sunuştur.

İspat. 2.2.8 Sonucun ispatına benzer olarak bir ispat yapılabilir.◊

2.3 Direkt Çarpım Grubu

A ve B gibi herhangi iki grup verilsin. A ve B grupları üzerindeki işlemler yardımıyla $G=A \times B$ kartezyen çarpım kümesi üzerinde yeni bir işlem tanımlayarak, G kümesinin bu işlem altında bir grup olduğunu söyleyeceğiz.



2.3.1 Tanım: A ve B çarpma işlemi üzerinde tanımlı iki grup olsun $(a, b), (a', b') \in G$ herhangi iki eleman ise, bunların çarpımı

$$(a, b) (a', b') = (aa', bb') \quad (2.6)$$

$(a, a' \in A, b, b' \in B)$ olarak tanımlayalım. Bu çarpımdaki aa' bileşeni A grubundaki işleme göre, bb' bileşeni B grubundaki işleme göre hesaplanmıştır. Dikkat edilirse burada üç tane işlem vardır. Birinci işlem A grubu üzerinde, ikinci işlem B grubu üzerinde ve üçüncü işlem G kümesi üzerindedir.

G kümesi (2.6) ile tanımlanan işleme göre bir grup oluşturur. Bu gruba A ve B gruplarının **direkt çarpım grubu** denir ve $A \times B$ ile gösterilir. A ve B gruplarının her ikisinin de değişmeli olması halinde G grubunun da değişmeli olacağı açıktır. Sonuç olarak, kartezyen çarpımdan dolayı

$$|G| = |A| \cdot |B|$$

dir.

Ayrıca, 2.2.1 Tanımda, verilen θ_b dönüşümü özdeşlik dönüşümü alınarak da, yani $\theta_b(a) = a$ ($\forall a \in A, \forall b \in B$) olduğunda, A ve B grupların direkt çarpım grubu elde edilebilir.

2.3.1 Direkt Çarpım Grubunun Sunuşu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun direkt çarpım grubunun sunuşu [25]'de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.3.2 Önerme: A ve B grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle x; s \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle y; t \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G'nin sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; s, t, r \rangle \quad (2.7)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $r = \{ xyx^{-1}y^{-1} : x \in x, y \in y \}$ dir.

2.3.2 Direkt Çarpım Grubunun İkinci Homoloji Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere, bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G grubunun ikinci homoloji grubu $H_2(G)$, [27]'de, aşağıda verilen *Künnet formülü* ile hesaplanır.

$$H_2(G) = H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus (H_1(A) \otimes H_1(B)).$$

Burada $H_1(A)$ ve $H_1(B)$ grupları A ve B gruplarının birinci homoloji gruplarını, $H_1(A) \otimes H_1(B)$ çarpımı da bu grupların tensor çarpımını göstermektedir.

2.3.3 Direkt Çarpım Grubunun Sunuşunun Etkililiği

A ve B herhangi iki sonlu grup olmak üzere, bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G grubunun sunuşunun etkililiği için 2.3.1 ve 2.3.2 Alt Bölümlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

2.3.3 Teorem: G grubunun (2.7) ile verilen sunuşunun etkili olması için gerekli ve yeterli koşul A ve B gruplarının sunuşlarının her ikisinin de etkili olmasıdır.

İspat: A ve B herhangi iki sonlu grup olmak üzere, sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle x; s \rangle, \mathcal{P}_B = \langle y; t \rangle$$

ve $d(A)=|x|=m$, $d(B)=|y|=n$ olsun. Böylece G grubunun (2.7) ile verilen sunuşu için

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t| + |r|$$

olur. Ayrıca G grubu sonlu bir grup olduğundan,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$$

bulunur.

G grubunun \mathcal{P}_G sunuşu etkili yani,

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

olsun. Böylece bu eşitlik

$$1 + d(H_2(G)) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t| + |r|$$

halini alır.

Şimdi G grubunun ikinci homoloji grubu $H_2(G)$ 'yi hesaplayalım. G grubu, A ve B gruplarının direkt çarpım grubu olduğundan, G grubunun ikinci homoloji grubu, 2.3.2 Alt Bölümden,

$$H_2(G) = H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus (H_1(A) \otimes H_1(B))$$

formülüyle hesaplanır. Buradan da homoloji grupları değişmeli olduğundan, 1.2.14 Önerme gereği

$$d(H_2(G)) = d(H_2(A)) + d(H_2(B)) + d(H_1(A) \otimes H_1(B))$$

yazılır. Ayrıca [41, Corollary 6.4] gereğince, birinci homoloji grupları

$$H_i(A) = \mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{k_n}, \quad k_i \mid k_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, n$$

ve

$$H_i(B) = \mathbb{Z}_{l_1} \times \mathbb{Z}_{l_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{l_m}, \quad l_i \mid l_{i+1}, \quad i=1, 2, \dots, m$$

olarak yazılabilir. Böylece birinci homoloji gruplarının tensor çarpımı

$$\begin{aligned} H_i(A) \otimes H_i(B) &= (\mathbb{Z}_{k_1} \times \mathbb{Z}_{k_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{k_n}) \otimes (\mathbb{Z}_{l_1} \times \mathbb{Z}_{l_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{l_m}) \\ &= [(\mathbb{Z}_{k_1} \otimes \mathbb{Z}_{l_1}) \oplus (\mathbb{Z}_{k_1} \otimes \mathbb{Z}_{l_2}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{k_1} \otimes \mathbb{Z}_{l_m})] \oplus \dots \oplus \\ &\quad [(\mathbb{Z}_{k_n} \otimes \mathbb{Z}_{l_1}) \oplus (\mathbb{Z}_{k_n} \otimes \mathbb{Z}_{l_2}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{k_n} \otimes \mathbb{Z}_{l_m})] \\ &= (\mathbb{Z}_{(k_1, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_m)}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{(k_n, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_m)}) \end{aligned}$$

olur. Buradan, $d(H_i(A) \otimes H_i(B))$ çarpımı;

$$\begin{aligned} &= d[(\mathbb{Z}_{(k_1, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_m)}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{(k_n, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_m)})] \\ &= d(\mathbb{Z}_{(k_1, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_1, l_m)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(k_n, l_1)} \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_2)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(k_n, l_m)}) \\ &= d(\mathbb{Z}_{(k_1, l_1)}) + d(\mathbb{Z}_{(k_1, l_2)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(k_1, l_m)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(k_n, l_1)}) + d(\mathbb{Z}_{(k_n, l_2)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(k_n, l_m)}) \\ &= m + m + \dots + m = mn \end{aligned}$$

olur.

Ayrıca biliyoruz ki $r = \{ xyx^{-1}y^{-1} : x \in \mathbf{x}, y \in \mathbf{y} \}$ olduğundan, $|r| = |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|$ olur.

Böylece

$$|r| = mn$$

bulunur. Sonuç olarak

$$d(H_i(A) \otimes H_i(B)) = |r|$$

olur. Böylece

$$1 + d(H_2(G)) = 1 - |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| + |\mathbf{s}| + |\mathbf{t}| + |r|$$

eşitliğimiz

$$1 + d(H_2(A)) + d(H_2(B)) + |r| = 1 - |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| + |\mathbf{s}| + |\mathbf{t}| + |r|$$

halini alır. Yani,

$$1 + d(H_2(A)) + d(H_2(B)) = 1 - |\mathbf{x}| - |\mathbf{y}| + |\mathbf{s}| + |\mathbf{t}|$$

olur. Bu son eşitlik

$$1 + d(H_2(A)) + 1 + d(H_2(B)) = 1 - |\mathbf{x}| + |\mathbf{s}| + 1 - |\mathbf{y}| + |\mathbf{t}|$$

olarak yazılabilir. Bu da

$$\delta(A) + \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_A) + \chi(\mathcal{P}_B)$$

olduğunu verir. $\delta(A) \leq \chi(\mathcal{P}_A)$ ve $\delta(B) \leq \chi(\mathcal{P}_B)$ eşitsizlikleri var olduğundan, yukarıdaki son eşitliğin sağlanması için

$$\delta(A) = \chi(\mathcal{P}_A) \text{ ve } \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_B)$$

olması gerekmektedir. Bu son iki eşitlik de bize A ve B gruplarının etkili olduğunu verir.

Şimdi de A ve B gruplarının \mathcal{P}_A ve \mathcal{P}_B sunuşlarının her ikisinin de etkili, yani

$$\delta(A) = \chi(\mathcal{P}_A) \text{ ve } \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_B)$$

olduğunu kabul edelim. Bu da

$$1 + d(H_2(A)) = 1 - |x| + |s|$$

ve

$$1 + d(H_2(B)) = 1 - |y| + |t|$$

eşitliklerinin olması demektir. Buradan da

$$d(H_2(A)) = |s| - |x|$$

ve

$$d(H_2(B)) = |t| - |y|$$

bulunur. Ayrıca

$$d(H_2(G)) = d(H_2(A)) + d(H_2(B)) + d(H_1(A) \otimes H_1(B))$$

ve

$$d(H_1(A) \otimes H_1(B)) = |r|$$

olduğundan,

$$d(H_2(G)) = |s| - |x| + |t| - |y| + |r|$$

olarak bulunur. Bu eşitliği

$$1 + d(H_2(G)) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t| + |r|$$

olarak yazabiliriz. Bu da bize

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliğini, yani G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkililiğini verir. ◊

2.3.4 Örnek: n ve m sayıları birer pozitif tamsayı olmak üzere $A = \mathbb{Z}_n$ ve $B = \mathbb{Z}_m$ olsun. Bu durumda A ve B grupları etkili olduğundan $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m$ grubu da, 2.3.3 Teorem gereği etkilidir.



\mathbb{Z}_n grubunun sunuşu ($n \in \mathbb{Z}^+$)

$$\langle x; x^n \rangle$$

olsun. Böylece,

$$\chi(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_n}) = 1 - |x| + |s| = 1 - 1 + 1 = 1$$

bulunur. Devirli grupların ikinci homoloji grupları 1 olduğundan [27, Proposition 2.1.1],

$$\delta(\mathbb{Z}_n) = 1 + d(H_2(\mathbb{Z}_n)) = 1 + 0 = 1$$

olarak bulunur. Buradan da

$$\delta(\mathbb{Z}_n) = \chi(\mathcal{P}_{\mathbb{Z}_n})$$

olduğu görülür. Bu da bize \mathbb{Z}_n ($n \in \mathbb{Z}^+$) grubunun etkili olduğunu verir. Böylece $A = \mathbb{Z}_n$ ve $B = \mathbb{Z}_m$ grupları etkili olur.

Şimdi de G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu gösterelim. İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(\mathbb{Z}_n) \oplus H_2(\mathbb{Z}_m) \oplus (H_1(\mathbb{Z}_n) \otimes H_1(\mathbb{Z}_m)) \\ &= 1 \oplus 1 \oplus (\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m) \\ &= \mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$$

olduğundan,

$$\delta(G) = 1 + d(\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m)$$

olur.

\mathbb{Z}_n ve \mathbb{Z}_m gruplarının sunuşları sırasıyla,

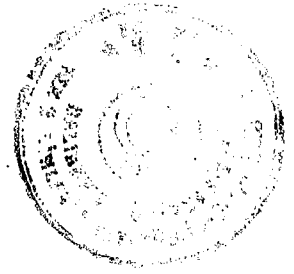
$$\langle x; x^n \rangle \text{ ve } \langle y; y^m \rangle$$

olsun. Bu durumda 2.3.1 Alt Bölümden, G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; x^n, y^m, [x, y] \rangle$$

olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{P}_G) &= 1 - |x| - |y| + |s| + |t| + |r| \\ &= 1 - 1 - 1 + 1 + 1 + |r| \\ &= 1 + |r| \end{aligned}$$



olur. $|r| = d(H_1(\mathbb{Z}_n) \otimes H_1(\mathbb{Z}_m))$ olduğundan

$$|r| = d(\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m)$$

olur. Bu durumda

$$\delta(G) = 1 + d(\mathbb{Z}_n \otimes \mathbb{Z}_m) = 1 + |r| = \chi(\mathcal{P}_G)$$

yani,

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

olarak bulunur. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \square

2.3.5 Örnek: $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ve $B = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ olsun. Bu durumda A ve B grupları, 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğundan $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) \times (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9)$ grubu da, 2.3.3 Teorem gereği etkilidir.

İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus (H_1(A) \otimes H_1(B)) \\ &= H_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) \oplus H_2(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9) \oplus (H_1(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) \otimes H_1(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9)) \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus [(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) \otimes (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9)] \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus [(\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_2 \otimes \mathbb{Z}_9) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_4 \otimes \mathbb{Z}_9)] \\ &= \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus (0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0) \\ &= (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \\ &\cong \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + 1 = 2$$

olur.

Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\langle a, b; a^2, b^4, [a,b] \rangle, \langle c, d; c^3, d^9, [c,d] \rangle$$

olsun. Bu durumda 2.3.1 Alt Bölümden G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle a, b, c, d; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d] \rangle$$

olarak bulunur. Buradan da \mathcal{P}_G sunuşuna Tietze dönüşümlerini uygulayarak G grubu için daha sade bir sunuş bulalım.



$$\mathcal{P}_G = \langle a, b, c, d; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d] \rangle$$

sunuşundan başlayalım.

$$T3) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ac, y=bd \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ac, y=bd, x^6, y^{36} \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ac, y=bd, x^6, y^{36}, [x,y] \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^4, c^3, d^9, [a,b], [c,d], [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ac, y=bd, x^6, y^{36}, [x,y], a=x^3, c=x^{-2}, b=y^9, d=y^{-8} \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; x=ac, y=bd, x^6, y^{36}, [x,y], a=x^3, c=x^{-2}, b=y^9, d=y^{-8} \rangle$$

$$T4) \rightarrow \langle x, y; x=x^3 x^{-2}, y=y^9 y^{-8}, x^6, y^{36}, [x,y] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^6, y^{36}, [x,y] \rangle$$

Böylece

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - |x| + |s| = 1 - 2 + 3 = 2$$

bulunur. Buradan da

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliği yazılır. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \square

2.3.6 Örnek: A ve B grupları, $p < q$, $p_1 < q_1$ ve $(p, p_1)=1$, $(q, q_1)=1$ olmak üzere sırasıyla $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ ve $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}$ olsun. Bu durumda A ve B grupları, 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğun dan $G = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \times (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1})$ grubu da, 2.3.3 Teorem gereği etkilidir.

İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus (H_1(A) \otimes H_1(B)) \\ &= H_2(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \oplus H_2(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}) \oplus (H_1(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \otimes H_1(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1})) \\ &= \mathbb{Z}_{(p,q)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1,q_1)} \oplus [(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \otimes (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1})] \\ &= \mathbb{Z}_{(p,q)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1,q_1)} \oplus [(\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_{p_1}) \oplus (\mathbb{Z}_p \otimes \mathbb{Z}_{q_1}) \oplus (\mathbb{Z}_q \otimes \mathbb{Z}_{p_1}) \oplus (\mathbb{Z}_q \otimes \mathbb{Z}_{q_1})] \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} &= \mathbb{Z}_{(p,q)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1,q_1)} \oplus (0 \oplus 0 \oplus 0 \oplus 0) \\ &= (\mathbb{Z}_{(p,q)} \times \mathbb{Z}_{(p_1,q_1)}) \\ &\cong \mathbb{Z}_{(p,q)(p_1,q_1)} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + 1 = 2$$

olur.

Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

$G = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \times (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1})$ ve $(p, p_1)=1, (q, q_1)=1$ olduğundan,

$$G = (\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) \times (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{q_1}) \cong \mathbb{Z}_{pp_1} \times \mathbb{Z}_{qq_1}$$

olarak bulunur. Böylece G grubunun sunuşu, 2.3.2 Önerme ile,

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; x^{pp_1}, y^{qq_1}, [x,y] \rangle$$

olur. Buradan

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - |x| + |s| = 1 - 2 + 3 = 2$$

olacağından, sonuç olarak

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliği yazılır. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \square

2.3.7 Örnek: A ve B grupları, $p_i < p_{i+1}, q_i < q_{i+1}, i=1, 2, \dots, n-1$ ve $(p_i, q_i)=1, i=1, 2, \dots, n$ olmak üzere sırasıyla, $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}$ ve $\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_n}$ olsun. Bu durumda A ve B grupları 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğundan,

$$G = (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \times (\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_n})$$

grubu da, 2.3.3 Teorem gereği etkilidir.

Önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun ikinci homoloji grubu $H_2(G)$ 'yi bulmalıyız.

$$H_2(G) = H_2(A) \oplus H_2(B) \oplus (H_1(A) \otimes H_1(B))$$

olduğundan, A ve B gruplarının ikinci homoloji gruplarını bulalım.

$$H_2(A) = H_2(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n})$$



$$\begin{aligned}
&= H_2(\mathbb{Z}_{p_1}) \oplus H_2(\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus [H_1(\mathbb{Z}_{p_1}) \otimes H_1(\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n})] \\
&= 1 \oplus H_2(\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus [\mathbb{Z}_{p_1} \otimes (\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n})] \\
&= H_2(\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus [(\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{p_2}) \oplus (\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{p_3}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{p_n})] \\
&= H_2(\mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)}) \\
&= H_2(\mathbb{Z}_{p_2}) \oplus H_2(\mathbb{Z}_{p_3} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus [\mathbb{Z}_{p_2} \otimes (\mathbb{Z}_{p_3} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n})] \oplus \\
&\quad (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)}) \\
&= 1 \oplus H_2(\mathbb{Z}_{p_3} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \oplus (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \oplus \\
&\quad (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})
\end{aligned}$$

işlemler benzer şekilde tekrarlanarak;

$$\begin{aligned}
H_2(A) &= \mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times \\
&\quad (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
H_2(G) &= [\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times \\
&\quad (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})] \times [\mathbb{Z}_{(q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times \\
&\quad (\mathbb{Z}_{(q_2, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_n)})] \oplus [H_1(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \\
&\quad \mathbb{Z}_{p_n}) \otimes H_1(\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_n})] \\
&= [\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times \\
&\quad \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})] \times [\mathbb{Z}_{(q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(q_2, q_3)} \times \dots \\
&\quad \times \mathbb{Z}_{(q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_n)})] \oplus [(\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \otimes \\
&\quad (\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_n})] \\
&= [\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times \\
&\quad \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})] \times [\mathbb{Z}_{(q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(q_2, q_3)} \times \dots \\
&\quad \times \mathbb{Z}_{(q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_n)})] \oplus [(\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{q_1}) \oplus (\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{q_2}) \oplus \dots \\
&\quad \oplus (\mathbb{Z}_{p_1} \otimes \mathbb{Z}_{q_n})] \oplus \dots \oplus [(\mathbb{Z}_{p_n} \otimes \mathbb{Z}_{q_1}) \oplus (\mathbb{Z}_{p_n} \otimes \mathbb{Z}_{q_2}) \oplus \dots \oplus (\mathbb{Z}_{p_n} \otimes \mathbb{Z}_{q_n})] \\
&= [\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times
\end{aligned}$$

$$\mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)}] \times [\mathbb{Z}_{(q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(q_2, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_n)})] \oplus [0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0] \oplus \dots \oplus [0 \oplus 0 \oplus \dots \oplus 0]$$

$$= [\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2)} \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n)})] \times [\mathbb{Z}_{(q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(q_2, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(q_1, q_n)})]$$

$$\cong \mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n) (q_{n-1}, q_n)} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1}) (q_{n-2}, q_{n-1})} \times \mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n) (q_{n-2}, q_n)} \times \dots \times (\mathbb{Z}_{(p_2, p_3) (q_2, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_2, p_n) (q_2, q_n)}) \times (\mathbb{Z}_{(p_1, p_2) (q_1, q_2)} \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_3) (q_1, q_3)} \times \dots \times \mathbb{Z}_{(p_1, p_n) (q_1, q_n)})$$

olur. Buradan

$$d(H_2(G)) = d(\mathbb{Z}_{(p_{n-1}, p_n) (q_{n-1}, q_n)}) + d(\mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_{n-1}) (q_{n-2}, q_{n-1})}) + d(\mathbb{Z}_{(p_{n-2}, p_n) (q_{n-2}, q_n)})$$

$$+ \dots + [d(\mathbb{Z}_{(p_2, p_3) (q_2, q_3)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(p_2, p_n) (q_2, q_n)})] + [d(\mathbb{Z}_{(p_1, p_2) (q_1, q_2)})$$

$$+ d(\mathbb{Z}_{(p_1, p_3) (q_1, q_3)}) + \dots + d(\mathbb{Z}_{(p_1, p_n) (q_1, q_n)})]$$

$$= 1 + 2 + 3 + \dots + (n-2) + (n-1)$$

$$= \frac{(n-1)n}{2}$$

olacağından,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

bulunur.

Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

$$G = (\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n}) \times (\mathbb{Z}_{q_1} \times \mathbb{Z}_{q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{q_n})$$

$$\cong \mathbb{Z}_{p_1 q_1} \times \mathbb{Z}_{p_2 q_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{p_n q_n}$$

dir. Böylece 2.3.1 Alt Bölümden G grubunun sunuşu da

$$\mathcal{P}_G = \langle a_1, a_2, \dots, a_n; a_1^{p_1 q_1}, a_2^{p_2 q_2}, \dots, a_n^{p_n q_n}, [a_i, a_j] (i=1, 2, \dots, n-1, j=i+1, \dots, n) \rangle$$

olur. Buradan

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - |x| + |s|$$

$$= 1 - n + n + (n-1) + (n-2) + \dots + 2 + 1$$

$$= 1 + \frac{(n-1)n}{2}$$

olacağından, sonuç olarak

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliği yazılır. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir.□

2.3.8 Örnek: A ile B birer metacyclic grup olmak üzere

$$\mathcal{P}_A = \langle x, y; x^4, y^2, y^{-1}xy = x^{-1} \rangle$$

$((-1)^2 = 1 \equiv 1 \pmod{4}, -1 \cdot 0 = 0)$ ve

$$\mathcal{P}_B = \langle z, t; z^6, t^2, t^{-1}zt = z^5 \rangle$$

$(5^2 = 25 \equiv 1 \pmod{6}, 2 \cdot 0 = 0)$ sunuşları ile tanımlansın. Bu durumda G grubunun

(2.7) ile verilen \mathcal{P}_G sunuşu aşağıdaki gibi olur.

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y, z, t; x^4, y^2, y^{-1}xy = x^{-1}, z^6, t^2, t^{-1}zt = z^5, [x,z], [x,t], [y,z], [y,t] \rangle$$

Böylece A ve B gruplarının her ikisi de [4], [16] ve [42]'ye göre etkili olduğundan, 2.3.3 Teoremin bir uygulaması olarak \mathcal{P}_G sunuşu da etkilidir.□

2.4 Serbest Çarpım Grubu

Bu bölümde tanımlanan bilgiler standarttır ve [33], [41] gibi kaynaklarda bulunabilir.

G ve H gibi iki grup verilsin. $a_i \in G$ (yada $\in H$), $i=1, 2, \dots, n$, $n \geq 1$ olmak üzere,

$$a_1 a_2 \dots a_n \tag{2.8}$$

biçimindeki ifadeye G ve H üzerinde bir **kelime** denir.

i) $n = 0$ ise bu kelimeye *boş kelime* denir ve 1 ile gösterilir.

ii) (2.8) ifadesi a_1, a_2, \dots, a_n elemanlarının sonlu bir dizisidir.

iii) (2.8) ile verilen kelimenin tersi $a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ kelimesidir. Burada $a_i \in G$ (yada $\in H$) ise a_i^{-1} elemanı, a_i elemanının G (yada H) grubu içindeki tersidir. Böylece $a_1 a_2 \dots a_n$ kelimesini U ile gösterirsek $a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ kelimesini de U^{-1} ile gösteririz.

Biz daima G ve H gruplarının birbirinden farklı olduğunu kabul edeceğiz.



Kelimeler Üzerinde İşlemler:

(I) Bir kelimenin a_i terimlerinden bazıları G yada H grubunun birim elemanı iseler bu kelime üzerinden bu a_i terimlerini sileriz.

(I)⁻¹ Yukardaki işlemin tersini yapabiliriz. Yani, a_i terimi G yada H grubunun birim elemanı olmak üzere bu a_i terimini bir kelimeye ekleyebiliriz.

(II) Bir kelime içindeki a_i, a_{i+1} ardışık terimlerinin her ikisi de aynı G (yada H) grubu içinde ise bu iki terimi G (yada H) grubu içindeki çarpımları olan tek bir eleman ile değiştirebiliriz.

(II)⁻¹ Yukardaki (II) işleminin tersini yapabiliriz.

2.4.1 Tanım: G ve H grupları üzerinde iki kelime U ve U' olsun. Bu iki kelimedenden biri, diğerine yukarıdaki işlemlerin sonlu sayıda uygulanmasından elde ediliyorsa bu iki kelimeye **denk kelimeler** denir ve bu denklik $U \sim U'$ ile gösterilir.

Not: U ve U' kelimeleri arasında tanımlanan \sim bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

2.4.2 Tanım: U ve V, G ve H grupları üzerinde birer kelime olmak üzere, U kelimesinin denklik sınıfı [U] ile gösterilir. Bu denklik sınıfları üzerinde çarpma işlemi

$$[U][V] = [UV] \quad (2.9)$$

ile tanımlanır.

2.4.3 Teorem: Denklik sınıfları üzerinde, (2.9) ile tanımlanan çarpma işlemi iyi tanımlıdır.

İspat: U, U', V ve V', G ve H grupları üzerinde birer kelime olmak üzere,

$$[U] = [U'] \text{ ve } [V] = [V']$$

olsun.

Buradan $U \sim U'$ ve $V \sim V'$ olduğu görülür. Böylece, U_{i+1}, U_i 'den (I), (I)⁻¹, (II), (II)⁻¹ işlemlerinden biriyle elde edilmek üzere,

$$U = U_0 \sim U_1 \sim \dots \sim U_n = U'$$



olacak şekilde U_0, U_1, \dots, U_n kelimeler zinciri ve V_{i+1}, V_i 'den (I), (I)⁻¹, (II), (II)⁻¹ işlemlerinden biriyle elde edilmek üzere,

$$V = V_0 \sim V_1 \sim \dots \sim V_m = V'$$

olacak şekilde V_0, V_1, \dots, V_m kelimeler zinciri vardır. Burada,

$$UV = U_0 V, U_1 V, \dots, U_n V = U' V$$

UV 'den $U' V$ 'ye bir kelimeler zinciridir ve

$$U' V = U' V_0, U' V_1, \dots, U' V_m = U' V'$$

de $U' V$ 'den $U' V'$ 'ye bir kelime zinciridir. Böylece,

$$UV = U_0 V \sim U_1 V \sim \dots \sim U_n V = U' V \text{ ve } U' V = U' V_0 \sim U' V_1 \sim \dots \sim U' V_m = U' V'$$

olur. Buradan da $UV \sim U' V$ ve $U' V \sim U' V'$ bulunur. Denklik bağıntısı geçişli olduğundan $UV \sim U' V'$ olur. Bu da bize

$$[UV] = [U' V']$$

yani,

$$[U][V] = [U'][V']$$

olduğunu verir. Böylece (2.9) ile tanımlanan çarpma işlemi iyi tanımlıdır. ◊

2.4.4 Teorem: Denklik sınıflarının kümesi, (2.9) ile tanımlanan işlem altında, birim elemanı $[1]$ ve herhangi bir $[U]$ elemanının tersi $[U^{-1}]$ olan bir grup olur.

İspat: U, V ve W, G ve H grupları üzerinde birer kelime olsunlar.

(i) Denklik sınıflarının kümesinden $[U]$ ve $[V]$ elemanlarını alalım.

$$U = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in G \text{ ya da } H, i=1, 2, \dots, n, n \geq 1$$

ve

$$V = a'_1 a'_2 \dots a'_m, a'_i \in G \text{ ya da } H, i=1, 2, \dots, m, m \geq 1$$

olsun. Böylece

$$UV = a_1 a_2 \dots a_n a'_1 a'_2 \dots a'_m$$

olur. Buradan UV 'nin G ve H grupları üzerinde bir kelime olduğu görülür. UV kelimesini içine alan denklik sınıfı $[UV]$ olduğundan $[U][V]$ çarpımı denklik sınıflarının kümesi içindedir. Böylece işlem kapalıdır.

(ii) Çarpma işleminin birleşme özelliği vardır.

$$([U][V])[W] = [UV][W] = [(UV)W] = [U(VW)] = [U][VW]$$



$$= [U] ([V] [W])$$

(iii) Birim eleman 1 kelimesinin denklik sınıfıdır.

$$[1] [U] = [1 U] = [U]$$

ve

$$[U] [1] = [U 1] = [U]$$

olduğundan, birim eleman [1] dir.

(iv) Herhangi bir [U] elemanının tersi $[U^{-1}]$ elemanıdır.

Bunun için

$$[U^{-1}] [U] = [1] = [U] [U^{-1}]$$

olduğunu göstermemiz gerekir.

$$[U^{-1}] [U] = [U^{-1} U]$$

olduğundan

$$U^{-1} U \sim 1$$

olduğunu göstermeliyiz. Böylece

$$U = a_1 a_2 \dots a_n, a_i \in G \text{ ya da } \in H, i=1, 2, \dots, n, n \geq 1$$

alalım. Tanımdan $U^{-1} = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1}$ olur. Böylece,

$$U^{-1} U = a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_2 \dots a_n$$

bulunur. Buradan da

$$\begin{aligned} U^{-1} U &= a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_1^{-1} a_1 a_2 \dots a_n \sim a_n^{-1} \dots a_2^{-1} 1 a_2 \dots a_n \sim a_n^{-1} \dots a_2^{-1} a_2 \dots a_n \\ &\sim \dots \sim a_n^{-1} a_n \sim 1 \end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu da bize

$$[U^{-1}] [U] = [1]$$

eşitliğini verir. Benzer olarak $[U] [U^{-1}] = [1]$ eşitliği de bulunur. Böylece (i), (ii), (iii) ve (iv)'den, denklik sınıflarının kümesi, (2.9) ile tanımlanan işlem altında bir grup oluşturur. ◊

2.4.5 Tanım: 2.4.4 Teorem ile tanımlanan gruba G ve H gruplarının serbest çarpım grubu denir ve $G * H$ ile gösterilir.



2.4.1 Serbest Çarpım Grubunun Sunuşu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu [25]'de aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.4.6 Teorem: A ve B grupları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle x; s \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle y; t \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu durumda A ve B gruplarının serbest çarpımı olan $G = A*B$ grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; s, t \rangle \quad (2.10)$$

şeklinde tanımlanır.

2.4.2 Serbest Çarpım Grubunun İkinci Homoloji Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere, bu iki grubun serbest çarpım grubu olan $G = A*B$ 'nin ikinci homoloji grubu $H_2(G)$ [27]'de

$$H_2(G) = H_2(A) \times H_2(B)$$

formülü ile hesaplanmıştır.

2.4.3 Serbest Çarpım Grubunun Etkililiği

A ve B herhangi iki sonlu grup olmak üzere, bu iki grubun serbest çarpım grubu olan G grubunun etkililiği için 2.4.1 ve 2.4.2 Alt Bölümlerini kullanarak aşağıdaki teoremi elde ederiz.

2.4.7 Teorem: A ve B herhangi iki sonlu grup ve G, (2.10) sunuşuyla verilen A ve B gruplarının serbest çarpım grubu olsun. G grubunun (2.10) ile verilen sunuşunun etkili olması için gerekli ve yeterli koşul A ve B gruplarının \mathcal{P}_A ve \mathcal{P}_B sunuşlarının her ikisinin de etkili olmasıdır.

İspat: A ve B herhangi iki sonlu grup olmak üzere sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_A = \langle x; s \rangle \text{ ve } \mathcal{P}_B = \langle y; t \rangle$$

olsun. Böylece G grubunun (2.10) da verilen sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; s, t \rangle$$

olduğundan,

$$\chi(\mathcal{P}_G) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t|$$



olur. Ayrıca G grubu sonlu bir grup olduğundan,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$$

bulunur.

Şimdi \mathcal{P}_G sunuşu etkili, yani

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

olsun. Böylece bu eşitlik

$$1 + d(H_2(G)) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t|$$

halini alır.

Ayrıca G grubunun ikinci homoloji grubu $H_2(G)$ 'yi hesaplayalım. G grubu, A ve B gruplarının serbest çarpım grubu olduğundan, G grubunun ikinci homoloji grubu 2.4.2 Alt Bölümden

$$H_2(G) = H_2(A) \times H_2(B)$$

formülüyle hesaplanır. Buradan da, homoloji grupları değişmeli olduğundan, 1.2.14 Önerme gereği

$$d(H_2(G)) = d(H_2(A)) + d(H_2(B))$$

olarak bulunur. Böylece 2.3.3 Teoremin ispatında yapılan işlemlerin benzerleri yapılarak,

$$\delta(A) + \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_A) + \chi(\mathcal{P}_B)$$

elde edilir. $\delta(A) \leq \chi(\mathcal{P}_A)$ ve $\delta(B) \leq \chi(\mathcal{P}_B)$ eşitsizlikleri var olduğundan, yukarıdaki eşitliğin sağlanması için

$$\delta(A) = \chi(\mathcal{P}_A) \text{ ve } \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_B)$$

olması gerekmektedir. Bu son iki eşitlik de bize A ve B gruplarının sunuşlarının etkili olduğunu verir.

Şimdi de \mathcal{P}_A ve \mathcal{P}_B sunuşlarının her ikisi de etkili, yani

$$\delta(A) = \chi(\mathcal{P}_A) \text{ ve } \delta(B) = \chi(\mathcal{P}_B)$$

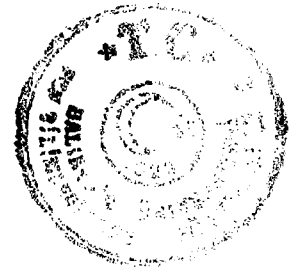
olduğunu kabul edelim. 2.3.3 Teoremin ispatının bu kısmında yapılanların aynı yapılarak,

$$d(H_2(G)) = |s| - |x| + |t| - |y|$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliği

$$1 + d(H_2(G)) = 1 - |x| - |y| + |s| + |t|$$

olarak yazabiliriz. Bu da bize



$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliğini, yani G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \diamond

2.4.8 Örnek: n ve m sayıları birer pozitif tamsayı olmak üzere $A = \mathbb{Z}_n$ ve $B = \mathbb{Z}_m$ olsun. Bu durumda A ve B grupları, 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğundan, $G = \mathbb{Z}_n * \mathbb{Z}_m$ grubunun \mathcal{P}_G sunuşu da, 2.4.7 Teorem gereği etkilidir.

\mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu göstermek için ilk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım.

Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım. Burada

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(\mathbb{Z}_n) \times H_2(\mathbb{Z}_m) \\ &= 1 \times 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G))$$

olduğundan,

$$\delta(G) = 1 + 0 = 1$$

olur.

\mathbb{Z}_n ve \mathbb{Z}_m gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\langle x; x^n \rangle \text{ ve } \langle y; y^m \rangle$$

olsun. Bu durumda, 2.4.1 Alt Bölümden, G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; x^n, y^m \rangle$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{P}_G) &= 1 - 2 + 2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliği elde edilir. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \square

2.4.9 Örnek: $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ve $B = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ olsun. Bu durumda A ve B grupları, 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğundan, $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) * (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9)$ grubunun etkili bir sunuşunun var olup olmadığını araştıralım.



İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(A) \times H_2(B) \\ &= H_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4) \times H_2(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9) \\ &= \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \\ &\cong \mathbb{Z}_6 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + 1 = 2$$

olur.

Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ ve $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\langle a, b; a^2, b^4, [a, b] \rangle, \langle c, d; c^3, d^9, [c, d] \rangle$$

olsun. Bu durumda 2.4.1 Alt Bölümden G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle a, b, c, d; a^2, b^4, c^3, d^9, [a, b], [c, d] \rangle$$

olarak bulunur. Buradan \mathcal{P}_G sunuşuna Tietze dönüşümleri uyguladığımızda G grubu için \mathcal{P}_G sunuşunun daha sade (daha az üreteç veya bağıntı sayılı) bir sunuş haline gelmediği görülebilir. Bu ise sonuçta bize

$$\delta(G) \neq \chi(\mathcal{P}_G)$$

vereceğinden, \mathcal{P}_G sunuşu G grubu için etkili değildir.

Ancak \mathcal{P}_G sunuşuna, örneğin Nielsen Dönüşümleri [25] veya başka bir metod uygulayarak, etkili bir sunuş haline getirilebilir. (Biz tez çalışmamız süresince bu konuda olumlu bir ilerleme kaydedemedik.)□

2.4.9' Örnek: $A = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve $B = \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ olsun. Bu durumda A ve B grupları 2.3.4 Örnekten dolayı, etkili olduğundan, $G = (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) * (\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9)$ grubunun \mathcal{P}_G sunuşu da, 2.4.7 Teorem gereği etkilidir.

İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(A) \times H_2(B) \\ &= H_2(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3) \times H_2(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9) \\ &= 1 \times \mathbb{Z}_3 \end{aligned}$$



$$= \mathbb{Z}_3$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + 1 = 2$$

olur.

Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3$ ve $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_9$ gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\mathcal{P}_A = \langle a, b; a^2, b^3, [a,b] \rangle, \quad \mathcal{P}_B = \langle c, d; c^3, d^9, [c,d] \rangle$$

olsun. Bu durumda 2.4.1 Alt Bölümden G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle a, b, c, d; a^2, b^3, c^3, d^9, [a,b], [c,d] \rangle$$

olur. Ama $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 \cong \mathbb{Z}_6$ izomorfizması kullanılarak, yukarıdaki \mathcal{P}_G sunuşu

$$\overline{\mathcal{P}}_G = \langle x, c, d; x^6, c^3, d^9, [c,d] \rangle$$

haline gelir. Çünkü \mathcal{P}_A sunuşu, izomorfizmaya bağlı olarak, Tietze dönüşümleri ile

$$\overline{\mathcal{P}}_A = \langle x; x^6 \rangle$$

formundadır. ($\overline{\mathcal{P}}_A$ sunuşu, 2.3.4 Örnekten dolayı etkilidir.) Dolayısıyla

$$\chi(\overline{\mathcal{P}}_G) = 2$$

olacağından, aranan bulunmuş olur. \square

2.4.10 Örnek: $A = \mathbb{Z}_2$ ve $B = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ ($m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$) olsun. Bu durumda A grubu devirli olduğundan ve de B grubu 2.3.4 Örnekten dolayı etkili olduğundan, $G = \mathbb{Z}_2 * (\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m)$ grubunun \mathcal{P}_G sunuşu da, 2.4.7 Teorem gereği, etkilidir.

İlk önce $\delta(G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için $H_2(G)$ 'yi bulalım.

$$\begin{aligned} H_2(G) &= H_2(A) \times H_2(B) \\ &= H_2(\mathbb{Z}_2) \times H_2(\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m) \\ &= 1 \times \mathbb{Z}_m \\ &= \mathbb{Z}_m \end{aligned}$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(G) = 1 + d(H_2(G)) = 1 + 1 = 2$$

olur.



Şimdi de $\chi(\mathcal{P}_G)$ 'yi hesaplayalım. Bunun için G grubunun sunuşunu bulalım.

\mathbb{Z}_2 ve $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$ gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\mathcal{P}_A = \langle a ; a^2 \rangle, \quad \mathcal{P}_B = \langle b, c ; b^m, c^m, [b, c] \rangle$$

olsun. Bu durumda 2.4.1 Alt Bölümden G grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_G = \langle a, b, c ; a^2, b^m, c^m, [b, c] \rangle$$

olduğundan,

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{P}_G) &= 1 - 3 + 4 \\ &= 2 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$\delta(G) = \chi(\mathcal{P}_G)$$

eşitliği elde edilir. Bu da G grubunun \mathcal{P}_G sunuşunun etkili olduğunu verir. \square

2.4.11 Not: 2.4.10 Örnekte oluşturduğumuz G grubu, [18]'e göre $S(m, 2)$ ($m \in \mathbb{Z}^+ - \{0\}$) grubuna izomorfdur. Burada $S(m, 2)$ grubu, *genelleştirilmiş simetrik grubu* gösterir.



3. GENEL GRAFİK ÇARPIMI

3.1 Giriş

Giriş başlığı altında tanımlanan bu bölümdeki aşağıdaki bazı bilgiler standarttır ve [1], [35], [37], [38] gibi kaynaklarda bulunabilir.

Köşe kümesi v ve yönlendirilmiş kenar kümesi e olan basit bir yönlendirilmiş grafik alalım ve bu grafiği Γ ile gösterelim (1.3 Alt Bölüm). Burada her $v \in v$ için $\mathcal{P}_v = \langle x_v ; s_v \rangle$ sunuşuyla verilen gruba *köşe grubu* denir ve G_v ile gösterilir. \mathcal{P}_v sunuşu içindeki s_v kümesinin elemanları, x_v üzerinde devirsel indirgenmiş kelimeler olup,

$$\iota(e)=u \text{ ve } \tau(e)=v \quad (\forall e \in e)$$

özelliğine sahiptir (Şekil 1.5).

Her biri en az bir x_v -sembolü ($v \in v$) ve en az bir x_u -sembolü ($u \in v$) içeren $x_v \cup x_u$ üzerindeki bazı devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan kümeyi r_e ($e \in e$) ile gösterelim. Bu durumda, $\mathcal{P}_e = \langle x_v, x_u ; s_v, s_u, r_e \rangle$ sunuşu ile tanımlanan gruba *kenar grubu* denir ve G_e ile gösterilir. Ayrıca

$$x = \bigcup_{v \in v} x_v, \quad s = \bigcup_{v \in v} s_v, \quad r = \bigcup_{e \in e} r_e$$

eşitliklerini tanımlandığında,

$$\mathcal{P} = \langle x ; s, r \rangle \quad (3.1)$$

sunuşu ile verilen gruba G_v ($v \in v$) gruplarının **genel grafik çarpımı** denir ve $G(\mathcal{P})$ ile gösterilir.

Bu genel grafik çarpım grubu için, aşağıdaki tanım olarak verilen özel durumlar olabilir.

3.1.1 Tanım: (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşunu alalım.

1) Her bir r_e ($e \in e$) bağıntısı tüm $[a,b]=aba^{-1}b^{-1}$ ($a \in x_{\iota(e)}$, $b \in x_{\tau(e)}$) kelimelerinden oluşuyorsa, $G(\mathcal{P})$ 'ye G_v ($v \in v$) gruplarının bir *grafik çarpımı* denir.

2) Tüm G_v ($v \in v$) grupları sonsuz devirli (*serbest değişmeli-free abelian*) iseler, $G(\mathcal{P})$ 'ye bir *grafik grup* denir.

3) Eğer e kümesi boş ise $G(\mathcal{P})$ 'ye, G_v ($v \in v$) gruplarının *serbest çarpım grubu* denir.



4) Eğer Γ grafiği *tam* (1.3 Bölüm) ise, $G(\mathcal{P})$ 'ye $G_v (v \in \mathcal{V})$ gruplarının *direkt çarpım grubu* denir.

3.2 $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin Üreteç Kümesi

$G(\mathcal{P})$ bir genel grafik çarpım grubu olsun ve (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşuyla tanımlansın. Yukarıdaki bölümde \mathcal{P}_e sunuşuyla tanımlanan G_e kenar gruplarının $\pi_2(\mathcal{P}_e)$ modüllerinin üreteç resimlerinin bir kümesi $X_e (e \in \mathcal{E})$ olsun.

Pride [37]'deki çalışmasında aşağıdaki soruyu dikkate almış ve yaklaşık bir cevap vermiştir.

$\pi_2(\mathcal{P})$, ne zaman $\bigcup_{e \in \mathcal{E}} X_e$ ile üretilir?

3.2.1 Tanım[1]: Γ grafiğinde $\iota(e)=u, \tau(e)=v$ olan bir e kenarını alalım. Eğer $G_u * G_v$ serbest çarpımının,

$$G_u * G_v \rightarrow G_e$$

doğal epimorfizmasının çekirdeğine düşen, $2k$ 'dan ($k \in \mathbb{Z}^+$) küçük veya eşit uzunlukta birimden farklı bir elemanı yoksa, \mathcal{P}_e sunuşu W_k -özellğine sahiptir, denir.

3.2.2 Teorem[37]: $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin $\bigcup_{e \in \mathcal{E}} X_e$ kümesi ile üretilmesi için gerekli

koşul aşağıdaki özelliklerden herhangi birisinin sağlanmasıdır.

- 1) Her \mathcal{P}_e, W_1 -özellğine sahiptir,
- 2) Γ triangle-free [1] ve her \mathcal{P}_e, W_1 -özellğine sahiptir.

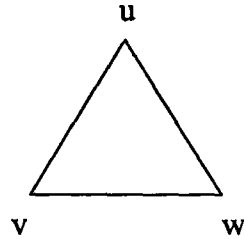
Bu sonucun bazı uygulamaları [39]'da verilmiştir.

Bizim amacımız ise $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin üreteç kümesini, W_k -özellğini kullanmadan tanımlamaktır. Bu tanımlama aşağıdaki materyal ile ve bir sonraki bölümde verilmiştir.

Γ grafiği içinde Şekil 3.1'deki gibi aldığımız $\{u, v, w\} (u, v, w \in \mathcal{V})$ üçgeni için her bir köşe grubunu sırasıyla $\mathcal{P}_v = \langle x_v ; s_v \rangle, \mathcal{P}_u = \langle x_u ; s_u \rangle, \mathcal{P}_w = \langle x_w ; s_w \rangle$ sunuşlarıyla tanımlayalım (Bu tür bir tanımlama [1]'deki çalışmada yapılmıştır.).

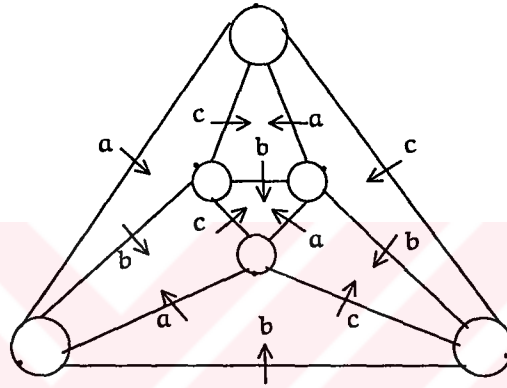


Ayrıca $a \in x_v$, $b \in x_u$, $c \in x_w$ olsun.



Şekil 3.1

Bu durumda, aşağıdaki gibi bir küresel resim çizilebilir.



Şekil 3.2

Aldığımız bu $\{u,v,w\}$ ($u,v,w \in V$) üçgeni için Şekil 3.2 ile belirtilen küresel resimlerden oluşan bir küme bulunabilir. Böylece, Γ içindeki her $\{u,v,w\}$ ($u,v,w \in V$) üçgeni için, küresel resimlerden oluşan kümelerin bir birleşimi elde edilebilir [1, Chapter 3.1].

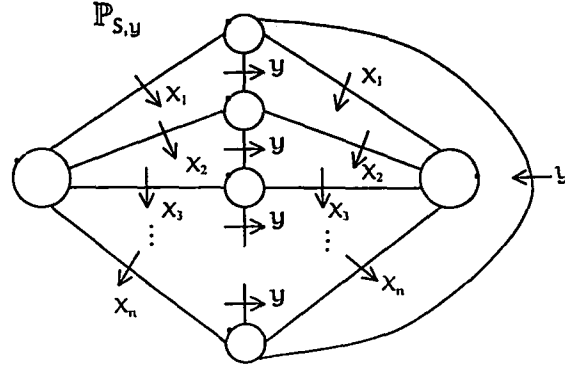
3.2.3 Tanım: Γ grafiğinden alınan tüm $\{u,v,w\}$ üçgenleri üzerindeki küresel resimlerin kümelerinin birleşimine yardımcı Z-üreteç kümesi denir ve Z ile gösterilir.

3.2.1 Diğer Yardımcı Üreteç Kümeleri

Γ grafiğinden Şekil 1.5'deki gibi alınan her $e \in E$ için, G_v ve G_u köşe grupları sırasıyla $\langle x_v ; s_v \rangle$ ve $\langle x_u ; s_u \rangle$ sunuşlarıyla verilsin.

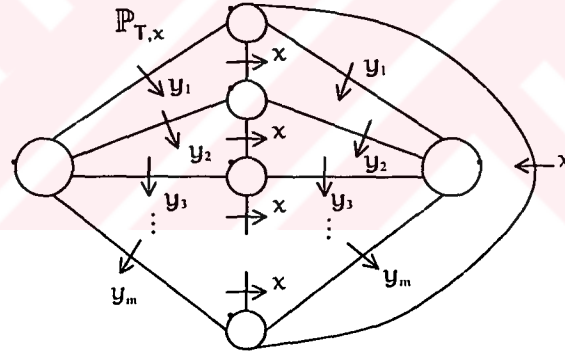
i) s_u bağıntı kümesinden $S = x_1 \dots x_n$ ($x_i \in x_u$, $i = 1, 2, \dots, n$) bağıntısını alalım.

Burada, [1]'de gösterildiği gibi, her $y \in x$, için (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşu üzerinde, Şekil 3.3 ile verilen bir $\mathbb{P}_{S,y}$ küresel resmi elde ederiz.



Şekil 3.3

ii) s , bağıntı kümesinden $T=y_1 \dots y_m$ ($y_i \in x_v$, $i=1, 2, \dots, m$) bağıntısını alalım. Buradan, yine [1]'de gösterildiği gibi, her $x \in x_u$ için (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşu üzerinde, Şekil 3.4 ile verilen bir $\mathbb{P}_{T,x}$ küresel resmi elde ederiz.



Şekil 3.4

Yukarıda tanımlandığı gibi s_u ve s_v bağıntı kümeleri üzerinde birden fazla benzer şekilde kelime tanımlayabileceğimizden, Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile verilen herbir küresel resimin bir kümesini tanımlayabiliriz. Diğer bir deyişle,

$$\{\mathbb{P}_{S,y} : S \in s_u, y \in x_v\}$$

kümesini tanımlayıp, buna $Y_{e,u}$ diyelim. Benzer olarak,

$$\{\mathbb{P}_{T,x} : T \in s_v, x \in x_u\}$$

kümesini de $Y_{e,v}$ olarak adlandıralım. Bu durumda,

$$Y_{e,u} \cup Y_{e,v}$$

birleşimi de, küresel resimler üzerinde yeni bir küme oluşturur. Bu kümeyi de Y_e ile gösterelim. Bu Y_e kümesini Γ üzerindeki her bir $e \in \Gamma$ için oluşturabiliriz. Bu oluşturduğumuz her bir Y_e kümesinin birleşimi olan

$$\bigcup_{e \in \Gamma} Y_e$$

kümesi, küresel resimler üzerinde yeni bir küme oluşturur. Bu son kümeyi de Y ile gösterelim.

\mathcal{P}_v sunuşu ile verilen G_v köşe grubunun ikinci homotopi modülü olan $\pi_2(\mathcal{P}_v)$ 'yi üreten küresel resimlerin bir kolleksiyonuna X_v diyelim ve her bir $v \in V$ için elde edilen küresel resimlerin birleşimini de X ile gösterelim. Diğer bir deyişle

$$X = \bigcup_{v \in V} X_v$$

olsun. Ayrıca (3.1)'de tanımlanan \mathcal{P} sunuşunun bir

$$\mathcal{P}' = \langle x; r \rangle$$

alt sunuşunu alalım. Buna göre,

3.2.4 Önteorem: \mathcal{P} sunuşu üzerinde tanımlanan her bir küresel resim, \mathcal{P}' üzerinde $(\text{rel } X \cup Y)$ 'ye göre bir küresel resme denktir.

3.2.5 Önteorem: \mathcal{P}' üzerindeki her bir küresel resim, $(\text{rel } Z)$ 'ye göre boş resme denktir.

3.2.4 Önteoremin ispatında yapılan şudur: (3.1) ile verilen \mathcal{P} sunuşu üzerinde tanımlanan herhangi bir küresel resimi alarak, bu resme $(\text{rel } X \cup Y)$ 'ye göre denk olan ve içinde S -diskleri barındırmayan yeni bir küresel resim bulup, böylece bu elde edilen yeni küresel resimin \mathcal{P}' üzerinde yeni bir küresel resim olacağını göstermektir. 3.2.5 Önteoremde ise, bu elde edilen yeni küresel resmin $(\text{rel } Z)$ 'ye göre boş resme denk olduğunu göstermektir (Bu iki sonucun ispatlarının detayları [1]'de bulunabilir.).

Böylece, [36]'da verilen Theorem 3.6, Corollary 1'nin bir uygulaması olarak, 3.2.4 Önteorem ve 3.2.5 Önteoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.2.6 Teorem: $\pi_2(\mathcal{P})$, $X \cup Y \cup Z$ kümesi ile üretilir.

Buraya kadar, \mathcal{P} sunuşu ile verilen genel grafik çarpımının ikinci homotopi modülü olan $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin üreteç kümelerinin nasıl bulunduğu anlatılmıştır. Şimdi ise, genel grafik çarpım grubunun etkililiğini bulmak için \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluğunu inceleyelim.

3.3 \mathcal{P} 'nin p -Cockcroftluğu

(3.1) sunuşuyla verilen, $G_v (v \in \mathcal{V})$ gruplarının genel grafik çarpımı olan $G(\mathcal{P})$ grubunun \mathcal{P} sunuşunu alalım. \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluğu için 3.2 ve 3.2.1 Alt Bölümlerini kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.3.1 Teorem: \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathcal{P}_v (v \in \mathcal{V})$ sunuşlarının her birinin p -Cockcroft olmasıdır.

İspat: \mathcal{P} sunuşu p -Cockcroft olsun. Bu durumda Z , Y ve X kümelerinde tanımlanan her bir küresel resim içindeki disklerin, bu resimler altında üstel toplamları $\text{mod } p$ 'ye göre *sıfıra* denktir. Bu ise bize, 1.2.9 Tanıma göre, her bir $v \in \mathcal{V}$ için \mathcal{P}_v sunuşlarının p -Cockcroftluğunu verir.

Şimdi de $\mathcal{P}_v (v \in \mathcal{V})$ sunuşlarının her birinin p -Cockcroft olduğunu varsayalım. O halde, 1.2.9 Tanıma göre X kümesi içindeki her bir küresel resim altında $s_v (v \in \mathcal{V})$ disklerinin üstel toplamları $\text{mod } p$ 'ye göre *sıfıra* denktir. Ayrıca Z kümesindeki küresel resimler altında her bir $r_e (e \in \mathcal{E})$ diskinin üstel toplamı *sıfıra* eşit olduğundan (Şekil 3.2'den dolayı), sadece Y kümesindeki küresel resimler altında, bu küresel resimlerde bulunan disklerin üstel toplamlarını kontrol etmemiz gerekmektedir. Ama Y kümesinin tanımı gereği, bu küme içindeki $\mathbb{P}_{S,y}, \mathbb{P}_{T,x}$ ($S \in s_u, T \in s_v, y \in x_u, x \in x_u$) küresel resimleri, $S, T, [y, x_i] (x_i \in x_u, i=1, 2, \dots, n), [x, y_i] (y_i \in x_v, i=1, 2, \dots, m)$ disklerinden oluşmaktadır. Ayrıca kabulümüz gereğince \mathcal{P}_v 'lerin her biri p -Cockcroft olduğundan,

$$\forall x_i \in x_u, i=1, 2, \dots, n \text{ için } \exp_{x_i}(S) \equiv 0 \pmod{p}$$

ve

$$\forall y_i \in x_v, i=1, 2, \dots, m \text{ için } \exp_{y_i}(T) \equiv 0 \pmod{p}$$



olur. Böylece $S, T, [y, x_i]$ ve $[x, y_i]$ disklerinin $\mathbb{P}_{S,y}, \mathbb{P}_{T,x}$ küresel resimleri altındaki üstel toplamları,

$$\forall x_i \in \mathbf{x}, i=1, 2, \dots, n \text{ için } \exp_{[y, x_i]}(\mathbb{P}_{S,y}) = \exp_{x_i}(S) \equiv 0 \pmod{p}$$

ve

$$\forall y_i \in \mathbf{x}, i=1, 2, \dots, m \text{ için } \exp_{[x, y_i]}(\mathbb{P}_{T,x}) = \exp_{y_i}(T) \equiv 0 \pmod{p}$$

olur. Buna ek olarak $\mathbb{P}_{S,y}, \mathbb{P}_{T,x}$ küresel resimleri içindeki S ve T diskleri için

$$\exp_S(\mathbb{P}_{S,y}) = 0 = \exp_T(\mathbb{P}_{T,x})$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla Y kümesinden alacağımız her küresel resim için yukarıda yapılan işlemler geçerli olacağından, bu istenilen sonucu, yani \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluğunu verecektir. \diamond

3.3.2 Örnek: 3.1 Bölümdeki gibi tanımlanan bir Γ grafiği alalım. Bu grafikten aldığımız ve $\iota(e_1)=v_1$ ve $\tau(e_1)=v_2$ ($v_1, v_2 \in \mathbf{v}$) olan bir e_1 kenarı için G_{v_1}, G_{v_2} köşe gruplarının sunuşları sırasıyla,

$$\mathcal{P}_{v_1} = \langle a, b ; a^3, ab a^{-4} b^{-1} \rangle, \mathcal{P}_{v_2} = \langle c, d ; c^6, cd c^{-7} d^{-1} \rangle$$

ve Γ grafiğindeki diğer köşe gruplarının sunuşları da

$$\mathcal{P}_v = \langle \mathbf{x}_v ; s_v \rangle \quad (v \in \mathbf{v}, v \neq v_1, v_2)$$

olsun. Bu durumda G_{e_1} kenar grubunun 3.1 Bölümde tanımlanan sunuşu,

$$\mathcal{P}_{e_1} = \langle a, b, c, d ; a^3, ab a^{-4} b^{-1}, c^6, cd c^{-7} d^{-1}, r_{e_1} \rangle$$

ve diğer kenar gruplarının sunuşları ise

$$\mathcal{P}_e = \langle \mathbf{x}_v, \mathbf{x}_u ; s_v, s_u, r_e \rangle \quad (e \in \mathbf{e}, e \neq e_1)$$

olarak bulunur. O halde $v \in \mathbf{v}$ ($v \neq v_1$ ve $v \neq v_2$) ve $\mathbf{x}, \mathbf{s}, \mathbf{r}$ kümeleride 3.1 Bölümdeki gibi olmak üzere, $G(\mathcal{P})$ genel grafik çarpım grubunun sunuşu

$$\mathcal{P} = \langle a, b, c, d, \mathbf{x} ; a^3, ab a^{-4} b^{-1}, c^6, cd c^{-7} d^{-1}, \mathbf{s}, \mathbf{r} \rangle$$

ile verilir.

Ayrıca, [1] ile gösterildiği gibi, \mathcal{P}_{v_1} ve \mathcal{P}_{v_2} sunuşları 3-Cockcroft olduğundan, 3.3.1 Teorem gereğince \mathcal{P} sunuşunun da 3-Cockcroft olması gerektiğini gösterelim. Bunun için \mathcal{P} sunuşunun 3.2, 3.2.1 Alt Bölümlerinde



tanımlanan ve $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteç kümeleri olan, Z , Y ve X kümelerini oluşturalım:

Z kümesinin tanımından, bu küme içinde bulunan bütün küresel resimlerin içerdikleri disklerin üstel toplamlarının sıfır olduğunu görmek kolaydır.

$\pi_2(\mathcal{P}_{v_1})$ ve $\pi_2(\mathcal{P}_{v_2})$ ikinci homotopi modüllerinin üreteç kümeleri sırasıyla X_{v_1} ve X_{v_2} olsun. \mathcal{P}_{v_1} ve \mathcal{P}_{v_2} sunuşları 3-Cockcroft olduklarından,

i) X_{v_1} ve X_{v_2} kümesi içindeki her bir küresel resim altında a^3 , $ab a^{-4} b^{-1}$, c^6 , $cd c^{-7} d^{-1}$ disklerinin üstel toplamları *mod 3'e göre sıfıra* denktir.

ii) $\exp_a(a^3)=3$, $\exp_a(ab a^{-4} b^{-1})=-3$, $\exp_b(a^3)=\exp_b(ab a^{-4} b^{-1})=0$
 $\exp_c(c^6)=6$, $\exp_c(cd c^{-7} d^{-1})=-6$, $\exp_d(c^6)=0$, $\exp_d(cd c^{-7} d^{-1})=1 - 1=0$ olur.

O halde $X = X_{v_1} \cup X_{v_2} \cup \left(\bigcup_{\substack{v \in V \\ v \neq v_1, v_2}} X_v \right)$ olduğundan ve i)'den dolayı bu X

kümesinin içerdği tüm küresel resimlerin içinde bulunan disklerin üstel toplamlarının *mod 3'e göre sıfıra* denk olması için, \mathcal{P}_v ($v \in V$, $v \neq v_1, v_2$) sunuşlarının da \mathcal{P}_{v_1} ve \mathcal{P}_{v_2} sunuşları gibi 3-Cockcroft olması gerekmektedir.

Buna ek olarak $e_1 \in e$ için $R = a^3$, $S = ab a^{-4} b^{-1}$, $T = c^6$, $M = cd c^{-7} d^{-1}$ olmak üzere 3.2.1 Alt Bölümde Şekil 3.3 ve Şekil 3.4 ile gösterilen küresel resimlerden oluşan,

$$Y_{e_1, v_1} = \{ \mathbb{P}_{R, c}, \mathbb{P}_{R, d}, \mathbb{P}_{S, c}, \mathbb{P}_{S, d} \}$$

ve

$$Y_{e_1, v_2} = \{ \mathbb{P}_{T, a}, \mathbb{P}_{T, b}, \mathbb{P}_{M, a}, \mathbb{P}_{M, b} \}$$

kümelerini elde ederiz. Bu iki kümenin birleşimi de Y_{e_1} kümesini oluşturur. Y_{e_1} kümesinde bulunan küresel resimlerin içerdği disklerin üstel toplamları ii)'den ve 3.3.1 Teoremin ispatından dolayı *mod 3'e göre sıfıra* denk olur. Böylece

$Y = Y_{e_1} \cup \left(\bigcup_{\substack{e \in E \\ e \neq e_1}} Y_e \right)$ olduğundan Y kümesinde bulunan tüm küresel resimlerin



içerdiği disklerin üstel toplamların da $\text{mod } 3$ 'e göre *sıfıra* denk olması için, \mathcal{P}_v ($v \in V$, $v \neq v_1, v_2$) sunuşlarının \mathcal{P}_{v_1} ve \mathcal{P}_{v_2} sunuşları gibi 3-Cockcroft olması gerekmektedir.

Tüm bunlardan dolayı \mathcal{P} sunuşunun 3-Cockcroft olması için \mathcal{P}_v ($v \in V$, $v \neq v_1, v_2$) sunuşlarıyla verilen diğer G_v köşe gruplarının da 3-Cockcroft olması gerekir. \square

Şimdi ise G_{v_1}, G_{v_2} köşe gruplarının sunuşları sırasıyla

$$\mathcal{P}_{v_1} = \langle a, b ; a^n, ab a^{-m} b^{-1} \rangle, \mathcal{P}_{v_2} = \langle c, d ; c^t, cd c^{-k} d^{-1} \rangle$$

olarak verilsin. (Burada $(n, m-1) \neq 1$, $(t, k-1) \neq 1$ ve p herhangi bir asal sayısı olmak üzere $p/n, p/t$ dir.) Ayrıca Γ grafiğindeki diğer köşe gruplarının sunuşları da

$$\mathcal{P}_v = \langle x_v ; s_v \rangle \quad (v \in V, v \neq v_1, v_2)$$

olsun. Bu durumda $G(\mathcal{P})$ grubunu, 3.1 Bölümde anlatıldığı üzere,

$$\mathcal{P} = \langle a, b, c, d, x ; a^n, ab a^{-m} b^{-1}, c^t, cd c^{-k} d^{-1}, s, r \rangle \quad (3.2)$$

sunuşu ile tanımlarız. O halde 3.3.2 Örneğin bir genellemesi olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.3.3 Sonuç: (3.2) ile verilen \mathcal{P} sunuşunu alalım. Buna göre \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olması için gerekli ve yeterli koşul

$$\forall S \in s, \forall \mathbb{P} \in X \text{ için } \exp_S(\mathbb{P}) \equiv 0 \pmod{p}$$

olmasıdır.

İspat: Sonucun gerekliliği göstermek için \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olduğunu varsayalım. Bu durumda 3.3.1 Teoremden dolayı \mathcal{P}_v ($v \in V$) sunuşlarının her biri p -Cockcroft olacaktır. 3.2.1 Alt Bölümde tanımlandığı gibi $X = \bigcup_{v \in V} X_v$ olduğundan, X kümesinden alacağımız herhangi bir \mathbb{P} küresel resmi, aynı zamanda herhangi bir $v \in V$ için bir X_v kümesi içindedir. Böylece, kabulümüz gereği \mathcal{P}_v sunuşlarının her biri p -Cockcroft ve de X_v kümeleri $\pi_2(\mathcal{P}_v)$ modüllerinin üreteç kümeleri olduğundan, bu \mathbb{P} küresel resmi içindeki bütün disklerin üstel toplamları $\text{mod } p$ 'ye göre *sıfıra* denk olur. Ayrıca $s = \bigcup_{v \in V} s_v$ olduğundan s bağıntı kümesinden



alacağımız her bir S bağıntısı, aynı zamanda herhangi bir $v \in V$ için bir s_v kümesinin içindedir. Buradan

$$\forall S \in s, \forall P \in X \text{ için } \exp_S(P) \equiv 0 \pmod{p}$$

olduğu görülür.

Sonucun yeterliliği göstermek için $\forall S \in s, \forall P \in X$ iken $\exp_S(P) \equiv 0 \pmod{p}$ olduğunu varsayalım. Burada $(n, m-1) \neq 1, (t, k-1) \neq 1$ ve bir p asal sayısı için $p \mid n, p \mid t$ olduğundan, [1, Theorem 3.3.3]'e göre, \mathcal{P}_{v_1} ve \mathcal{P}_{v_2} sunuşları p -Cockcrofttur.

$\mathcal{P}_v = \langle x_v; s_v \rangle$ ($v \in V, v \neq v_1, v_2$) sunuşunu alalım. Daha önce belirtildiği üzere X_v, X 'in bir alt kümesidir. Dolayısıyla X_v kümesinden alınacak her bir \mathbb{P} küresel resmi, aynı zamanda X kümesi içinde bir küresel resimdir. $s = \bigcup_{\substack{v \in V \\ v \neq v_1, v_2}} s_v$ olduğundan

bu \mathbb{P} küresel resmi içindeki her bir disk, aynı zamanda bir s diskidir. Burada varsayımdan dolayı \mathbb{P} küresel resmi içindeki her bir diskin üstel toplamı \pmod{p} 'ye göre sıfıra denktir. Böylece X_v kümesi içinden alacağımız her bir küresel resim için aynı şeyler söylenebileceğinden, \mathcal{P}_v sunuşlarının p -Cockcroft olduğu kolayca görülür. O halde \mathcal{P}_v sunuşlarının her biri p -Cockcroft olacağından, 3.2.4 Teorem gereğince, \mathcal{P} sunuşu da p -Cockcroft olacaktır. \diamond

3.4 Genel Grafik Çarpım Grubunun Özel Durumları

Bu bölümde 3.1.1 Tanımla verilen, genel grafik çarpım grubunun özel durumlarının üreteç kümelerini ve etkililiğini inceleyeceğiz.

3.4.1 Grafik Grup

3.1 Bölümde tanımlanan Γ grafiğini alalım. Ayrıca G_v ($v \in V$) köşe gruplarının herbiri serbest değişmeli olsun. Bu durumda G_v köşe gruplarının \mathcal{P}_v sunuşlarındaki x_v üreteç kümeleri tek elemandan oluşurken, s_v bağıntı kümeleri de boş küme olacaktır. Böylece $G(\mathcal{P})$ genel grafik çarpım grubunun (3.1)'de elde edilen \mathcal{P} sunuşundaki s ve r kümeleri de boş küme olur. Bu durumda 3.1.1 Tanım gereğince, $G(\mathcal{P})$ 'ye bir *grafik grup* denir ve

$$\mathcal{P} = \langle x; s \rangle \tag{3.3}$$



sunuşu ile verilir.

Bu elde edilen grafik grup için 3.2 ve 3.2.1 Bölümlerde tanımlanan ve (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşunun $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteç kümeleri olan Z , Y , X kümeleri, (3.3)'deki \mathcal{P} sunuşun ikinci homotopi modülü için aşağıdaki gibi elde edilir.

İlk olarak Γ grafiği içinde Şekil 3.1'deki gibi alacağımız her $\{u,v,w\}$ ($u,v,w \in V$) üçgeni için, Şekil 3.2 ile belirtilen tek bir küresel resim çizilebilir. Buradan da, 3.2.3 Tanım ile grafik grup için Z üreteç kümesini elde ederiz.

Ayrıca G_v ($v \in V$) köşe gruplarının \mathcal{P}_v sunuşlarındaki s_v ($v \in V$) bağıntı kümeleri boş olduğundan, 3.2.1 Alt Bölümde tanımlanan Y üreteç kümesi boş kümedir.

Son olarak da G_v ($v \in V$) köşe gruplarının her biri serbest değişmeli gruplar olduğundan 3.2.1 Alt Bölümde tanımlanan her bir X_v ($v \in V$) üreteç kümesi boş kümedir. Böylece X_v üreteç kümelerinin birleşiminden elde edilen X kümesi de boş küme olur.

Buradan da 3.2.6 Teorem gereğince, $G(\mathcal{P})$ grafik grubunun ikinci homotopi modülü olan $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin sadece Z kümesi ile üretildiği açıkça görülür.

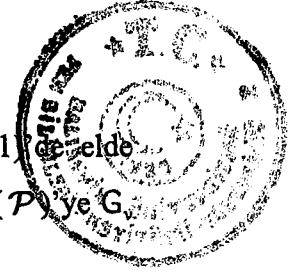
Böylece (3.3) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluk özelliği aşağıdaki sonuç ile verilir.

3.4.1 Sonuç: (3.3) ile verilen \mathcal{P} sunuşu her p asal sayısı için p -Cockcrofttur.

İspat: Yukarıda belirtildiği gibi, 3.2.6 Teoremin bir sonucu olarak, $\pi_2(\mathcal{P})$ modülü sadece Z kümesi ile üretildiğinden ve de Şekil 3.2'de belirtildiği gibi Z kümesinde bulunan bütün küresel resimler Cockcroft olduğundan, \mathcal{P} sunuşu da Cockcrofttur. Bu da 1.2.9 Tanım gereği, \mathcal{P} sunuşunun her p asal sayısı için p -Cockcroft olmasını gerektirir. ◊

3.4.2 Genel Grafik Çarpım Gurubuyla Tanımlanan Serbest Çarpım Grubu

3.1 Alt Bölümde tanımlanan ve e kenar kümesi boş olan bir Γ grafiğini alalım. Bu durumda kenar gruplarının \mathcal{P}_e ($e \in E$) sunuşlarındaki r_e ($e \in E$) kümeleri



boş küme olacaktır. Böylece $G(\mathcal{P})$ genel grafik çarpım grubunun (3.1) de elde edilen sunuşundaki r kümesi de boş küme olur. 3.1.1 Tanım gereğince, $G(\mathcal{P})$ ye G_v ($v \in V$) köşe gruplarının *serbest çarpım grubu* denir ve

$$\mathcal{P} = \langle X; S \rangle \quad (3.4)$$

sunuşu ile verilir.

Bu elde edilen serbest çarpım grubu için 3.2 ve 3.2.1 Bölümlerde tanımlanan ve (3.1)'deki \mathcal{P} sunuşunun $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteç kümeleri olan Z , Y , X kümeleri, (3.4)'deki \mathcal{P} sunuşunun ikinci homotopi modülü için aşağıdaki gibi elde edilir.

İlk olarak Γ grafiğinde e kenar kümesi boş olduğundan, bu grafik içindeki köşelerle herhangi bir üçgen meydana getirilemez. Böylece 3.2.3 Tanımla verilen Z üreteç kümesi boştur.

Aynı şekilde, e kenar kümesinin boş olmasından dolayı, 3.2.1 Alt Bölümde tanımlanan Y_e ($e \in E$) kümeleri oluşturulamaz. Böylece Y üreteç kümesi de boş kümedir.

Ayrıca G_v ($v \in V$) köşe gruplarının \mathcal{P}_v sunuşlarının ikinci homotopi modüllerinin üreteç kümeleri olan X_v kümeleri tanımlanabildiğinden, 3.2.1 Alt Bölümde tanımlanan X üreteç kümesini elde ederiz. Aslında bu X kümesi, yukarıdaki açıklamaya göre, serbest çarpım grubunun üreteç kümesi olacaktır.

Diğer bir deyişle, 3.2.6 Teorem gereğince, $G(\mathcal{P})$ serbest çarpım grubunun (3.4) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun ikinci homotopi modülü olan $\pi_2(\mathcal{P})$ 'nin sadece X kümesi ile üretildiği açıkça görülür.

3.3.1 Teoremin bir uygulaması olarak, serbest çarpım grubunun (3.4) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluk özelliği için aşağıdaki sonucu verebiliriz.

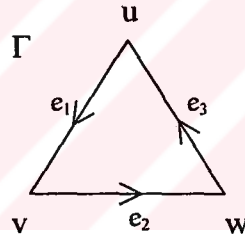
3.4.2 Sonuç: (3.4) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olması için gerekli ve yeterli koşul \mathcal{P}_v ($v \in V$) sunuşlarının her birinin p -Cockcroft olmasıdır.



3.4.3 Genel Grafik Çarpım Gurubuyla Tanımlanan Direkt Çarpım Grubu

3.1.1 Tanımın 4). maddesinde belirtildiği gibi, direkt çarpım grubu genel grafik çarpım grubunun özel bir halidir. Dolayısıyla 3.4.1 ve 3.4.2 Alt Bölümlerde yapılan işlemler, direkt çarpım grubu içinde yapılabilir. Ancak, bu bölümde, bir takım teknik zorluklardan dolayı, direkt çarpım grupları için “özel hal” alınarak 3.4.1 ve 3.4.2 Alt Bölümlerde yapılan işlemler tekrarlanacaktır (Bununla birlikte 2. Bölüm içinde direkt çarpım gruplarının tanımı, genel sunuşu, $H_2()$ grubu ve başka bir metod ile etkililiği tanımlanmıştı.). Yukarıda yazılan özel hal ile kastedilen, Γ grafiğini ve $G_v (v \in v)$ köşe gruplarını (dolayısıyla \mathcal{P}_v sunuşlarını) aşağıdaki gibi tanımlamaktır.

Köşe kümesi $\{u,v,w\}$, kenar kümesi $\{e_1, e_2, e_3\}$ olan Γ grafiğini Şekil 3.5’deki gibi ve G_u, G_v, G_w köşe gruplarının sunuşlarını da sırasıyla $\mathcal{P}_u = \langle x ; x^{p_1} \rangle$, $\mathcal{P}_v = \langle y ; y^{p_2} \rangle$, $\mathcal{P}_w = \langle z ; z^{p_3} \rangle$ olarak alalım (Burada p_1, p_2, p_3 birbirinden farklı asal sayılardır.). Diğer bir deyişle tanımlanan bu köşe grupları, asal mertebeli (sonlu) devirli gruplardır.



Şekil 3.5

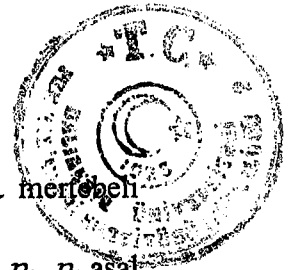
Bu durumda G_u, G_v, G_w köşe gruplarının grafik çarpım grubunun sunuşu,

$$\mathcal{P} = \langle x, y, z ; x^{p_1}, y^{p_2}, z^{p_3}, [x,y], [y,z], [z,x] \rangle \quad (3.5)$$

ile verilir.

Ayrıca bu grup için aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.3 Teorem: (3.5) ile verilen \mathcal{P} sunuşuyla tanımlanan grafik çarpım grubu aslında, p_1, p_2, p_3 asal mertebeli üç tane devirli grubun direkt çarpım grubuna izomorfdur.



İspat: (3.5) ile tanımlanan \mathcal{P} sunuşunu alalım. Ayrıca \mathbb{Z}_n , n mertebeli devirli bir grubu tanımlasın. Buna göre $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_3}$ şeklindeki, p_1, p_2, p_3 asal mertebeli devirli grupların direkt çarpım grubunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

\mathbb{Z}_{p_1} , \mathbb{Z}_{p_2} ve \mathbb{Z}_{p_3} grupları sırasıyla a , b ve c ile üretilsin, diğer bir deyişle $\mathbb{Z}_{p_1} = \langle a \rangle$, $\mathbb{Z}_{p_2} = \langle b \rangle$ ve $\mathbb{Z}_{p_3} = \langle c \rangle$ olsun ve de bu üç devirli grubun sunuşları sırasıyla $\langle a ; a^{p_1} \rangle$, $\langle b ; b^{p_2} \rangle$ ve $\langle c ; c^{p_3} \rangle$ olarak tanımlansın. Böylece $\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_3}$ direkt çarpım grubu (a, b, c) ile üretilir. Yani,

$$\mathbb{Z}_{p_1} \times \mathbb{Z}_{p_2} \times \mathbb{Z}_{p_3} = \langle (a, b, c) \rangle$$

2.3.2 Önerme ile bu grubun sunuşu

$$\overline{\mathcal{P}} = \langle a, b, c ; a^{p_1}, b^{p_2}, c^{p_3}, [a, b], [b, c], [c, a] \rangle$$

olarak bulunur. Şimdi amacımız Tietze dönüşümlerini kullanarak \mathcal{P} ile $\overline{\mathcal{P}}$ sunuşlarının aynı grubu temsil ettiğini göstermektir. Bunun için $\overline{\mathcal{P}}$ sunuşunu alalım.

$$\overline{\mathcal{P}} = \langle a, b, c, a^{p_1}, b^{p_2}, c^{p_3}, [a, b], [b, c], [c, a] \rangle$$

$$T3) \rightarrow \langle a, b, c, x, y, z ; a^{p_1}, b^{p_2}, c^{p_3}, [a, b], [b, c], [c, a], x=a, y=b, z=c \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle a, b, c, x, y, z ; a^{p_1}, b^{p_2}, c^{p_3}, [a, b], [b, c], [c, a], x=a, y=b, z=c, y^{p_2}, z^{p_3}, x^{p_1} [x, y], [y, z], [z, x] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle a, b, c, x, y, z ; x=a, y=b, z=c, x^{p_1}, y^{p_2}, z^{p_3}, [x, y], [y, z], [z, x] \rangle$$

$$T4) \rightarrow \langle x, y, z ; x^{p_1}, y^{p_2}, z^{p_3}, [x, y], [y, z], [z, x] \rangle$$

Buradan $\overline{\mathcal{P}}$ ile \mathcal{P} nin aynı grubu temsil ettiği çıkar. O halde

$$G(\overline{\mathcal{P}}) \cong G(\mathcal{P})$$

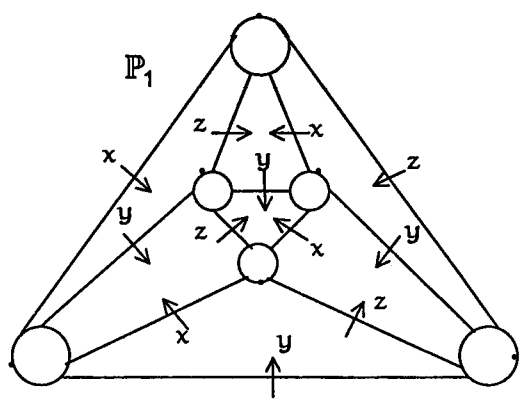
dir. ◊

3.4.3 Teoreme göre, (3.5) sunuşuyla verilen grafik çarpım grubu için tanımlayacağımız Z , Y ve X kümeleri altında, $\overline{\mathcal{P}}$ sunuşu ile verilen direkt çarpım grubu içinde kullanılabilirler.

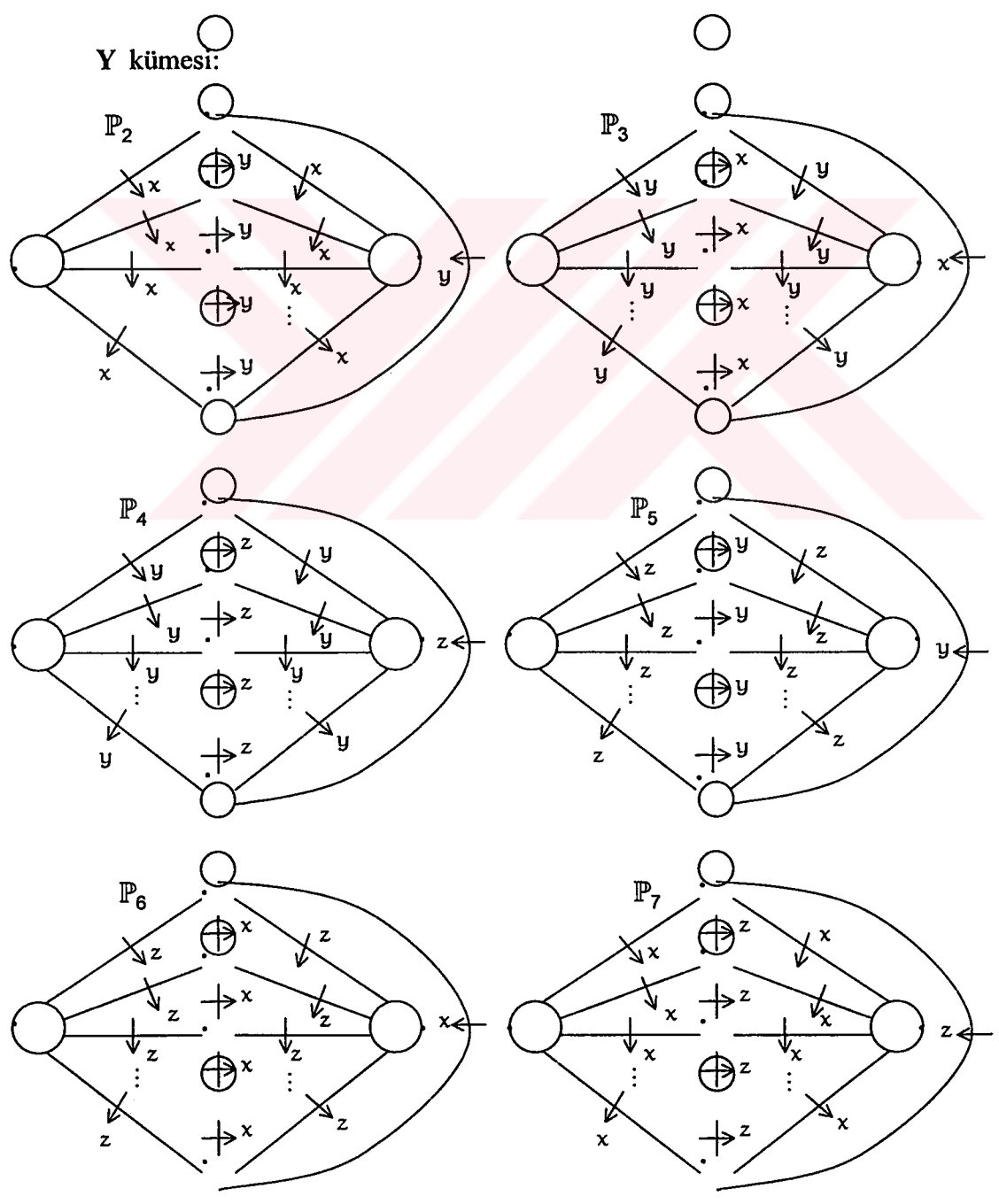
Şimdi, 3.2 ve 3.2.1 Bölümlerde tanımladığımız bu Z , Y ve X kümelerini, grafik çarpım grubu (veya direkt çarpım grubu) için aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz.

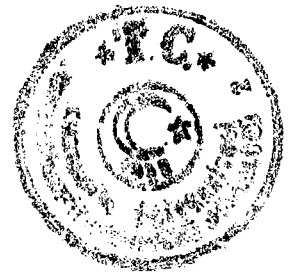


Z kümesi:

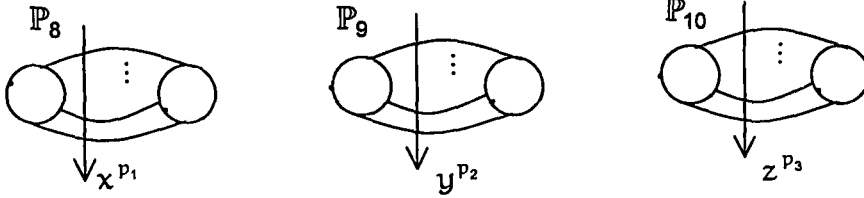


Y kümesi:





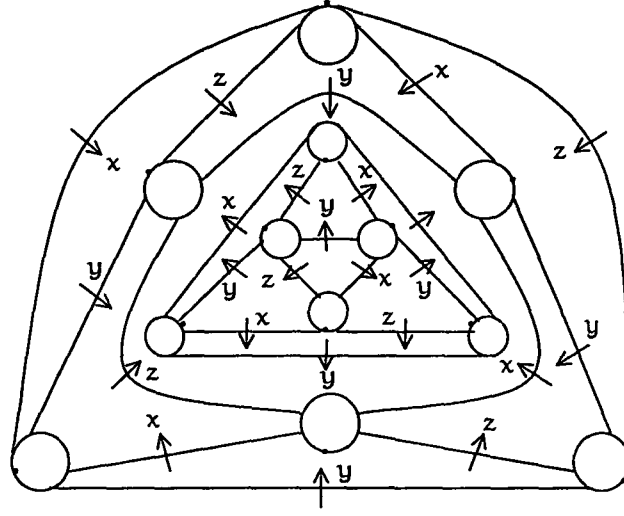
X kümesi:



Şekil 3.5’de tanımlanan Γ grafiği ve \mathcal{P}_u , \mathcal{P}_v , \mathcal{P}_w sunuşlarıyla verilen G_u , G_v , G_w köşe gruplarından (3.5)’de elde ettiğimiz \mathcal{P} sunuşuyla verilen grafik çarpımı için 3.2.6 Teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.4.4 Teorem: (3.5)’de tanımlanan \mathcal{P} sunuşuyla verilen grafik çarpım grubunun (direkt çarpım grubunun) ikinci homotopi modülü $\pi_2(\mathcal{P})$, $X \cup Y$ kümesi tarafından üretilir.

İspat: \mathcal{P} sunuşu için bulduğumuz Z kümesindeki \mathbb{P}_1 küresel resmini, tanımladığımız Y kümesinden alacağımız küresel resimlerle elde edebiliriz. Bunun için Y kümesinden, özel olarak \mathbb{P}_6 , \mathbb{P}_2 ve \mathbb{P}_4 küresel resimlerinin ters görüntülerini alıp (ki bunlar 3.2.6 Teoreme göre üreteç resimlerdir), bu üç resmi yanyana getirerek “köprü operasyonunu” uygulayalım. Bu durumda, \mathbb{P}' olarak adlandıracağımız yeni bir küresel resim elde ederiz. Daha sonra, \mathbb{P}' küresel resmine yine Y kümesinden alacağımız $-\mathbb{P}_5$, $-\mathbb{P}_7$ ve $-\mathbb{P}_3$ küresel resimlerini ekleyip, ard arda “köprü operasyonları” uygulayarak \mathbb{P}'' olarak adlandıracağımız yeni bir küresel resim elde ederiz. Bu \mathbb{P}'' küresel resminin karakteristik özelliği, iç içe geçmiş iki küresel resimden oluşmasıdır. Dıştaki küresel resim Z kümesindeki \mathbb{P}_1 küresel resmidir. İçte bulduğumuz küresel resmin, x^{P_1} , y^{P_2} , z^{P_3} disklerini (rel $X \cup Y$) operasyonuna göre yok ederek yeniden düzenlediğimizde, Z kümesindeki \mathbb{P}_1 küresel resminin ters görüntüsünü elde ederiz. Böylece \mathbb{P}'' küresel resmi, Şekilde 3.6’da geometrik olarak gösterilen küresel resme (rel $X \cup Y$)’ye göre denk olur.



Şekil 3.6

Açıkça görülebileceği gibi bir kaç kez “köprü operasyonu” ve “silenebilir çiftler” operasyonları uyguladığımızda \mathbb{P}' küresel resminin, $(\text{rel } X \cup Y)$ 'ye göre boş resme denk olduğu ortaya çıkacaktır. Bu ise bize, Z kümesinin aslında boş küme olduğunu verir. Böylece, 3.2.6 Teoremin bir uygulaması olarak (3.5)'de tanımlanan \mathcal{P} sunuşu ile verilen grafik çarpımının $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün $X \cup Y$ kümesi ile üretildiği görülür. \diamond

Şimdiki amacımız ise, (3.5) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun, 3.4.4 Teorem ile tanımlanan üreteç kümeleri üzerinde p -Cockcroftluk özelliğini incelemektir. Bu teoreme göre, (3.5) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun $\pi_2(\mathcal{P})$ modülünün üreteç kümeleri

$$X = \{ P_8, P_9, P_{10} \}, Y = \{ P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7 \}$$

olur. \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroftluğu için 3.3.1 Teoremin bir uygulaması olarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.4.5 Sonuç: (3.5) ile verilen \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olması için p_1, p_2, p_3 asal sayılarının birbirine eşit olması gerekir.



İspat: $\mathcal{P}_u, \mathcal{P}_v, \mathcal{P}_w$ sunuşlarının üzerindeki bağıntılara $x^{P_1}=R_1, y^{P_2}=R_2, z^{P_3}=R_3, [x,y]=S_1, [y,z]=S_2, [z,x]=S_3$ diyelim. Y, X kümelerinde bulunan küresel resimlerdeki $R_1, R_2, R_3, S_1, S_2, S_3$ disklerinin üstel toplamları aşağıdaki gibi bulunur.

$$\exp_{R_1}(\mathbb{P}_2) = \exp_{R_2}(\mathbb{P}_3) = \exp_{R_2}(\mathbb{P}_4) = \exp_{R_1}(\mathbb{P}_5) = \exp_{R_1}(\mathbb{P}_6) = \exp_{R_1}(\mathbb{P}_7) = 0$$

$$\exp_{S_1}(\mathbb{P}_2) = -p_1, \exp_{S_1}(\mathbb{P}_3) = p_2, \exp_{S_2}(\mathbb{P}_4) = -p_2, \exp_{S_2}(\mathbb{P}_5) = p_3, \exp_{S_3}(\mathbb{P}_6) = -p_3$$

$$\exp_{S_3}(\mathbb{P}_7) = p_1, \exp_{R_1}(\mathbb{P}_8) = \exp_{R_2}(\mathbb{P}_9) = \exp_{R_1}(\mathbb{P}_{10}) = 0$$

Buradan 3.3.1 Teorem gereğince \mathcal{P} sunuşunun p -Cockcroft olması için $\mathcal{P}_u, \mathcal{P}_v, \mathcal{P}_w$ sunuşlarının her birinin, aynı p asalı için, p -Cockcroft olması gerekmektedir. Bunun sağlanması için de p_1, p_2, p_3 asal sayılarının birbirine eşit olması gerekmektedir. \diamond



4. ETKİLİLİĞİ BİLİLEN BAZI GRUPLAR

Bu bölümde verilen tanımlamalar ve sonuçlar standarttır ve [2], [10], [11] ve [12] gibi kaynaklarda bulunabilir.

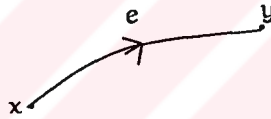
4.1 Coxeter Gruplar

4.1.1 Coxeter Grupların Tanımı ve Sunuşu

Köşe kümesi x , yönlendirilmiş kenar kümesi e olan sonlu yönlendirilmiş grafik Γ olsun. Ayrıca bu Γ grafiğinin katlı kenarlarının ve halkalarının olmadığını farzedelim. Bunu aşağıdaki gibi şekillendirebiliriz.



Böylece Γ grafiğinin kenarları ayırık köşe çiftleriyle temsil edilebilir. Örneğin



şeklindeki e kenarını (x,y) ile temsil ederiz.

$\Phi : e \rightarrow \{2, 3, \dots\}$ bir fonksiyon olsun. $e \in e$ olmak üzere $\Phi(e)$ görüntüsüne, e kenarının *ağırlığı* (weight) denir. Buradan elde edilen ve

$$\mathcal{P}_C = \langle x ; x^2 (x \in x), (xy)^{\Phi(x,y)} ((x,y) \in e) \rangle \quad (4.1)$$

ile verilen sunuşa *Coxeter sunuş* denir. Böylece \mathcal{P}_C ile tanımlanan gruba *Coxeter grup* denir ve $C(\Gamma, \Phi)$ (veya kısaca C) ile gösterilir.

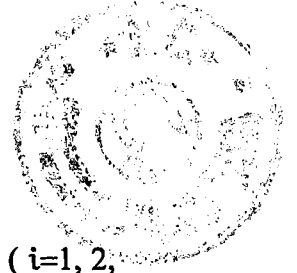
Γ grafiğindeki bir e kenarının ağırlığı çift (tek) olursa bu kenara *çift (tek)* denir.

Bu Alt Bölümde aşağıdaki notasyonları kullanacağız.

$$m = |x|$$

$$n = |e|$$

n_c : e kümesi içindeki çift kenarların sayısı.



n_0 : e kümesi içindeki tek kenarların sayısı.

Γ_i : Bütün çift kenarları kaldırıldıktan sonra Γ grafiğinin i . bileşeni ($i=1, 2, \dots, d$).

T_i : Γ_i bileşeninin maksimal ağacı ($i=1, 2, \dots, d$).

ℓ : $\bigcup_{i=1}^d (\Gamma_i \setminus T_i)$ içinde bulunan e kümesindeki kenarların sayısı.

\hat{n} : Ağırlığı büyük veya eşit 3 olan e kümesindeki kenarların sayısı.

t : e kenar kümesinde ağırlığı 2 olan kenarların kümesi üzerindeki \sim denklik sınıflarının sayısı.

Buradaki \sim denklik bağıntısı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$A = \{ e \in e : \Phi(e) = 2 \}$ olsun. $e, f \in A$ için, üçüncü kenarı tek olan bir üçgenin iki kenarı e ve f ise $e \approx f$ yazılsın. Buradan \sim bağıntısı \approx nın yansımali ve geçişli kapanışdır.

4.1.2 Coxeter Grupların İkinci Homoloji Grubu

Bir C Coxeter grubunun ikinci homoloji grubu, [2]'de aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

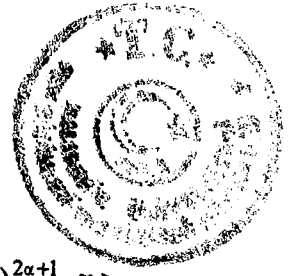
4.1.1 Teorem: C bir Coxeter grup olsun. Bu durumda $H_2(C)$ grubu, minimum üreteç sayısı $\hat{n} + t + d - m$ olan elementer değişmeli 2-gruptur.

4.1.2 Sonuç: Aşağıdaki şartın sağlandığını farzedelim.

Γ grafiğinin içinde $\Phi(e_1) = \Phi(e_2) = 2$ ve $\Phi(e_3)$ tek olan $e_1 e_2 e_3$ üçgeni bulunmasın. (4.2)

Böylece $H_2(C)$ grubu, minimum üreteç sayısı $n + d - m$ olan elementer değişmeli 2-gruptur.

İspat: Γ grafiği için (4.2) şartı sağlansın. Bu durumda \sim denklik bağıntısından elde edilen denklik sınıflarının kümesi boş olacağından, $t = 0$ olur. Ayrıca Γ grafiğinde $\Phi(e) = 2$ olan kenar olmayacağından, $n = \hat{n}$ bulunur. Böylece 4.1.1 Teoreminden $H_2(C)$ grubu minimum üreteç sayısı $n + d - m$ olan elementer değişmeli 2-grup olacaktır. \diamond



4.1.3 Coxeter Grupların Etkililiği

α pozitif bir tam sayı olmak üzere, $\mathcal{P} = \langle x, y; x^2 (x \in x), y^2, (xy)^{2\alpha+1}, r \rangle$

Coxeter sunuşunu düşünelim. Ayrıca $z \notin x \cup \{y\}$ olsun. s kümesi de, $R \in$ bağıntılarının hepsinin içindeki y elemanının, $xz^{-\alpha}$ ile değiştirilmesiyle r kümesinden elde edilsin. Buradan, başka bir sunuş

$$\mathcal{P}_y = \langle x, z; x^2 (x \in x), xz^{-\alpha} xz^{\alpha+1}, s \rangle$$

olarak elde edilir. Bu sunuşa \mathcal{P} sunuşunun y 'deki deformatsyonu denir.

Tietze dönüşümleri kullanılarak \mathcal{P} ve \mathcal{P}_y sunuşlarının aynı grubu tanımladığı gösterilebilir. Ayrıca,

$$\chi(\mathcal{P}_y) = \chi(\mathcal{P}) - 1$$

olduğu görülür.

4.1.3 Teorem: C Coxeter grubunun (4.1) ile verilen \mathcal{P}_C sunuşunun etkili olması için gerekli ve yeterli koşul Γ grafiğinin ağırlığı tek olan bir kenara sahip olmamasıdır.

İspat: Teoremden Γ grafiğinin bir tane ağırlığı tek olan kenarı varsa C grubu etkili değildir. Bu yüzden Γ grafiğinin tüm kenarları çift olsun. Böylece Γ grafiği için (4.2) şartı sağlanacağından 4.1.2 Sonuç gereği $H_2(C)$ grubu, minimum üreteç sayısı $n + d - m$ olan elementer değişmeli 2-grup olur. Yani,

$$d(H_2(C)) = n + d - m$$

dir.

Γ grafiğindeki tüm kenarlar çift olduğundan, çift kenarlar atılınca Γ grafiğinde sadece köşeler kalacaktır. Böylece Γ grafiğinin her bir köşesi bu grafiğin bir bileşenini oluşturur. Buradan da

$$d = m$$

elde edilir. Bu durumda,

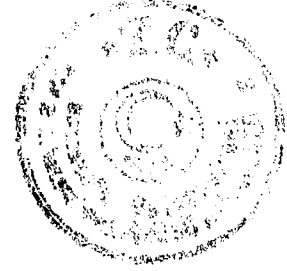
$$d(H_2(C)) = n$$

olarak bulunur. O halde

$$\delta(C) = 1 - 0 + n = 1 + n$$

olur.

C Coxeter grubunun sunuşu



$$\mathcal{P}_C = \langle \mathbf{x}; \mathbf{x}^2 (x \in \mathbf{x}), (x, y)^{\Phi(x, y)} ((x, y) \in \mathbf{e}) \rangle$$

ve de $|\mathbf{x}| = m$, $|\mathbf{e}| = n$ olduğundan,

$$\chi(\mathcal{P}_C) = 1 - m + (m + n) = 1 + n$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\delta(C) = \chi(\mathcal{P}_C)$$

olduğundan, C Coxeter grubunun \mathcal{P}_C sunuşu etkilidir. \diamond

4.1.4 Teorem: Bir C Coxeter grubu için (4.2) şartı varsa C Coxeter grubunun etkili bir sunuşu vardır.

İspat: $\Gamma' = \bigcup_{i=1}^d T_i$ olsun. Buradan Γ' alt grafiğinin en sondaki kenarlarını

deformasyon yapalım. Bu yolun ard arda tekrarlanmasıyla Γ' alt grafiğinin tüm kenarları deforme edilsin. Böylece, \mathcal{P}_C sunuşundan elde edilen yeni sunuş \mathcal{P}'_C olsun. Bu durumda \mathcal{P}_C , \mathcal{P}'_C sunuşları aynı grubu tanımlar ve de

$$\begin{aligned} \chi(\mathcal{P}'_C) &= \chi(\mathcal{P}_C) - (\Gamma' \text{ nin kenar sayısı}) \\ &= 1 + n - (\Gamma' \text{ nin kenar sayısı}) \end{aligned}$$

olur. $\bigcup_{i=1}^d (\Gamma_i \setminus T_i)$ nin kenar sayısı ℓ ve $\bigcup_{i=1}^d \Gamma_i$ kenar sayısı $n_0 = n - n_e$ olduğundan,

Γ' alt grafiğinin kenar sayısı $n - \ell - n_e$ olur. Böylece

$$\chi(\mathcal{P}'_C) = 1 + n - (n - \ell - n_e) = 1 + \ell + n_e$$

olarak bulunur.

Ayrıca $\ell = n_0 - m + d$ olduğundan, 4.1.2 Sonuç ile

$$\begin{aligned} \delta(C') &= 1 + n + d - m \\ &= 1 + n + \ell - n_0 \\ &= 1 + n + \ell - n + n_e \\ &= 1 + \ell + n_e \end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece,

$$\delta(C') = \chi(\mathcal{P}'_C)$$

olduğundan, C Coxeter grubu için \mathcal{P}'_C etkili bir sunuş olur. \diamond



4.1.4. Etkili Olmayan Bazı Coxeter Gruplar

$n, k \geq 1$ olan tam sayılar olmak üzere $\Gamma = \Gamma_{n,k}$, köşeleri $1, \dots, n, \bar{1}, \dots, \bar{n}$

ve yönlendirilmiş kenarları

$$\text{ağırlık } k \text{ ise } (i, i+1), (\bar{i}, \overline{i+1}) \quad (1 \leq i < n)$$

$$\text{ağırlık } 2 \text{ ise } (i, \bar{j}) \quad (1 \leq i, j < n)$$

olan bir grafik olsun. Böylece Γ grafiği için (4.2) şartı, k tek iken sağlanmaz.

Γ grafiğine karşılık gelen Coxeter grubu $G = G_{n,k}$ olsun.

4.1.5 Teorem: $n \geq 4$ ve k tek için $G_{n,k}$ grubu etkili değildir. Sabit bir k için

$$\chi(G_{n,k}) - \delta(G_{n,k}) \xrightarrow{n} \infty$$

olur.

4.1.4 Alt Bölümde yapılan işlemlerin tüm ayrıntıları [2]'de bulunabilir.

4.2 D_{2m}^n ($n=2, 3$) Grubunun Etkililiği

Bu Alt Bölümde kullanılan her m sayısı $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ kümesinin bir elemanıdır.

4.2.1 Tanım: D_{2m} , $2m$ mertebeli dihedral grup olmak üzere D_{2m}^n , $2m^n$ mertebeli n tane dihedral grubun direkt çarpım grubudur.

[25]'de dihedral grubun sunuşu

$$\mathcal{P}_{D_{2m}} = \langle a, b ; a^2, b^m, (ab)^2 \rangle$$

olarak tanımlanmıştır. Böylece, 4.2.1 Tanım ve 2.3.2 Önerme ile, D_{2m}^2 grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_{D_{2m}^2} = \langle a, b, c, d ; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d] \rangle$$

olarak elde edilir.

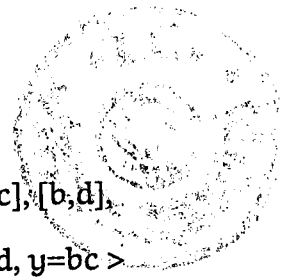
4.2.2 Önerme: m tek iken D_{2m}^2 grubu için

$$\mathcal{P}'_{D_{2m}^2} = \langle x, y ; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2 \rangle$$

sunuşu elde edilir.

İspat: $\mathcal{P}_{D_{2m}^2}$ sunuşuna aşağıdaki Tietze dönüşümlerini uygulayalım.

$$\mathcal{P}_{D_{2m}^2} = \langle a, b, c, d ; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d] \rangle$$



$$T3) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ad, y=bc \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle a, b, c, d, x, y; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ x=ad, y=bc, a=x^m, d=x^{m+1}, c=y^m, b=y^{m+1} \rangle$$

$$T4) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{m(m+1)}, (x^m y^{m+1})^2, y^{2m}, x^{m(m+1)}, (y^m x^{m+1})^2, \\ [x^m, y^m], [x^m, x^{m+1}], [y^{m+1}, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}], x=x^m x^{m+1}, y=y^{m+1} y^m \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{m(m+1)}, (x^m y^{m+1})^2, y^{2m}, x^{m(m+1)}, (y^m x^{m+1})^2, \\ [x^m, y^m], [x^m, x^{m+1}], [y^{m+1}, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{m(m+1)}, (x^m y^{m+1})^2, y^{2m}, x^{m(m+1)}, (y^m x^{m+1})^2, \\ [x^m, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, (x^m y^{m+1})^2, y^{2m}, (y^m x^{m+1})^2, [x^m, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}] \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, (x^m y^{m+1})^2, y^{2m}, (y^m x^{m+1})^2, [x^m, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}], \\ (x^m y)^2, (x y^m)^2 \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, [x^m, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}], (x^m y)^2, (x y^m)^2 \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, [x^m, y^m], [y^{m+1}, x^{m+1}], (x^m y)^2, (x y^m)^2, (xy)^2 \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, [y^{m+1}, x^{m+1}], (x^m y)^2, (x y^m)^2, (xy)^2 \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, (x^m y)^2, (x y^m)^2, (xy)^2 \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, (x^m y)^2, (xy)^2 \rangle$$

Böylece D_{2m}^2 grubu için

$$\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^2} = \langle x, y; x^{2m}, y^{2m}, (x^m y)^2, (xy)^2 \rangle$$

sunuşunu elde ederiz. Buradan, [11, Lemma 4] ile

$$\mathcal{P}_G = \langle x, y; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2 \rangle$$

ise $G = D_{2m}^2$ olduğu verildiğinden, D_{2m}^2 grubu için

$$\mathcal{P}'_{D_{2m}^2} = \langle x, y; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2 \rangle$$

sunuşu elde edilir. \diamond

Ayrıca, 4.2.1 Tanım ve 2.3.2 Önerme ile, D_{2m}^3 grubunun sunuşu da



$$\mathcal{P}_{D_{2m}^3} = \langle a, b, c, d, e, f; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], e^2, f^m, (ef)^2, [a,e], [a,f], [b,e], [b,f], [c,e], [c,f], [d,e], [d,f] \rangle$$

olarak elde edilir.

4.2.3 Önerme: m tek iken D_{2m}^3 grubu için

$$\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3} = \langle a, x, z; a^2, (az)^2, (xz^m)^{2m}, [x,a], z^{-1} x^{m-1} = x^{m+1}, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1} \rangle$$

sunuşu elde edilir.

İspat. m tek olduğundan D_{2m}^2 grubu için 4.2.2. Teorem ile verilen sunuş kullanılarak, 4.2.1 Tanım ve 2.3.2 Önerme ile, D_{2m}^3 grubunun

$$\mathcal{P}'_{D_{2m}^3} = \langle x, y, a, b; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2, a^2, b^m, (ab)^2, [x,a], [x,b], [y,a], [y,b] \rangle$$

sunuşu elde edilir. $\mathcal{P}'_{D_{2m}^3}$ sunuşuna aşağıdaki Tietze dönüşümlerini uygulayalım.

$$\langle x, y, a, b; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2, a^2, b^m, (ab)^2, [x,a], [x,b], [y,a], [y,b] \rangle$$

$$T3) \rightarrow \langle x, y, a, b, z; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2, a^2, b^m, (ab)^2, [x,a], [x,b], [y,a], [y,b], z = xy b^{-1} \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, y, a, b, z; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2, a^2, b^m, (ab)^2, [x,a], [x,b], [y,a], [y,b], z = xy b^{-1}, b = z^{m-1}, y = x^{-1} z^m \rangle$$

$$T4) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = (x x^{-1} z^m)^2, (x^m x^{-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (a z^{m-1})^2, [x,a], [x, z^{m-1}], [x^{-1} z^m, a], [x^{-1} z^m, z^{m-1}], z = x x^{-1} z^m z^{1-m} \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (a z^{m-1})^2, [x,a], [x, z^{m-1}], [x^{-1} z^m, a], [x^{-1} z^m, z^{m-1}] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (a z^{m-1})^2, [x,a], [x, z^{m-1}], [x^{-1} z^m, a] \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (a z^{m-1})^2, [x,a], [x, z^{m-1}], [x^{-1} z^m, a], [a, z^m] \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (a z^{m-1})^2, [x,a], [x, z^{m-1}], [a, z^m] \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (az^{m-1})^2, [x, a], [x, z^{m-1}], [a, z^m], z^{2m} \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} = z^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, z^{m(m-1)}, (az^{m-1})^2, [x, a], [x, z^{m-1}], [a, z^m], z^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, (az^{m-1})^2, [x, a], [x, z^{m-1}], [a, z^m], z^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m} \rangle$$

$$T1) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, (x^{m-1} z^m)^2, a^2, (az^{m-1})^2, [x, a], [x, z^{m-1}], [a, z^m], z^{2m}, (x^{-1} z^m)^{2m}, z^{-1} x^{m-1} z = x^{m+1}, (az)^2, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1}, (xz^m)^{2m} \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; x^{2m}, a^2, [x, a], [a, z^m], z^{2m}, z^{-1} x^{m-1} z = x^{m+1}, (az)^2, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1}, (xz^m)^{2m} \rangle$$

$$T2) \rightarrow \langle x, a, z; a^2, [x, a], z^{-1} x^{m-1} z = x^{m+1}, (az)^2, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1}, (xz^m)^{2m} \rangle$$

Böylece D_{2m}^3 grubu için

$$\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3} = \langle a, x, z; a^2, (az)^2, (xz^m)^{2m}, [x, a], z^{-1} x^{m-1} z = x^{m+1}, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1} \rangle$$

sunuşunu elde ederiz. ◊

Aşağıdaki teoremin ispatı [11]'de bulunabilir.

4.2.4 Teorem: D_{2m}^n grubunun ikinci homoloji grubunun minimum üreteç sayısı

$$d(H_2(D_{2m}^n)) = \begin{cases} \frac{1}{2}n(n-1), & m \text{ tek} \\ n(2n-1), & m \text{ çift} \end{cases}$$

dir.

4.2.5 Teorem: D_{2m}^2 grubu için etkili bir sunuş vardır.

İspat: m çift olsun. Bu durumda D_{2m}^2 grubu için verilen $\mathcal{P}_{D_{2m}^2}$ sunuşu etkili bir sunuştur. Diğer bir deyişle,

$$\mathcal{P}_{D_{2m}^2} = \langle a, b, c, d; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a, c], [a, d], [b, c], [b, d] \rangle$$

sunuşundan,



$$\chi(\mathcal{P}_{D_{2m}^2}) = 1 - 4 + 10 = 7$$

ve de $n = 2$ için, 4.2.4 Teoremden,

$$\delta(D_{2m}^2) = 1 - 0 + d(H_2(D_{2m}^2)) = 1 + 6 = 7$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(D_{2m}^2) = \chi(\mathcal{P}_{D_{2m}^2})$$

olduğundan, m çift için, D_{2m}^2 grubunun $\mathcal{P}_{D_{2m}^2}$ sunuşu etkili olur.

m tek olsun. Bu durumda D_{2m}^2 grubu için 4.2.2 Teorem ile verilen $\mathcal{P}'_{D_{2m}^2}$ sunuşu etkili bir sunuştur. Diğer bir deyişle,

$$\mathcal{P}'_{D_{2m}^2} = \langle x, y; x^{2m}, y^{2m} = (xy)^2, (x^m y)^2 \rangle$$

sunuşundan,

$$\chi(\mathcal{P}'_{D_{2m}^2}) = 1 - 2 + 3 = 2$$

ve de $n = 2$ için, 4.2.4 Teoremden,

$$\delta(D_{2m}^2) = 1 - 0 + d(H_2(D_{2m}^2)) = 1 + 1 = 2$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(D_{2m}^2) = \chi(\mathcal{P}'_{D_{2m}^2})$$

olduğundan, m tek için D_{2m}^2 grubunun $\mathcal{P}'_{D_{2m}^2}$ sunuşu etkili olur. ◊

4.2.6 Teorem: D_{2m}^3 grubu için etkili bir sunuş vardır.

İspat: m çift olsun. Bu durumda D_{2m}^3 grubu için verilen $\mathcal{P}_{D_{2m}^3}$ sunuşu etkili bir sunuştur. Diğer bir deyişle,

$$\mathcal{P}_{D_{2m}^3} = \langle a, b, c, d, e, f; a^2, b^m, (ab)^2, c^2, d^m, (cd)^2, [a,c], [a,d], [b,c], [b,d], \\ e^2, f^m, (ef)^2, [a,e], [a,f], [b,e], [b,f], [c,e], [c,f], [d,e], [d,f] \rangle$$

sunuşundan,

$$\chi(\mathcal{P}_{D_{2m}^3}) = 1 - 6 + 21 = 16$$

ve de $n = 3$ için, 4.2.4 Teoremden,

$$\delta(D_{2m}^3) = 1 - 0 + d(H_2(D_{2m}^3)) = 1 + 15 = 16$$

bulunur. Böylece,



$$\delta(D_{2m}^3) = \chi(\mathcal{P}_{D_{2m}^3})$$

olduğundan, m çift için D_{2m}^3 grubunun $\mathcal{P}_{D_{2m}^3}$ sunuşu etkili olur.

m tek olsun. Bu durumda D_{2m}^3 grubu için, 4.2.3 Teorem ile verilen $\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3}$ sunuşu etkili bir sunuştur. Diğer bir deyişle,

$$\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3} = \langle a, x, z; a^2, (az)^2, (xz^m)^{2m}, [x, a], z^{-1} x^{m-1} = x^{m+1}, x^{-1} z^{1-m} x = z^{m+1} \rangle$$

sunuşundan,

$$\chi(\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3}) = 1 - 3 + 6 = 4$$

ve de $n = 3$ için, 4.2.4 Teoreminden,

$$\delta(D_{2m}^3) = 1 - 0 + d(H_2(D_{2m}^3)) = 1 + 3 = 4$$

bulunur. Böylece,

$$\delta(D_{2m}^3) = \chi(\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3})$$

olduğundan, m tek için D_{2m}^3 grubunun $\overline{\mathcal{P}}_{D_{2m}^3}$ sunuşu etkili olur. ◊

Aşağıdaki teoremin ispatı [11]'de verilmiştir.

2.4.7 Teorem: D_{2m}^n grubu etkilidir.

4.3 $PSL(2, p)^n$ ($n=2, 3$ ve $p \geq 5$) Grubunun Etkililiği

K bir cisim olsun. K cismi üzerindeki terslenebilen $m \times m$ ($m \in \mathbb{N}$) tipindeki tüm matrislerin kümesinin, matrislerin çarpma işlemi altındaki grubuna *Genel Lineer Grup* denir ve $GL(m, K)$ ile gösterilir. Ayrıca $GL(m, K)$ grubundaki tüm matrislerin determinantı 1 ise bu gruba *Özel Lineer Grup* denir ve $SL(m, K)$ ile gösterilir. $SL(m, K)$ grubunun merkezine bölümünden elde edilen $SL(m, K)/Z(SL(m, K))$ grubuna *Projektif Özel Lineer Grup* denir ve $PSL(m, K)$ ile gösterilir. Özel olarak, p asal olmak üzere, $K = \mathbb{Z}_p$ alınırsa bu grup $PSL(m, p)$ ile gösterilir.

[12]'de $SL(2, p)$ grubunun ikinci homoloji grubunun tekil olduğu belirtilerek, [10]'da $t = (p+1)/2$ ve k nin $p/3$ kısmı tam sayı olmak üzere,

$$\mathcal{P}_{SL(2, p)} = \langle x, y; x^2 = (xy)^3, (xy^4 x y^t)^2 y^p x^{2k} \rangle$$

sunuşunun etkili olduğu gösterilmiştir.

Bundan sonraki amacımız $PSL(2,p)$ grubunu kullanarak oluşan yeni bir takım grupların etkililiğini incelemektir.

4.3.1 Tanım: $PSL(2,p)$, projektif özel lineer grup olmak üzere $PSL(2,p)^n$, n tane projektif özel lineer grubun direkt çarpım grubudur.

4.3.2 Teorem: $p \geq 3$ ve $2t \equiv 1 \pmod{p}$ olmak üzere, $PSL(2,p)$ grubunun sunuşu

$$\mathcal{P}_{PSL(2,p)} = \langle a, b ; a^p, b^2 = (ab)^3, (a^t b a^4 b)^2 \rangle \quad (4.3)$$

olarak tanımlanır [10].

$PSL(2,p)$ grubunun ikinci homoloji grubu [12]'de \mathbb{Z}_2 (2 mertebeli devirli grup) olarak verilmiştir. Buna göre [10]'da aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

4.3.3 Teorem: $PSL(2,p)$ grubunun (4.3) ile verilen sunuşu etkilidir.

4.3.4 Önerme: $SL(2,p) \times PSL(2,p)$ grubu

$$\langle u, w ; u^{-3} w^p (u^{p-3} w^{p+2})^2, (w^{p-6} u^{p-12} w u^{-(p+3)/2})^2 (u^p w^2)^2, u^p (u^p w^p)^2 \rangle \quad (4.4)$$

sunuşu ile ve $PSL(2,p) \times PSL(2,p)$ grubu da

$$\langle u, w ; u^p (u^p w^p)^2, u^{-3} w^p (u^{p-3} w^{p+2})^2, (w^{p-6} u^{p-12} w u^{-(p+3)/2})^2, (u^p w^2)^2 \rangle \quad (4.5)$$

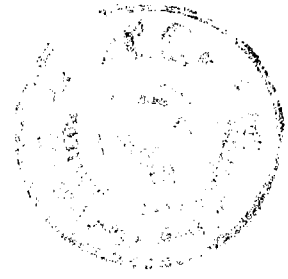
sunuşu ile temsil edilebilir [12].

Aşağıdaki teoremin ispatı [12]'de bulunabilir.

4.3.5 Teorem: $SL(2,p) \times PSL(2,p)$ grubunun (4.4) ile verilen sunuşu ve $PSL(2,p) \times PSL(2,p)$ grubunun da (4.5) ile verilen sunuşu etkilidir.

(4.3) ve (4.4) sunuşları kullanılarak, $PSL(2,p)^3$ grubu için yeni bir sunuş tanımlanabilir. Buna göre $PSL(2,p)^3$ grubunun ikinci homoloji grubu [12]'de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ olarak verilip, $PSL(2,p)^3$ grubunun oluşan yeni sunuşunun etkili olduğu gösterilmiştir.

[11]'de $p=5$ için aşağıdaki örnek verilmiştir.



4.3.6 Örnek: $PSL(2,5)^3$ grubu için

$$\mathcal{P}_{PSL(2,5)^3} = \langle z, w ; z^8 w^{-2} z^2 w^2, (z^{-5} w^{12} z^5 w^{-4})^2 = w^{10},$$

$$(w^{14} z^5)^4 = w^{-6} z^{-5} w^{10}, (w^{15} z^4)^3, (w^{15} z^5)^2 \rangle$$

sunuşu etkili bir sunuştur. \square

A_6 , $\frac{6!}{2}$ mertebeli alternatif bir grup olsun (Bilindiği üzere $n \geq 5$ için A_n

grubu basittir.). A_6 grubunun sunuşu [12]'de

$$\mathcal{P}_{A_6} = \langle a, b ; a^2, b^4, (ab)^5, (ab^2)^5 \rangle$$

şeklinde verilmiştir. Ayrıca yine aynı referansta, A_6 grubunun ikinci homoloji grubu \mathbb{Z}_6 olarak bulunmuştur. A_6 grubu kullanılarak, [12]'de aşağıdaki teorem ispatlanmıştır.

4.3.7 Teorem: $PSL(2,p) \times A_6$ grubu için

$$\langle a, b, x, y ; ab((ab)^2 x)^2, b(bxy)^3, y(y^{(p-1)/2} a)^2, x^2, xy(xy a)^2 a^{-2},$$

$$(ab^2)^5 (xy^4 x y^{(p+1)/2})^2 a^2 \rangle$$

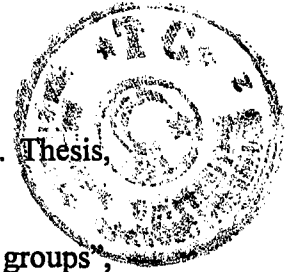
sunuşu etkili bir sunuştur.

Ayrıca [12]'de, $p=2,3$ için $PSL(2,p) \times A_6$ grubunun etkili sunuşları verilmiştir.



KAYNAKLAR

- [1] Baik, Y. G., Generators of the second homotopy module of group presentations with applications, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1992).
- [2] Baik, Y. G. and Pride, S. J., "On the efficiency of Coxeter groups", *Bull. of the London Math. Soc.*, **29** (1997), 32-36.
- [3] Baik, Y. G. and Pride, S. J., "Generators of the second homotopy module of presentations arising from group construction", preprint, University of Glasgow (1993).
- [4] Beyl, F. R., "The schur multiplier of metacyclic groups", *Proc. Amer. Math. Soc.*, **40** (1973), 413-418.
- [5] Beyl, F. R. and Rosenberger, G., "Efficient presentations of $GL(2, \mathbb{Z})$ and $PGL(2, \mathbb{Z})$ ", Groups-St. Andrews (1985), (E. F. Robertson and C. M. Campbell eds.), LMS Lecture Notes **121**, CUP (1986), 135-137.
- [6] Beyl, F. R. and Tappe, J., Group extension, presentations and schur multiplier, Lecture notes in Mathematics **958**, Springer-Verlag (1982).
- [7] Bogley, W. A. and Pride, S. J., Calculating generators of π_2 , in two dimensional homotopy and combinatorial group theory, ed. C. Hog-Angeloni, W. Metzler, A. Sieradski, CUP (1993), 157-158.
- [8] Bogley, W. A. and Pride, S. J., "Aspherical relative presentations", *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, **35** (1992), 1-39.
- [9] Brown, R. and Huebschmann, J., Identities among relations, in low dimensional topology, ed. R. Brown and T. L. Thickstun, LMS Lecture Notes series **48** (1982), 153-202.
- [10] Campbell, C. M., Robertson, E. F. and Williams, P. D., "Efficient presentations for finite simple groups and related groups", in: Groups-Korea 1988. (A. C. Kim and B. H. Neumann eds.), Lecture Notes in Mathematics **1389**, Springer-Verlag (1989), 65-72.
- [11] Campbell, C. M., Robertson, E. F. and Williams, P. D., "On the efficiency of some direct powers of groups", in: Groups-Canberra 1989. (K. G. Kovacs eds.), Lecture Notes in Mathematics **1456**, Springer-Verlag (1989), 106-113.
- [12] Campbell, C. M., Miyamoto, I., Robertson, E. F. and Williams, P. D., "The efficiency of $PSL(2, p)^3$ and other direct products of groups", *Glasgow Math. J.*, **39** (1997), 259-268.
- [13] Chiswell, I. M., Collins, D. J. and Huesbschmann, J., "Aspherical group presentations", *Mathematische Zeitschrift*, Vol **178**, No **1** (1981), 1-36.
- [14] Cohen, D. E., Combinatorial group theory: a topological approach, CUP (1989).



- [15] Çevik, A. S., Minimality of group and monoid presentations, Ph. D. Thesis, University of Glasgow, (1997).
- [16] Çevik, A. S., "The efficiency on 2- generators of semi-direct product of groups", *Communications*, A1 serisi, Cilt 48 (1999).
- [17] Çevik, A. S., "The efficiency of standart wreath product", *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, yayına kabul edildi.
- [18] Davies, J. W. and Morris, A. O., "The schur multiplier of the generalized symmetric group", *J. London Math. Society*, (2) 8 (1974), 615-620.
- [19] Epstein, D. B. A., "Finite presentation of groups 3-manifolds", *Quart. J. Math. Oxford Ser (2)*, 12 (1961), 205-212.
- [20] Harlander, J., "Embeddings into efficient groups", *Proceedings of the Edinburgh Math. Society*, 40 (1997), 313-324.
- [21] Harlander, J., "Closing the relation gap by direct product stabilization", *J. Alg.*, Vol 182 No 2 (1996), 511-521.
- [22] Horadam, K. J., "The cup product for a graph product of combinatorially aspherical groups", *Comm. in Alg.*, (10) 18 (1990), 3245-3262.
- [23] Horadam, K. J., "The cohomology ring of a combinatorial aspherical group", *J. Austral Math. Soc.(Series A)*, 47 (1989), 453-457.
- [24] Hungerford, J. W., Algebra, Axler, S., Gehring, F. W. and Halmos, P. R. eds., *Gradate Texts in Mathematics 73*, Springer-Verlag, New York (1974).
- [25] Johnson, D. L., *Presentation of groups*, LMSST series 15, Cambridge University press (1990).
- [26] Johnson, D. L. and Robertson, E. F., "Finite groups of deficiency zero", in: *Homological Group Theory* (C. T. C. Wall ed.), LMS Lecture notes series 36, CUP (1979), 275-289.
- [27] Karpilovsky, G., *The Schur Multiplier*, LMS Monographs new series 2, Oxford Science Publications (1987).
- [28] Kenne, P. E., "Some new efficient soluble groups", *Comm. in Alg.*, 18 (1990), 2747-2753.
- [29] Kilgour, P. E. and Pride, S. J., "Cockcroft presentations", *Journal of Pure and Applied Algebra*, Vol 106, No 3 (1996), 275-295.
- [30] Lyndon, R. C., "Cohomology theory of groups with a single defining relation", *Annals of Mathematics*, Vol 152, No 3 (1950).
- [31] Lyndon, R. C. and Schupp, P. E., *Combinatorial group theory*, Springer-Verlag (1977).



- [32] Mac Lane, S., Homology, Springer-Verlag, New York (1967).
- [33] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, second edition, Dover Publication, New York (1966).
- [34] Park, S. A., "Projective representations of some finite groups", *J. Korean Math. Soc.*, No 2, 22 (1985), 173-180.
- [35] Pride, S. J., "Groups with presentations in which each defining relator involves exactly two generators", *J. London Math. Society*, (2) 36 (1987), 245-256.
- [36] Pride, S. J., "Identities among relations of group presentations, in Group theory from a geometrical viewpoint", *World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.*, Singapore (1991), 687-717.
- [37] Pride, S. J., "The (co)homology of groups given by presentations in which each defining relator involves at most two types of generators", *J. Austral Math. Society (Series A)*, 52 (1992), 205-218.
- [38] Pride, S. J. and Stöhr, "Relation modules of groups with presentations in which each relator involves exactly two types of generators", *J. London Math. Society*, (2) 38 (1988), 99-111.
- [39] Pride, S. J. and Stöhr, "The (co)homology of aspherical Coxeter groups", *J. London Math. Society*, 42 (1990), 49-63.
- [40] Robertson, E. F., Thomas, R. M. and Wotherspoon, C. I., "A class of inefficient groups with symmetric presentations", *Proceedings Groups-Korea 1994*. (A. C. Kim and D. L. Johnson eds.), Walter de Gruyter (1995).
- [41] Rotman, J. J., *Theory of Groups*, Wm. C. Brown Publishers, Third edition, Iowa (1988).
- [42] Wamsley, J. W., "The deficiency of metacyclic groups", *Proceedings of the Amer. Math. Soc.*, 24 (1970), 724-726.
- [43] Weibel, C. A., *An introduction to homological algebra*, Garling, D. J. H., Dieck T. T. and Walters P. eds., *Cambridge studies in advanced mathematics* 38, (1995).