T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BERGMAN ORTOGONAL POLİNOMLARINA GÖRE FOURIER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIĞI

SELVER SAYIN AYDIN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç . Dr. Burçin OKTAY YÖNET**
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Prof. Dr. Fatma AYAZ

BALIKESİR, OCAK -2024

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Bergman Ortogonal Polinomlarına Göre Fourier Serilerinin Maksimal Yakınsaklığı**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Selver SAYIN AYDIN

ÖZET

BERGMAN ORTOGONAL POLİNOMLARINA GÖRE FOURIER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIĞI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
SELVER SAYIN AYDIN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ.DR. BURÇİN OKTAY YÖNET)

BALIKESİR, OCAK - 2024

Bu çalışmanın amacı; Bergman uzaylarında bir fonksiyonun, bölgenin Bergman ortogonal polinomlarına göre inşa edilen Fourier serisinin yakınsaklık ve maksimal yakınsaklık özelliklerini araştırmaktır. Tez altı bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölümde; yaklaşım teorisinde araştırılan problemler ve yaklaşım teorisinin gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.İkinci bölümde; bu çalışmada kullandığımız temel tanım ve teoremler genel hatlarıyla verilmiş, bazı örneklendirmeler yapılmıştır. Üçüncü bölümde; Bergman uzayı tanımı ve bu uzayda tanımlı iç çarpıma göre bazı lemma ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde; Bergman ortogonal polinomları tanıtılmış, Hilbert ve Bergman uzaylarında ortonormal sistemlere göre açılımlar incelenmiştir.Beşinci bölümde; önce kompleks düzlemde cebirsel polinomlarla yaklaşımın mümkünlüğünü ifade eden klasik teoremler incelenmiş, sonra da Fourier serilerinin, bölgenin ortonormal polinomlarına göre yakınsaklığı araştırılmış, çeşitli bölge durumlarında yaklaşım hızının değerlendirildiği bazı teoremlere yer verilmiştir.Altıncı bölümde; önce polinomun kapalı bölgedeki maksimal değerine göre daha geniş bölgedeki artış hızını ifade eden Bernstein & Walsh lemması verilmiştir. Son olarak kanonik bölgede analitik olan bir f fonksiyonunun, bölgenin ortonormal polinomlarına göre inşa edilen Fourier serisinin maksimal yakınsaklığı bölgenin kapanışı durumunda Walsh'un teoreminde ve kanonik bölgenin kapanışı durumunda Suetin'in teoreminde incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bergman uzayları, Bergman ortogonal polinomları, Fourier serileri, maksimal yakınsaklık, yakınsaklık hızı
Bilim Kod / Kodları : 20404 Sayfa Sayısı : 40

ABSTRACT

MAXIMAL CONVERGENCE OF FOURIER SERIES ACCORDING TO BERGMAN ORTHOGONAL POLYNOMIALS
MSC THESIS
SELVER SAYIN AYDIN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. BURÇİN OKTAY YÖNET)

BALIKESİR, JANUARY - 2024

The aim of the thesis, is to search properties of the convergence and maximal convergence of the Fourier series of a function in the Bergman spaces, which is constructed with the Bergman orthogonal polynomials of the domain. The thesis consists of six chapters.
In the first chapter, the knowledge about the problems and the developments of the approximation theory are given. In the second chapter, the fundamental definitions and theorems and some examples are included. In the third chapter, the definition of Bergman space and some lemmas and theorems according to the inner product of this space are given. In the fourth chapter, the Bergman orthogonal polynomials are introduced and the expansions to the ON systems in a Hilbert space and the Bergman space are investigated. In the fifth chapter, firstly the classical theorems expressing the possibility of approximation with algebraic polynomials in the complex plane are examined, and then the convergence of Fourier series with respect to the orthonormal polynomials of the domain is investigated, some theorems in which the rate of convergence is estimated in the case of some domains are given. In the sixth chapter, firstly Bernstein & Walsh lemma on the rate of growth of polynomials on a larger domain via to the maximal value of their in the closed domain are given. Finally, the maximal convergence of Fourier series of an analytic function f in the canonical domain, constructed with orthonormal polynomials of the domain is examined in the Walsh's theorem in case of closure of the region and in the Suetin's theorem in case of closure of the canonical region.

KEYWORDS: Bergman spaces, Bergman orthogonal polynomials, Fourier series, maximal convergence, rate of convergence
Science Code / Codes : 20404 Page Number : 40

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{C}$	: Kompleks düzlem
$\boldsymbol{D}$	: Kompleks düzlemde birim disk
$\overline{\boldsymbol{D}}$	: D nin kapanışı
$\boldsymbol{D}^-$	: $\overline{D}$ nin tümleyeni
$\boldsymbol{E_p(G)}$	: G üzerinde Smirnov uzayı
$\boldsymbol{E_n(f)_p}$	: $E_p(G)$ uzayında polinomlarla en iyi yaklaşım sayısı
$\mathbb{F}$	: Reel ya da kompleks değerli skaler sayılar kümesi
$\boldsymbol{G}$	: Basit bağlantılı bölge
$\overline{\boldsymbol{G}}$	: G nin kapanışı
$\boldsymbol{G}^-$	: $\bar{G}$ nin tümleyeni
$\boldsymbol{\Gamma}$	: Sonlu uzunluklu eğri
$\boldsymbol{\Gamma_R}$	: R>1 olmak üzere seviye eğrileri
$\boldsymbol{G_R}$	: R>1 olmak üzere fonksiyonun analitik olabileceği en geniş bölge
$\boldsymbol{L_p(\Gamma)}$	: Γ üzerinde Lebesgue uzayı
$\boldsymbol{L_2(G)}$	: Bergman uzayı
$\boldsymbol{P_n(z)}$	: n. dereceden polinom
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans öğrenimim ve tez çalışmam boyunca bana yardımcı olan, yolumu aydınlatan, her daim ilgi ve desteğini benden esirgemeyen değerli danışmanım Doç. Dr. Burçin OKTAY YÖNET’e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Lisans eğitimimden bu yana üzerimde büyük emeği olan değerli hocalarım Prof. Dr. Daniyal M. İSRAFİLZADE ve Prof. Dr. Ali GÜVEN’e teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatımın her aşamasında bana destek olan ve bugünlere gelmemde büyük katkıları olan başta kıymetli annem ile babama ve hayattaki en büyük şansım, sevgili eşim Abdullah’a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2024 **Selver SAYIN AYDIN**

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde belirli özelliklere sahip fonksiyon uzaylarının elemanlarına, bu uzayın bir alt uzayında olup daha iyi özelliklere sahip olan fonksiyonlarla yaklaşım problemleri incelenir. Bu problemler incelenirken iki önemli kavram olan en iyi yaklaşan polinom ve en iyi yaklaşım sayısı kullanılır. Bu tez çalışmasında yaklaşan polinomlar olarak Bergman uzayından olan bir fonksiyonun, G bölgesinin Bergman ortogonal polinomlarına göre ifade edilen Fourier serisinin kısmi toplamı alınır.

Literatürde, belli sınır özelliklere sahip bölgelerin ortonormal polinomlarına göre Fourier serileriyle yakınsaklıklar ile ilgili bazı sonuçlar mevcuttur: Pritsker [1]‘de G’nin parçalı analitik eğri ile sınırlı bölgeler durumunda, Abdullayev ve Küçükaslan da [2]’ deki çalışmalarında kvazikonform eğriyle sınırlı bölgeler durumunda bölgenin ortonormal polinomlarıyla inşa edilen Fourier serileriyle yakınsaklık hızlarını araştırmışlardır.

$R>1$, f’in G_R içinde analitik olabileceği en büyük sayı olmak üzere, f fonksiyonunun G’nin ortonormal polinomlarına göre Fourier serisinin yakınsaklığını Walsh, Fourier serilerinin “maksimal yakınsaklığı” olarak adlandırmıştır [3]. Literatürde maksimal yakınsaklık üzerine yapılan çalışmalar incelendiğinde ilk olarak Bernstein ve Walsh’un derecesi en fazla n olan polinomların maksimal yakınsaklığı üzerine çalışmaları görülmektedir [4]. Bernstein ve Walsh, f fonksiyonunun G_R, $R>1$, kanonik bölgesinde analitik olması durumunda polinomlarla yaklaşımın düz ve ters teoremlerini araştırmışlardır. Suetin [5] de G’nin regüler analitik eğri ile sınırlı bölge olması durumunda bölgenin ortonormal polinomlarına göre Fourier serileriyle maksimal yakınsaklık üzerine sonuçlar elde etmiştir. Bu söz konusu $L_2(G)$’deki iç çarpıma göre ortonormal olan polinomlar günümüzde pek çok makalede Bergman ortogonal polinomları olarak adlandırılmaktadır ([6], [7]).

Bu tez çalışmasında bir Hilbert uzayı olan $L_2(G)$ Bergman uzayları, Bergman uzaylarındaki ON (ortonormal) açılımlar, Bergman ortogonal polinomlarının özellikleri araştırılmış ve bu polinomlarla inşa edilen Fourier serilerinin yaklaşımı üzerine yapılan çalışmalar derlenmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Temel Tanımlar ve Örnekler

2.1.1 Tanım: X bir vektör uzayı olsun.

$||.||: \boldsymbol{X} \to \mathbb{R}$

$x \to ||.||$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa buna X uzayı üzerinde bir ***norm*** denir.

I. Her $x \in X$ için $||x|| \geq 0$

II. $||x||=0 \Leftrightarrow x=0_x$

III. Her $x \in X$ ve her $\alpha \epsilon \mathbb{F}$ için $||\alpha x||=|\alpha|.||x||$

IV. Her $x, y \in X$ için $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$

2.1.2 Tanım: Üzerinde bir norm tanımlanmış olan vektör uzayına ***normlu uzay*** denir. [8]

2.1.3 Tanım: Eğer bir X normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ve limiti de yine X uzayına ait ise X normlu uzayına bir ***Banach uzayı*** denir.

2.1.4 Tanım: X bir vektör uzayı olsun. Bir

φ: XxX$\to \mathbb{F}$

$(x, y) \to \varphi(x, y) = \langle x, y \rangle$

fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu fonksiyona X uzayı üzerinde bir ***iç çarpım*** denir:

I. Her $x, y \in X$ için $\overline{\langle x, y \rangle} = \langle y, x \rangle$

II. Her $x \in X$ için $\langle x, x \rangle \geq 0$

$\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0_x$

III. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \epsilon \mathbb{F}$ için $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$

IV. Her $x, y, z \in X$ için $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$

Üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış olan X vektör uzayına bir ***iç çarpım uzayı*** denir.[1, s.276]

2.1.5 Tanım: H bir iç çarpım uzayı olsun. Eğer H uzayı

$\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$

normuna göre bir Banach uzayı ise bu uzaya bir ***Hilbert uzayı*** denir.

2.1.6 Tanım: x ve y iki vektör olsun. Eğer $\langle \boldsymbol{x}, \mathbf{y} \rangle$=0 ise x ve y vektörleri ***ortogonaldir*** denir ve **x**$\perp$**y** ile gösterilir.[1, s.282]

2.1.7 Tanım: Bir iç çarpım uzayındaki vektörler kümesi S olsun. Eğer S'nin birbirinden farklı herhangi iki vektörü ortogonal ise S'ye bir ***ortogonal küme*** denir.
Birim vektörlerden oluşan ortogonal bir kümeye ***ortonormal küme*** denir. [1, s.282]

2.1.8 Tanım: H bir Hilbert uzayı (ya da sadece iç çarpımı olan bir vektör uzayı) olsun. Eğer H'nin bir S alt kümesi

$$(u, v) = \begin{cases} 1, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases} \quad u, v \in S$$

koşulunu sağlıyorsa S'ye H'de bir ***ON (ortonormal) sistemdir*** denir.

2.1.9 Örnek: $L_2[0, 2\pi]$,

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.

Bu uzayda L_2- standart normu

$$\|f\|_2 = \sqrt{(f, f)} = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2\, dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

olarak tanımlanır. Buradaki (f, g) iç çarpımında

$f(x) = e^{inx} = cos\, n\, x + i\, sin\, nx$

ve

$\overline{g(x)} = e^{-imx} = cos\, mx - i\, sin\, mx$

olarak alırsak

$$(f,g) = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (cosnx + isinnx)(cosmx - isinmx)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} (cos\, nx\, cos\, m\, x - i\, sin\, mx\, cos\, nx + i\, sin\, nx\, cos\, mx + sin\, nx\, sin\, mx)\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[cos(n+m)x + cos(n-m)x + cos(n-m)x - cos(n+m)x]\, dx$$

$$= \int_0^{2\pi} cos(n-m)x\, dx$$

olur. Buradan

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}\, dx = \begin{cases} 0, & n \neq m \\ 2\pi, & n = m \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır. Bu ise

$e^{inx} = cos\, nx + i\, sin\, n\, x, \quad n = 0, \quad \pm1, \pm2, \pm3 \ldots$

fonksiyonlarının sayılabilir ailesinin $L_2[0,2\pi]$ ‘nin bir ortogonal alt kümesi olduğu anlamına gelir. Bu nedenle

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{inx} : n = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots\right\}$$

ailesi $L_2[0,2\pi]$ ‘deki ***ortonormal fonksiyonlar kümesi***dir.

2.1.10 Tanım: $a_0, a_1, \cdots, a_n$ ve $b_1, \cdots, b_n$ birer karmaşık sayı olsun.

$$P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{2.1}$$

biçimindeki herhangi bir P periyodik fonksiyonuna bir ***trigonometrik polinom*** denir.

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$

'ten

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad \text{ve} \quad \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

sonucu çıkar ve dolayısıyla her trigonometrik P polinomu, uygun c_n karmaşık katsayıları için

$$P(x) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx} \tag{2.2}$$

biçiminde de yazılabilir. Benzer şekilde, $e^{inx} = \cos nx + i \sin n\, x,\ \cos(-nx) = \cos nx$ ve $\sin(-nx) = -\sin nx$, özdeşliklerini kullanarak, (2.2)'deki her $P(x)$ ifadesinin (2.1)'deki gibi yazılabileceğini görüyoruz. Böylece her P trigonometrik polinomunun iki şekilde yazılabileceğini gösterdik:

$$P(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{m}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \sum_{n=-m}^{m} c_n e^{inx}$$

Burada katsayılar

$$a_0 = 2c_0, \qquad a_n = c_n - c_{-n}, \qquad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

ve

$$c_0 = \frac{1}{2}a_0, \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \qquad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

özdeşlikleriyle ilişkilidir. Şimdi, e^{ikn} fonksiyonuna sahip bir P trigonometrik polinomunun iç çarpımı alındığında, ortogonallik özelliklerinden

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(x)\, e^{-inx} dx, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm m$$

sonucu çıkar.

$f \in L_1[0,2\pi]$ olsun. O zaman $\left|f(x)e^{inx}\right| \leq |f(x)|$ eşitsizliği her n tamsayısı için $f(x)e^{inx} \in L_1[0,2\pi]$ olduğunu gösterir. Bu gözlem bir sonraki tanımda kullanılacaktır.

2.1.11 Tanım : $f \in L_1[0,2\pi]$ fonksiyonunun Fourier katsayıları, her $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ için

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-inx} dx$$

ile tanımlanan $\ldots c_{-2}, c_{-1}, c_o, c_1, c_2, \ldots$ karmaşık sayılarının çift dizisinin terimleridir. $f \in L_1[0,2\pi]$ fonksiyonuna karşılık gelen ***Fourier serisi***

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

biçimindedir.

$\{e^{inx}: n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$ fonksiyon kümesinin ortogonal olduğunu ve

$$\sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i} \quad \text{ve} \quad \cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$$

Formüllerini kullanarak, $\frac{1}{2}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$ fonksiyonlarının $L_2[0,2\pi]$ 'de karşılıklı olarak dik olduğunu görüyoruz. Bu ortogonal fonksiyonlar kümesine göre, herhangi bir $f \in L_1[0,2\pi]$ fonksiyonunun Fourier serisi şu şekilde de yazılabilir:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

Burada $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ve $b_1, b_2, \ldots$ katsayıları şu şekilde verilir:

$$a_0 = 2c_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, dx$$

$$a_n = c_n + c_{-n} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx, \text{ ve}$$

$$b_n = i(c_n - c_{-n}) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx.$$

Bir fonksiyonun Fourier serisini sinüs ve kosinüs fonksiyonları cinsinden ifade edersek $a_0, a_1, a_2, \ldots$ ve $b_1, b_2, \ldots$ katsayılarına f'nin ***Fourier katsayıları*** denir [8].

2.1.12 Tanım: Kompleks düzlemde birim çemberin bir homeomorfik dönüşüm altındaki görüntüsüne ***Jordan eğrisi*** denir. [9]

2.1.13 Tanım: Kompleks düzlemde bir eğri $\boldsymbol{\gamma}: \boldsymbol{z(t)}$ $(\boldsymbol{a \le t \le b})$ ve $\boldsymbol{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b}$, $[\boldsymbol{a, b}]$ aralığının bir bölüntüsü olsun. Eğer

$$\mathbf{sup}\sum_{\boldsymbol{u=1}}^{\boldsymbol{n}} |\boldsymbol{z(t_u) - z(t_{u-1})}| < \infty$$

ise $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisine ***sonlu uzunluklu eğri*** denir [9].

2.1.14 Tanım: Bir C eğrisi, $\boldsymbol{\rho > 1}$ için bir Jordan eğrisi olsun. Eğer C eğrisi, bir $\left[\boldsymbol{\frac{1}{\rho} < |z| < \rho}\right]$ 'da analitik ve bire-bir olacak şekilde bir $\boldsymbol{\varphi(\xi)}$; $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{T}$ parametrizasyonuna sahipse C eğrisine ***analitik eğri*** denir [9].

2.1.15 Tanım: $\boldsymbol{\gamma}: \boldsymbol{z(t)}$ $(\boldsymbol{a \le t \le b})$ için

$$\boldsymbol{z'(t) = x'(t) + iy'(t)}$$

türevi var ve sürekli ise $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisi sürekli ***diferansiyellenebilirdir*** ve

$$\boldsymbol{z'(t) \neq 0}$$

oluyorsa $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisine ***düzgün eğri*** denir [9].

2.1.16 Tanım: Kompleks düzlemde açık ve bağlantılı olan bir kümeye ***bölge*** denir [9].

2.1.17 Tanım: Kompleks düzlemde kapalı ve bağlantılı olan bir kümeye ***kontinyum*** denir [9].

2.1.18 Tanım: Kompleks düzlemdeki bir *B* bölgesi için bölgedeki her $\boldsymbol{\gamma}$ eğrisi yine bölgenin içindeki $\boldsymbol{z_0}$ sabit noktasına homotop ise *B* bölgesine ***basit bağlantılı bölge*** denir [10].

2.1.19 Tanım: $\boldsymbol{B}$, kompleks düzlemde bir bölge olsun. $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{B} \rightarrow \boldsymbol{C}$ sürekli dönüşümünü alalım. Eğer $\boldsymbol{B}$'nin bir $\boldsymbol{z_0}$ noktasından geçen ve aralarında $\boldsymbol{\alpha}$ açısı oluşturan herhangi iki düzgün $\boldsymbol{\gamma_1}$ ve $\boldsymbol{\gamma_2}$ eğrilerinin resim eğrileri olan $\boldsymbol{f(\gamma_1)}$ ve $\boldsymbol{f(\gamma_2)}$'ler de $\boldsymbol{w_0 = f(z_0)}$ noktasında aralarında yön ve büyüklük olarak $\boldsymbol{\alpha}$ açısı oluşturuyorlarsa $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna $\boldsymbol{z_0}$'da bir ***konform dönüşümdür*** denir [10].

2.1.20 Tanım: $\mathbf{G} \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı ve $\boldsymbol{\Gamma}$ ile sınırlandırılmış bir bölge olsun. $\boldsymbol{G^-}$ bölgesi ise $\boldsymbol{z} = \infty$ noktasını içeren basit bağlantılı bir bölge, $\boldsymbol{D}$ bir birim disk ve $\boldsymbol{D^-} := \mathbb{C}\overline{\boldsymbol{D}}$ olsun. $\boldsymbol{G^-}$ bölgesini $\boldsymbol{D^-}$ bölgesine resmeden $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{z})$, konform dönüşümü için
$\Gamma_R := \{z \in G^-: |\varphi(z)| = R > 1\}$

şeklinde tanımlanan Γ_R eğrilerine G^- bölgesinin ***düzey eğrileri*** denir. [3, s.27]

2.1.21 Tanım: $\boldsymbol{G}$ sonlu uzunluklu $\boldsymbol{L}$ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. $\mathbf{1} \leq \boldsymbol{p} < \infty$ için $\boldsymbol{L}$'de Lebesgue ölçülebilir ve $|\boldsymbol{f}|^{\boldsymbol{p}}$'nin yay uzunluğuna göre Lebesgue integrallenebilir olan kompleks değerli $\boldsymbol{f}$ fonksiyonlarının kümesine ***Lebesgue uzayı*** denir ve $\boldsymbol{L_p(L)}$ ile gösterilir [11].

2.1.22 Tanım: $\boldsymbol{G}$ sonlu uzunluklu $\boldsymbol{L}$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge ve $\boldsymbol{f}$, $\boldsymbol{G}$'de analitik bir fonksiyon olsun. Eğer $\boldsymbol{G}$ bölgesinde

$$\int_{L_n} |f(z)|^p |dz| \leq M, \qquad 1 \leq p < \infty$$

biçiminde G'nin kompakt alt kümelerini sınırlandıran ve L'ye yaklaşan sonlu uzunluklu $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$ Jordan eğrileri dizisi varsa f fonksiyonu ***Smirnov uzayındandır*** denir ve Smirnov uzayı $\boldsymbol{E_p(G)}$ ile gösterilir [4].

2.1.23 Tanım: **G** kompleks düzlemde sınırlı bir bölge ve $\boldsymbol{f} \in \boldsymbol{E_p(G)}$ **ve** $\boldsymbol{1 \leq p < \infty}$ olsun. $\boldsymbol{f}$ fonksiyonuna, derecesi $\boldsymbol{n}$'yi aşmayan $\boldsymbol{P_n}$ polinomlar sınıfı için, $\boldsymbol{E_p(G)}$ uzayında polinomlarla ***en iyi yaklaşım sayısı***

$$E_n(f)_p \coloneqq \inf_{p_n \in P_n} \|f - p_n\|_{L_p(G)}$$

şeklinde tanımlanır. [4]

2.1.24 Tanım: G, analitik bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış bir bölge, $\phi(z)$, G^- yi $D_q{}^-$ ye $\phi(\infty) = \infty$ ve $\phi'(\infty) > 0$ koşulları altında dönüştüren konform dönüşüm ve $z = \psi(w)$ bunun tersi olsun. D_q, $|w| > q$ 'nun $z = \psi(w)$ ile eşlendiği bölgedir. $g(z)$ fonksiyonu analitik ve D_q de sıfırdan farklı olsun.

$$h(z) = \left|\frac{\phi'(z)}{g(z)}\right|^2, \qquad z \in D_q - \bar{G}$$

fonksiyonuna ***ağırlık fonksiyonu*** denir [5].

2.2 Temel Teoremler

2.2.1 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi):

G bölgesi kompleks düzlemde sınırı iki veya daha fazla noktadan oluşan bir basit bağlantılı bölge, z_0 ise G'de bir nokta olsun. G bölgesini D birim diskine,

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

şartları sağlanacak şekilde resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır [10].

2.2.2 Teorem (Hölder eşitsizliği):

$1 < p,\ q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olsun. Eğer $f \in L_p$ ve $g \in L_q$ ise $fg \in L_1$'dir ve

$$\int_L |fg||dz| \leq \left(\int_L |f|^p |dz|\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_L |g|^q |dz|\right)^{\frac{1}{q}} = \|f\|_p \|g\|_q$$

olur [8, s.256].

2.2.3 Lemma (Riemann Lebesgue Lemması):

Eğer f fonksiyonu Lebesgue integrallenebilir ise

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\,cos(nx)\,d\lambda(x) = \lim_{n\to\infty}\int f(x)\,sin(nx)\,d\lambda(x) = 0$$

dır. [8, s.202]

Riemann-Lebesgue lemmasının önemli bir sonucu, integrallenebilir bir fonksiyonun Fourier katsayılarının sıfıra yakınsamasıdır.

2.2.4 Teorem: Eğer $f \in L_1[0,2\pi]$ ise, Fourier katsayıları aşağıdaki eşitliği sağlar:

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} c_{-n} = 0$$

[8, s.309].

2.2.5 Teorem: G, basit bağlantılı ve sınırlı bir bölge, $\{f_n\}$ integrallenebilen fonksiyonların hemen her yerde azalmayan ve $\lim_{n\to\infty}\iint_G f_n\,dm < \infty$ koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Bu durumda dm Lebesgue ölçümü olmak üzere,

$$\lim_{n\to\infty}\iint_G f_n\,dm = \iint_G f\,dm$$

olacak şekilde hemen her yerde $f_n \uparrow f$ koşulunu sağlayan, integrallenebilen bir f fonksiyonu vardır [8, s.170].

3. BERGMAN UZAYLARI

Kompleks düzlemde bir bölge G ve G'de analitik bir fonksiyon f olsun.

$$I[f] := \iint_G |f(z)|^2 \, dm(z) \qquad (3.1)$$

ifadesini tanımlayalım. (3.1) ile verilen integral Riemann integralinin bir limiti olarak da düşünülebilen ve G bölgesi üzerinde verilen bir Lebesgue integralidir. Gerçekten;

$\{G_n\}$ dizisi, G bölgesine yaklaşan ve aşağıdaki özellikleri sağlayan alt kümelerin bir dizisi olsun.

i. $\forall\, n$ için $G_n \subset G_{n+1} \subset G$ dir.
ii. $\forall\ a \in G$ noktası için $n > n_0$ olduğunda $a \in G_n$ olacak biçimde bir $n_0 = n_0(a)$ vardır.

Şimdi

$$\phi_n(z) := \begin{cases} |f(z)|^2, & z \in \overline{G_n} \\ 0, & z \in G/\overline{G_n} \end{cases}$$

olsun. G içinde $\phi_n \uparrow |f|^2$ olduğu gösterilebilir. Lebesgue monoton yakınsaklık teoremine göre

$$\iint_G \phi_n \, dm \to \iint_G |f|^2 \, dm \qquad (n \to \infty)$$

olur. Buradan

$$\iint_{\overline{G_n}} |f|^2 \, dm \to I[f] = \iint_G |f|^2 \, dm \qquad (n \to \infty)$$

yazılabilir. (3.1) integralinin bu son ifade ile Riemann integrallerinin bir limiti olarak yazılabileceği görülür.

Özel halde

$G = \{z\colon\ r < |z| < R\} \quad (0 \le r < R < \infty)$

ve

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n (z \in G)$$

ise

$$I[f] = \int_r^R \int_0^{2\pi} \left(\sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} a_n \rho^n e^{in\phi} \right) \left(\sum\nolimits_{m=-\infty}^{\infty} \overline{a_m} \rho^m e^{-im\phi} \right) \rho \, d\phi \, d\rho$$

$$= \int_r^R \int_0^{2\pi} \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n+1} \, d\phi \, d\rho$$

$$= 2\pi \int_r^R \sum\nolimits_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \rho^{2n+1} \, d\rho$$

$$= 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \int_r^R \rho^{2n+1} \, d\rho$$

dir.

Yukarıdaki ikinci eşitlik $\rho \in (r, R)$ için serilerin ϕ ye göre mutlak ve düzgün yakınsak oluşundan, sonuncu eşitlik ise negatif terimli olmayan serilerde toplam ve integral işlemlerinin yer değiştirilebilir olmasından elde edilir.

f fonksiyonu $r = 0$ için, $0 < |z| < R$ çıkarılmış komşuluğunda analitik ve $I[f] < \infty$ ise $n < 0$ için $a_n = 0$ dır. Gerçekten, bilindiği gibi

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz, \qquad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

'dir. Burada $\gamma = \{z : |z| = \rho,\ \rho \in (r, R)\}$ ve f, γ üzerinde sınırlı olduğundan

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\gamma}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}\int\limits_{\gamma}|dz|$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho = \frac{M}{\rho^{n}}$$

olur. Sonuncu eşitlikte $n < 0$ durumunda $\rho \to 0$ iken $\rho^n \to \infty$ olur ve dolayısıyla $a_n \to 0$ 'dır. Böylece $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ yazılabildiğinden $z = 0$ noktası kaldırılabilir ayrık singüler bir nokta olur. Bu durumda

$$I[f] = 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\int_r^R \rho^{2n+1}\,d\rho$$

$$= 2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\frac{1}{2n+2}\left(R^{2n+2} - r^{2n+2}\right)$$

$$= \pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\frac{1}{n+1}\left(R^{2n+2} - r^{2n+2}\right)$$

olur ve $r = 0$ için

$$I[f] = \pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}R^{2n+2} \tag{3.2}$$

elde edilir.

f, G'de analitik ve $p \geq 1$ olduğunda

$$\|f\|_p := \left\{\iint\limits_{G}|f(z)|^p\,dm\right\}^{1/p}$$

normu tanımlansın. Burada $\|f\|_p < \infty$ olduğunda $f \in L_p(G)$ olur.

3.1 Tanım: G kompleks düzlemde bir keyfi bölge, f fonksiyonu G bölgesinde analitik ve

$$I[f] := \iint\limits_{G} |f(z)|^2 \, dm(z)$$

olsun. Burada $dm(z)$ iki boyutlu Lebesgue ölçüsüdür.

Buna göre ***Bergman uzayı***

$L_2(G) := \{f : f, G'de$ analitik ve $I[f] < \infty\}$

biçiminde tanımlanır [3].

Her $f, g \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ fonksiyonları için,

i. $|af(z) + bg(z)|^2 \leq 2(|a|^2|f(z)|^2 + |b|^2|g(z)|^2)$

ii. $f\bar{g} = \frac{1}{2}|f+g|^2 + \frac{i}{2}|f+ig|^2 - \frac{1+i}{2}|f|^2 - \frac{1+i}{2}|g|^2$

olur.

3.2 Tanım: $f, g \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ için

$$(f, g) = \iint_G f(z)\overline{g(z)} \, dm(z) \tag{3.3}$$

olsun. (3.3) ifadesi i) ve ii)'ye göre f ve g'nin ***iç çarpımı*** olarak adlandırılan bir karmaşık sayıdır.

$\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$, i) gereğince toplama ve skalerle çarpmaya göre kapalı olduğundan, bir vektör uzayıdır [3].

3.3 Lemma: [3] $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ alalım. $z \in G$ ve $d_z = dist(z, \partial G)$ olduğunda

$$|f(z)|^2 \leq \frac{I[f]}{\pi d_z^2} \tag{3.4}$$

olur.

İspat: D, $\overline{D} \subset G$ olacak şekilde z merkezli d_z yarıçaplı bir disk olsun. (3.2)'den

$$\iint_D |f(z)|^2 \, dm = \pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|a_n|^2}{n+1} R^{2n+2}$$

$$\geq \pi |a_0|^2 R^2$$

$$= \pi |f(z)|^2 d_z^2$$

olur. Buradan

$$\iint_G |f(z)|^2\, dm \geq \iint_D |f(z)|^2\, dm(z)$$
$$\geq \pi |f(z)|^2 d_z^2$$
sonuç olarak
$$|f(z)|^2 \leq \frac{\iint_G |f(z)|^2\, dm(z)}{\pi d_z^2}$$
elde edilir.

3.4 Teorem: (3.3) iç çarpımına göre, $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ bir Hilbert uzayıdır [3, s.5].

İspat: $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ uzayının bir tam iç çarpım uzayı olduğunu göstereceğiz.

(a) i) ile uzay toplama ve skaler çarpma altında kapalıdır.

(b) (3.3) ile tanımlanan iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağladığından bir iç çarpım uzayıdır.

$(f+g,h) = (f,h) + (g,h); (f,g) = \overline{(g,h)}$

$a \in \mathbb{C}\ için\ \ (af,g) = a(f,g)$

$(f,f) \geq 0$; ve

$(f,f) = 0 \iff f = 0.$

Ayrıca bu uzaydaki norm
$$\|f\| := (f,f)^{1/2} = \sqrt{\iint_G |f(z)|^2\, dm(z)}$$
ile tanımlanırsa $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ normlu bir uzay haline gelir.

(a) Geriye $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$'nin bu norm ile tam olduğunun gösterilmesi kalıyor. $\{f_n\}$ $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Yani

$n, m > N$ ise $\|f_n - f_m\|^2 = I[f_n - f_m] < \varepsilon$'dir.

G'nin her kompakt B alt kümesi için (3.4) eşitsizliğinden $d = dist(B, \partial G)$ olmak üzere

$|f_n(z) - f_m(z)|^2 < \dfrac{\varepsilon}{\pi d^2}$ $(z \in B)$'dir.

Bu G'nin her kompakt B alt kümesi üzerinde, $\{f_n\}$ dizisinin F analitik fonksiyonuna düzgün yakınsadığı anlamına gelir:

$$f_n(z) \to F(z), \qquad (n \to \infty; z \in B \subset G).$$

$I[f_n - f_m] < \varepsilon$ eşitsizliği ayrıca $\iint_B |f_n - f_m|^2\, dm < \varepsilon$ $(n, m > N)$

olduğu anlamına da gelir.

Şimdi $m \to \infty$ dersek, her kompakt $B \subset G$ için $\iint_B |f_n - F|^2 \, dm \leq \varepsilon \quad (n > N)$ elde ederiz. Dolayısıyla $I[f_n - F] \leq \varepsilon \quad (n > N)$ olur. Son eşitsizlik $F \in L_2(G)$ ve $\|f_n - F\| \to 0 \;\; n \to \infty$ anlamına gelir. Başka bir deyişle $L_2(G)$'de her Cauchy dizisi yakınsaktır. ■

4. BERGMAN UZAYLARINDA ORTONORMAL SİSTEMLERE GÖRE AÇILIMLAR

4.1 Bergman Ortogonal Polinomları

4.1.1 Tanım: Kompleks düzlemde basit bağlantılı ve sınırlı bir bölge G olsun.

$$\{\varphi_j\} = \varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots \tag{4.1}$$

$L_2(G)$'den olan fonksiyonların bir dizisi olsun. Eğer

$$\iint_G \varphi_k(z)\overline{\varphi_n(z)}\, dm(z) = 0, \qquad k \neq n$$

ise bu fonksiyonların dizisine G bölgesine göre bir ***ortogonal dizi*** denir [12].

(4.1) dizisinin sonsuz olduğunu ve bu fonksiyonlar arasında özdeş olarak sıfır olan hiçbir fonksiyon olmadığını varsayıyoruz. Eğer (4.1)'deki fonksiyonların her birini belli bir kompleks sayıyla çarparsak yine G'ye göre ortogonal bir dizi elde ederiz. Bu çarpanlar örneğin, (4.1)'deki fonksiyonların her birinin modüllerinin karelerinin integrali 1'e eşit olacak şekilde seçilebilir: $\iint_G |\varphi_n(z)|^2\, dm(z) = 1 \quad (n = 1,2, \ldots)$

Bu durumda

$$\iint_G \varphi_n(z)\overline{\varphi_k(z)}\, dm(z) = \delta_{n,k} = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 1, & n = k \end{cases} \tag{4.2}$$

olur. Bu tipteki fonksiyonlar sistemine ***ortonormal(leştirilmiş) sistem*** denir [12].

4.1.2 Tanım: $G \subset \mathbb{C},\ \Gamma = \partial G$ Jordan eğrisi tarafından sınırlandırılmış basit bağlantılı sonlu bir bölge; $P_n(z) := a_n z^n + \cdots + a_0,\ \ a_n > 0,\ n = 0,1,2, \cdots$ olsun.

$$\langle P_n, P_k \rangle := \iint_G P_n(z)\overline{P_k(z)}\, dm\,(z) = \delta_{n,k}$$

koşulu sağlanıyorsa P_n polinomlarına ***Bergman ortogonal polinomları*** denir. Burada $dm(z)$ iki boyutlu Lebesgue ölçüsünü belirtir [6].

4.2 H Hilbert Uzayında Ortonormal Sistemlere Göre Açılımlar

H bir Hilbert uzayı ve $\{v_j\}$ H'de bir ON sistem olsun. Her $x \in H$ için $\gamma_j = (x, v_j)$ Fourier katsayılarını oluşturalım.

4.2.1 Teorem : [3, s.24]

a) Fourier katsayılarının minimum özelliği:

$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} c_j v_j \right\|^2$ ifadesinin minimum değerini alması için gerekli ve yeterli koşul $c_j = \gamma_j$ $(j = 1,2, \cdots n)$ olmasıdır.

b) a) şıkkındaki minimumun değeri

$\|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$ dir.

c) Her $x \in H$ için Bessel eşitsizliği:

$$\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2 \leq \|x\|^2$$

biçimindedir.

İspat:

Her üç iddia da aşağıdaki hesaplamaların sonucudur:

$$\begin{aligned} \left\| x - \sum c_j v_j \right\|^2 &= \left(x - \sum c_j v_j, x - \sum c_j v_j \right) \\ &= \|x\|^2 - \sum c_j \overline{\gamma_j} - \sum \overline{c_j} \gamma_j + \sum |c_j|^2 \\ &= \|x\|^2 - \sum |\gamma_j|^2 + \sum (\gamma_j - c_j)(\overline{\gamma_j} - \overline{c_j}) \\ &= \|x\|^2 + \sum |\gamma_j - c_j|^2 - \sum |\gamma_j|^2 \cdot \end{aligned}$$

Daha sonrasında ise $\{v_j\}$'nin bir tam ortonormal sistem (CON sistem) olması; yani v_j'nin lineer bileşimlerinin H'de yoğun olması istenir.

$\{v_j\}$ bir CON (tam ortonormal) sistemdir:

$\{v_j\}$'nin lineer bileşimleri H Hilbert uzayında yoğundur.

4.2.2 Teorem : Aşağıdaki ifadeler denktir.

a) $\{v_j\}$ bir CON (tam ortonormal) sistemdir.

b) Her $x \in H$ için $\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j \right\| \to 0$, (n → ∞) dir.

c) Her $x \in H$ için Parseval eşitliği $\sum_{j=1}^{\infty} |\gamma_j|^2 = \|x\|^2$ biçimindedir.

İspat: a) ve b) ifadelerinin denkliği 4.2.1 Teorem, a)'dan çıkar. 4.2.1 Teorem'in b) şıkkından

$$\left\| x - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j v_j \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$$

olur, dolayısıyla b) ve c) ifadeleri denktir. [3, s.25]

4.3 Bergman Uzayında Ortonormal Sistemlere Göre Açılımlar

Şimdi $H = L_2(G)$ alalım, G keyfi bir bölge ve $\{\phi_j\}$, $L_2(G)$ 'deki ON fonksiyonlar sistemi olsun. Her $f \in L_2(G)$ için Fourier katsayıları

$$\gamma_j = (f, \phi_j) = \iint_G f\overline{\phi_j}\, dm \quad (j = 1,2, \ldots)$$

şeklindedir ve f'nin Fourier serisi

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$$

olur.

Eğer ϕ_j bir CON sistem oluşturuyorsa, 4.2.2 Teorem'den

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\| \downarrow 0, \ (n \to \infty) \tag{4.3}$$

olur, yani f'nin Fourier serisi ikinci dereceden f'ye ortalamada yakınsar.

4.3.1 Teorem: $\{\phi_j\}$ bir CON sistem ve $\Sigma_{j=1}^{\infty}\gamma_j\phi_j$ bir $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ fonksiyonuna karşılık gelen Fourier serisi ise (4.3) ilişkisi geçerlidir ve $\Sigma_{j=1}^{\infty}\gamma_j\phi_j$ Fourier serisi, G'nin her kompakt B alt kümesinde f'ye düzgün yakınsar. [3, s.26]

İspat: Eğer $d > 0$, B'den ∂G sınırına kadar olan mesafeyi gösteriyorsa (3.4) den

$$\left| f(z) - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j(z) \right| \leq \frac{\left\| f - \sum_{1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\|}{\sqrt{\pi} d} \qquad (z \in B)$$

anlamına gelir.

Bunun tersine bir $\{c_j\} \in l_2$ sayı dizisiyle başlayabiliriz ve $\sum c_j\phi_j$ serisini oluşturabiliriz. Bu $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ fonksiyonunu verir, burada

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j(z) = f(z) \quad (z \in G)$$

'dir ve G'nin kompakt alt kümelerinde yakınsaklık düzgündür.

4.3.1 Teorem, bir $f \in \mathrm{L}_2(\mathrm{G})$ fonksiyonu için G'de bir seri açılım elde etmek için gerekli süreci belirtir:

i) $\{u_j\}$'nin $\mathrm{L}_2(\mathrm{G})$'de lineer bağımsız fonksiyonlardan oluşan bir sistem olduğunu varsayalım.

ii) ON süreçlerden biri, tamamlanması gereken bir $\{v_j\}$ ON sistemini oluşturur

iii) $\gamma_j = (f, v_j)$ Fourier katsayılarını hesapladıktan sonra, G'de f için bir açılım elde ederiz, bu açılım da G'de kesinlikle yakınsaktır [3].

5. BERGMAN ORTOGONAL POLİNOMLARINA GÖRE FOURIER SERİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Bu bölüm [5] ve [2]’deki çalışmalardan derlenmiş olup, bölgenin ilgili çalışmada ele alınan sınır özelliklerine göre, f fonksiyonunun bölgenin ON polinomlarıyla ifade edilen Fourier serisinin, kısmi toplamı ile fonksiyona yaklaşımın özellikleri incelenmiştir. Burada f fonksiyonunun G de analitik $\bar{G}$ de sürekli olduğu ve de $L_2(G)$’den olduğu durumlar ele alınır. Yaklaşım hataları 5.2.2 Teorem’de $\bar{G}$ ‘de ve 5.2.9 Teorem’de G nin B kompakt alt kümelerinde değerlendirilmiştir.

5.1 Kompleks Düzlemdeki Temel Yaklaşım Teoremleri

Bir $P_n(z)$ cebirsel polinomunun K kontinyumunda analitik olan $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşımı,

$$\|f - P_n(z)\| = \max_{z\in K}|f(z) - P_n(z)|$$

ile tanımlansın. Bu norma ***düzgün norm*** denir.

$$E_n(f, K) = \inf_{P_n\in\wp_n}\|f - P_n\|$$

olacak şekilde $E_n(f, K)$’yı tanımlayalım. Burada $P_n \in \wp_n$‘ler üzerinden infimum alınır. $E_n(f, K)$ sayısı, f fonksiyonunun ***düzgün normda en iyi yaklaşım sayısı*** olarak adlandırılır. $\wp_n$ sınıfında

$$\|f - Q_n\| = \max_{z\in K}|f(z) - Q_n(z)| = E_n(f, K)$$

şartını sağlayan bir tek $Q_n(z)$ cebirsel polinomuna, K kontinyumunda $f(z)$‘ye ***düzgün normda en iyi yaklaşan polinom*** denir.

Aşağıda bir bölgenin kapanışında polinomlarla fonksiyona yaklaşım için koşulların olduğu yaklaşım teorisindeki bazı teoremler verilmiştir.

5.1.1 Teorem (M.A. Lavrentiev): $\boldsymbol{f(z)}$ kapalı ve sınırlı bir $\boldsymbol{B}$ kümesi üzerindeki herhangi sürekli bir kompleks fonksiyon olsun. $\boldsymbol{f(z)}$ fonksiyonunun $\boldsymbol{B}$ üzerinde düzgün yakınsayan $\boldsymbol{f(z) = P_0(z) + [P_1(z) - P_0(z)] + \cdots}$ polinom serilerine açılabilmesi için gerek ve yeter şart $\boldsymbol{B}$'nin iç noktaları kümesinin boş küme olması ve düzlemi bölmemesidir [4, s.29].

5.1.2 Teorem (C.O.T. Runge): Eğer bir $f(z)$ fonksiyonu, tümleyeni basit bağlantılı bir bölge olan sınırlı kapalı bir $\bar{G}$ bölgesinde analitik ise, herhangi bir $\varepsilon > 0$ için,

$$|f(z) - P_n(z)| < \varepsilon, \qquad \forall z \in \bar{G}$$

eşitsizliği geçerli olacak şekilde bir $P_n(z)$ polinomu vardır.

5.1.3 Teorem (J. Walsh): Basit bağlantılı bir G bölgesi, düzlemin sonlu bir kısmında yer alıyorsa ve bir Γ Jordan eğrisi ile sınırlanıyorsa, G'de analitik ve $\bar{G}$ de sürekli olan herhangi bir $f(z)$ fonksiyonuna, $\bar{G}$ bölgesinde cebirsel polinomlarla yaklaşılabilir.

5.1.4 Teorem (M.V. Keldysh): Herhangi bir $f(z)$ fonksiyonu $\bar{G}$ de sürekli ve G'de analitik olsun. Keyfi düzgün polinomlarla $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşılabilmesi için gerekli ve yeterli koşul G^- nin, basit bağlantılı ve sonsuzluğu içeren bir bölge olmasıdır. [4, s.31]

5.1.5 Teorem (S.N. Mergelyan): $f(z)$, kapalı ve sınırlı bir B kümesi üzerinde sürekli ve B kümesinin iç noktalarında analitik olan herhangi bir fonksiyon olsun. Bu durumda keyfi düzgün polinomlarla $f(z)$ fonksiyonuna yaklaşılabilmesi için gerek ve yeter koşul B nin düzlemi bölmemesidir. [4, s.31]

Böylece, yaklaşım teorisinde Mergelyan teoreminin yardımıyla $\{E_n(f)\}$ dizisinin n sayısına göre monoton azalan ve

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f,K) = 0$$

olduğu elde edilir.

5.2 Ortonormal Polinomlara Göre Fourier Serilerinin Yakınsaklık Özellikleri

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesi, $\Gamma = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlandırılmış sonlu basit bağlantılı bir bölge; $h(z)$, G üzerinde pozitif ve ölçülebilir bir ağırlık fonksiyonu olsun. $P_n(z) := P_n(h,z) = a_n z^n + \cdots + a_0$, $a_n \neq 0$, $n = 0,1,2,\cdots$,

$$\langle P_n, P_k \rangle \coloneqq \iint_G h(z) P_n(z) \overline{P_k(z)}\, dm\,(z)$$

iç çarpımına göre G'deki ortonormal polinomların dizisi olsun. Burada $dm(z)$ iki boyutlu Lebesgue ölçüsünü belirtir.

5.2.1 Tanım: G, Γ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $\phi(z)$, G^- yi D^- ye $\phi(\infty) \to \infty$ ve $\phi'(\infty) > 0$ koşulları altında dönüştüren konform dönüşüm ve $\psi(w)$ bunun tersi olsun. Eğer $\phi(z)$ ve $\psi(w)$ fonksiyonları sırasıyla G^- ve D^- bölgelerinde p. kez sürekli türevlenebilir ve $\phi^{(p)}(z) \in Lip\ \alpha$, $\psi^{(p)}(w) \in Lip\ \alpha$ ise Γ eğrisi $\boldsymbol{C(p,\alpha)}$ ***sınıfındandır*** denir.

[5]'de ispatı verilen aşağıdaki teorem Γ'nın $C(1,\alpha)$'dan olma durumunda f fonksiyonunun, bölgenin ON polinomlarına göre Fourier serisiyle bölgenin kapanışındaki yaklaşımını karakterize eder.

5.2.2 Teorem: $h(z)$ ağırlık fonksiyonu $h(z) \geq c > 0$ koşulunu sağlasın ve $\Gamma \in C(1,\alpha)$ olsun. G de analitik ve $\bar{G}$ de sürekli her $f(z)$ fonksiyonu için

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(z) \right| \leq c E_N(f,\bar{G}) N, \qquad z \in \bar{G} \tag{5.1}$$

koşulu sağlanacak şekilde bir c sabiti vardır [5].

İspat: $T_n(z)$, bir $\bar{G}$ bölgesinde $f(z)$ fonksiyonuna en iyi düzgün yaklaşan polinom olsun. $a_n^{(N)} = \iint_G h(\zeta) T_N(\zeta) \overline{P_n(\zeta)}\, d\zeta\, d\eta$ olmak üzere

$$T_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n^{(N)} P_n(z) \tag{5.2}$$

alalım. Bu durumda derecesi en fazla N olan $R_n(z)$ polinomu için

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(z) \right| \leq |f(z) - T_N(z)| + R_N(z) \tag{5.3}$$

yazabiliriz. (5.2)'den

$$|R_N(z)| = \left| T_N(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(z) \right|$$

$$\leq \iint_G h(\zeta)|T_N(\zeta) - f(\zeta)| \left| \sum_{n=0}^{N} \overline{P_n(\zeta)} P_n(z) \right| d\zeta\, d\eta \tag{5.4}$$

$$\leq cE_N(f, \bar{G}) \left[\sum_{n=0}^{N} |P_n(z)|^2 \right]^{1/2}$$

elde edilir. Burada $z \in \gamma_N$ olsun. Burada γ_N, G'nin birim diski üzerindeki bir $w = \varphi(z)$ dönüşümü altında $|w| = 1 - 1/n$ çemberinin ters görüntüsüdür. [5, (2.51)] ve [5, Lemma 2.2] den

$$|R_N(z)| \leq cE_N(f, \bar{G})N, \qquad z \in \gamma_N$$

değerlendirmesi elde edilir. $R_N(z)$ en fazla N dereceli bir polinom olduğundan, [5, Lemma 2.1] yardımıyla bu değerlendirmenin $\bar{G}$ kapalı bölgesindeki her z için farklı bir sabitle geçerli olduğu ortaya çıkar. Bu son değerlendirmeyi (5.3)'de yerine yazarak (5.1)'i elde ederiz ve teorem ispatlanmış olur. ■

5.2.2 Teorem, $\bar{G}$ kapalı bölgesinde sürekli türevlenebilir olan her f fonksiyonunun, verilen hipotezler altında, $\bar{G}$'de düzgün yakınsak olan ortogonal polinomların Fourier serisine açılabileceğini gösterir.

5.2.2 Teorem'de kullanılan yöntem aslında,

$$\left| f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(z) \right| \leq [1 + L_N^0(z)]E_N(f, \bar{G}), \qquad z \in \bar{G} \tag{5.5}$$

eşitsizliğindeki

$$L_N^0(z) = \iint_G \left| \sum_{n=0}^{N} \overline{P_n(\zeta)} P_n(z) \right| d\zeta \, d\eta \tag{5.6}$$

niceliğini değerlendirmeye dayanmaktadır.

Şimdi f fonksiyonunun $L_2(h, G)$'den olması durumunda Fourier ortogonal polinomları serisinin, bölgenin kompakt alt kümelerindeki yakınsaklığı ile ilgili [2]'deki sonuçları inceleyelim. Burada bölgenin sınırının sivri açılara sahip olduğu varsayılmıştır.

$L_2 \coloneqq L_2(h, G)$ uzayını, $\|.\|_{L_2}$ normuyla integrallenebilir analitik fonksiyonların uzayı olarak tanımlayalım:

$$\|f\|_{L_2} \coloneqq \left(\iint_G h(z)|f(z)|^2 \, dm\,(z) \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.7}$$

$f \in L_2$ fonksiyonunun Fourier katsayıları $a_n(f) := \langle f, P_n \rangle \;\; n = 0,1,2, \dots$ ile tanımlanır ve aşağıdaki seriye karşılık gelir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(f) P_n(z) \tag{5.8}$$

(5.8)'deki serinin yakınsaması ortonormal polinomlar sisteminin (5.7)'deki norma göre tam olmasına bağlıdır. Eğer ağırlık fonksiyonu yukarıdan ve aşağıdan pozitif sabitlerle sınırlanıyorsa ortonormal polinomlar sisteminin $\|.\|_{L_2}$ normuna göre tam olduğu bilinmektedir. Bu kısımda ağırlık fonksiyonu

$$h(z) = |D(z)|^2, \tag{5.9}$$

şeklinde alınacaktır. Burada D, G içerisinde analitik ve $\bar{G}$ de sürekli bir fonksiyondur ve $\forall z \in \bar{G}$ için $D(z) \neq 0$ dır. (5.9) eşitliğinden, $h(z)$'nin yukarıda açıklanan tamlık koşulunu sağladığı açıktır. (5.8)'in n. kısmi toplamını

$$S_n(f, z) := \sum_{k=0}^{n} a_k(f) P_k(z) \qquad n = 0,1,2, \dots$$

şeklinde gösterelim ve $\omega_n(B,f;z)$'yi

$$\omega_n(B,f;z) \coloneqq |f(z) - S_n(f,z)| \qquad z \in B \Subset G \tag{5.10}$$

ile tanımlayalım.

Bu bölüm boyunca $c, c_1, \cdots$ değerleri pozitiftir ve $\varepsilon, \varepsilon_1, \cdots$ genel olarak G'ye bağlı yeterince küçük pozitif sabitlerdir.

i) $G \in C(k,\alpha)$, $k = 1,2,\ldots$, $0 < \alpha \leq 1$, eğer $\Gamma = \partial G$ doğal bir parametrelendirmeye sahipse $z = z(s)$'dir. Burada s yay uzunluğudur ve $z = z(s)$ fonksiyonu $z^{(k)}(s) \in Lip_\alpha$ ile k-kat türevlenebilirdir.

ii) Γ'nın her $z(s)$ noktasında sürekli $\theta(s) \coloneqq \theta\big(z(s)\big)$ teğeti varsa $G \in C_\theta$'dir.

Suetin [5]'de;

Eğer $\Gamma \in C(k+1,\alpha)$, $k = 0,1,2,\ldots$, $0 < \alpha < 1$ ve $h(z)$, (5.9) eşitliğini $D^{(k)} \in Lip_\alpha$ için sağlıyorsa

$$\delta(B)^{(k+3)}\omega_n(B,f;z) \leq cE_n(f,L_2)n^{-(k+\alpha)}, \forall z \in B \Subset G \tag{5.11}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada $\delta(B) \coloneqq dist(B,\Gamma)$ ve

$$E_n(f,L_2) \coloneqq \inf_{P_n}\left(\iint_G h(z)|f(z) - P_n(z)|^2\, dm\,(z)\right)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesi derecesi n'den fazla olmayan cebirsel polinomlarla L_2'deki en iyi yaklaşımı belirtir.

(5.11) eşitsizliğinden, $n \to \infty$ için $\omega_n(B,f;z)$'nin düzgün bir şekilde sıfıra yaklaştığı ve yaklaşım hızının sadece h ve G'nin özelliklerine değil aynı zamanda B'nin sınıra olan uzaklığına da bağlı olduğu açıktır.

5.2.3 Tanım: Γ bir Jordan eğrisi olsun. Eğer $f(\Gamma)$ bir daire olacak şekilde bir $H \supset \Gamma$ bölgesinin K-kvazikonform $K \geq 1$ bir f dönüşümü varsa Γ eğrisi ***K- kvazikonform*** olarak adlandırılır. [14, s.97]

$H = \mathbb{C}$ ise bu tanıma K- kvazikonform eğrinin ***global (genel) tanımı*** denir. Aynı zamanda H eğrinin komşuluğu olarak da seçilebilir. Bu durumda buna K- kvazikonform eğrinin ***lokal (yerel) tanımı*** denir [15].

Bazı kompleks bölgeler için eğrinin kvazikonformluk katsayısı kolaylıkla belirlenebildiği için bu çalışmada lokal tanım kullanılacaktır. Örneğin, $\Gamma \in C_\theta$ ise $K = 1 + \varepsilon,\ \forall\varepsilon > 0$ ve Γ bir analitik eğri ise $K = 1$'dir. [16]

5.2.4 Tanım: İki kvazikonform yay $\Gamma_j,\ \Gamma_{j+1} \subset \Gamma$ olsun. Eğer $\Gamma = \partial G$ eğrisi, $K \coloneqq \max_{2\le j\le m}\{K_j\}$ ve $\{z_j\}_{j=2}^{m} \subset \Gamma$ noktalarını birleştiren sonlu sayıda K_j- kvazikonform Γ_j yaylarından oluşuyorsa ve Γ eğrisi, $z_1 \in \Gamma$'de lokal olarak K- kvazikonform ise $G \in PQ(K,p),\ K \ge 1,\ p \ge 1$ denir. Γ_j ve Γ_{j+1} yayları, z_j'de buluşarak $z_j,\ j = 2,\dots,m$'nin bir komşuluğunun bulunduğu $x^p -$ tipi iç sıfır açıları oluşturur; böylece her $z = (x,y) \in \Gamma_j\ (\Gamma_{j+1})$ ve bazı c_1, c_2 sabitleri için,

$$c_1x^p \le y \le c_2x^p(-c_2x^p \le y \le -c_1x^p), \quad (-\infty < c_1 < c_2 < +\infty)$$

koşulu sağlanır.

G'nin $m-1$ sayıda $x^p -$ tipi iç sıfır açılarına sahip olabileceği 5.2.4 Tanım'dan açıkça görülmektedir. Eğer $p = 1$ ise G bir K- kvazikonform eğri ile sınırlanır ve $G \in Q(K,1)$ ile gösterilir.

Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $\Gamma_j \in C_\theta,\ j = 1,2,\dots,m$ ise $G \in Q(1+\varepsilon,p)$'dir.

5.2.4 Tanım'daki K ve p parametreleri sırasıyla bölgenin analitik ve geometrik özellikleridir.

Aşağıdaki teorem, yaklaşım hızının bu parametrelere ne kadar bağlı olduğunu gösterir. Ayrıca (5.5)'te verilen Suetin'in sonucunun daha genel bir bölgeye genişletilmesini sağlar.

5.2.5 Teorem: (5.9) bağıntısında $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \le 1$ ve $B \Subset G$, bazı $p,\ 1 \le p < 2$ ile tanımlanan $h(z)$ fonksiyonu için $G \in PQ(K,p),\ K \ge 1$ olsun. O zaman tüm $f \in L_2$ ve $z \in B \Subset G$ için,

$$\delta(B)^{\frac{5}{2}}\omega_n(B,f;z) \leq cE_n(f,L_2)\begin{cases} n^{-\gamma}, & \alpha > \dfrac{1}{2K^6}, \quad 1 \leq p < 1 + \dfrac{K^2-1}{K^2+1} \\ & veya\ \ \alpha > \dfrac{2-p}{2pK^4}, \quad p \geq 1 + \dfrac{K^2-1}{K^2+1} \\ n^{-\eta}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

(5.12)

Burada $\gamma < \frac{1}{2K^2} min\left\{\frac{2-p}{p}, \frac{1}{K^2}\right\},\ \ ve\ \ 0 < \eta < \alpha K^2$ dir.

Aşağıdaki iki sonuç 5.2.5 Teorem'in sonuçlarıdır.

5.2.6 Sonuç: $G \in Q(K,1),\ K \geq 1$ olsun. $h(z)$'nin (5.9) bağıntısındaki gibi $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ ile tanımlandığını ve $B \Subset G$ olduğunu varsayalım. Tüm $f \in L_2$ ve $z \in B \Subset G$ için,

$$\delta(B)^{\frac{5}{2}}\omega_n(B,f;z) \leq cE_n(f,L_2)\begin{cases} n^{-\gamma}, & \alpha > \dfrac{1}{2K^6} \\ n^{-\eta}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

(5.13)

dır. Burada $\gamma < \frac{1}{2K^4},\ \ ve\ \ 0 < \eta < \alpha K^2$ dir.

5.2.7 Sonuç: $\Gamma_j \in C_\theta$ (veya analitik eğri) olduğunda (5.12) eşitsizliği $\gamma < \frac{2-p}{2p}$ ve $0 < \eta < \alpha$ koşulu ile sağlanır.

(5.12)'dan her $z \in B \Subset G$ için,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n K_n(z)$$

olduğu açıktır ve bu yakınsaklık B'nin Γ sınırına olan uzaklığına $\frac{5}{2}$ kuvveti olarak bağlıdır.

5.2.5 Teorem'deki yaklaşım hızını elde etmek için bölgenin kvazikonformluk katsayısının bilinmesi gerekir ancak belirli bir bölge için bu parametrenin hesaplanması kolay değildir.

Bölgenin diğer özelliklerini kullanarak $\omega_n(B, f; z)$'ye yaklaşma hızını hesaplamak mümkün müdür? Önce aşağıdaki tanımı verelim:

5.2.8 Tanım : Eğer aşağıdakiler sağlanırsa $0 < v < 1$ için $G \in Q(v)$ denir.

i) $\Gamma = \partial G$ kvazikonform bir eğridir.

ii) Her $z \in \Gamma$ için bir tek $r > 0$ ve $0 < v < 1$ vardır, öyle ki kapalı dairesel bir

$S(z; r, v) := \left\{\xi : \xi = z + re^{i\theta}, 0 \le \theta_0 < \theta < \theta_0 + v\right\}$

daire diliminin yarıçapı r ve açıklığı $v\pi$ $\bar{\Omega}$'de, köşesi z'de yer alır [17].

Her kvazikonform eğrinin ii) koşulunu sağladığı bilinmektedir. Yine de Γ ya uygulanan bu koşul eğrinin yeni bir geometrik karakterizasyonunu verir. Örneğin, G^* bölgesi

$$G^* = \left\{z : z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi\right\}$$

ile tanımlanmışsa, G^* nin kvazikonformluk katsayısını elde etmek kolay değildir, oysa $G^* \in Q\left(\frac{1}{2}\right)$'dir.

Aşağıdaki teorem, yalnızca v hakkında bilgiye sahip olsak bile, yaklaşım hızını değerlendirebileceğimizi göstermektedir.

5.2.9 Teorem : $G \in Q(v),\ 0 < v < 1$ olsun ve $h(z)$ (5.9) bağıntısındaki gibi $D \in Lip\alpha$ ve $B \Subset G$ ile tanımlansın. Tüm $f \in L_2$ ve $z \in B \Subset G$ için,

$$\delta(B)^{\frac{5}{2}}\omega_n(B, f; z) \le cE_n(f, L_2)\begin{cases} n^{-\gamma}, & \alpha > \dfrac{1}{4(2-v)} \\ n^{-\eta}, & diğer\ durumlar \end{cases} \tag{5.14}$$

Burada $\gamma < \frac{v}{4(2-v)}$, $ve\ \ \eta < v\alpha$ 'dır.

NOT: Eğer

$$G^* = \left\{ z : z = re^{i\theta}, 0 < r < 1, \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\}$$

ise her $\gamma < \frac{1}{12}$ ve $\eta < \frac{\alpha}{2}$ için (5.14) sağlanır.

6. BERGMAN ORTOGONOL POLİNOMLARINA GÖRE FOURIER SERİLERİNİN MAKSİMAL YAKINSAKLIĞI

4.3.7 Teorem'de ortonormal polinomlar CON sistem oluşturduğunda ve f, G'de analitik olduğunda, f fonksiyonunun Fourier serisinin G bölgesinin her kompakt B alt kümesinde f'ye düzgün yakınsadığını gördük. Burada $R > 1$, $G \subset G_R$ olacak şekilde f'in G_R içinde analitik olduğu en büyük sayı olarak kabul edilir ve f'in ortonormal polinomlara göre Fourier serisinin $\bar{G}$'da f'e düzgün yakınsaklığı araştırılır [3, s.27].

G^- tümleyenine sahip, basit bağlantılı ve sınırlı bir K kontinyumunu alalım. Bu K kontinyumunda analitik olan bir f fonksiyonu $R > 1$ sayısı için analitik olarak G_R kanonik bölgesine genişletilebilir. Şimdi cebirsel polinomlarla f'in K kontinyumundaki düzgün yaklaşımını araştıralım.

6.1 Bernstein & Walsh Lemması

Aşağıdaki lemmada cebirsel bir $P_n(z)$ polinomunun, K kontinyumunda aldığı maksimal değerine göre bu polinomun daha geniş bir bölgedeki artış hızı R ve n sayısına göre değerlendirilir.

6.1.1 Lemma (S.N. Bernstein, J.Walsh): $P_n(z)$ polinomu, en fazla n dereceli cebirsel bir polinom olsun. Eğer bu polinom bir K kontinyumunda

$$\max_{z \in K} |P_n(z)| \leq M \qquad (6.1)$$

koşulunu sağlıyorsa her $R > 1$ sayısı için,

$$|P_n(z)| \leq MR^n, \qquad z \in \overline{G_R}, \qquad R > 1 \qquad (6.2)$$

eşitsizliğini sağlar [4].

İspat:

$$F(z)=\frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}, \qquad z\in G^- \tag{6.3}$$

fonksiyonunu alalım. G^- de, $F(z)$ fonksiyonu analitiktir ve $P_n(z)$ polinomunun başkatsayısı a_n ve $\gamma=\lim_{z\to\infty}\frac{\varphi(z)}{z}>0$ için

$$\lim_{z\to\infty}F(z)=\lim_{z\to\infty}\left(\frac{z}{\varphi(z)}\right)^n\left(\frac{P_n(z)}{z^n}\right)=\frac{a_n}{\gamma^n}$$

dir. $1<\rho<R$ olmak üzere Γ_ρ eğrisi üzerinde,

$$\max_{\zeta\in\Gamma_\rho}|F(\zeta)|=\frac{1}{\rho^n}\max_{\zeta\in\Gamma_\rho}|P_n(\zeta)|=\frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\zeta_\rho)\right|$$

eşitliği yazılabilir. G_ρ bölgesinde $F(z)$ fonksiyonu analitiktir. (6.3) bağıntısından

$$|F(z)|=\left|\frac{P_n(z)}{\varphi^n(z)}\right|\le\max_{\zeta\in\Gamma_\rho}|F(\zeta)|=\frac{1}{\rho^n}\left|P_n(\zeta_\rho)\right| \tag{6.4}$$

eşitsizliği elde edilir. $z\in\Gamma_R$ ve $\zeta_\rho\in\Gamma_\rho$ noktaları için

$$|P_n(z)|\le\frac{R^n}{\rho^n}\left|P_n(\zeta_\rho)\right| \tag{6.5}$$

eşitsizliği yazılabilir. (6.5) eşitsizliğinin sol tarafı ρ'ya bağlı değildir. (ρ_k) dizisi monoton azalan ve 1'e yaklaşan bir dizi olsun. Bu (ρ_k) dizisinin $\left(\zeta_{\rho k}\right)$ noktalar dizisini alalım. $\left(\zeta_{\rho k}\right)$ sınırlı bir dizi olduğundan onun yakınsak bir (ζ_m) alt dizisi vardır. Bu alt dizinin limitini ζ_0 olarak alalım. Bu ζ_0 noktası $\partial K=\Gamma$ sınırı üzerindedir. $|P_n(\zeta)|$ fonksiyonu sürekli olduğu için,

$$\lim_{m\to\infty}|P_n(\zeta_m)|=|P_n(\zeta_0)|, \qquad \zeta_0\in\Gamma\subset K \tag{6.6}$$

dir. Diğer yandan (6.1) bağıntısından $|P_n(\zeta_0)|\le M$ dir. (ζ_m) dizisi için (6.5) bağıntısından

$$|P_n(z)|\le\frac{R^n}{\rho_m^n}|P_n(\zeta_m)|, \qquad |\varphi(\zeta_m)|=\rho_m$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $m\to\infty$ için limit alınırsa (6.5)'den,

$$|P_n(z)|\le MR^n, \qquad \forall z\in\Gamma_R$$

eşitsizliği elde edilir. ■

6.2 Walsh'un ve Suetin'in Maksimal Yakınsaklık Teoremleri

6.2.1 Teorem [3, s.27]: C bir Jordan eğrisi ve $\rho > 1$ sayısı, f'in C_ρ eğrisi içinde analitik olabileceği en büyük sayı olsun. Ayrıca

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j P_j$$

G'nin P_j ON polinomlarına göre f'nin Fourier serisi ve

$$p_n = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j P_j$$

olsun. Buna göre her $R < \rho$ için

$$max\{|f(z) - p_n(z)|: z \in \bar{G}\} = O(R^{-n}) \qquad (6.7)$$

sağlanır. Bu bağıntı $R > \rho$ için geçerli değildir.

Diğer bir deyişle

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{max|f(z) - p_n(z)|} = 1/\rho$$

dir.

İspat:

a) İlk olarak, bazı $R > \rho$ ve her $z \in \bar{G}$ için n dereceli p_n polinomlarının var olmadığını göstermeliyiz,

$$|f(z) - p_n(z)| \le M_1/R^n, \qquad \text{bazı } R > \rho \text{ ve } \forall z \in \bar{G} \qquad (6.8)$$

Eğer böyle polinomlar olsaydı $R_1 \in (\rho, R)$ seçerdik ve

$$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \le |f(z) - p_{n+1}(z)| + |f(z) - p_n(z)| \le 2M_1/R^n \ (z \in \bar{G})$$

olduğunu bulurduk. Bernstein Lemması'na göre, $z \in C_{R_1}$ için

$$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq \frac{2M_1}{R^n} \cdot R_1^{n+1} = 2M_1R_1(R_1/R)^n$$

dir. Dolayısıyla

$$p_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(p_{n+1} - p_n)$$

polinom serisi C_{R_1} üzerinde ve içinde düzgün yakınsar ve F limit fonksiyonu int C_{R_1}'de analitiktir. Ancak (6.8) bağıntısı G'de $F = f$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $R_1 > \rho$ için f fonksiyonu G'den int C_{R_1}'e kadar analitik bir sürekliliğe sahiptir. Ancak bu, ρ 'nun tanımıyla çelişir.

b) Şimdi $R < \rho$ için (6.7) ifadesinin ispatını verelim. σ ve R_1 sayılarını $1 < \sigma < R_1 < \rho$ olacak şekilde seçelim:

$$\max_{\bar{G}}|f(z) - p_n(z)| \leq N(\sigma/R_1)^n \quad (n = 0,1,2,\cdots) \tag{6.9}$$

olur. Burada p_n, f 'nin Fourier serisinin kısmi toplamları ve N bir pozitif sabittir. $R < \rho$ için (6.7) ifadesi buradan çıkar.

Burada n. dereceden π_n polinomlarının varlığı kullanılır:

$$\max_{\bar{G}}|f(z) - \pi_n(z)| \leq M_2 \cdot R_1^{-n} \quad (n = 0,1,2,\dots).$$

Bu polinomlar L_2-normunda $\|f - \pi_n\| \leq M_2 \cdot R_1^{-n}$ yi sağlar ve dolayısıyla aynı eşitsizlik minimum p_n polinomları için de geçerlidir (4.1.1 Teorem, a)):

$$\|f - p_n\| \leq M_2 \cdot R_1^{-n}.$$

Artık 3.3 Lemma'ya göre her $B \subset G$ kompakt alt kümesi için

$$\max_{B}|f(z) - p_n(z)| \leq M_3(B) \cdot R_1^{-n}$$

olur, böylece

$$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq 2M_3(B) \cdot R_1^{-n}, \qquad z \epsilon B$$

dir.

Şimdi $B = \Gamma$ alalım burada Γ, C'ye çok yakın bir Jordan eğrisidir ve C, Γ_σ'nin iç kısmında yer alır. Bernstein Lemması sonucu

$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq 2M_3(B)R_1^{-n}\sigma^{n+1}, \qquad z \in \Gamma_\sigma$

olur.

Dolayısıyla $p_0 + \sum_{n=0}^{\infty}(p_{n+1} - p_n)$ polinomlar serisi, Γ_σ'nın üzerinde ve içinde analitik olan bir F fonksiyonuna düzgün bir şekilde yakınsar ve $\bar{G}$, Γ_σ'nın içinde yer aldığından $z \in \bar{G}$ için

$$|F(z) - p_{n(z)}| = \left|\sum_{k \geq n}\left(p_{k+1}(z) - p_k(z)\right)\right|$$

$$\leq \sum_{k \geq n}|p_{k+1}(z) - p_k(z)|$$

$$\leq 2M_3(B)\sigma \cdot \sum_{k \geq n}(\sigma / R_1)^k$$

ifadesi geçerlidir. Bu, f yerine F alındığında (6.9) bağıntısını oluşturur. Fakat $z \in G$ için $p_n(z) \to f(z),\ (n \to \infty)$ olduğundan, F fonksiyonu G 'deki f ile aynıdır ve böylece (6.9)'un ispatı tamamlanır.

(6.7) ifadesi genelleştirilebilir. Eğer

$|f(z) - p_n(z)| \leq M / R^n (z \in \bar{G})$

ise

$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq 2M/R^n (z \in C)$

'dir. Dolayısıyla

$$|p_{n+1}(z) - p_n(z)| \leq (2M/R^n)\sigma^{n+1}\ (z \in C_\sigma)$$

olur. Bu da $1 \leq \sigma < R < \rho$ olmak üzere her σ ve R için

$$max\{|f(z) - p_n(z)| : z \in C_\sigma\} = O((\sigma / R)^n) \qquad (n \to \infty)$$

anlamına gelir. Böylece $p_n(z)$, int C_σ'da bile $f(z)$, $(n \to \infty)$ fonksiyonuna yakınsar. ■

6.2.2 Teorem: G kapalı bölgesinde $h(z)$, $a < 1$ düzeyindeki Lipschitz koşulunu sağlayan pozitif bir fonksiyon ve Γ analitik bir eğri olsun.

Bu durumda G_R'de $R > 1$ için analitik olan ve kapalı $\overline{G_R}$ bölgesinde sürekli olan her $f(z)$ fonksiyonu için

$$\left|f(z) - \sum_{n=0}^{N} a_n P_n(z)\right| \leq c(R) E_N(f, \bar{G}_R)\sqrt{N}, \qquad z \in \bar{G}_R \tag{6.10}$$

olur [5].

İspat: $S_N(z, f)$, $g(z) \equiv 1$ koşulu ile G 'deki $f(z)$ fonksiyonunun Faber serisinin kısmi toplamları olsun. Burada bir Taylor serisinin kalan teriminin değerlendirilmesine benzer bir yöntemle

$$|f(z) - S_N(z, f)| \leq cE_N(f, \bar{G}_R)\, ln\, N\, , z \in \bar{G}_R \tag{6.11}$$

$$|f(\zeta) - S_N(\zeta, f)| \leq c(R)\frac{E_N(f, \bar{G}_R)}{R^N}, \zeta \in \bar{G}$$

elde edilir.

$z \in \Gamma_R$ için (5.3) ve (5.4) eşitsizliklerindeki $\{S_N(z, f)\}$ polinomları kullanılır.

$$\sum_{n=0}^{N} |P_n(z)|^2 \leq c(R) \sum_{n=0}^{N} (n+1) R^{2n}$$

$$\leq c(R) \frac{NR^{2N}}{R^2 - 1}\ , \qquad z \in \Gamma_R$$

elde ederiz ve sonuç olarak (5.4) eşizsizliğinin yerini şimdi

$$|R_N(z)| \leq \frac{c(R)}{R^N} E_N(f, \bar{G}_R) \left(\frac{NR^{2N}}{R^2 - 1}\right)^{1/2}, z \in \Gamma_R$$

eşitsizliği alır, bu da (6.11) ile (5.3) bağıntılarından (6.10)'u elde etmemizi sağlar. Böylece 6.2.2 Teorem ispatlanmış olur. ■

1. KAYNAKLAR

[1] Pritsker, I.E., “Approximation of conformal mapping via the Szego kernel method”, [math.CV], 79-94, Oklahoma State Univ., U.S.A., 2013.

[2] Küçükaslan, M and Abdullayev, F.G., “Uniform convergence of Fourier series on compact subsets”, Sarajevo Journal of Mathematics, 203-207, 2010.

[3] Gaier, D. “Lectures on Complex Approximation”, Springer Science+ Business Media, LLC, Germany, 1987.

[4] Suetin, P.K., Series of Faber Polynomials, Gordon and Breach, 33-208, 1998.

[5] Suetin, P.K.,”Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials”, Proc.Steklov Inst. Math., Providence, Rhade Island AMS, 1974.

[6] Beckerman, B., Stylianopoulos, N.S., Bergman Orthogonal Polynomials and Grunsky Matrix, Const. Approx. 47, 211-235, 2018.

[7] Levin, A.L. Saff, E. B., Stylianopoulos, N.S., Zero distribution of Bergman orthogonal polynomials for certain planar domains., Const. Approx., 411-435, no:3, 19, 2003

[8] Aliprantis, C.D. and Burkinshaw, O. “Principles of Real Analysis”, Academic Press, San Diego, London, New York, Tokyo, 1998.

[9] Pommerenke, Ch., “Boundary behaviour of conformal maps”, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1992.

[10] Başkan, T., Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, Dora Yayıncılık, 2012

[11] De Vore, R.A. and Lorentz, G.G, “Constructive Approximation”, Springer Verlag, 1993.

[12] Smirnov V. I., Lebedev, N.A., Functions of a Complex Variable. Constructive Theory. MIT Press Cambridge, 1968

[13] Gaier, D. On the convergence of the Bieberbach polynomials inside the domain: Research Problems 97-1, Constr. Approx., 13, 153-154, 1997.

[14] Lehto, O. and Virtanen, K.I., Quasiconformal Mappings in the Plane, Springer Verlag Berlin, 1973.

[15] Andrievskii, V.V. and Abdullayev, F.G. “On orthogonal polynomials over domains with K-quasiconformal boundary”, Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR. Ser. F.T.M., 1, 3-7, 1983,

[16] Rickman, Characterization of quasiconformal arcs, Ann. Acad. Sci. Fenn., Series A I. Math., 395, 1966.

[17] Abdullayev, F.G. “Uniform convergence of the generalized Bieberbach polynomials in regions with non-zero angles, Acta Math. Hung., 77 (3), 223-246, 1997.