T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA EŞ ZAMANLI YAKLAŞIM

RAHMİYE ÇİLİNGİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR (Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Erbil ÇETİN
Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR

BALIKESİR, ARALIK - 2023

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan **"Ağırlıklı Lorentz Uzaylarında Eş Zamanlı Yaklaşım"** başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Rahmiye ÇİLİNGİR

(imza)

ÖZET

AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA EŞ ZAMANLI YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
RAHMİYE ÇİLİNGİR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: YUNUS EMRE YILDIRIR)

BALIKESİR, ARALIK - 2023

Bu tez çalışması 5 bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş bölümü olup tez konusuyla ilgili literatür özeti ve tez çalışmasının amacı bu bölümde verilmiştir.
İkinci bölümde tezde kullanılan bütün terimlerin tanımları ve temel özellikleri verilmiştir. Özellikle ağırlıklı Lorentz uzayı ve bu uzayda trigonometrik yaklaşımın temel kavramları üzerinde durulmuştur.
Üçüncü bölümde ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz teoremi ispatlanmıştır. Düz teoremin ispatlanması için gerekli tüm yardımcı teoremler de ifade ve ispat edilmiştir.
Dördüncü bölümde ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın iyileştirilmiş ters teoremi ifade ve ispat edilmiştir. Yine bu ispatta gerekli yardımcı sonuçlar ispatlarıyla verilmiştir. Ayrıca bu uzaylarda geçerli yapısal karakterizasyon teoremi elde edilmiştir.
Beşinci bölümde ise ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonlara bu fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamları ve Poussin ortalamalarıyla eş zamanlı yaklaşım teoremleri ifade ve ispat edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Ağırlıklı Lorentz uzayı, Muckenhoupt koşulu, düzgünlük modülü, en iyi yaklaşım sayıları dizisi, Fourier serisi kısmi toplamlar dizisi, de la Vallée-Poussin ortalaması
Bilim Kod / Kodları :20404 Sayfa Sayısı : 31

ABSTRACT

SIMULTANEOUS APPROXIMATION IN WEIGHTED LORENTZ SPACES
MSC THESIS
RAHMIYE CILINGIR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: YUNUS EMRE YILDIRIR)

BALIKESİR, DECEMBER - 2023

This thesis work consists of 5 chapters.
The first part is the introduction chapter. The literature summary about the thesis subject and the aim of the thesis study are given in this part.
In the second chapter, definitions and basic properties of all terms used in the thesis are given. In particular, the weighted Lorentz space and the basic concepts of the trigonometric approximation in this space are emphasized.
In the third chapter, the direct theorem of the trigonometric approximation in weighted Lorentz spaces is proven. All auxiliary theorems necessary to prove the direct theorem are also stated and proven.
In the fourth chapter, the improved inverse theorem of the trigonometric approximation in weighted Lorentz spaces is stated and proven. Again, the necessary auxiliary results are given with their proofs. Additionally, a structural characterization theorem in these spaces has been obtained.
In the fifth chapter, simultaneous approximation theorems to functions from weighted Lorentz spaces with partial sums of Fourier series and Poussin averages of these functions are stated and proven.

KEYWORDS: Weighted Lorentz spaces, Muckenhoupt condition, modulus of smoothness sequence of the best approximation numbers, Fourier series sequence of partial sums, de la Vallée-Poussin means.
Science Code / Codes :20404 Page Number : 31

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER..iii
SEMBOL LİSTESİ ivv
ÖNSÖZ v
1. GİRİŞ 1
2. ÖN BİLGİLER... 3
3. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN DÜZ TEOREMLERİ.. 7
4. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN TERS TEOREMLERİ.. 13
5. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA EŞ ZAMANLI YAKLAŞIM TEOREMLERİ…..……………………………………………………………..23
6. SONUÇ VE ÖNERİLER...…………….…...…………………...………………...…..28
7. KAYNAKLAR.………...……………...……..……………….....…………………......29
ÖZGEÇMİŞ.…………………………………...…………………..………………..31

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{N}$	:Doğal sayılar kümesi
$\boldsymbol{L^p}$	:Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L^{pq}}$	:Lorentz Uzayı
$\boldsymbol{L_w^{pq}}$	:Ağırlıklı Lorentz Uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{T}_n}$	:Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar sınıfı
$\boldsymbol{\omega(f,\delta)}$	: f'nin süreklilik modülü
$\boldsymbol{E_n}$	: Derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşım
$\boldsymbol{\sigma_h}$	: Steklov öteleme operatörü
$\boldsymbol{A_p}(\mathbf{T})$	: Muckenhoupt sınıfı
$\boldsymbol{\Omega_r(f,\delta)_{L_\omega^{pq}}}$	: $f \in L_\omega^{pq}(T)$ fonksiyonun $r.$ mertebeden düzgünlük modülü
$\boldsymbol{S_n(f)}$	: f'nin Fourier seri açılımının $n.$ kısmi toplamı
$\boldsymbol{V_n(f)}$	: f'nin de la Vallée-Poussin ortalaması

ÖNSÖZ

Bu çalışmanın ortaya çıkması için bana kıymetli zamanını ayıran, engin bilgi ve tecrübesiyle bana yön veren, hiçbir yardımını esirgemeyen değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Yunus Emre YILDIRIR’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2023 **Rahmiye ÇİLİNGİR**

1. GİRİŞ

Çalışılan fonksiyon uzayında bir fonksiyonun, sonlu boyutlu bir alt uzayından olan fonksiyonlara en iyi yaklaşım derecesinin, bazı düzgünlük kriterlerine göre değerlendirildiği teoremlere yaklaşım teorisinin düz ve ters teoremleri denir. Bu teoremlerdeki eşitsizliklere de Jackson- Stechkin tipli eşitsizlikler denir.

Buradaki başlangıç noktası derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlarla bir f periyodik fonksiyonuna en iyi düzgün yaklaşım ile ilgili Jackson'ın ([6]) klasik teoremidir: 2π periyotlu sürekli bir f fonksiyonu için,

$$E_n(f) \leq C\omega\left(f, \frac{1}{n+1}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Trigonometrik yaklaşımın bu ilk düz teoremindeki Jackson eşitsizliğinde $E_n(f)$, f fonksiyonununa derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomlar ile en iyi yaklaşım sayıları dizisini gösterir. Yani,

$$E_n(f) := \inf_{\boldsymbol{T}_n \in \mathcal{T}_n} \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x) - T_n(x)|,$$

burada $\mathcal{T}_n$ derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların sınıfıdır ve

$$\omega(f,\delta) := \sup_{|h| \leq \delta} \max_{x \in [0,2\pi]} |f(x+h) - f(x)|$$

f'nin süreklilik modülünü gösterir.

[9]'de Steckin, Lebesgue uzaylarında ($L^p, 1 \leq p \leq \infty$) Jackson eşitsizliğinin bir benzerini ispatlamıştır. Lebesgue uzaylarında konuyla ilgili diğer önemli sonuçlar [1, 10, 11]'de bulunabilir. Muckenhoupt koşulunu sağlayan w ağırlık fonksiyonları kullanılarak ağırlıklı Lebesgue uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz teoremi [5]'de Gadjieva tarafından ispatlanmıştır:

$$E_n(f)_{L_w^p} \lesssim \omega_r\left(f, \frac{1}{n}\right)_{L_w^p} := \sup_{0 \leq h_i \leq \frac{1}{n}} \left\| \prod_{i=1}^{r} (I - \sigma_{h_i}) f \right\|_{L_w^p}, \quad r \epsilon \mathbb{N},$$

burada I özdeşlik operatörü, $T := [-\pi, \pi)$ ve

$$\sigma_h f(x) := \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} f(u)du, \qquad x \epsilon T$$

f'nin Steklov öteleme operatörüdür.

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında σ_h öteleme operatörü ve $\omega_r(f,.)_{L_w^p}$ düzgünlük modülü bu şekilde tanımlanmıştır, çünkü ağırlıklı Lebesgue uzayı L_w^p, $f(.) \to f(.+h)$ alışılmış öteleme altında genel olarak değişmez değildir.

Ağırlıklı Lebesgue uzaylarında trigonometrik yaklaşımın bazı önemli teoremleri [3, 4, 8, 13]'te ispatlanmıştır.

Lorentz uzayları, [12]'de G. G. Lorentz tarafından Lebesgue uzaylarının bir genelleştirilmesi olarak tanımlandı. Birçok matematikçi bu uzaylardaki problemler ile ilgilendi. Yine literatürde yaklaşım teorisiyle ilgili de bu uzaylarda elde edilmiş sonuçlar bulunmaktadır.

Süreç içerisinde ağırlık fonksiyonları kullanılarak ağırlıklı Lorentz uzayları tanımlanmıştır [7, p.20], [3, p.219]. A_p Muckenhoupt koşulunu sağlayan ağırlık fonksiyonlarına sahip ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşım ile ilgili düz, ters ve eş zamanlı yaklaşım teoremleri ve bunların iyileştirilmeleri [1,3,4,9,14,15] nolu makalelerde elde edilmiştir.

Bu tezin esas konusu olan eş zamanlı trigonometrik yaklaşım teoremlerinde, fonksiyonların türevlerine trigonometrik polinomların türevleriyle yaklaşım problemleri incelenir. Literatürdeki eş zamanlı yaklaşım teoremlerinde yaklaşan trigonometrik polinomlar olarak ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamları kullanılmıştır [1]. De la Vallée-Poussin ortalamaları kullanılarak eş zamanlı yaklaşım teoremleri şu ana kadar ağırlıklı Lorentz uzaylarında ispatlanmamıştır. Biz bu tez çalışmasında bu boşluğu doldurmak için bu tip eş zamanlı yaklaşım teoremleri ispatlamayı hedefledik.

2. ÖN BİLGİLER

Bir $w: T \rightarrow [0, \infty]$ ölçülebilir fonksiyonu verilsin. Eğer $w^{-1}(\{0, \infty\})$ kümesinin Lebesgue ölçümü sıfır ise bu w fonksiyonuna bir ağırlık fonksiyonu denir. w bir ağırlık fonksiyonu olsun. $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun

$$w(e) = \int_e w(x)dx$$

ölçümüne göre azalan rearrangementi

$$f_w^*(t) = inf\{\tau \geq 0 : w(x \epsilon T : |f(x)| > \tau) \leq t\}$$

şeklinde tanımlanır.

1$< p, q < \infty$ olsun.

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(u)\, du$$

olmak üzere

$$\|f\|_{pq,w} := \left(\int_{\boldsymbol{T}} \left(f^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}}\, dt\right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

koşulunu sağlayan tüm ölçülebilir $f: T \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesine ağırlıklı Lorentz uzayı denir. Bu uzaylar $L_w^{pq}(T)$ ile gösterilir ve $\|f\|_{pq,w}$ normuna göre Banach uzayı olur.

$p = q$ durumunda $L_w^{pq}(T)$ uzayı iyi bilinen ağırlıklı Lebesgue uzayına dönüşür. w, T'de ağırlık fonksiyonu ve $1 < p < \infty$ olsun. $A_p(T)$ Muckenhoupt sınıfı

$$sup \frac{1}{|I|}\int_I w(x)\, dx \left(\frac{1}{|I|}\int_I w^{1-p'}(x)\, dx\right)^{p-1} < \infty, \qquad p' := \frac{p}{p-1}$$

koşulunu sağlayan w ağırlık fonksiyonlarının sınıfı olarak tanımlanır. Burada supremum T' nin herhangi bir alt aralığı üzerinden alınır ve $|I|$, I aralığının uzunluğunu gösterir.

$f \in L_w^{pq}(T)$ fonksiyonunun r. mertebeden düzgünlük modülü

$$\Omega_r(f, \delta)_{pq,w} := \sup_{0 \leq h_i \leq \delta} \left\| \prod_{i=1}^{r} (I - \sigma_{h_i}) f \right\|_{pq,w}, \quad r \epsilon \mathbb{N}$$

ile tanımlanır.

Bir $f: T \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun Hardy-Littlewood maksimal fonksiyonu

$$M(x,f) = \sup_{x\in I} \frac{1}{|I|} \int_I f(t)dt$$

biçiminde tanımlanır. Burada supremum T'nin bütün açık alt aralıkları üzerinden alınır.

$w\epsilon A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ durumunda $f\epsilon L_\omega^{pq}(T)$'nın Hardy-Littlewood maximal fonksiyonu ağırlıklı Lorentz uzaylarında sınırlıdır [2, Teorem 3]. Dolayısıyla $\sigma_h(f)$ ortalama fonksiyonu da bu uzaylarda sınırlı olur. Bu, $\Omega_r(f,\delta)_{pq,w}$ düzgünlük modülünün iyi tanımlı olduğunu gösterir.

$a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 0,1,2,\dots)$ sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

serisine trigonometrik seri denir. Bu serinin eşleniği ise

$$\sum_{k=1}^{\infty} (a_k \sin kx - b_k \cos kx)$$

olarak tanımlanır.

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\mathrm{n}} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad n = 0,1,2,\dots$$

ifadesine n. dereceden bir trigonometrik polinom denir.

$E_n(f)_{\ pq,w}$ ile derecesi $\leq n$ olan trigonometrik polinomlar ile $f\epsilon L_w^{pq}(T)$ fonksiyonlarına en iyi yaklaşım sayıları dizisi gösterilir. Yani,

$$E_n(f)_{\ pq,w} = \inf_{T_n\epsilon \mathfrak{I}_n} \|f - T_n\|_{pq,w}$$

Burada $\mathfrak{I}_n$, derecesi n'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesidir.

$W_{pq,w}^r$ ile gösterilen Sobolev uzayı $r\epsilon\ \mathbb{N}$ olmak üzere

$$W_{pq,w}^r := \left\{ f \in L_w^{pq} : f^{(r)} \epsilon L_w^{pq} \right\}$$

biçiminde tanımlanır.

$f\epsilon L^1(T)$ olsun. $k = 1, 2, \ldots$ için

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\cos kt\, dt,$$

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\sin kt\, dt$$

olmak üzere

$$\frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

serisine *f* fonksiyonunun Fourier serisi denir.

$w\epsilon A_p(T)$, 1<p,q<∞ iken $L_w^{pq}(T) \subset L^1(T)$ olduğundan $f\epsilon L_\omega^{pq}(T)$'nın Fourier serisini tanımlayabiliriz:

$$f(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx)$$

ve eşlenik Fourier serisi

$$\tilde{f}(x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\sin kx - b_k(f)\cos kx)$$

biçiminde tanımlanır. Burada $a_0(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$, $k = 1,2,\ldots$ f'nin Fourier katsayılarıdır.

$$A_k(x,f) := (a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx), \qquad k\epsilon\mathbb{N}$$

olmak üzere

$$S_n(f) := S_n(x,f) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} A_k(x,f), \qquad n = 1,2,3, \ldots$$

biçiminde tanımlanan (S_n) dizisine f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

$$V_n(f) := V_n(x,f) = \frac{1}{\mathrm{n}+1}\sum_{v=\mathrm{m}}^{\mathrm{m+n}} S_v(x,f), \quad m,n = 1,2, \ldots$$

biçiminde tanımlanan (V_n) dizisine ise f fonksiyonunun Fourier serisinin de la Vallée-Poussin ortalaması denir. m=0 durumunda (V_n) dizisi iyi bilinen Cesaro ortalaması ile çakışır. De la Vallée-Poussin ortalaması için integral gösterimi

$$V_n(f) := V_n(x,f) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt,$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$K_n(t) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{3nt}{2}\right)\sin\left(\frac{nt}{2}\right)}{2n\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}$$

dir.

Eğer bir C pozitif sabiti için $A \leq CB$ oluyorsa bu durum $A \lesssim B$ biçiminde gösterilir.

3. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN DÜZ TEOREMLERİ

Aşağıdaki teorem [1] nolu makalede ispatlanmıştır.

3.1 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $r \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in W^r_{pq,w}$ için

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \left\|f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right\|_{pq,w}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

eşitsizliği yalnızca r, p, q ya bağlı pozitif bir sabit ile sağlanır.

İspat.

Ağırlıklı Lorentz uzayı normunda kısmi toplamlar dizisi S_n ve eşlenik fonksiyon $\tilde{f}$ operatörlerinin sınırlılığı $w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ koşulları altında [16, *Teorem* 6.6.2] ve [7] nolu kaynaklarda ispatlanmıştır. Yani

$$\|S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim \|f\|_{pq,w}, \qquad \left\|\tilde{f}\right\|_{pq,w} \lesssim \|f\|_{pq,w}$$

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim E_n(f)_{pq,w}$$

değerlendirmeleri geçerlidir. Ayrıca

$$S_n\left(t, f^{(r)}\right) = S_n{}^{(r)}(t, f)$$

olduğu kolayca görülebilir [7]. Bu durumda [18] nolu makalede 6.15 bağıntısına benzer olarak

$$f(x) - S_n(x,f) = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r \pi} \int_{\boldsymbol{T}} \left(f^{(r)}(t) - S_n\left(t, f^{(r)}\right)\right) cos\left(k(x-t) - \frac{r\pi}{2}\right) dt.$$

eşitliği elde edilebilir. $r = 2l$ durumunda

$$f(x) - S_n(x,f) = (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \begin{bmatrix} a_k\left(f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right)\cos(kx) \\ +b_k\left(f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right)\sin(kx) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k\left(f^{(r)} - S_n\left(f^{(r)}\right)\right)}{k^r}$$

$$= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r})\, S_k\left(x, f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right)$$

olur. Böylece,

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \left\|S_k\left(x, f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right)\right\|_{pq,w}$$

$$\lesssim \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \left\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right\|_{pq,w}$$

$$\lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \left\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right\|_{pq,w}$$

elde edilir. $r = 2l + 1$ olduğunda $cos\left(k(x-t) - \frac{\pi}{r}\right) = sin(k(x-t)(-1)^l)$ olur ve

$$f(x) - S_n(x,f) = (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^r} \begin{bmatrix} a_k\left(f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right) sin(kx) \\ -b_k\left(f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right) cos(kx) \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{A_k\left(\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\right)}{k^r}$$

$$= (-1)^l \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) S_k\left(x, \widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\right)$$

elde edilir.

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \left\|S_k\left(\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\right)\right\|_{pq,w}$$

$$\lesssim \sum_{k=n+1}^{\infty} (k^{-r} - (k+1)^{-r}) \left\|\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\right\|_{pq,w}$$

$$\lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \left\|\widetilde{f^{(r)}} - S_n(\widetilde{f^{(r)}})\right\|_{pq,w}$$

$$\lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \left\|f^{(r)} - S_n(f^{(r)})\right\|_{pq,w}$$

bulunur ve teorem ispatlanmış olur.

Teorem 3.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.2 Sonuç.

$w \in A_p(T)$, 1< $p, q < \infty$ ve $r, n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in W^r_{pq,w}$ için

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \frac{1}{(n+1)^r} E_n\left(f^{(r)}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği yalnızca r, p, q ya bağlı pozitif bir sabit ile sağlanır.

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında Peetre-K fonksiyoneli şu şekilde tanımlanır:

$f \in L^{pq}_w(T),\ t > 0$ ve $r \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$K\left(f, t; L^{pq}_w, W^r_{pq,w}\right) := \inf_{g \in W^r_{pq,w}} \left\{\|f - g\|_{pq,w} + t^r \left\|g^{(r)}\right\|_{pq,w}\right\}.$$

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın düz teoremini ispatlamak için öncelikle düzgünlük modülünün Peetre-K fonksiyoneline denk olduğu ispatlanır.

Eğer $A \lesssim B$ ve $B \lesssim A$ eşitsizlikleri aynı anda sağlanıyorsa bu durum $A \approx B$ biçiminde gösterilir. Bir $k > 0$ sayısının tam değeri $[k] := max\{n \in Z: n \le k\}$ biçiminde tanımlanır.

3.3 Teorem.

$f \in L^{pq}_w(T),\ r \in \mathbb{N}, w \in A_p(T)$, 1< $p, q < \infty$ ve $t, k > 0$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_r(f, t)_{pq,w} \approx K\left(f, t; L^{pq}_w, W^{2r}_{pq,w}\right)$$

ve

$$\Omega_r(f, kt)_{pq,w} \lesssim (1 + [k])^{2r} \Omega_r(f, r)_{pq,w},$$

eşitsizlikleri yalnızca p, q ya bağlı pozitif sabitler ile sağlanır.

İspat.

Eğer $h \in W^{2r}_{pq,w}$ ise $\Omega_r(f, .)_{pq,w}$'nin alt toplamsallığından ve [7, Lemma 4.1] de ispatlanan

$$\Omega_r(h, t)_{pq,w} \lesssim t^{2r} \left\|h^{(2r)}\right\|_{pq,w}$$

eşitsizliğinden

$$\Omega_r(f, t)_{pq,w} \lesssim \|f - h\|_{pq,w} + t^{2r} \left\|h^{(2r)}\right\|_{pq,w}$$

eşitsizliği elde edilir. h'a göre infimum alarak $\Omega_r(f, t)_{pq,w} \lesssim K\left(f, t; L^{pq}_w, W^{2r}_{pq,w}\right)$ eşitsizliği bulunur. $L_\delta f$ operatörünü

$$(L_\delta f)(x) := 3\delta^{-3}\int_0^\delta\int_0^u\int_{-t}^t f(x+s)\,ds\,dt\,du, \qquad x\epsilon T$$

biçiminde tanımlayalım. $[20, p. 15]$ den

$$\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}L^r{}_\delta f = \frac{c}{\delta^{2r}}(I-\sigma_\delta)^r, \qquad\qquad r \in \mathbb{N}$$

eşitliğine sahibiz. Gerekli değerlendirmeleri yaparak

$$\|L_\delta f\|_{pq,w} \lesssim \frac{\delta^{-3}}{3}\int_0^\delta\int_0^u 2t\,\|\sigma_t f\|_{pq,w}dtdu \lesssim \|f\|_{pq,w}$$

elde edilir. Yani L_δ operatörü L_w^{pq}'da sınırlıdır. $A_\delta^r := I-(I-L^r{}_\delta)^r$ tanımlamasını yaparsak

$$\left\|\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}A^r{}_\delta f\right\|_{pq,w} \lesssim \left\|\frac{d^{2r}}{dx^{2r}}L^r{}_\delta f\right\|_{pq,w} = \frac{1}{\delta^{2r}}\|(I-\sigma_\delta)^r\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{\delta^{2r}}\Omega_r(f,\delta)_{pq,w}$$

elde ederiz. Böylece $A_\delta^r f \in W_{pq,w}^{2r}$ olur. L_δ operatörü L_w^{pq}'da sınırlı ve

$$I-L_\delta^r = (I-L_\delta)\sum_{j=0}^{r-1}L_\delta^j$$

olduğundan, her $g \in L_w^{pq}$ için

$$\|(I-L_\delta^r)g\|_{pq,w} \lesssim \|(I-L_\delta)g\|_{pq,w} \lesssim \delta^{-3}\int_0^\delta\int_0^u 2t\,\|(I-\sigma_t)g\|_{pq,w}dtdu$$
$$\lesssim \sup_{0<t\leq\delta}\|(I-\sigma_t)g\|_{pq,w}$$

elde ederiz. Bu eşitsizliği $\|f-A_\delta^r f\|_{pq,w} = \|(I-L_\delta{}^r)^r f\|_{pq,w}$ eşitliğinde r defa uygulayarak

$$\|f-A_\delta^r f\|_{pq,w} \lesssim \sup_{0<t_1\leq\delta}\left\|(I-\sigma_{t_1})(I-L_\delta^r)^{r-1}f\right\|_{pq,w}$$
$$\lesssim \sup_{0<t_1,t_2\leq\delta}\left\|(I-\sigma_{t_1})(I-\sigma_{t_2})(I-L_\delta^r)^{r-2}f\right\|_{pq,w}$$
$$\leq\cdots\leq \sup_{\substack{0<t_i\leq\delta\\ i=1,2,\ldots,r}}\left\|\prod_{i=1}^r(I-\sigma_{t_i})f(x)\right\|_{pq,w} = \Omega_r(f,\delta)_{pq,w}$$

elde ederiz. Düzgünlük modülünün K fonksiyoneline denkliğini kullanarak,

$$\Omega_r(f,kt)_{pq,w} \lesssim \inf_{g\in W_{pq,w}^{2r}}\left\{\|f-g\|_{pq,w} + (kt)^{2r}\left\|g^{(2r)}(x)\right\|_{pq,w}\right\}$$
$$\lesssim (1+[k])^{2r}\inf_{g\in W_{pq,w}^{2r}}\left\{\|f-g\|_{pq,w} + t^{2r}\left\|g^{(2r)}(x)\right\|_{pq,w}\right\}$$

$$\lesssim (1+[k])^{2r}\,\Omega_r(f,t)_{pq,w}$$

elde ederiz ve teoremi ispatlamış oluruz.

Trigonometrik yaklaşım teorisinin Jackson tipli düz teoremi ağırlıklı Lorentz uzaylarında aşağıdaki gibi ifade edilmiş ve ispatlanmıştır.

3.4 Teorem.

1$< p,q < \infty$, $w \in A_p(T)$, $r,n \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_w^{pq}(T)$ için

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

ve

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim \Omega_r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizlikleri yalnızca r,p,q parametrelerine bağlı bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat.

$r \in \mathbb{N}$ ve $f \in L_w^{pq}$ olsun. $A_{1/n}^r f$ operatörünü kullanalım. 3.2 Sonuç ve 3.3 Teorem'den

$$\begin{aligned} E_n(f)_{pq,w} = E_n\left(f - A_{1/n}^r f + A_{1/n}^r f\right)_{pq,w} &\leq E_n\left(f - A_{1/n}^r f\right)_{pq,w} + E_n\left(A_{1/n}^r f\right)_{pq,w} \\ &\lesssim \left\|f - A_{1/n}^r f\right\|_{pq,w} + n^{-2r}\left\|\frac{d^{2r}}{dx^{2r}} A_{\frac{1}{n}}^r f(x)\right\|_{pq,w} \\ &\lesssim \Omega^r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \end{aligned}$$

elde edilir ve

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim E_n(f)_{pq,w} \lesssim \Omega^r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

olduğundan Teorem ispatlanmış olur.

Şimdi ikinci tip Jackson eşitsizliği veya ikinci tip düz teorem olarak bilinen aşağıdaki teoremi ağırlıklı Lorentz uzaylarında ifade ve ispat edelim.

3.5 Teorem.

$1 < p, q < \infty$, $w \in A_p(T)$, $r, k, n \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $f \in W^r_{pq,w}$ için

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \Omega_k \left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği yalnızca r, p, q parametrelerine bağlı bir $c > 0$ sabiti ile sağlanır.

İspat.

3.2 Sonuç ve 3.4 Teoremden

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \frac{1}{(n+1)^r} E_n \left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

$$\lesssim \frac{1}{(n+1)^r} \Omega_k \left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA TRİGONOMETRİK YAKLAŞIMIN TERS TEOREMLERİ

Şimdi ağırlıklı Lorentz uzaylarında trigonometrik yaklaşımın ters teoremlerinin nasıl elde edildiğini inceleyelim. Bunun için öncelikle bazı yardımcı teoremler ispatlanmalıdır. Bernstein eşitsizliği olarak bilinen ve trigonometrik yaklaşımın ters teoremlerinin ispatında kritik bir rol oynayan aşağıdaki teorem ağırlıklı Lorentz uzaylarında [19, VI] ve [20] nolu kaynaklarda verilen yöntem izlenerek elde edilir.

4.1 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ olsun. $T_n \in \mathcal{T}_n$ ve $r \in \mathbb{N}$ ise yalnızca r, p'ye bağlı bir $c > 0$ sabiti ile

$$\left\| {T_n}^{(r)} \right\|_{pq,w} \leq cn^r \|T_n\|_{pq,w}$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teorem [16] nolu kaynakta ispatlanmıştır.

4.2 Teorem.

$1 < p, q < \infty$ olsun. Her $f \in L_w^{pq}$ için

$$c^{-1}\|f\|_{pq,w} \leq sup \left| \int_T f(x)g(x)w(x)dx \right| \leq c\|f\|_{pq,w}$$

olacak biçimde pozitif bir c sabiti vardır. Burada supremum $\|g\|_{p'q',w} \leq 1$ koşulunu sağlayan tüm g fonksiyonları üzerinden alınır ve $p' = p/(p-1)$ dir.

4.3 Teorem.

$1 < p, q < \infty$ ve φ iki değişkenli ölçülebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\left\| \int_T \varphi(x,.)dx \right\|_{pq,w} \leq c \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,w}\, dx$$

eşitsizliği geçerlidir.

İspat.

4.2 Teorem, iyi bilinen Fubini teoremi ve Hölder eşitsizliğiyle

$$\left\| \int_T \varphi(x,.)dx \right\|_{pq,w} \leq c \sup_{\|g\|_{p'q',w}\leq 1} \int_T \left(\int_T |\varphi(x,y)|dx \right) |g(y)|w(y)dy$$

$$= c \sup_{\|g\|_{p'q',w}\leq 1} \int_T \left(\int_T |\varphi(x,y)||g(y)|w(y)dy \right) dx$$

$$\leq c \sup_{\|g\|_{p'q',w}\leq 1} \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,w} \|g\|_{p'q',w} dx$$

$$\leq c \int_T \|\varphi(x,.)\|_{pq,w} dx$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.4 Teorem.

$w \in A_p(T)$ ve 1$< p,q < \infty$ olsun. Her $f \in L_w^{pq}$ için

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \leq cE_n(f)_{pq,w}$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir c sabiti vardır.

İspat.

3.1 Teoremin ispatında da belirttiğimiz gibi ağırlıklı Lorentz uzaylarında S_n operatörünün sınırlılığı ispatlanmıştır. Yani

$$\|S_n(f)\|_{pq,w} \leq c\|f\|_{pq,w}$$

eşitsizliği geçerlidir. T_n en iyi yaklaşımın bir trigonometrik polinomu olmak üzere

$$\begin{aligned} \|f - S_n(f)\|_{pq,w} &\leq \|f - T_n(f)\|_{pq,w} + \|T_n - S_n(f)\|_{pq,w} \\ &= \|f - T_n(f)\|_{pq,w} + \|S_n(T_n - f)\|_{pq,w} \\ &\leq cE_n(f)_{pq,w} \end{aligned}$$

olur ve ispat tamamlanır.

Littlewood-Paley teoremi olarak bilinen ve iyileştirilmiş ters teoremlerin ispatında önemli bir rol oynayan aşağıdaki teorem ağırlıklı Lorentz uzaylarında [3, $Teorem$ 5.5] de verilen interpolasyon teoremi yardımıyla ispatlanır [9].

4.5 Teorem.

$w \in A_p(T)$ ve $1 < p, q < \infty$ olsun. $f \in L_w^{pq}$ fonksiyonunun Fourier seri açılımı

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} (a_n cosnx + b_n \sin nx)$$

biçiminde olsun. Bu durumda

$$c_1 \| f \|_{pq,w} \leq \left\| \left(\sum_{m=0}^{\infty} \tau_m^2 (x) \right)^{1/2} \right\|_{pq,w} \leq c_2 \| f \|_{pq,w}$$

olacak biçimde f'den bağımsız $c_1$ve c_2 pozitif sabitleri vardır. Burada

$$\tau_m(x) = \sum_{n=2^{m-1}}^{2^m - 1} (a_n cosnx + b_n \sin nx), \qquad \tau_0 = a_0$$

dır.

4.6 Teorem.

$f \in W_{pq,w}^{(2l)}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_l \left(f^{(2l)}, \delta \right)_{pq,w} \leq c \delta^{2l} \left\| f^{(l)} \right\|_{pq,w}$$

olacak biçimde δ ve f'den bağımsız pozitif bir c sabiti vardır.

İspat.

$\Omega_l(f, \delta) \leq c\delta^2 \Omega_{l-1}(f'', \delta)$ eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir.

$$\beta(x) = \prod_{i=2}^{l} \left(I - \sigma_{h_i} \right) f(x)$$

olsun. Bu durumda

$$\prod_{i=1}^{l} \left(I - \sigma_{h_i} \right) f(x) = \beta(x) - \frac{1}{2h_1} \int_{-h_1}^{h_1} \beta(x+t) dt$$

$$= \frac{1}{2h_1} \int_{-h_1}^{h_1} [\beta(x) - \beta(x+t)] dt$$

$$= -\frac{1}{4h_1} \int_{-h_1}^{h_1} [\beta(x+t) - 2\beta(x) + \beta(x-t)] dt$$

$$= -\frac{1}{8h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t}\int_{-y}^{y}\beta''(x+z)dzdydt$$

eşitlikleri yazılabilir. Burada 4.3 Teorem uygulandığında

$$\left\|\prod_{i=1}^{l}(I-\sigma_{h_i})f\right\|_{L_w^{pq}} \leq \frac{1}{8h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t}\left\|\int_{-y}^{y}\beta''(.+z)dz\right\|_{L_w^{pq}} dydt$$

$$= \frac{1}{8h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t}2y\left\|\frac{1}{2y}\int_{-y}^{y}\beta''(.+z)dz\right\|_{L_w^{pq}} dydt$$

elde edilir. σ_{h_i} operatörünün L_w^{pq} ‘de h’a göre düzgün sınırlılığını kullanarak

$$\left\|\prod_{i=1}^{l}(I-\sigma_{h_i})f\right\|_{pq,w} \leq \frac{c}{8h_1}\int_0^{h_1}\int_0^{t}\|\sigma_y\beta''\|_{pq,w}dydt \leq ch_1^2\,\|\beta''\|_{pq,w}$$

elde ederiz. Son eşitsizlikten

$$\Omega_l(f,\delta)_{pq,w} \leq c \sup_{\substack{0<h_i<\delta\\1\leq i\leq l}} h_1^2\,\|\beta''\|_{pq,w}$$

$$= c\delta^2 \sup_{\substack{0<h_i<\delta\\2\leq i\leq l}}\left\|\prod_{i=2}^{l}(I-\sigma_{h_i})f''\right\|_{pq,w} = c\delta^2\Omega_{l-1}(f'',\delta)_{pq,w}$$

sonucuna ulaşırız ve ispat tamamlanır.

4.7 Teorem.

$1<p<\infty$ ve $1<q\leq 2$ olsun. $\varphi_j \in L_w^{pq}$, $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^{m}$ fonksiyonlarının keyfi bir sistemi için

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{m}\varphi_j{}^2\right)^{1/2}\right\|_{pq,w} \leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\|\varphi_j\|_{pq,w}^{q}\right)^{1/q}$$

eşitsizliği φ_j ve m’den bağımsız bir c sabiti ile sağlanır.

İspat.

İspatta iyi bilinen $(f^*)^\alpha = (f^\alpha)^*$ ve $(f+g)^{**} \leq (f^{**}+g^{**})$ bağıntılarını kullanacağız $[3, s. 41\ ve\ 54]$. Hardy eşitsizliğiyle $[3, s. 129]$

$$I := \left\| \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{1/2} \right\|_{pq,w}$$

$$\leq c \left(\int_T \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{1/2} \right)^* \right)^q (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$= c \left(\int_T \left(\left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^2 \right)^{q/2} \right)^* (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^q \right)^* (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

elde ederiz. Böylece

$$I \leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} {\varphi_j}^q \right)^{**} (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\int_T \left(\sum_{j=1}^{m} \left({\varphi_j}^q \right)^{**} (t) \right) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^q \right)^{**} (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Hardy eşitsizliği tekrar uygulandığında

$$I \leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^q \right)^{*} (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} \leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^{*} \right)^q (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q}$$

$$\leq c \left(\sum_{j=1}^{m} \int_T \left({\varphi_j}^{**} \right)^q (t) t^{\frac{q}{p}-1} dt \right)^{1/q} = c \left(\sum_{j=1}^{m} \left\| \varphi_j \right\|_{pq,w}^q \right)^{1/q}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

4.8 Teorem.

$2 < p < \infty$ ve $q \geq 2$ olsun. $\varphi_j \in L_w^{pq}$, $\left\{ \varphi_j(x) \right\}_{j=1}^{m}$fonksiyonlarının keyfi bir sistemi için

$$\left\|\left(\sum_{j=1}^{m}{\varphi_j}^2\right)^{1/2}\right\|_{pq,w} \leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|\varphi_j\right\|_{pq,,w}^2\right)^{1/2}$$

eşitsizliği φ_j ve m'den bağımsız bir c sabiti ile sağlanır.

İspat.

Ağırlıklı Lorentz normu tanımından

$$I := \left\|\left(\sum_{j=1}^{m}{\varphi_j}^2\right)^{1/2}\right\|_{pq,w} = \left(\int_T \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m}{\varphi_j}^2\right)^{1/2}\right)^{**}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

olur. Teoremin koşulları altında $L_w^{\frac{p}{2}\frac{q}{2}}$ normlu uzay olur. Bunu dikkate alarak ve Hardy eşitsizliğini kullanarak

$$I \leq c\left(\int_T \left(\left(\left(\sum_{j=1}^{m}{\varphi_j}^2\right)^{1/2}\right)^{*}(t)\right)^q t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

$$= c\left(\int_T \left(\left(\sum_{j=1}^{m}{\varphi_j}^2\right)^{*}(t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{1/q}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_T \left(\left({\varphi_j}^2\right)^{**}(t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}\frac{1}{2}}$$

elde ederiz. Toplamın içinde bir kez daha Hardy eşitsizliğini kullanırsak

$$I \leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_T \left(\left({\varphi_j}^2\right)^{*}(t)\right)^{q/2} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_T \left({\varphi_j}^{*}(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\int_T \left({\varphi_j}^{**}(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\left(\int_{T}\left(\varphi_j^{**}(t)\right)^{q} t^{\frac{q}{p}-1}dt\right)^{\frac{2}{q}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c\left(\sum_{j=1}^{m}\left\|\varphi_j\right\|_{pq,w}^{2}\right)^{1/2}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanmış olur.

4.9 Teorem.

$1 < p,q < \infty$, $w \in A_p(T)$ ve $f \in L_w^{pq}(T)$ olsun. f'nin Fourier katsayıları a_k ve b_k ve

$$B_{k,\mu}(x) = a_k \cos\left(k + \mu\frac{\pi}{2}\right)x + b_k \sin\left(k + \mu\frac{\pi}{2}\right)x$$

olmak üzere

$$\left\|\sum_{k=2^{i}+1}^{2^{i+1}} k^{\mu} B_{k,\mu}\right\|_{pq,w} \leq c2^{i\mu}E_{2^i}(f)_{pq,w}$$

eşitsizliği f ve i'den bağımsız bir c sabiti ile sağlanır.

İspat.

$$\tau_{j,\mu}(x) := \sum_{k=1}^{j} B_{k,\mu}(x)$$

tanımlamasını yapalım. İyi bilinen Abel dönüşümünü kullanarak

$$\sum_{n=2^{i}+1}^{2^{i+1}} k^{\mu} B_{k,\mu}(x) = \sum_{n=2^{i}+1}^{2^{i}+1} [k^{\mu} - (k+1)^{\mu}]\left(\tau_{k,\mu}(x) - \tau_{2^i,\mu}(x)\right) + 2^{i+1}\left(\tau_{2^{i+1},\mu}(x) - \tau_{2^i,\mu}(x)\right)$$

elde ederiz. 4.4 Teorem yardımıyla

$$\left\|\sum_{k=2^{i}+1}^{2^{i+1}} k^{\mu} B_{k,\mu}\right\|_{pq,w} \leq c\sum_{n=2^{i}+1}^{2^{i+1}} [(k+1)^{\mu} - k^{\mu}]E_{2^i}(f)_{L_w^{pq}} + c2^{i\mu}E_{2^i}(f)_{pq,w} \leq c2^{i\mu}E_{2^i}(f)_{pq,w}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Ağırlıklı Lorentz uzayında iyileştirilmiş ters teorem aşağıdaki gibi ifade ve ispat edilir.

4.10 Teorem.

$1 < p < \infty$ ve $1 < q \leq 2$ veya $p > 2$ ve $q \geq 2$ olsun. Bu durumda, $n \in N,\ w \in A_p(T)$, $f \in L_w^{pq}(T)$ ve $\gamma = min(q, 2)$ olmak üzere

$$\Omega_l\left(f, \frac{1}{n}\right)_{pq,w} \leq \frac{c}{n^{2l}}\left(\sum_{k=1}^{n} k^{2l\gamma-1} E_{k-1}^{\gamma}(f)_{pq,w}\right)^{1/\gamma}$$

eşitsizliği pozitif bir c sabiti ile sağlanır.

İspat.

$2^m < n \leq 2^{m+1}$ ve $\delta = \frac{1}{n}$ olsun. Bu durumda

$$\Omega_l(f, \delta)_{pq,w} \leq \Omega_l\left(\left(f - S_{2^{m+1}}(f)\right), \delta\right)_{pq,w} + \Omega_l(S_{2^{m+1}}, \delta)_{pq,w}$$

eşitsizliği geçerlidir. L_w^{pq}'de σ_h ortalama operatörünün düzgün sınırlılığı kullanılarak

$$\Omega_l\left(\left(f - S_{2^{m+1}}(f)\right), \delta\right)_{pq,w} \leq c\|f - S_{2^{m+1}}\|_{pq,w} \leq cE_n(f)_{pq,w}$$

elde edilir. 4.6 Teorem'e göre

$$\Omega_l(S_{2^{m+1}}, \delta)_{pq,w} \leq c\delta^{2l}\left\|S_{2^{m+1}}^{(2l)}\right\|_{pq,w}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\Omega_l(S_{2^{m+1}}, \delta)_{pq,w} \leq c\delta^{2l}\left\{\left\|S_1^{(2l)} - S_0^{(2l)}\right\|_{pq,w} + \left\|\sum_{i=0}^{m}\left[S_{2^{i+1}}^{(2l)} - S_{2^i}^{(2l)}\right]\right\|_{pq,w}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin sağ tarafındaki ilk terim için

$$\left\|S_1^{(2l)} - S_0^{(2l)}\right\|_{pq,w} \leq c(|a_1| + |b_1|) \leq cE_0(f)_{pq,w}$$

elde ederiz. İkinci terime 4.5 Teorem'i uygularsak

$$\left\|\sum_{i=0}^{m}\left[S_{2^{i+1}}^{(2l)} - S_{2^i}^{(2l)}\right]\right\|_{pq,w} = \left\|\sum_{i=0}^{m}\sum_{k=2^i+1}^{2^{i+1}} k^{2l}B_{k,2l}(x)\right\|_{pq,w}$$

$$\leq c\left\|\left(\sum_{i=0}^{m}\left|\sum_{k=2^{i}+1}^{2^{i+1}} k^{2l}B_{k,2l}(x)\right|^{2}\right)^{1/2}\right\|_{pq,w}$$

buluruz. 4.7 Teorem ve 4.8 Teorem yardımıyla

$$\left\|\sum_{i=0}^{m}\left[S_{2^{i+1}}^{(2l)}-S_{2^{i}}^{(2l)}\right]\right\|_{pq,w} \leq c\left(\sum_{i=1}^{m}\left\|\sum_{k=2^{i}+1}^{2^{i+1}} k^{2l}B_{k,2l}(x)\right\|_{pq,w}^{\gamma}\right)^{1/\gamma}$$

sonucunu elde ederiz. Burada $\gamma = min(q,2)$ dir. 4.9 Teorem ile

$$\left\|\sum_{i=0}^{m}\left[S_{2^{i+1}}^{(2l)}-S_{2^{i}}^{(2l)}\right]\right\|_{pq,w} \leq c\left(\sum_{i=1}^{m} 2^{2\gamma li}\, E_{2^{i}}^{\gamma}(f)_{pq,w}\right)^{1/\gamma}$$

bulunur. Böylece elde edilen bütün eşitsizlikler birlikte düşünüldüğünde

$$\Omega_l(f,\delta)_{pq,w} \leq\ c\delta^{2l}\left[E_0(f)_{pq,w}+E_n(f)_{pq,w}+\left(\sum_{i=1}^{m} 2^{2\gamma li}\, E_{2^{i}}^{\gamma}(f)_{pq,w}\right)^{1/\gamma}\right]$$

sonucuna ulaşırız. $E_k(f)_{pq,w}$ monoton azalan olduğundan

$$\Omega_l(f,\delta)_{pq,w} \leq \frac{c}{n^{2l}}\left(\sum_{i=1}^{m} k^{2l\gamma-1}\, E_{k-1}^{\gamma}(f)_{pq,w}\right)^{1/\gamma}$$

eşitsizliği elde edilir ve ispat tamamlanır.

Bu teorem trigonometrik yaklaşım teorisinde iyileştirilmiş ters teorem olarak bilinir. Özel olarak $\gamma = 1$ alındığında aşağıdaki klasik ters teorem elde edilir:

$f \in L_w^{pq}(T)$, $w \in\ A_p(T)$ ve $1 < p, q < \infty$ olsun. $n \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega^r\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \lesssim \frac{1}{n^{2r}}\sum_{k=0}^{n}(k+1)^{2r-1}E_k\,(f)_{pq,w} \qquad , \quad r \in \mathbb{N}$$

yalnızca r, p, q'ya bağlı bir sabit ile sağlanır.

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında ispat süreçlerini verdiğimiz düz ve ters yaklaşım teoremleri birlikte düşünülerek Marchaud tipi eşitsizlik olarak bilinen aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.11 Sonuç.

$f \in L_w^{pq}(T)$, $w \in A_p(T)$ ve $1 < p, q < \infty$ olsun. Bu durumda $r \in \mathbb{N}$ için,

$$\Omega_r(f,\delta)_{pq,w} \lesssim \delta^{2r} \int_{\delta}^{1} \frac{\Omega_{r+1}(f,u)_{pq,w}}{u^{2r}} \frac{du}{u}, \quad 0 < \delta < 1 ,$$

değerlendirmesi geçerlidir.

Yine düz ve ters teoremlerin sonucu olarak 4.12 Sonuç elde edilir.

4.12 Sonuç.

$f \in L_w^{pq}(T)$, $w \in A_p(T)$ ve $1 < p, q < \infty$ olsun. Eğer bir $\alpha > 0$ için

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim n^{-\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

ise, verilen bir $r \in \mathbb{N}$ için

$$\Omega_r(f,\delta)_{pq,w} \lesssim \begin{cases} \delta^{\alpha} & , r > \alpha/2 \\ \delta^{2r} \log \frac{1}{\delta} & , r = \alpha/2 \\ \delta^{2r} & , r < \alpha/2 \end{cases}$$

değerlendirmeleri sağlanır.

Ağırlıklı Lorentz uzaylarında genelleştirilmiş Lipschitz sınıfı

$$Lip(\alpha, pq, w) := \left\{ f \in L_w^{pq} : \Omega_k(f,\delta)_{pq,w} \leq \delta^{\alpha}, \quad \delta > 0 \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $\alpha > 0$, $k := \left[\frac{\alpha}{2}\right] + 1$ dir.

3.4 Teorem ve 4.12 Sonuç birlikte düşünüldüğünde $Lip(\alpha, pq, w)$ Lipschitz sınıflarının aşağıdaki yapısal karakterizasyonunu elde ederiz.

4.13 Sonuç.

$f \in L_w^{pq}(T)$, $w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $\alpha > 0$ olsun. Aşağıdaki iddialar birbirine denktir.

$$(i)\ f \in Lip\left(\alpha, L_w^{pq}\right) \qquad (ii)\ E_n(f)_{L_w^{pq}} \lesssim n^{-\alpha}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

5. AĞIRLIKLI LORENTZ UZAYLARINDA EŞ ZAMANLI YAKLAŞIM TEOREMLERİ

Yaklaşım teorisinde eş zamanlı yaklaşım teoremlerinde, incelenen fonksiyon uzayından olan fonksiyonların türevlerine, trigonometrik polinomların türevleriyle yaklaşım problemleri incelenir. $f \in W_{pq,w}^{r}$ ve yaklaşan trigonometrik polinom olarak S_n alındığında aşağıdaki eş zamanlı yaklaşım teoremleri elde edilmiştir $[1, 21, 22]$.

5.1 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $r, k, n \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in W_{pq,w}^{r}$ ve $0 \leq k \leq r$ için,

$$\left\|f^{(k)} - S_n{}^{(k)}\right\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{n^{r-k}} E_n\left(f^{(r)}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği yalnızca r, p, q'ya bağlı pozitif bir sabit ile sağlanır.

İspat.

$q, t^* \in \mathcal{T}_n$ ve $E_n\left(f^{(k)}\right)_{pq,w} = \left\|f^{(k)} - q\right\|_{L_w^{pq}}$, $E_n(f)_{pq,w} = \|f - t^*\|_{pq,w}$ olsun. Bu durumda $\left(S_n(f,.)\right)^{(k)} = S_n\left(f^{(k)},.\right)$ olduğunu dikkate alarak,

$$\begin{aligned}
\left\|f^{(k)} - S_n{}^{(k)}\right\|_{pq,w} &\leq \left\|f^{(k)} - S_n\left(f^{(k)},.\right)\right\|_{pq,w} + \left\|S_n{}^{(k)} - (t_n^*)^{(k)}\right\|_{pq,w} \\
&\leq \left\|f^{(k)} - q\right\|_{pq,w} + \left\|q - S_n\left(f^{(k)},.\right)\right\|_{pq,w} + \left\|(S_n(f,.) - t_n^*)^{(k)}\right\|_{pq,w} \\
&\lesssim E_n\left(f^{(k)}\right)_{pq,w} + \left\|S_n\left(q - f^{(k)},.\right)\right\|_{pq,w} + n^k\|S_n(f,.) - t_n^*\|_{pq,w} \\
&\lesssim E_n\left(f^{(k)}\right)_{pq,w} + n^k\|S_n(f,.) - S_n(t_n^*,.)\|_{pq,w} \\
&\lesssim n^{k-r}E_n\left(f^{(r)}\right)_{pq,w} + n^k E_n(f)_{pq,w} \lesssim n^{k-r}E_n\left(f^{(r)}\right)_{pq,w}
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

5.2 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $r, k, l \in \mathbb{N}$ olsun. Her $f \in W_{pq,w}^{r}$ ve $0 \leq k \leq r$ için,

$$\left\|f^{(k)} - S_n{}^{(k)}\right\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{n^{r-k}} \Omega_l\left(f^{(r)}, \frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği yalnızca r, p, q'ya bağlı pozitif bir sabit ile sağlanır.

İspat.

$f \in W^r_{pq,w}$ için $f^{(k)} \in W^{r-k}_{pq,w}$ olur. $\left(S_n(f,.)\right)^{(k)} = S_n\left(f^{(k)},.\right)$ eşitliğini, 3.2 Sonuç ve 3.4 Teorem'i kullanarak

$$\left\|f^{(k)} - S_n{}^{(k)}(f)\right\|_{pq,w} \lesssim \left\|f^{(k)} - S_n\left(f^{(k)}\right)\right\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{n^{r-k}}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

elde ederiz ve ispat tamamlanır.

$f \in W^r_{pq,w}$ ve yaklaşan trigonometrik polinom olarak V_n alındığında ise aşağıdaki eş zamanlı yaklaşım teoremleri elde edilmiştir.

Öncelikle $[17, \text{Teorem } 2.1]$ in ispat yöntemi ve 3.4 Teorem kullanılarak aşağıdaki yardımcı teorem ispatlanabilir.

5.3 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $l \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $f \in W^r_{pq,w}$ ve $r = 0,1,2,\ldots$ için,

$$\|f - V_n(f)\|_{pq,w} \leq \frac{c}{(n+1)^r}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n+1}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği n'den bağımsız bir $c > 0$ bir sabiti ile sağlanır.

5.4 Teorem.

$w \in A_p(T)$, $1 < p, q < \infty$ ve $r, k, l \in \mathbb{N}$ olsun. Bu durumda her $f \in W^r_{pq,w}$ ve $0 \leq k \leq r$ için,

$$\left\|f^{(k)} - V_n{}^{(k)}(f)\right\|_{pq,w} \lesssim \frac{1}{n^{r-k}}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği n'den bağımsız pozitif bir sabit ile sağlanır.

İspat.

$f \in W^r_{pq}$ ve $T_n^* \in \mathcal{T}_n$ $(n = 0,1,2,\ldots)$ f'ye en iyi yaklaşım polinomu olsun.

Normun özelliklerine göre

$$\left\|f^{(k)} - V_n{}^{(k)}(f)\right\|_{pq,w} \leq \left\|f^{(k)} - (T_n^*)^{(k)}\right\|_{pq,w} + \left\|(T_n^*)^{(k)} - V_n{}^{(k)}(f)\right\|_{pq,w}$$

eşitsizliği sağlanır. 5.1 Teorem ve 3.4 Teorem ile

$$\left\|f^{(k)}-(T_n^*)^{(k)}\right\|_{pq,w} \preccurlyeq \frac{1}{n^{r-k}} E_n\left(f^{(r)}\right)_{pq,w} \preccurlyeq \frac{1}{n^{r-k}} \Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

elde edilir. 5.3 Teorem, 4.1 Teorem ve 3.5 Teorem'den

$$\begin{aligned}\left\|(T_n^*)^{(k)}-V_n^{(k)}(f)\right\|_{pq,w} &\preccurlyeq n^k\left\{\|V_n(f)-f\|_{pq,w}+\|f-T_n^*\|_{pq,w}\right\}\\ &\preccurlyeq n^k\left\{\frac{1}{n^r}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}+E_n(f)_{pq,w}\right\}\\ &\preccurlyeq \frac{1}{n^{r-k}}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}\end{aligned}$$

bulunur ve sonuç olarak

$$\left\|f^{(k)}-(V_n)^{(k)}\right\| \preccurlyeq \frac{1}{n^{r-k}}\Omega_l\left(f^{(r)},\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

5.5 Teorem.

$w\epsilon A_p(T), 1<p,q<\infty$ ve $l\epsilon\mathbb{N}$ olsun. Her $f\in L_w^{pq}$ için

$$c_1\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \le \left(n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}+\|f-V_n(f)\|_{pq,w}\right) \le c_2\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizlikleri n'den bağımsız $c_1$ve c_2 sabitleri ile sağlanır. Aynı koşullar altında

$$c_3\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \le \left(n^{-2l}\left\|S_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}+\|f-S_n(f)\|_{pq,w}\right) \le c_4\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizlikleri de n'den bağımsız $c_3$ve c_4 sabitleri ile sağlanır.

İspat.

[1] nolu kaynakta Lemma 1 in ispatında benzeri kullanılan

$$\Omega_l\left(V_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \lesssim n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}$$

eşitsizliği ve $\Omega_{pq,w}^l\left(f,\frac{1}{n}\right)$ düzgünlük modülünün özellikleri yardımıyla

$$\begin{aligned}\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} &\le \left(\Omega_l\left(f-V_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w}+\Omega_l\left(V_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w}\right)\\ &\lesssim \left(\|f-V_n(f)\|_{pq,w}+n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi $\Omega_l(f,.)_{pq,w}$ düzgünlük modülünü alttan değerlendirelim. 3.3 Teorem ve 3.4 Teorem ile

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w},$$

$$n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w} \lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w},$$

eşitsizliklerine sahibiz. $T_n^* \in \mathcal{T}_n$, $L_w^{pq}(T)$ ‘de f’ye en iyi yaklaşım polinomu olsun. Yani,

$$\|f - T_n^*\|_{L_w^{pq}} = E_n(f)_{pq,w}.$$

Böylece

$$\|f - V_n(f)\|_{L_w^{pq}} \leq \|f - T_n^*\|_{pq,w} + \|T_n^* - V_n(f)\|_{pq,w}$$

$$\lesssim E_n(f)_{pq,w} + \|V_n(T_n^* - f,.)\|_{L_w^{pq}} \lesssim E_n(f)_{pq,w}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Dolayısıyla

$$n^{-2l}\left\|V_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w} + \|f - V_n(f)\|_{pq,w} \lesssim \left(\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} + E_n(f)_{pq,w}\right)$$

$$\lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

elde edilir ve teoremdeki birinci değerlendirme ispatlanmış olur.

Şimdi ikinci değerlendirmedeki eşitsizlikleri ispatlayalım. Yine [1] nolu kaynakta Lemma 1’in ispatında benzeri kullanılan

$$\Omega_l\left(S_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \lesssim n^{-2l}\left\|S_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}$$

eşitsizliği ve $\Omega_{pq,w}^l\left(f,\frac{1}{n}\right)$ düzgünlük modülünün özellikleri kullanılarak,

$$\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} \leq \left(\Omega_l\left(f-S_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w} + \Omega_l\left(S_n(f),\frac{1}{n}\right)_{pq,w}\right)$$

$$\lesssim \left(\|f - S_n(f)\|_{pq,w} + n^{-2l}\left\|S_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w}\right)$$

elde edilir. Şimdi $\Omega_{pq,w}^l(f,.)$ düzgünlük modülünü alttan değerlendirelim.

$$E_n(f)_{pq,w} \lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

$$n^{-2l}\left\|S_n^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w} \lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

$T_n^* \in \mathcal{T}_n$, $L_w^{pq}(T)$ ‘de f’ye en iyi yaklaşım polinomu olsun. Yani,

$$\|f - T_n{}^*\|_{L_w^{pq}} = E_n(f)_{pq,w}.$$

Böylece

$$\|f - S_n(f)\|_{pq,w} \leq \|f - T_n{}^*\|_{pq,w} + \|T_n{}^* - S_n(f)\|_{pq,w}$$
$$\lesssim E_n(f)_{pq,w} + \|S_n(T_n{}^* - f,.)\|_{pq,w} \lesssim E_n(f)_{pq,w}$$

eşitsizliklerini yazabiliriz. Dolayısıyla

$$n^{-2l}\left\|S_n{}^{(2l)}(f)\right\|_{pq,w} + \|f - S_n(f)\|_{pq,w} \lesssim \left(\Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w} + E_n(f)_{pq,w}\right)$$
$$\lesssim \Omega_l\left(f,\frac{1}{n}\right)_{pq,w}$$

elde edilir ve Teorem ispatlanmış olur.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, ağırlıklı Lorentz uzaylarından olan fonksiyonlara bu fonksiyonların Fourier serisinin kısmi toplamları ve Poussin ortalamalarıyla yaklaşım problemi incelenmiştir.

5. bölümde ağırlıklı Lorentz uzaylarında ispatlanan eş zamanlı trigonometrik yaklaşım teoremleri ağırlıklı değişken üslü Lebesgue uzaylarında da ispatlanabilir.

7. KAYNAKLAR

[1] Akgün, R. and Yildirir, Y. E., Jackson-Stechkin type inequality in weighted Lorentz spaces, Math. Inequal. Appl., 18, 4 (2015) 1283-1293.

[2] Akgun, R. and Kokilashvili, V., Approximation by trigonometric polynomials of functions having (a, y)-derivatives in weighted variable exponent Lebesgue spaces, J. Math. Sci., New York 184, No 4, 371–382 (2012).

[3] Akgün, R. and Yildirir, Y. E., Improved direct and converse theorems in weighted Lorentz spaces. Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin 23 (2016), no. 2, 247–262.

[4] Ditzian, Z. and Totik V., K-functionals and best polynomial approximation in weighted Lp(R) , J. Approx. Theory, (1986), no. 1, 38–41.

[5] Gadjieva, E. A., Investigation the Properties of Functions with Quasimonotone Fourier Coefficients in Generalized Nikolskii-Besov Spaces, (Russian), Authors Summary of Candidates Dissertation, Tbilisi (1986).

[6] Jackson, D., Uber die Genauigkeit der Annaherung stetiger Funktionen durch ganzer rationaler Funktionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung, Dissertation, Gottingen, 1911.

[7] Kokilashvili, V. M. and Yildirir, Y. E., On the approximation by trigonometric polynomials inweighted Lorentz spaces, J. Funct. Spaces Appl., 8 (2010), No. 1, 67–86.

[8] Kokilashvili, V. M. and Yildirir, Y. E., On the approximation in weighted Lebesgue spaces, Proc. A. Razmadze Math. Inst., 143 (2007), 103–113.

[9] Steckin, S. B., On the order of the best approximation of continuous functions, Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 15 (1951), 219–242. (Russian) MR 13, 29.

[10] Stepanets, A. I., Classification and Approximation of Periodic Functions, English translation 1995, Kluwer Academic Publishers, Russian original published in Kiev by Naukova Dumka 1987.

[11] Timan, A. F., Theory of Approximaton of Functions of a Real Variable, English translation 1963, Pergamon Press, The MacMillan Co., Russian original published in Moscow by Fizmatgiz 1960.

[12] Lorentz, G. G., On the theory of spaces L, Pacific J. Math. 1 (1951), 411–429.

[13] Yildirir, Y. E. and Israfilov, D. M., Simultaneous and converse approximation theorems in weighted Lebesgue spaces, Math. Ineq. & Appl., 14, 2, (2011), 359–371.

[14] Yildirir, Y. E. and Israfilov, D. M., Approximation theorems in weighted Lorentz spaces. Carpathian J. Math. 26 (2010), no. 1, 108–119.

[15] Yurt, H. and Guven, A., Multivariate Approximation theorems in weighted Lorentz spaces. Mediterr. J. Math. 12 (2015), no. 3, 863–876.

[16] Kokilashvili, V. and Krbec, M., Weighted inequalities in Lorentz and Orlicz spaces, World Scientific Publishing Co. Inc. River Edge, NJ, 1991.

[17] Sharapudinov, I. I., On direct and inverse theorems of approximation theory in vector Lebesgue and Sobolev spaces, Azerb. J. Math. 4 (2014), no. 1, 55–72.

[18] Sharapudinov, I. I., Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(x)}$by trigonometric polynomials, Izv. RAN. Ser. Mat., 77 (2013), no. 2, 197–224

[19] Zygmund, A., Trigonometric Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968

[20] Ky, N. X., An Alexits's lemma and its applications in approximation theory, Functions, Series, Operators, Budapest, 2002 (L. Leindler, F. Schipp, J. Szabados, eds.), 287-296

[21] Jafarov, S. Z., On moduli of smoothness and approximation by trigonometric polynomials in weighted Lorentz spaces, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Volume 45 (6) (2016), 1675-1684

[22] Jafarov, S. Z., Simultaneous approximation properties of de la vallee- Poussin means in weighted Orlicz spaces, Journal of Classical Analysis Volume 17, Number 2 (2021), 189–198