T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MEIR-KEELER TİPİNDE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI ÜZERİNE

KÜBRA KARAAĞAÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : **Doç. Dr. Nihal TAŞ (Tez Danışmanı)**
Prof. Dr. Ali GÜVEN
Prof. Dr. Özgür EGE

BALIKESİR, MAYIS - 2024

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Meir-Keeler Tipinde Bazı Sabit Nokta Sonuçları Üzerine**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Kübra KARAAĞAÇ

ÖZET

MEIR-KEELER TİPİNDE BAZI SABİT NOKTA SONUÇLARI ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
KÜBRA KARAAĞAÇ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, MAYIS - 2024

Yedi bölümden oluşan bu tezde, Rhoades'in sabit noktada süreksizlik açık probleminin çözümünde kullanılan iki farklı sayı yardımıyla, sabit noktada yeni süreksizlik sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada, Meir-Keeler ve Caristi tipi daralma koşullarından esinlenerek, yeni sabit çember ve sabit disk sonuçları elde edilmiştir.

Bu tezde birinci bölüm giriş bölümüdür.

İkinci bölümde, çalışma boyunca kullanılacak olan temel kavramlar ve bazı örnekleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Rhoades'in süreksizlik açık probleminin çözümünde kullanılan iki farklı sayı tanımlanmış olup, bu sayılar yardımıyla elde edilen sabit noktada süreksizlik sonuçları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, k -süreklilik tanımı ve örnekleri ele alınarak, k -süreklilik yardımı ile elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde, Meir-Keeler ve Caristi tipi daralma koşulları kullanılarak elde edilen sabit noktada süreksizlik sonuçları verilmiştir.

Altıncı bölümde, Rhoades'in süreksizlik açık probleminin çözümünde kullanılan sayı yardımı ile elde edilen sabit çember sonuçları incelenmiştir. Ayrıca, Meir-Keeler ve Caristi yöntemi ile elde edilen yeni sabit çember ve sabit disk sonuçları verilmiştir.

Yedinci bölümde, çeşitli aktivasyon fonksiyonlarına uygulamalar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sabit nokta, metrik uzay, k -süreklilik, daralma koşulu, sabit çember, sabit disk.

Bilim Kod / Kodları : 20405 Sayfa Sayısı : 58

ABSTRACT

ON SOME MEIR-KEELER TYPE FIXED POINT RESULTS
MSC THESIS
KÜBRA KARAAĞAÇ
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. NİHAL TAŞ)

BALIKESİR, MAY - 2024

In this thesis, which consisting of seven chapters, new discontinuity results at the fixed point were obtained with the help of two different numbers used in the solution of Rhoades' open problem of discontinuity at the fixed point. In addition, in this study, new fixed circle and fixed disc results were obtained, inspired by Meir-Keeler and Caristi type contraction conditions.

The first chapter of this thesis is the introduction.

In the second chapter, the basic concepts and some examples that will be used throughout the study are given.

In the third chapter, two different numbers used in the solution of Rhoades' open discontinuity problem are defined, and discontinuity results at the fixed point obtained with the help of these numbers are given.

In the fourth chapter, the definition and examples of k-continuity are discussed and the results obtained with the help of k-continuity are given.

In the fifth section, discontinuity results at the fixed point obtained using Meir-Keeler and Caristi type contraction conditions are given.

In the sixth chapter, the fixed circle results obtained with the help of numbers used in the solution of Rhoades' open discontinuity problem are examined. Additionally, new fixed circle and fixed disc results obtained by the Meir-Keeler and Caristi method are given.

In the seventh section, applications to various activation functions are given.

KEYWORDS: Fixed point, metric space, k-continuity, contractive condition, fixed circle, fixed disc.

Science Code / Codes : 20405 Page Number : 58

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

(ζ, d)	: Metrik uzay
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$(\zeta, \lVert\cdot\rVert)$	: Normlu uzay
$\{\varpi_n\}$	: Dizi
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Karmaşık sayılar kümesi
$C_{\varpi_0,r}$	: Metrik uzaylarda çember
$D_{\varpi_0,r}$	: Metrik uzaylarda disk
$\mathbb{R}^+$	: Pozitif reel sayılar kümesi
$\mathbb{F}$	: Fonksiyon ailesi

ÖNSÖZ

Yüksek lisans eğitimim süresince tüm çalışmalarım boyunca bana yol gösteren, desteğini ve sevgisini hiç bir zaman esirgemeyen, ne zaman yorulsam anlayışı ve samimiyeti ile hep arkamda olan, tüm tecrübe ve bilgi birikimi ile yoluma ışık tutan çok değerli hocam ve danışanım Sayın Doç. Dr. Nihal TAŞ' a en içten dileklerim ile sonsuz teşekkür ederim.

Lisans dönemim boyunca da bilgisine ve duruşuna hayran olduğum Sayın Prof. Dr. Ali GÜVEN'e tüm destekleri için teşekkürü bir borç bilirim.

Hayatım boyunca her kararımda beni destekleyen, sevgilerini hep yanımda hissettiğim biricik anne ve babama teşekkürlerimi sunarım.

Lisansüstü eğitimim boyunca maddi ve manevi desteği ile her koşulda yanımda olan canım eşim Abdulkadir KARAAĞAÇ'a ve annesine hep destek olan güzel kızım Zeynep Serra'ma sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Balıkesir, 2024 **Kübra Karaağaç**

1. GİRİŞ

Sabit noktaların varlığı ve özellikleri ile ilgili teoremler sabit nokta teoremi olarak bilinmektedir. Sabit nokta teorisi, matematiğin birçok anabilim dalında çalışılmasının yanı sıra son zamanlarda mühendislik, fizik, kimya, ekonomi gibi uygulanabillir bilim dallarında da çalışılmaktadır. Bu çalışmaların matematiksel ve günlük hayat uygulamaları da elde edilen teorik sonuçların uygulanabilirliği açısından oldukça önemlidir.

Stefan Banach zamanından bu yana metrik sabit nokta teorisi, farklı alanlarda yaygın olarak çalışılmaktadır. Literatürde ilk kez 1922'de çalışılan "Banach Sabit Nokta Teoremi", tam metrik uzaylar üzerinde daralma fonksiyonu koşulunu sağlayan bir fonksiyonun sabit noktasının varlığını ve tekliğini veren bir yöntem sunar [1]. Ancak literatürdeki bazı örneklerde fonksiyonun sabit noktası olduğu halde, Banach sabit nokta teoreminin koşullarını sağlamadığı görülmektedir. Böyle fonksiyonlar için yeni sabit nokta teoremlerinin araştırılması açık bir problem olarak karşımıza gelmektedir. Bu problemin çözümü için de Banach sabit nokta teoremi farklı teknikler kullanılarak, daha genel bir hale getirilmeye çalışılmaktadır (ayrıntılı bilgi için [2] numaralı çalışmaya bakılabilir).

Bu genelleştirme türleri;

- Kullanılan daralma koşulunun genelleştirilmesi
- Kullanılan metrik uzayın genelleştirilmesi
- Geometrik yaklaşım

şeklindedir.

Banach sabit nokta teoreminde kullanılan daralma koşulu; Caristi tipi [3], Khan tipi [4], Meir-Keeler tipi [5] ve Ciric tipi [6] gibi çeşitli daralma koşullarına genelleştirilmiştir. Ayrıca üzerinde çalışılan metrik uzayın genelleştirilmesi ile S -metrik uzay [7], b -metrik uzay [8] ve G -metrik uzay [9] gibi kavramlar tanımlanmıştır.

Metrik sabit nokta teorisinde yapılan bir diğer çalışma alanı da sabit noktada sürekizlik sonuçlarının araştırılmasıdır. Çünkü literatürde sabit noktası olan fakat bu noktada sürekli olmayan fonksiyon örnekleri mevcuttur. Örneğin, reel sayılar kümesi üzerinde

$$\xi\varpi = \begin{cases} \varpi & , \quad \varpi \leq 1 \\ 2 & , \quad \varpi > 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ξ fonksiyonunun sabit noktası vardır ve $\varpi = 1$ dir. Fakat bu fonksiyon $\varpi = 1$ noktasında süreksizdir.

Bu durum, 1988 yılında Rhoades tarafından [10] numaralı kaynakta açık problem olarak bırakılmıştır. Bu problem çerçevesinde farklı teknikler ile yeni sonuçlar elde edilmiştir [11-18].

Metrik sabit nokta teoresinde kullanılan daralma koşulu ve metrik uzayların genelleştirilmesinin yanı sıra, sabit nokta sayısının birden çok olduğu durumlarda sabit nokta kavramı, geometrik bir yaklaşım olarak sabit elips, sabit çember, sabit hiperbol, sabit disk gibi kavramlara genelleştirilmiştir. Örneğin, herhangi bir metrik uzay üzerinde sabit çember kavramı Özgür ve Taş tarafından ilk kez [19] numaralı çalışmada tanımlanmıştır. Sabit çember ile ilgili çalışmalara [19-23] numaralı kaynaklardan ulaşılabilir.

Sabit noktada süreksizlik ve sabit çember kavramları ele alınarak çeşitli uygulamalar da elde edilmiştir. Örneğin, reel değerli aktivasyon fonksiyonları için bir uygulama [17] numaralı kaynakta verilmiştir.

Bu tezde; metrik uzaylar üzerinde Rhoades'in süreksizlik açık probleminin çözümünde kullanılan sayılardan yararlanılarak, ilk olarak literatürde var olan süreksizlik sonuçları incelenmiş olup daha sonra da Meir-Keeler ve Caristi tipi daralma koşullarından esinlenerek sabit noktada yeni süreksizlik sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca, bu daralma koşullarından yararlanılarak yeni sabit disk ve sabit çember sonuçları elde edilmiştir. Yapılan çalışmaların önemini artırmak için de aktivasyon fonkisyonlarına uygulama da elde edilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanımlar, teoremler ve örnekler verilecektir.

Tanım 2.1. ζ boştan farklı bir küme olsun. $d:\zeta\times\zeta\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $\varpi,\omega\in\zeta$ için

(M1) $d(\varpi,\omega)=0\Leftrightarrow\varpi=\omega$,

(M2) $d(\varpi,\omega)=d(\omega,\varpi)$ (simetri),

(M3) $d(\varpi,\omega)\le d(\varpi,z)+d(z,\omega)$ (üçgen eşitsizliği)

şartlarını sağlıyorsa, d fonksiyonuna ζ kümesi üzerinde bir metrik ve (ζ,d) ikilisine de bir metrik uzay denir [24-25].

Örnek 2.2. $\zeta=\mathbb{R}$ olsun. Her $\varpi,\omega\in\mathbb{R}$ için,

$$d(\varpi,\omega)=|\varpi-\omega|$$

şeklinde tanımlanan d fonksiyonu gerçel eksen üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe, (mutlak) salt değer metriği ya da $\mathbb{R}$ üzerinde alışılmış metrik denir [26].

Tanım 2.3. ζ bir vektör uzayı olsun. $\|\cdot\|:\zeta\to\mathbb{R}$ reel değerli fonksiyonu

(N1) Her $\varpi\in\zeta$ için $\|\varpi\|\ge 0$ dır,

(N2) Her $\varpi\in\zeta$ için $\|\varpi\|=0\Leftrightarrow\varpi=0$ dır,

(N3) Her $\lambda\in\mathbb{R}$ ve $\varpi\in\zeta$ için $\|\lambda\varpi\|=|\lambda|\|\varpi\|$,

(N4) Her $\varpi,\omega\in\zeta$ için $\|\varpi+\omega\|\le\|\varpi\|+\|\omega\|$

şartları sağlanıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna ζ üzerinde bir norm ve $(\zeta,\|\cdot\|)$ ikilisine de bir normlu uzay denir [27].

Tanım 2.4. (ζ,d) bir metrik uzay, $\varpi\in\zeta$ ve $\{\varpi_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık $n\ge n_0$ şeklindeki her bir n doğal sayısı için

$$d(\varpi_n,\varpi)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $n_0\in\mathbb{N}$ sayısı varsa $\{\varpi_n\}$ dizisine yakınsaktır denir. Ayrıca ϖ noktasına da bu dizinin limiti denir [25].

Tanım 2.5. (ζ,d) bir metrik uzay ve $\{\varpi_n\}$ bu uzayda bir dizi olsun. Verilen her $\varepsilon>0$ sayısına karşılık her $n,m\ge n_0$ için

$d\left(\varpi_n,\varpi_m\right)<\varepsilon$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı varsa $\{\varpi_n\}$ dizisine bir Cauchy dizisi denir [25].

Tanım 2.6. (ζ,d) bir metrik uzay olsun. ζ uzayındaki her bir Cauchy dizisi yakınsak ise (ζ,d) metrik uzayına tam metrik uzay denir [25].

Tanım 2.7. (ζ,d), (Υ,m) iki metrik uzay ve $\xi:\zeta\to\Upsilon$ fonksiyonu ve bir $a\in\zeta$ noktası verilsin. Eğer verilen her $\varepsilon>0$ sayısı için $d(\varpi,a)<\delta$ olduğunda $m\left(\xi(\varpi),\xi(a)\right)<\varepsilon$ olacak biçimde bir $\delta>0$ sayısı bulunabilirse ξ fonksiyonuna a noktasında süreklidir denir. Eğer ξ fonksiyonu ζ in her bir noktasında sürekli ise ξ fonksiyonuna ζ üzerinde sürekli ya da kısaca süreklidir denir [28].

Tanım 2.8. $\xi:(\zeta,d)\to(\Upsilon,m)$ fonksiyonu verilsin. (ζ,d) de $(\varpi_n)\to\varpi_0$ olduğunda (Υ,m) de $\left(\xi(\varpi_n)\right)\to\xi(\varpi_0)$ oluyor ise ξ fonksiyonuna ϖ_0 noktasında dizisel sürekli fonksiyon denir [28].

Teorem 2.9. (ζ,d), (Υ,m) metrik uzaylar ve $\xi:\zeta\to\Upsilon$ olmak üzere

"ξ fonksiyonu $\varpi_0\in\zeta$ noktasında süreklidir$\Leftrightarrow$ ζ_d uzayında $(\varpi_n)\to\varpi_0$ özelliğindeki her bir (ϖ_n) dizisi için $\left(\xi(\varpi_n)\right)\to\xi(\varpi_0)$ dır" [28].

Tanım 2.10. ζ boş olmayan bir küme ve $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon olsun.

$\xi\varpi=\varpi$

eşitliğini sağlayan $\varpi\in\zeta$ noktasına ξ fonksiyonunun bir sabit noktası denir [25 , 29].

Örnek 2.11. $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar kümesi üzerindeki $\xi:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ fonksiyonu

$\xi\varpi=\varpi^2+3\varpi+4$

şeklinde tanımlansın. $\{-1+\sqrt{3}i,-1-\sqrt{3}i\}$ noktaları ξ fonksiyonunun sabit noktalarıdır.

Tanım 2.12. (ζ,d) bir metrik uzay ve

$C_{\varpi_0,r}=\{\varpi\in\zeta:d(\varpi_0,\varpi)=r\}$

bir çember olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon olmak üzere her $\varpi\in C_{\varpi_0,r}$ için

$\xi\varpi=\varpi$

sağlanıyorsa, $C_{\varpi_0,r}$ çemberine ξ nin bir sabit çemberi denir [19].

Örnek 2.13. $\zeta=\mathbb{R}$ kümesi üzerinde alışılmış metriği ele alalım ve $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases}\dfrac{1}{\varpi} & ; \quad \varpi\in[-1,\infty)-\{0\}\\ 3 & ; \quad \varpi\in(-\infty,-1)\cup\{0\}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ξ fonksiyonu $C_{0,1}=\{-1,1\}$ birim çemberini sabit bırakır. Fakat, dikkat edilirse çemberin merkezini sabit bırakmaz.

Tanım 2.14. (ζ,d) bir metrik uzay ve

$$D_{\varpi_0,r}=\{\varpi\in\zeta : d(\varpi_0,\varpi)\leq r\}$$

bir disk olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon olmak üzere her $\varpi\in D_{\varpi_0,r}$ için

$$\xi\varpi=\varpi$$

sağlanıyorsa, $D_{\varpi_0,r}$ diskine ξ nin bir sabit diski denir [30].

Örnek 2.15. $\zeta=\mathbb{R}$ kümesi üzerinde alışılmış metriği ele alalım ve $\xi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases}\varpi & ; \quad \varpi\in[-1,\infty]\\ \dfrac{1}{\varpi} & ; \quad \varpi\in(-\infty,-1)\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ξ fonksiyonu $D_{0,1}=[-1,1]$ birim diskini sabit bırakır. Dikkat edilirse, ξ fonksiyonu diski sabit bıraktığı için diskin merkezini de sabit bırakır.

3. SABİT NOKTADA SÜREKSİZLİK SONUÇLARI

Metrik uzaylar üzerinde Rhoades'in sabit noktada süreksizlik açık problemine [10] numaralı kaynakta verilen çözümde kullanılan iki farklı sayıyı tanımlayalım:

(ζ, d) bir metrik uzay, $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon ve $0 \leq a, b < 1$ olmak üzere $K(\varpi, \omega)$ [15] ve $K^*(\varpi, \omega)$ [17] sayıları;

$$K(\varpi,\omega) = \max\left\{ \begin{array}{l} d(\varpi,\omega), ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\omega,\xi\omega), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) + ad(\omega,\xi\omega), \dfrac{b\left[d(\varpi,\xi\omega) + d(\omega,\xi\varpi)\right]}{2} \end{array} \right\}$$

ve

$$K^*(\varpi,\omega) = \max\left\{ \begin{array}{l} d(\varpi,\omega), ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\omega,\xi\omega), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) + ad(\omega,\xi\omega), \dfrac{d(\varpi,\xi\omega) + d(\omega,\xi\varpi)}{2} \end{array} \right\}$$

şeklindedir.

3.1 $K(\varpi,\omega)$ Sayısı Yardımıyla Sabit Noktada Süreksizlik Sonuçları

Bu bölümde, $K(\varpi,\omega)$ sayısı yardımıyla literatürde var olan sabit noktada süreksizlik sonuçları ve örnekleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Teorem 3.1.1. (ζ, d) bir metrik uzay olsun. Her $\varpi, \omega \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(*i*) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varepsilon < K(\varpi,\omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

(*ii*) $K(\varpi,\omega) > 0$ olduğunda

$$d(\xi\varpi,\xi\omega) < K(\varpi,\omega)$$

dir.

Bu durumda, her $\varpi \in \zeta$ için $\xi^n\varpi$ iterasyon dizisi bir Cauchy dizisidir [15].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ 'de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_{n+1} = \xi^n\varpi_0 = \xi\varpi_n$$

olacak şekilde tanımlayalım ve her $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için,

$$c_n = d(\varpi_n, \varpi_{n+1})$$

olsun. (*ii*) koşulundan,

$$c_n = d(\varpi_n, \varpi_{n+1}) = d(\xi\varpi_{n-1}, \xi\varpi_n) < K(\varpi_{n-1}, \varpi_n)$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi_{n-1}, \varpi_n), ad(\varpi_{n-1}, \varpi_n) + (1-a)d(\varpi_n, \varpi_{n+1}), \\ (1-a)d(\varpi_{n-1}, \varpi_n) + ad(\varpi_n, \varpi_{n+1}), \dfrac{b\left[d(\varpi_{n-1}, \varpi_{n+1}) + d(\varpi_n, \varpi_n)\right]}{2} \end{array}\right\}$$

$$= d(\varpi_{n-1}, \varpi_n) = c_{n-1}$$

elde edilir. Böylece $\{c_n\}$ dizisi pozitif reel sayıların kesinlikle azalan bir dizisidir ve $c \geq 0$ limitine yakınsar. $c > 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $n \geq k$ olduğunda

$$c < c_n < c + \delta(n) \tag{3.1}$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{N}$ vardır. (*i*) koşulundan,

$c_n < c_{n-1}$ ve $n \geq k$ için $c_n \leq c$

dir. Bu ise (3.1) eşitsizliği ile çelişir. O halde $c = 0$ dır.

$\{\varpi_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu ispatlayalım:

$\varepsilon > 0$ alalım. $\delta(\varepsilon) < \varepsilon$ olduğunu kabul edelim. $c_n \to 0$ olduğundan, $n \geq k$ için

$$c_n < \frac{\delta}{2}$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır. Herhangi $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(\varpi_k, \varpi_{k+n}) < \varepsilon + \frac{\delta}{2} \tag{3.2}$$

olduğunu göstermek için Jachymski [31] tekniğini kullanalım.

$n = 1$ için (3.2) eşitsizliği sağlanır. Gerçekten,

$$d(\varpi_k, \varpi_{k+1}) = c_k < \frac{\delta}{2} < \varepsilon + \frac{\delta}{2}$$

elde edilir. n için (3.2) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim ve $n+1$ için doğru olduğunu gösterelim. Üçgen eşitsizliğinden,

$$d(\varpi_k, \varpi_{k+n+1}) \leq d(\varpi_k, \varpi_{k+1}) + d(\varpi_{k+1}, \varpi_{k+n+1})$$

olur. Amacımız için,

$$d(\varpi_{k+1}, \varpi_{k+n+1}) \leq \varepsilon$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Bunun için,

$$K\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right)\leq\varepsilon+\delta$$

olduğunu ispatlayalım. Burada,

$$K\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right)=\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right),ad\left(\varpi_k,\xi\varpi_k\right)+\left(1-a\right)d\left(\varpi_{k+n},\xi\varpi_{k+n}\right),\\ \left(1-a\right)d\left(\varpi_k,\xi\varpi_k\right)+ad\left(\varpi_{k+n},\xi\varpi_{k+n}\right),\\ \dfrac{b\left[d\left(\varpi_k,\xi\varpi_{k+n}\right)+d\left(\varpi_{k+n},\xi\varpi_k\right)\right]}{2}\end{array}\right\}$$

dir. Tümevarım hipotezinden,

$$d\left(\varpi_k,\varpi_{k+1}\right)<\varepsilon+\frac{\delta}{2}$$

$$ad\left(\varpi_k,\varpi_{k+1}\right)+\left(1-a\right)d\left(\varpi_{k+n},\varpi_{k+n+1}\right)<a\frac{\delta}{2}+\left(1-a\right)\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2},$$

$$\left(1-a\right)d\left(\varpi_k,\varpi_{k+1}\right)+ad\left(\varpi_{k+n},\varpi_{k+n+1}\right)<\left(1-a\right)\frac{\delta}{2}+a\frac{\delta}{2}=\frac{\delta}{2}$$

ve

$$\frac{b\left[d\left(\varpi_k,\xi\varpi_{k+n}\right)+d\left(\varpi_{k+n},\xi\varpi_k\right)\right]}{2}=\frac{b\left[d\left(\varpi_k,\varpi_{k+n+1}\right)+d\left(\varpi_{k+n},\varpi_{k+1}\right)\right]}{2}$$

$$\leq\frac{b\left[\left(d\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right)+d\left(\varpi_{k+n},\varpi_{k+n+1}\right)\right)+\left(d\left(\varpi_{k+n},\varpi_k\right)+d\left(\varpi_k,\varpi_{k+1}\right)\right)\right]}{2}$$

$$<\frac{\left[\left(d\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right)+d\left(\varpi_{k+n},\varpi_{k+n+1}\right)\right)+\left(d\left(\varpi_{k+n},\varpi_k\right)+d\left(\varpi_k,\varpi_{k+1}\right)\right)\right]}{2}$$

$$<\frac{\varepsilon+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}+\varepsilon+\frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2}}{2}=\frac{2\varepsilon+2\delta}{2}=\varepsilon+\delta$$

elde edilir ve böylece

$$K\left(\varpi_k,\varpi_{k+n}\right)<\varepsilon+\delta$$

olur. (i) koşulundan,

$$d\left(\xi\varpi_k,\xi\varpi_{k+n}\right)=d\left(\varpi_{k+1},\varpi_{k+n+1}\right)\leq\varepsilon$$

dir. O halde, tümevarım ile ispat tamamlanır ve $\{\varpi_n\}$ bir Cauchy dizisidir. ζ tam olduğundan, $n\to\infty$ iken $\varpi_n\to z$ olacak şekilde $z\in\zeta$ vardır. Ayrıca

$$\xi\varpi_n\to z$$

elde edilir. □

Uyarı 3.1.2. $K(\varpi,\omega)$ tanımında $a=0$, $b=1$ alınırsa Teorem 3.1.1 yine doğru olur [15]. Bu durumda,

$$K^{**}(\varpi,\omega)=\max\left\{d(\varpi,\omega),d(\varpi,\xi\varpi),d(\omega,\xi\omega),\frac{d(\varpi,\xi\omega)+d(\omega,\xi\varpi)}{2}\right\}$$

sayısı elde edilir. $K^{**}(\varpi,\omega)$ sayısını da kullanarak aşağıdaki sonucu verebiliriz:

Sonuç 3.1.3. (ζ,d) bir tam metrik uzay olsun. Herhangi $\varpi,\omega\in\zeta$ için $\xi:\zeta\to\zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(*i*) Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\varepsilon<K^{**}(\varpi,\omega)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)\le\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon)>0$ vardır.

(*ii*) $K^{**}(\varpi,\omega)>0$ olduğunda

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)<K^{**}(\varpi,\omega)$$

dir.

Bu durumda, her $\varpi\in\zeta$ için $\xi^n\varpi$ iterasyon dizisi bir Cauchy dizisidir [15].

Örnek 3.1.4. $\zeta=[0,2]$ ve d, ζ üzerinde alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases}1 & ; \quad \varpi\in[0,1]\\ 0 & ; \quad \varpi\in(1,2]\end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. ξ fonksiyonu Teorem 3.1.1 in şartlarını sağlar. ξ nin bir tek $\varpi=1$ sabit noktası vardır [15]. Gerçekten,

$$\varpi,\omega\in[0,1]\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)=0 \text{ ve } 0<K(\varpi,\omega)\le1$$

$$\varpi,\omega\in(1,2]\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)=0 \text{ ve } 1<K(\varpi,\omega)<2$$

$\varpi\in[0,1],\omega\in(1,2]$ veya $\varpi\in(1,2],\omega\in[0,1]$ ise,

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)=1 \text{ ve } 1<K(\varpi,\omega)<2$$

elde edilir. Böylece (*ii*) koşulu sağlanır.

$$\delta(\varepsilon)=\begin{cases}1 & ; \quad \varepsilon\ge1\\ 1-\varepsilon & ; \quad \varepsilon<1\end{cases}$$

olsun. Bu durumda, ξ fonksiyonu (i) koşulunu sağlar.

Örnek 3.1.4 de Teorem 3.1.1 in şartlarını sağlayıp sabit noktası olan bir fonksiyon örneği görmemize rağmen, Teorem 3.1.1. in şartları sabit noktanın varlığı için yeterli değildir. Aşağıda Teorem 3.1.1 in şartlarını sağlayıp, sabit noktası olmayan bir fonksiyon örneği görmekteyiz.

Örnek 3.1.5. $\zeta = [0,2]$ ve d , ζ üzerinde alışılmış metrik olsun. $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi = \begin{cases} \dfrac{1+\varpi}{2} & ; \quad \varpi < 1 \\ 0 & ; \quad \varpi \geq 1 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda (ζ, d) bir tam metrik uzaydır. $a = 0$ ve

$$\delta(\varepsilon) = \begin{cases} \varepsilon & ; \quad \varepsilon \geq 1 \\ 1-\varepsilon & ; \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

ile ξ fonksiyonu Teorem 3.1.1 in şartlarını sağlar. Fakat ξ fonksiyonunun bir sabit noktası yoktur. Her $\varpi \in \zeta$ için $\{\xi^n \varpi\}$ bir Cauchy dizisidir ve $\xi^n \varpi \to 1$ dir [16].

Bu örnekte görüyoruz ki, Teorem 3.1.1 in koşulları sabit bir noktanın varlığını sağlamak için yeterli değildir. Bu nedenle, Teorem 3.1.1 in koşullarını sağlayan bir ξ fonksiyonunun sabit bir noktasının varlığını sağlamak için bazı ek varsayımlar gereklidir. Bunun için iki farklı yaklaşım ele alacağız. Ya (ii) koşulu daha güçlü bir koşulla değiştirilir ya da ξ nin daha zayıf bir süreklilik biçimini sağladığını varsayarız. Ek koşulun sabit noktada sürekliliği sağlamaya yetmediğini göreceğiz. Şimdi Teorem 3.1.1 deki (ii) koşulunu şu koşulla değiştirelim:

$\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyon, her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ olacak şekilde

$$d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \phi(K(\varpi, \omega))$$

dir [16].

Teorem 3.1.6. (ζ, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $\varpi, \omega \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(iii) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varepsilon < K(\varpi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

(iv) $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyon, her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ olacak şekilde

$$d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \phi(K(\varpi, \omega))$$

dir.

Bu durumda, ξ nin bir tek z sabit noktası vardır ve her $\varpi \in \zeta$ için $\xi^n \varpi \to z$ dir. Eğer $0 < a < 1$ ise ξ, z noktasında süreklidir. $a = 0$ için ξ nin z noktasında sürekli olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\lim_{\varpi \to z} K(\varpi, z) = 0$$

olmasıdır [16].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n = \xi \varpi_{n-1} = \xi^n \varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.1.1 in ispatında kolayca görülür. ζ tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \varpi_n = \lim_{n\to\infty} \xi^n \varpi_0 = z \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \xi \varpi_n = z$$

olacak şekilde bir $z \in \zeta$ vardır.

z nin, ξ nin bir sabit noktası olduğunu, yani $\xi z = z$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\xi z \neq z$ olduğunu kabul edelim. Burada $a = 0$ veya $0 < a < 1$ olacak şekilde iki ayrı durum ortaya çıkar:

Eğer $a = 0$ ise yeterince büyük n sayısı için

$$d\left(\xi \varpi_n, \xi z\right) \leq \phi\left(\max \left\{ \begin{array}{c} d\left(\varpi_n, z\right), d\left(z, \xi z\right), d\left(\varpi_n, \xi \varpi_n\right), \\ \dfrac{b\left[d\left(\varpi_n, \xi z\right) + d\left(z, \xi \varpi_n\right)\right]}{2} \end{array} \right\} \right), \quad 0 \leq b < 1$$

olur. $n \to \infty$ için

$$d\left(z, \xi z\right) \leq \phi\left(\max\left\{ d\left(z, z\right), d\left(z, \xi z\right), d\left(z, z\right), \frac{b\left[d\left(z, \xi z\right) + d\left(z, z\right)\right]}{2} \right\} \right)$$

$$= \phi\left(\max\left\{ 0, d\left(z, \xi z\right), 0, \frac{b}{2} d\left(z, \xi z\right) \right\} \right)$$

$$= \phi\left(d\left(z, \xi z\right)\right)$$

elde edilir.

$$d\left(z, \xi z\right) \leq \phi\left(d\left(z, \xi z\right)\right) < d\left(z, \xi z\right)$$

olması bir çelişkidir. Dolayısıyla $a = 0$ olduğunda $\xi z = z$ dir ve z, ξ nin bir sabit noktasıdır.

Eğer $0 < a < 1$ ise (*iv*) koşulu kullanılarak yeterince büyük n sayısı için,

$$d\left(\xi\varpi_n,\xi z\right)\le\phi\left(\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\varpi_n,z\right),\\ (1-a)d\left(z,\xi z\right)+ad\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right),\\ ad\left(z,\xi z\right)+(1-a)d\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right),\\ \dfrac{b\left[d\left(\varpi_n,\xi z\right)+d\left(z,\xi\varpi_n\right)\right]}{2}\end{array}\right\}\right),\quad 0\le b<1$$

olur. $n\to\infty$ için,

$$d\left(z,\xi z\right)\le\phi\left(\max\left\{\begin{array}{l} d\left(z,z\right),ad\left(z,z\right)+(1-a)d\left(z,\xi z\right),\\ (1-a)d\left(z,z\right)+ad\left(z,\xi z\right),\dfrac{b\left[d\left(z,\xi z\right)+d\left(z,z\right)\right]}{2}\end{array}\right\}\right)$$

$$=\phi\left(\max\left\{0,(1-a)d\left(z,\xi z\right),ad\left(z,\xi z\right),\frac{b}{2}d\left(z,\xi z\right)\right\}\right)$$

$$=\phi(k),\ 0<k<d\left(z,\xi z\right)$$

elde edilir.

$$d\left(z,\xi z\right)\le\phi(k)<k<d\left(z,\xi z\right)$$

olması bir çelişkidir. Dolayısıyla $\xi z=z$ dir ve z , ξ nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi $0<a<1$ olduğunda, ξ nin sabit bir z noktasında sürekli olduğunu gösterelim:

ζ de $\{z_n\}$ dizisini $n\to\infty$ iken $z_n\to z$ olacak şekilde tanımlayalım. $\xi z_n\to z=\xi z$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer değilse, $m\ge N$ olduğunda

$$d\left(\xi\omega_m,z\right)\ge r$$

olacak şekilde $\{z_n\}$ dizisinin bir $\{\omega_m\}$ alt dizisi, bir $r>0$ reel sayısı ve bir pozitif N tamsayısı vardır. Yeterince büyük bir m sayısı için (*iv*) koşulunu kullanarak,

$$k=\max\left\{\varepsilon_1,a\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_2\right],(1-a)\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_3\right]\right\}<d\left(z,\xi\omega_m\right),$$

$$\lim_{n\to\infty}\varepsilon_i=0,\ i=1,2,3$$

olmak üzere,

$$d\left(\xi\omega_m,\xi z\right)=d\left(\xi\omega_m,z\right)$$

$$\leq \phi\left(\max\left\{ \begin{array}{l} d\left(\omega_m, z\right), \\ \left(1-a\right)d\left(z,\xi z\right)+ad\left(\omega_m,\xi\omega_m\right), \\ \dfrac{b\left[d\left(\omega_m,\xi z\right)+d\left(z,\xi\omega_m\right)\right]}{2}, \\ ad\left(z,\xi z\right)+\left(1-a\right)d\left(\omega_m,\xi\omega_m\right) \end{array} \right\} \right)$$

$$=\phi\left(\max\left\{ \varepsilon_1, ad\left(\omega_m,\xi\omega_m\right), \frac{b\left[\varepsilon_1+d\left(z,\xi\omega_m\right)\right]}{2}, \left(1-a\right)d\left(\omega_m,\xi\omega_m\right) \right\} \right)$$

$$=\phi\left(\max\left\{\varepsilon_1, a\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_2\right], \left(1-a\right)\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_3\right]\right\}\right)$$

$$=\phi\left(k\right)$$

elde edilir.

$$d\left(\xi\omega_m,\xi z\right)\leq\phi\left(k\right)<k<d\left(z,\xi\omega_m\right)$$

olması bir çelişkidir. Bu durumda, $\xi z_n \to z=\xi z$ dir ve ξ fonksiyonu z sabit noktasında süreklidir.

Şimdi $a=0$ olduğunda ξ nin sabit bir z noktasında sürekli olduğunu gösterelim:

ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini $n\to\infty$ iken $\varpi_n \to z$ olacak şekilde tanımlayalım.

$$\lim_n K\left(\varpi_n,z\right)=\lim_n \max\left\{ d\left(\varpi_n,z\right), d\left(z,\xi z\right), d\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right), \frac{b\left[d\left(\varpi_n,\xi z\right)+d\left(z,\xi\varpi_n\right)\right]}{2} \right\}=0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\lim_{\varpi_n\to z} K\left(\varpi_n,z\right)=0$$

ise bu durumda $\varpi_n \to z$ iken $d\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right)\to 0$ dir. Yani,

$$\xi\varpi_n \to z=\xi z$$

dir. O halde, ξ fonksiyonu z noktasında süreklidir.

Şimdi ξ fonksiyonunun bir tek z sabit noktası olduğunu gösterelim:

z^*, ξ fonksiyonunun z noktasından farklı bir diğer sabit noktası, yani

$$\xi z^* = z^*$$

olsun. (iv) koşulundan,

$$d\left(z,z^*\right)=d\left(\xi z,\xi z^*\right)\leq\phi\left(K\left(z,z^*\right)\right) \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu vardır. Burada,

$$K\left(z, z^*\right) = \max \left\{ \begin{array}{l} d\left(z, z^*\right), ad\left(z, \xi z\right) + (1-a) d\left(z^*, \xi z^*\right), \\ (1-a) d\left(z, \xi z\right) + ad\left(z^*, \xi z^*\right), \dfrac{b\left[d\left(z, \xi z^*\right) + d\left(z^*, \xi z\right)\right]}{2} \end{array} \right\}, \ 0 \le a, b < 1$$

$$= \max\left\{d\left(z, z^*\right), 0, 0, bd\left(z, z^*\right)\right\}$$

$$= d\left(z, z^*\right)$$

dir. (3.3) eşitsizliğinden,

$$d\left(z, z^*\right) \le \phi\left(d\left(z, z^*\right)\right) < d\left(z, z^*\right)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. O halde $z = z^*$ olmak zorundadır. Sonuç olarak, ξ nin bir tek z sabit noktası vardır. □

3.2 $K^*(\varpi, \omega)$ Sayısı Yardımıyla Sabit Noktada Süreksizlik Sonuçları

Çalışmanın bu bölümünde, $K^*(\varpi, \omega)$ sayısı yardımıyla literatürde var olan sabit noktada süreksizlik sonuçları ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. (ζ, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $\varpi, \omega \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(i) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varepsilon < K^*(\varpi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(\xi\varpi, \xi\omega) \le \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

(ii) $K^*(\varpi, \omega) > 0$ olduğunda

$$d(\xi\varpi, \xi\omega) < K^*(\varpi, \omega)$$

dir.

Bu durumda, her $\varpi \in \zeta$ için $\left\{\xi^n \varpi\right\}$ iterasyon dizisi bir Cauchy dizisidir ve $z \in \zeta$ için

$$\lim_{n\to\infty} \xi^n \varpi = z$$

dir [17].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ 'de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n = \xi \varpi_{n-1} = \xi^n \varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Eğer,

$$\varpi_n = \varpi_{n+1}$$

ise bu durumda,

$$\varpi_n = \varpi_{n+1} = \varpi_{n+2} = \varpi_{n+3} = \ldots$$

dir, yani $\{\varpi_n\} = \{\xi^n \varpi_0\}$ bir Cauchy dizisidir ve ϖ_n, ξ nin bir sabit noktasıdır. Bu nedenle, her n sayısı için $\varpi_n \neq \varpi_{n+1}$ olduğunu varsayabiliriz.

$\gamma_n = d(\varpi_n, \varpi_{n+1})$ ve $\gamma_{n-1} = d(\varpi_{n-1}, \varpi_n)$ diyelim. (*ii*) koşulundan,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= d(\varpi_n, \varpi_{n+1}) = d(\xi\varpi_{n-1}, \xi\varpi_n) < K^*(\varpi_{n-1}, \varpi_n) \\
&= \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi_{n-1}, \varpi_n), \\ ad(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_{n-1}) + (1-a)d(\varpi_n, \xi\varpi_n), \\ (1-a)d(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_{n-1}) + ad(\varpi_n, \xi\varpi_n), \\ \dfrac{d(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_n) + d(\varpi_n, \xi\varpi_{n-1})}{2} \end{array}\right\} \\
&= \max\left\{\gamma_{n-1}, a\gamma_{n-1} + (1-a)\gamma_n, (1-a)\gamma_{n-1} + a\gamma_n, \frac{d(\varpi_{n-1}, \varpi_{n+1})}{2}\right\} \\
&= \gamma_{n-1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\{\gamma_n\}$ pozitif reel sayıların azalan bir dizisidir ve dolayısıyla $r \geq 0$ limitine yakınsar. $r > 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$n \geq N \Rightarrow r < d(\varpi_n, \varpi_{n+1}) < r + \delta(r) \tag{3.4}$$

olacak şekilde pozitif bir N tamsayısı vardır. Bir başka deyişle,

$$r < \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi_n, \varpi_{n+1}), \\ (1-a)d(\varpi_{n+1}, \xi\varpi_{n+1}) + ad(\varpi_n, \xi\varpi_n), \\ \dfrac{d(\varpi_{n+1}, \xi\varpi_n) + d(\varpi_n, \xi\varpi_{n+1})}{2}, \\ ad(\varpi_{n+1}, \xi\varpi_{n+1}) + (1-a)d(\varpi_n, \xi\varpi_n) \end{array}\right\} < r + \delta(r)$$

dir. (*i*) koşulundan yukarıdaki eşitsizlik,

$$d(\xi\varpi_n, \xi\varpi_{n+1}) = d(\varpi_{n+1}, \varpi_{n+2}) \leq r$$

eşitsizliğini verir. Bu ise (3.4) ile çelişir. Dolayısıyla $n \to \infty$ iken

$$d\left(\varpi_n, \varpi_{n+1}\right) \to 0$$

dir.

Şimdi $\{\varpi_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olmadığını varsayalım. Bu durumda $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{n_{i+1}}\right) > 2\varepsilon$$

olacak şekilde $\{\varpi_n\}$ in bir $\left\{\varpi_{n_i}\right\}$ alt dizisi vardır. (i) koşulunda, $0 < \delta \le \varepsilon$ olacak şekilde bir δ sayısı seçelim.

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\varpi_n, \varpi_{n+1}\right) = 0$$

olduğundan,

$$n \ge N \Rightarrow d\left(\varpi_n, \varpi_{n+1}\right) < \frac{\delta}{6}$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır.

$n_i > N$ olsun. Bu durumda,

$$n_i < m_i < n_{i+1} \text{ ve } d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_i}\right) \ge \varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right)$$

olacak şekilde m_i tamsayıları vardır.

Eğer $n_i > N$ değilse; bu durumda,

$$d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{n_{i+1}}\right) \le d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{n_{i+1}} - 1\right) + d\left(\varpi_{n_{i+1}} - 1, \varpi_{n_{i+1}}\right) < \varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right) + \left(\frac{\delta}{6}\right) < 2\varepsilon$$

çelişkisi elde edilir.

$$n_i < m_i < n_{i+1} \text{ ve } d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_i}\right) \ge \varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right) \tag{3.5}$$

olacak şekilde m_i en küçük tamsayı olsun. Bu durumda,

$$d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_{i-1}}\right) < \varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right)$$

dir. (3.5) ve (ii) koşulundan,

$$\varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right) \le d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_i}\right)$$
$$= d\left(\xi\varpi_{n_{i-1}}, \xi\varpi_{m_{i-1}}\right) < K^*\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{m_{i-1}}\right)$$

$$= \max \left\{ \begin{array}{l} d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{m_{i-1}}\right), \\ (1-a)\, d\left(\varpi_{m_{i-1}}, \xi\varpi_{m_{i-1}}\right) + ad\left(\varpi_{n_{i-1}}, \xi\varpi_{n_{i-1}}\right), \\ \dfrac{d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \xi\varpi_{m_{i-1}}\right) + d\left(\varpi_{m_{i-1}}, \xi\varpi_{n_{i-1}}\right)}{2}, \\ ad\left(\varpi_{m_{i-1}}, \xi\varpi_{m_{i-1}}\right) + (1-a)\, d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \xi\varpi_{n_{i-1}}\right) \end{array} \right\}$$

$$\leq \max\left\{ d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{m_{i-1}}\right), d\left(\varpi_{m_{i-1}}, \varpi_{n_i}\right) + d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{n_i}\right), d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{n_i}\right)\right\}$$

$$\leq d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_{i-1}}\right) + d\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{n_i}\right) < \varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right) + \left(\frac{\delta}{6}\right) = \varepsilon + \left(\frac{\delta}{2}\right)$$

yani,

$$\varepsilon + \left(\frac{\delta}{3}\right) \leq K^*\left(\varpi_{n_{i-1}}, \varpi_{m_{i-1}}\right) < \varepsilon + \left(\frac{\delta}{2}\right)$$

dir. (*i*) koşulundan son eşitsizlik,

$$d\left(\xi\varpi_{n_{i-1}}, \xi\varpi_{m_{i-1}}\right) \leq \varepsilon$$

yani,

$$d\left(\varpi_{n_i}, \varpi_{m_i}\right) \leq \varepsilon$$

dir. Bu ise (3.5) ile çelişir. Dolayısıyla $\{\varpi_n\}$ bir Cauchy dizisidir. ζ tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \varpi_n = \lim_{n\to\infty} \xi^n \varpi = z$$

olacak şekilde bir z noktası vardır. □

Daha önce verdiğimiz Örnek 3.1.5 in, Teorem 3.2.1 için de geçerli olduğu kolayca görülür.

Teorem 3.2.2. (ζ, d) bir tam metrik uzay olsun. Her $\varpi, \omega \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(*iii*) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varepsilon < K^*(\varpi, \omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ vardır.

(*iv*) $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyon, her $t > 0$ için $\phi(t) < t$ olacak şekilde

$$d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \phi\left(K^*(\varpi, \omega)\right)$$

dir.

Bu durumda, ξ nin bir tek z sabit noktası vardır ve her $\varpi \in \zeta$ için $\xi^n \varpi \to z$ dir. Eğer $0 < a < 1$ ise ξ, z noktasında süreklidir. $a = 0$ için ξ nin z noktasında sürekli olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\lim_{\varpi \to z} K^*(\varpi, z) = 0$$

olmasıdır [17].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n = \xi \varpi_{n-1} = \xi^n \varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.2.1 in ispatında kolayca görülür. ζ tam olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \varpi_n = \lim_{n\to\infty} \xi^n \varpi_0 = z \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \xi \varpi_n = z$$

olacak şekilde bir $z \in \zeta$ vardır. z nin, ξ nin bir sabit noktası olduğunu; yani $\xi z = z$ olduğunu gösterelim. Bunun için $\xi z \neq z$ olduğunu kabul edelim. Burada $a = 0$ veya $0 < a < 1$ olacak şekilde iki ayrı durum ortaya çıkar:

Eğer $a = 0$ ise yeterince büyük n sayısı için,

$$d(\xi\varpi_n, \xi z) \le \phi\left(\max\left\{ d(\varpi_n, z), d(z, \xi z), d(\varpi_n, \xi\varpi_n), \frac{d(\varpi_n, \xi z) + d(z, \xi\varpi_n)}{2} \right\} \right)$$

olur. $n \to \infty$ için,

$$d(z, \xi z) \le \phi\left(\max\left\{ d(z,z), d(z,\xi z), d(z,z), \frac{d(z,\xi z) + d(z,z)}{2} \right\} \right)$$

$$= \phi\left(\max\left\{ 0, d(z,\xi z), 0, \frac{d(z,\xi z)}{2} \right\} \right)$$

$$= \phi\big(d(z, \xi z) \big)$$

elde edilir.

$$d(z,\xi z) \le \phi\big(d(z,\xi z)\big) < d(z,\xi z)$$

olması bir çelişkidir. Dolayısıyla $a = 0$ olduğunda $\xi z = z$ dir ve z, ξ nin bir sabit noktasıdır.

Eğer $0 < a < 1$ ise (*iv*) koşulu kullanılarak yeterince büyük n sayısı için,

$$d\left(\xi\varpi_n,\xi z\right)\le\phi\left(\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\varpi_n,z\right),\\ \left(1-a\right)d\left(z,\xi z\right)+ad\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right),\\ \dfrac{d\left(\varpi_n,\xi z\right)+d\left(z,\xi\varpi_n\right)}{2},\\ ad\left(z,\xi z\right)+\left(1-a\right)d\left(\varpi_n,\xi\varpi_n\right) \end{array}\right\}\right)$$

olur. $n\to\infty$ için,

$$d\left(z,\xi z\right)\le\phi\left(\max\left\{\begin{array}{l} d\left(z,z\right),\\ \left(1-a\right)d\left(z,\xi z\right)+ad\left(z,z\right),\\ \dfrac{d\left(z,\xi z\right)+d\left(z,z\right)}{2},\\ ad\left(z,\xi z\right)+\left(1-a\right)d\left(z,z\right) \end{array}\right\}\right)$$

$$=\phi\left(\max\left\{0,\left(1-a\right)d\left(z,\xi z\right),ad\left(z,\xi z\right),\frac{d\left(z,\xi z\right)}{2}\right\}\right)$$

$=\phi\left(k\right)$, $0<k<d\left(z,\xi z\right)$

elde edilir.

$d\left(z,\xi z\right)\le\phi\left(k\right)<k<d\left(z,\xi z\right)$

olması bir çelişkidir. Dolayısıyla $\xi z=z$ dir ve z, ξ nin bir sabit noktasıdır.

Şimdi $0<a<1$ olduğunda, ξ nin sabit bir z noktasında sürekli olduğunu gösterelim.

ζ de $\{z_n\}$ dizisini $n\to\infty$ iken $z_n\to z$ olacak şekilde tanımlayalım. $\xi z_n\to z=\xi z$ olduğunu iddia ediyoruz. Eğer değilse, $m\ge N$ olduğunda,

$d\left(\xi\omega_m,z\right)\ge r$

olacak şekilde $\{z_n\}$ dizisinin bir $\{\omega_m\}$ alt dizisi, bir $r>0$ reel sayısı ve bir pozitif N tamsayısı vardır. Yeterince büyük bir m sayısı için (iv) koşulunu kullanarak,

$k=\max\left\{\varepsilon_1,a\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_2\right],\left(1-a\right)\left[d\left(z,\xi\omega_m\right)\pm\varepsilon_3\right]\right\}<d\left(z,\xi\omega_m\right)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon_i=0$, $i=1,2,3$

olmak üzere,

$d\left(\xi\omega_m,\xi z\right)=d\left(\xi\omega_m,z\right)$

$$\leq \phi\left(\max\left\{ \begin{array}{l} d\left(\omega_m, z\right), \\ \left(1-a\right) d\left(z, \xi z\right) + a d\left(\omega_m, \xi\omega_m\right), \\ \dfrac{d\left(z, \xi\omega_m\right) + d\left(\omega_m, \xi z\right)}{2}, \\ a d\left(z, \xi z\right) + \left(1-a\right) d\left(\omega_m, \xi\omega_m\right) \end{array} \right\} \right)$$

$$= \phi\left(\max\left\{ \varepsilon_1, a d\left(\omega_m, \xi\omega_m\right), \frac{\left[\varepsilon_1 + d\left(z, \xi\omega_m\right)\right]}{2}, \left(1-a\right) d\left(\omega_m, \xi\omega_m\right) \right\} \right)$$

$$= \phi\left(\max\left\{ \varepsilon_1, a\left[d\left(z, \xi\omega_m\right) \pm \varepsilon_2\right], \left(1-a\right)\left[d\left(z, \xi\omega_m\right) \pm \varepsilon_3\right] \right\} \right)$$

$$= \phi\left(k\right)$$

elde edilir.

$$d\left(\xi\omega_m, z\right) \leq \phi\left(k\right) < k < d\left(z, \xi\omega_m\right)$$

olması bir çelişkidir. Bu durumda, $\xi z_n \to z = \xi z$ dir ve ξ fonksiyonu z sabit noktasında süreklidir.

Şimdi $a = 0$ olduğunda ξ nin sabit bir z noktasında sürekli olduğunu gösterelim. ζ de $\left\{\varpi_n\right\}$ dizisini $n \to \infty$ iken $\varpi_n \to z$ olacak şekilde tanımlayalım.

$$\lim_n K^*\left(\varpi_n, z\right) = \lim_n \max\left\{ d\left(\varpi_n, z\right), d\left(z, \xi z\right), d\left(\varpi_n, \xi\varpi_n\right), \frac{d\left(\varpi_n, \xi z\right) + d\left(z, \xi\varpi_n\right)}{2} \right\}$$

$$= 0$$

olur. Diğer taraftan,

$$\lim_{\varpi_n \to z} K^*\left(\varpi_n, z\right) = 0$$

ise bu durumda $\varpi_n \to z$ iken $d\left(\varpi_n, \xi\varpi_n\right) \to 0$ dir. Yani,

$$\xi\varpi_n \to z = \xi z$$

dir. O halde, ξ fonksiyonu z noktasında süreklidir.

z sabit noktasının bir tek olduğu Teorem 3.1.6 nın ispatından kolayca görülür. □

4. k-SÜREKLİLİK YARDIMIYLA SABİT NOKTADA SÜREKSİZLİK SONUÇLARI

Bu bölümde, ilk olarak k-süreklilik tanımını ve bazı örneklerini verelim.

Tanım 4.1. $k=1,2,3,...$ olmak üzere, $\{\varpi_n\}$ dizisi ζ de

$$\xi^{k-1}\varpi_n \to t$$

şeklinde tanımlandığında,

$$\xi^{k}\varpi_n \to \xi t$$

oluyorsa, $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu ζ uzayında k-süreklidir denir [32].

Örnek 4.2. $\zeta=[0,2]$ ve ζ kümesi üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le\varpi\le 1\\ 0 & ; \quad \varpi>1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\xi\varpi_n\to t \Rightarrow \xi^2\varpi_n\to t$$

dir. Gerçekten,

$$\xi\varpi_n\to t \Rightarrow t=0 \text{ ya da } t=1$$

dir ve her n için

$$\xi^2\varpi_n=1$$

olduğundan,

$$\xi^2\varpi_n\to 1=\xi t$$

elde edilir. O halde, ξ fonksiyonu 2-süreklidir fakat $\varpi=1$ noktasında ξ fonksiyonu süreksizdir [16].

Örnek 4.3. $\zeta=[0,4]$ ve ζ üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le\varpi\le 1\\ 0 & ; \quad 1<\varpi\le 3\\ \dfrac{\varpi}{3} & ; \quad 3<\varpi\le 4\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\xi^2\varpi_n \to t \Rightarrow \xi^3\varpi_n \to \xi t$$

dir. Gerçekten,

$$\xi^2\varpi_n \to t \Rightarrow t=0 \text{ ya da } t=1$$

dir ve her n için,

$$\xi^3\varpi_n = 1 = \xi t$$

elde edilir. O halde ξ, 3-süreklidir. Ancak,

$$\xi\varpi_n \to t \Rightarrow \xi^2\varpi_n \to \xi t$$

anlamına gelmez. Yani ξ, 2-sürekli değildir [16].

Örnek 4.4. $\zeta=[0,2]$ ve ζ üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu,

$$\xi\varpi=\begin{cases}\dfrac{1+\varpi}{2} & ; \quad 0\le\varpi\le 1\\ 0 & ; \quad \varpi>1\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ξ, 2-süreklidir ancak sürekli değildir [16].

Örnek 4.5. $\zeta=[0,3]\cup(4,5)$ ve ζ üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu,

$$\xi\varpi=\begin{cases}1 & ; \quad 0\le\varpi\le 1\\ 0 & ; \quad 1<\varpi\le 3\\ \dfrac{\varpi}{4} & ; \quad 4<\varpi<5\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Burada ξ, 3-süreklidir. Bu durumda ξ^2, süreklidir fakat ξ, 2-sürekli değildir.

$$\varpi_n = 4+\frac{1}{n}$$

şeklinde tanımlanan $\{\varpi_n\}$ dizisini dikkate alalım. Buradan,

$$\xi\varpi_n \to 1 \text{ fakat } \xi^2\varpi_n \to 0 \neq \xi 1$$

dir. Yani ξ, 2-sürekli değildir. Buradan,

$$\xi\varpi_n=\frac{4+\frac{1}{n}}{4}=\frac{4n+1}{4n}=1+\frac{1}{4n}$$

ve

$$\xi^2\varpi_n = 0$$

elde edilir. O halde

$$\xi\varpi_n \to 1 \text{ fakat } \xi^2\varpi_n \to 0 \neq \xi 1 = 1$$

olur. Sonuç olarak ξ, 2 -sürekli değildir [16].

Yukarıdaki örneklerden, $k > 1$ olduğunda ξ^k fonksiyonunun sürekliliği ile ξ nin k-sürekliliğinin birbirinden bağımsız olduğunu görüyoruz. Ayrıca 1-süreklilik kavramı, süreklilik kavramına denktir. Buradan aşağıdaki ilişkiler elde edilir ve genelde tersi doğru değildir [16].

sürekli $\Rightarrow$ 2 -sürekli $\Rightarrow$ 3 -sürekli $\Rightarrow \ldots$

4.1 $K(\varpi,\omega)$ Sayısı ve k -Süreklilik Yardımıyla Sabit Noktada Süreksizlik Sonuçları

Bu bölümde, $K(\varpi,\omega)$ sayısı kullanılarak k -süreklilik yardımı ile literatürde var olan sabit noktada süreksizlik sonuçları ve örnekleri ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Teorem 4.1.1. (ζ, d) bir tam metrik uzay ve her $\varpi,\omega \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(v) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$\varepsilon < K(\varpi,\omega) < \varepsilon + \delta \Rightarrow d(\xi\varpi, \xi\omega) \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ vardır.

(vi) $K(\varpi,\omega) > 0$ olduğunda,

$$d(\xi\varpi, \xi\omega) < K(\varpi,\omega)$$

dir. Eğer ξ, k -sürekli ise ya da ξ^k bazı $k \geq 1$ için sürekli ise bu durumda, ξ nin bir tek sabit noktası vardır. Her $\varpi \in \zeta$ için $\{\xi^n\varpi\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [16].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n = \xi\varpi_{n-1} = \xi^n\varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.1.1 in ispatında kolayca görülür. ζ tam olduğundan, $\varpi_n \to t$ olacak şekilde $t \in \zeta$ vardır. Ayrıca, $k \geq 1$ için,

$$\xi\varpi_n \to t \text{ ve } \xi^k\varpi_n \to t$$

dir. Şimdi ξ nin k -sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda k -süreklilik tanımından,

$$\xi^{k-1}\varpi_n \to t \Rightarrow \xi^k \varpi_n \to \xi t$$

dir. Dolayısıyla $\xi^k \varpi_n \to t$ olduğundan,

$$t = \xi t$$

elde edilir. Bu durumda t, ξ nin sabit noktasıdır. ξ^k nın bazı $k \geq 1$ için sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} \xi^k \varpi_n = \xi^k t$$

dir.

$\xi^k \varpi_n \to t$ olduğundan, $\xi^k t = t$ olur.

Eğer $t \neq \xi t$ ise,

$$d\left(t,\xi t\right) = d\left(\xi^k t, \xi^{k+1} t\right) < \max\left\{\begin{array}{l} d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right), ad\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right)+\left(1-a\right)d\left(\xi^k t,\xi^{k+1}t\right), \\ \left(1-a\right)d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right)+ad\left(\xi^k t,\xi^{k+1}t\right), \\ \dfrac{b\left[d\left(\xi^{k-1}t,\xi^{k+1}t\right)+d\left(\xi^k t,\xi^k t\right)\right]}{2} \end{array}\right\}$$

$$= d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right) < d\left(\xi^{k-2}t,\xi^{k-1}t\right) < \ldots < d\left(t,\xi t\right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $t = \xi t$ dir ve t, ξ nin bir sabit noktasıdır. Teorem 3.1.6 dan teklik kolayca görülür. □

Örnek 4.1.2. $\zeta = [0,2]$ ve ζ üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi = \begin{cases} 1 & ; \quad 0 \leq \varpi \leq 1 \\ 0 & ; \quad 1 < \varpi \leq 2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $a = 0$ için ξ fonksiyonu Teorem 4.1.1 in tüm koşullarını sağlar. $\varpi = 1$ noktası ξ nin bir tek sabit noktasıdır ve ξ bu noktada süreksizdir.

$$\delta\left(\varepsilon\right) = \begin{cases} 1 & ; \quad \varepsilon \geq 1 \\ 1-\varepsilon & ; \quad \varepsilon < 1 \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\xi : \zeta \to \zeta$ Teorem 3.1.6 nın (*iii*) koşulunu sağlar.

$$\phi(t)=\begin{cases}\dfrac{t}{2} & ; \quad t\le 1\\ 1 & ; \quad t>1\end{cases}$$

olsun. Bu durumda da ξ fonksiyonu Teorem 3.1.6 nın (*iv*) koşulunu sağlar. Ayrıca, ξ fonksiyonunun 2-sürekli ve ξ^2 nin sürekli olduğu kolayca görülür ve Teorem 4.1.1 in (*v*) ve (*vi*) şartlarını da sağlar [16].

Örnek 4.1.3. $\zeta=[0,2]$ ve ζ üzerindeki metrik, alışılmış metrik olsun. $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi=\begin{cases} r\varpi,\ 0\le r<1 & ; \quad \varpi \text{ rasyonel}\\ \quad 0 & ; \quad \varpi \text{ irrasyonel}\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. ξ fonksiyonu $a=\dfrac{2}{3}$, $\delta(\varepsilon)=\dfrac{\varepsilon(1-r)}{r}$, $\phi(t)=rt$ ile birlikte Teorem 3.1.6 nın (*iii*) ve (*iv*) koşullarını sağlar. ξ fonksiyonu bir tek $\varpi=0$ sabit noktasına sahiptir ve ξ fonksiyonu bu noktada süreklidir. $k\ge 2$ için ξ fonksiyonunun k-sürekli olduğu kolayca görülür ve Teorem 4.1.1 in (*v*) ve (*vi*) şartlarını da sağlar. Fakat, herhangi bir k için ξ^k fonksiyonu, $\varpi=0$ noktası dışında süreksizdir [16].

4.2 $K^*(\varpi,\omega)$ Sayısı ve k-Süreklilik Yardımıyla Sabit Noktada Süreksizlik Sonuçları

Bu bölümde, $K^*(\varpi,\omega)$ sayısı kullanılarak k-süreklilik yardımı ile literatürde var olan sabit noktada süreksizlik sonuçları ayrıntılı şekilde incelenmiştir.

Teorem 4.2.1. (ζ,d) bir tam metrik uzay ve her $\varpi,\omega\in\zeta$ için $\xi:\zeta\to\zeta$ aşağıdaki koşulları sağlayan bir fonksiyon olsun.

(*v*) Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\varepsilon<K^*(\varpi,\omega)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)\le\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır.

(*vi*) $K^*(\varpi,\omega)>0$ olduğunda,

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)<K^*(\varpi,\omega)$$

dir. Eğer ξ, k-sürekli ise ya da bazı $k\ge 1$ için ξ^k sürekli ise bu durumda, ξ nin bir tek sabit noktası vardır. Her $\varpi\in\zeta$ için $\{\xi^n\varpi\}$ iterasyon dizisi bu sabit noktaya yakınsar [17].

İspat. $\varpi_0\in\zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n=\xi\varpi_{n-1}=\xi^n\varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 3.2.1 in ispatında kolayca görülür. ζ tam olduğundan, $\varpi_n \to t$ olacak şekilde $t \in \zeta$ vardır. Ayrıca, $k \geq 1$ için,

$\xi\varpi_n \to t$ ve $\xi^k\varpi_n \to t$

dir. Şimdi ξ nin k -sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda k -süreklilik tanımından,

$\xi^{k-1}\varpi_n \to t \Rightarrow \xi^k\varpi_n \to \xi t$

dir. Dolayısıyla $\xi^k\varpi_n \to t$ olduğundan,

$t = \xi t$

elde edilir. Bu durumda t, ξ nin sabit noktasıdır. Şimdi ξ^k nın bazı $k \geq 1$ için sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$\lim\limits_{n\to\infty} \xi^k\varpi_n = \xi^k t$

dir.

$\xi^k\varpi_n \to t$ olduğundan, $\xi^k t = t$ olur.

Eğer $t \neq \xi t$ ise,

$$d\left(t,\xi t\right) = d\left(\xi^k t,\xi^{k+1}t\right) < \max\begin{Bmatrix} d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right), ad\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right)+\left(1-a\right)d\left(\xi^k t,\xi^{k+1}t\right), \\ \left(1-a\right)d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right)+ad\left(\xi^k t,\xi^{k+1}t\right), \\ \dfrac{d\left(\xi^{k-1}t,\xi^{k+1}t\right)+d\left(\xi^k t,\xi^k t\right)}{2} \end{Bmatrix}$$

$$= d\left(\xi^{k-1}t,\xi^k t\right) < d\left(\xi^{k-2}t,\xi^{k-1}t\right) < \ldots < d\left(t,\xi t\right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla, $t = \xi t$ dir ve t, ξ nin bir sabit noktasıdır. Teorem 3.1.6 dan bu sabit noktanın tek olduğu kolayca görülür. □

Daha önce verdiğimiz Örnek 4.1.2 ve Örnek 4.1.3, Teorem 4.2.1 için de geçerlidir.

Teorem 4.2.2. (ζ, d) bir metrik uzay olsun. Eğer Teorem 3.2.2 nin (*iii*) ve (*iv*) koşullarını sağlayan her $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu ya da Teorem 4.2.1 in (*v*) ve (*vi*) koşullarını sağlayan her $\xi : \zeta \to \zeta$ k -sürekli fonksiyonu bir sabit noktaya sahip ise bu durumda ζ tamdır [17].

İspat. (ζ, d) bir metrik uzay olsun. Teorem 3.2.2 nin (*iii*) ve (*iv*) koşullarını sağlayan her $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu ya da Teorem 4.2.1 in (*v*) ve (*vi*) koşullarını sağlayan her $\xi : \zeta \to \zeta$ k -sürekli fonksiyonu bir sabit noktaya sahip olsun. ζ in tam olduğunu iddia ediyoruz. ζ

in tam olmadığını varsayalım. Bu durumda ζ de farklı noktalardan oluşan, yakınsak olmayan bir

$$S=\{u_1,u_2,u_3,...\}$$

Cauchy dizisi vardır. $\varpi\in\zeta$ olsun. Bu durumda ϖ, S dizisinin bir limit noktası değildir ve

$$d\left(\varpi,S-\{\varpi\}\right)>0$$

dır.

$m\geq N(\varpi)$ için,

$$\varpi\neq u_{N(\varpi)} \text{ ve } d\left(u_{N(\varpi)},u_m\right)<<d\left(\varpi,u_{N(\varpi)}\right) \tag{4.1}$$

olacak şekilde en küçük bir $N(\varpi)$ pozitif tamsayısı vardır. Bir $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonunu

$$\xi\varpi=u_{N(\varpi)}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda, $\varpi\in\zeta$ için $\xi\varpi\neq\varpi$ dir ve (4.1) den herhangi bir $\varpi,\omega\in\zeta$ için $N(\varpi)\leq N(\omega)$ ise,

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)=d\left(u_{N(\varpi)},u_{N(\omega)}\right)<<d\left(\varpi,u_{N(\varpi)}\right)=d(\varpi,\xi\varpi)$$

ya da $N(\varpi)>N(\omega)$ ise,

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)=d\left(u_{N(\varpi)},u_{N(\omega)}\right)<<d\left(\omega,u_{N(\omega)}\right)=d(\omega,\xi\omega)$$

elde edilir. Bu da şu anlama gelir :

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)<<\max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,\omega),ad(\varpi,\xi\varpi)+(1-a)d(\omega,\xi\omega), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)+ad(\omega,\xi\omega),\dfrac{d(\varpi,\xi\omega)+d(\omega,\xi\varpi)}{2} \end{array}\right\}$$

$$=K^*(\varpi,\omega) \tag{4.2}$$

Başka bir deyişle $\varepsilon>0$ verildiğinde,

$$\varepsilon<K^*(\varpi,\omega)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)\leq\varepsilon \tag{4.3}$$

olacak şekilde $\delta(\varepsilon)=\varepsilon$ seçebiliriz. Benzer şekilde (4.2) den $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ yi $\phi(t)=\dfrac{t}{2}$ ile

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)\leq\phi\left(K^*(\varpi,\omega)\right) \tag{4.4}$$

tanımlayabiliriz.

(4.2), (4.3) ve (4.4) den $\xi : \zeta \to \zeta$ in Teorem 3.2.2 nin koşullarını sağladığı açıktır. Bu durum, hipotezimiz ile çelişir. Böylece ζ tamdır. □

5. MEIR-KEELER VE CARISTI YÖNTEMİ İLE SABİT NOKTADA SÜREKSİZLİK SONUÇLARI

Bu bölümde, Meir-Keeler tipi [5] ve Caristi tipi [3] teknikleri ile $K^{*}(\varpi,\omega)$ sayısı kullanılarak, Rhoades'in açık problemine [10] yeni çözümler veriyoruz. Bu amaç içinde [33] kaynakta verilen tekniklerden yararlanacağız.

Burada (ζ,d) tam bir metrik uzay, $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon ve $\varphi:\zeta\to[0,\infty)$ fonksiyonu alttan yarı sürekli ve alttan sınırlı olsun.

$\varphi:\zeta\to[0,\infty)$ fonksiyonu her $\varpi\in\zeta$ için

$$\varphi(\varpi)=d(\varpi,\xi\varpi) \tag{5.1}$$

şeklinde tanımlansın.

Teorem 5.1. Eğer her $\varpi,\omega\in\zeta$ için

(*M*) Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için $d(\varpi,\xi\varpi)>0$ olmak üzere;

$$\varepsilon\le\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]K^{*}(\varpi,\omega)<\varepsilon+\delta\Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega)<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ sayısı vardır,

koşulu sağlanıyorsa bu durumda, verilen bir $\varpi\in\zeta$ sayısı için $\{\xi^{n}\varpi\}$ iterasyon dizisi bir Cauchy dizisidir ve herhangi bir $z\in\zeta$ için

$$\lim_{n\to\infty}\xi^{n}\varpi=z$$

dir [34].

İspat. (*M*) koşulunu kullanarak $d(\varpi,\xi\varpi)>0$ ise,

$$d(\xi\varpi,\xi\omega)<\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]K^{*}(\varpi,\omega) \tag{5.2}$$

elde edilir. $\varpi_0\in\zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n=\xi\varpi_{n-1}=\xi^{n}\varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. Bazı n sayısı için eğer;

$$\varpi_n=\varpi_{n+1}$$

ise bu durumda,

$$\varpi_n=\varpi_{n+1}=\varpi_{n+2}=\ldots$$

dir, yani $\{\varpi_n\} = \{\xi^n \varpi\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve ϖ_n, ξ nin bir sabit noktasıdır. Bu nedenle her n sayısı için $\varpi_n \neq \varpi_{n+1}$ olduğunu varsayalım ve

$$c_n = d(\varpi_{n-1}, \varpi_n)$$

olsun. (5.2) eşitsizliğinden,

$$c_{n+1} = d(\varpi_n, \varpi_{n+1}) = d(\xi\varpi_{n-1}, \xi\varpi_n) < \left[\varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)\right] K^*(\varpi_{n-1}, \varpi_n)$$

$$= \left[\varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)\right] \max \left\{ \begin{array}{l} d(\varpi_{n-1}, \varpi_n), \\ ad(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_{n-1}) + (1-a) d(\varpi_n, \xi\varpi_n), \\ (1-a) d(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_{n-1}) + ad(\varpi_n, \xi\varpi_n), \\ \dfrac{d(\varpi_n, \xi\varpi_{n-1}) + d(\varpi_{n-1}, \xi\varpi_n)}{2} \end{array} \right\}$$

$$= \left[\varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)\right] \max \left\{ c_n, ac_n + (1-a) c_{n+1}, (1-a) c_n + ac_{n+1}, \frac{d(\varpi_{n-1}, \varpi_{n+1})}{2} \right\}$$

$$= \left[\varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)\right] c_n \tag{5.3}$$

elde edilir. (5.3) eşitsizliğinden

$$c_{n+1} = d(\varpi_n, \varpi_{n+1}) < \left[\varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)\right] c_n$$

elde edilir ve buradan her $n \in \mathbb{N}$ için

$$0 < \frac{c_{n+1}}{c_n} < \varphi(\varpi_{n-1}) - \varphi(\varpi_n)$$

dir. Buradan, $\{\varphi(\varpi_n)\}$ dizisi artmayan ve pozitif bir dizidir ve bazı $t \geq 0$ sayısına yakınsar. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{c_{m+1}}{c_m} < \sum_{m=1}^{n} \left[\varphi(\varpi_{m-1}) - \varphi(\varpi_m)\right] = \varphi(\varpi_0) - \varphi(\varpi_n)$$

$n \to \infty$ için $\varphi(\varpi_0) - t < \infty$

dir ve

$$\sum_{m=1}^{n} \frac{c_{m+1}}{c_m} < \infty \Rightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{c_{n+1}}{c_n} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla $\alpha \in (0,1)$ için,

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} \leq \alpha$$

olacak şekilde her $n \geq n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır ve her $n \geq n_0$ için,

$$d\left(\varpi_n, \varpi_{n+1}\right) \leq \alpha d\left(\varpi_{n-1}, \varpi_n\right) \tag{5.4}$$

elde edilir. Şimdi $\{\varpi_n\}$ in bir Cauchy dizisi olduğunu ve $\{\varpi_n\}$ in bir $a \in \zeta$ noktasına yakınsadığını gösterelim. (5.4) eşitsizliğinden $\{d\left(\varpi_n, \varpi_{n+1}\right)\}$ pozitif reel sayıların azalan, sınırlı bir dizisidir ve dolayısıyla $\varpi \geq 0$ limitine yakınsar, $\alpha < 1$ olduğundan $\varpi = 0$ 'ı kolayca kanıtlarız.

Her $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ $\left(n_1 > n_2\right)$ için,

$$d\left(\varpi_{n_1}, \varpi_{n_2}\right) \leq \sum_{m=n_2}^{n_1-1} d\left(\varpi_m, \varpi_{m+1}\right) \leq \frac{\alpha^{n_2}}{1-\alpha} d\left(\varpi_0, \varpi_1\right)$$

dir, yani

$$\lim_{n\to\infty} \sup\left\{d\left(\varpi_{n_1}, \varpi_{n_2}\right) : n_1 > n_2\right\} = 0$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\{\varpi_n\}$ dizisi bir Cauchy dizisidir ve $\left(\zeta, d\right)$ tam bir metrik uzay olduğundan, $\{\varpi_n\} \to a$ olacak şekilde bir $a \in \zeta$ vardır. □

Teorem 5.2. ξ fonksiyonu Teorem 5.1 de verilen (*M*) koşulunu sağlasın. Eğer ξ fonksiyonu k-sürekli ise bu durumda, ξ nin bir z sabit noktası vardır. Ayrıca ξ nin z noktasında sürekli olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\lim_{\varpi\to z}\left[\varphi\left(\varpi\right) - \varphi\left(\xi\varpi\right)\right] K^*\left(\varpi, \omega\right) = 0$$

olmasıdır [34].

İspat. $\varpi_0 \in \zeta$ olsun. ζ de $\{\varpi_n\}$ dizisini

$$\varpi_n = \xi\varpi_{n-1} = \xi^n \varpi_0$$

olacak şekilde tanımlayalım. $\{\varpi_n\}$ dizisinin bir Cauchy dizisi olduğu Teorem 5.1 in ispatından kolayca görülür. Dolayısıyla $\left(\zeta, d\right)$ bir tam metrik uzay olduğundan, $\{\varpi_n\} \to a$ olacak şekilde bir $a \in \zeta$ vardır. Ayrıca her $p \geq 1$ için,

$$\xi^p \varpi_n \to a$$

dır. ξ, k-sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\xi^{k-1}\varpi_n \to a$$

olduğunda,

$\xi^k \varpi_n \to \xi a$

dır ve dolayısıyla $\xi^k \varpi_n \to a$ olduğundan, $\xi a = a$ elde edilir. Bu nedenle a noktası ξ nin bir sabit noktasıdır.

ξ fonksiyonu a sabit noktasında sürekli ve $\varpi_n \to a$ olsun. Bu durumda,

$\xi \varpi_n \to \xi a = a$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]K^*(\varpi_n, a)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]\max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi_n, a), ad(\varpi_n, \xi\varpi_n)+(1-a)d(a,\xi a), \\ \dfrac{d(\varpi_n,\xi a)+d(a,\xi\varpi_n)}{2}, \\ ad(a,\xi a)+(1-a)d(\varpi_n,\xi\varpi_n) \end{array}\right\}=0$$

olur. Diğer taraftan

$$\lim_{\varpi_n\to a}\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]K^*(\varpi_n, a)=0$$

ise bu durumda, $\varpi_n \to a$ iken $d(\varpi_n, \xi\varpi_n) \to 0$ dir, yani

$\xi\varpi_n \to a = \xi a$

dir. O halde ξ fonksiyonu a noktasında süreklidir. □

Sonuç 5.3. Eğer her $\varpi, \omega \in \zeta$ için aşağıdaki;

(i) Verilen bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $d(\varpi, \xi\varpi) > 0$ olmak üzere,

$$\varepsilon \le \left[\varphi(\varpi)-\varphi(\xi\varpi)\right]d(\varpi,\omega) < \varepsilon+\delta \Rightarrow d(\xi\varpi,\xi\omega) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır,

koşulu geçerli ise bu durumda, $\varpi \in \zeta$ verildiğinde $\{\xi^n\varpi\}$ iterasyon dizisi bi Cauchy dizisidir ve bazı $z \in \zeta$ için

$$\lim_{n\to\infty}\xi^n\varpi = z$$

olur. Eğer ξ fonksiyonu k -sürekli ise bu durumda z , ξ nin bir sabit noktasıdır [33].

6. SABİT ÇEMBER PROBLEMİNE UYGULAMA

Sabit çember problemi uygulamalarında kullanacağımız Wardowski tipi $\mathbb{F}$ fonksiyon ailesi tanımını hatırlayalım:

Tanım 6.1. $\mathbb{F}$ aşağıdaki koşulları sağlayacak şekildeki tüm $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonların ailesi olsun.

(F1) F , kesinlikle artandır.

(F2) $(0,\infty)$ içindeki her $\{a_n\}$ dizisi için $\lim\limits_{n\to\infty} F(a_n)=-\infty$ olması için gerekli ve yeterli koşul $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$ olmasıdır.

(F3) $\lim\limits_{\alpha\to 0^+} \alpha^k F(\alpha)=0$ olacak şekilde $k\in(0,1)$ vardır [35].

Örneğin,

$F(\varpi)=\ln\varpi$, $F(\varpi)=\ln(\varpi)+\varpi$, $F(\varpi)=-\dfrac{1}{\sqrt{\varpi}}$, $F(\varpi)=\ln(\varpi^2+\varpi)$ fonksiyonları $\mathbb{F}$ ailesine aittir [35].

Şimdi $\mathbb{F}$ fonksiyon ailesi tanımı kullanılarak [17] çalışmasında elde edilen daralma tanımını hatırlayalım:

Tanım 6.2. (ζ,d) bir metrik uzay, $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon ve $\varpi_0\in\zeta$ herhangi bir nokta olsun. Her $\varpi\in\zeta$ için

$$d(\xi\varpi,\varpi)>0\Rightarrow t+F\left(d(\xi\varpi,\varpi)\right)\le F\left(K^*(\varpi,\varpi_0)\right)$$

olacak şekilde $F\in\mathbb{F}$, $t>0$ ve $a\in[0,1)$ varsa ξ fonksiyonuna ζ üzerinde bir $F_{C-K^*\varpi_0}$-daralma denir [17].

6.1 $K^*(\varpi,\omega)$ Sayısı Yardımıyla Bazı Sabit Çember Sonuçları

Bu bölümde, $K^*(\varpi,\omega)$ sayısı kullanılarak elde edilen literatürde var olan bazı sabit çember sonuçları ve örnekleri incelenmiştir.

Önerme 6.1.1. (ζ,d) bir metrik uzay ve $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu $\varpi_0\in\zeta$ ile bir $F_{C-K^*\varpi_0}$-daralma olsun. Bu durumda,

$$\xi\varpi_0=\varpi_0$$

dir [17].

İspat. $\xi\varpi_0\neq\varpi_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$d(\xi\varpi_0,\varpi_0)>0$$

dır ve $F_{C-K^{*}\varpi_0}$-daralma tanımından bazı $F \in \mathbb{F}$ ve $t > 0$ için,

$$t + F\left(d\left(\xi\varpi_0, \varpi_0\right)\right) \le F\left(K^{*}\left(\varpi_0, \varpi_0\right)\right)$$

$$= F\left(\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\varpi_0, \varpi_0\right), ad\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right) + \left(1-a\right)d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right), \\ \left(1-a\right)d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right) + ad\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right), \\ \dfrac{d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right) + d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right)}{2} \end{array}\right\}\right)$$

ve buradan

$$t + F\left(d\left(\xi\varpi_0, \varpi_0\right)\right) \le F\left(\max\left\{0, d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right)\right\}\right) = F\left(d\left(\varpi_0, \xi\varpi_0\right)\right)$$

elde edilir. Bu bir çelişkidir. Dolayısıyla,

$$\xi\varpi_0 = \varpi_0$$

elde edilir. □

Teorem 6.1.2. (ζ, d) bir metrik uzay, $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu $\varpi_0 \in \zeta$ ile bir $F_{C-K^{*}\varpi_0}$-daralma ve

$$r = \inf\left\{d\left(\xi\varpi, \varpi\right) : \xi\varpi \ne \varpi, \varpi \in X\right\} \qquad (6.1)$$

olsun. Eğer her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için,

$$d\left(\xi\varpi, \varpi_0\right) = r$$

ise bu durumda $C_{\varpi_0,r}$, ξ nin bir sabit çemberidir [17].

İspat. $r = 0$ olsun. Bu durumda,

$$C_{\varpi_0,r} = \left\{\varpi_0\right\}$$

olur. Önerme 6.1.1. den $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin ξ nin sabit çemberi olduğu açıktır.

$r > 0$ ve $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$, $\xi\varpi \ne \varpi$ olacak şekilde herhangi bir nokta olsun. r nin tanımından,

$$d\left(\xi\varpi, \varpi\right) \ge r$$

olduğu kolayca görülür. $F_{C-K^{*}\varpi_0}$-daralma koşulu, Önerme 6.1.1 ve F fonksiyonunun artanlık özelliği kullanılarak,

$$F(r) \leq F(d(\xi\varpi,\varpi)) \leq F(K^*(\varpi,\varpi_0)) - t$$

$$< F(K^*(\varpi,\varpi_0)) = F\left(\max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,\varpi_0), \\ ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ \dfrac{d(\varpi,\xi\varpi_0) + d(\varpi_0,\xi\varpi)}{2}, \\ ad(\varpi_0,\xi\varpi_0) + (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) \end{array}\right\}\right)$$

$$= F(\max\{r, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)\}) \tag{6.2}$$

elde edilir.

$L = \max\{r, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)\}$ diyelim.

Şimdi $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin ξ nin bir sabit çemberi olduğunu ispatlıyoruz:

- $L = r$ olsun. (6.2) eşitsizliğinden,

$$F(r) < F(r)$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

- $L = ad(\varpi,\xi\varpi)$ olsun. (6.2) eşitsizliğinden,

$$F(r) \leq F(d(\xi\varpi,\varpi)) < F(ad(\varpi,\xi\varpi)) < F(d(\varpi,\xi\varpi))$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder.

- $L = (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)$ olsun. (6.2) eşitsizliğinden,

$$F(r) \leq F(d(\xi\varpi,\varpi)) < F((1-a)d(\varpi,\xi\varpi)) < F(d(\varpi,\xi\varpi))$$

elde edilir ve bu bir çelişki ifade eder.

Elde ettiğimiz bu sonuçlar doğrultusunda $\xi\varpi = \varpi$ olmalıdır ve bu nedenle $C_{\varpi_0,r}$, ξ nin bir sabit çemberidir. □

$\rho < r$ olmak üzere, ξ fonksiyonu her $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bırakır. Gerçekten, $\varpi \in C_{\varpi_0,\rho}$ ve $\xi\varpi \neq \varpi$ olsun. $F_{C-K^*\varpi_0}$-daralma koşulu özelliği kullanılarak,

$$F(\rho) < F(r) \leq F(d(\xi\varpi,\varpi)) \leq F(K^*(\varpi,\varpi_0)) - t$$

$$< F(K^*(\varpi,\varpi_0)) = F\left(\max\left\{\rho, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi), \frac{\rho+r}{2}\right\}\right) \tag{6.3}$$

elde edilir.

Aşağıdaki durumlarda $C_{\varpi_0,\rho}$ çemberinin ξ nin bir sabit çemberi olduğunu ispatlıyoruz.

Durum 1. $K^*(\varpi,\varpi_0)=\rho$ olsun. (6.3) eşitsizliğinden,

$$F(\rho)<F(\rho)$$

bulunur ve bu bir çelişki ifade eder.

Durum 2. $K^*(\varpi,\varpi_0)=ad(\varpi,\xi\varpi)$ olsun**.** (6.3) eşitsizliğinden,

$$F(\rho)<F(r)\le F(d(\xi\varpi,\varpi))<F(ad(\varpi,\xi\varpi))<F(d(\varpi,\xi\varpi))$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Durum 3. $K^*(\varpi,\varpi_0)=(1-a)d(\varpi,\xi\varpi)$ olsun. (6.3) eşitsizliğinden,

$$F(\rho)<F(r)\le F(d(\xi\varpi,\varpi))<F((1-a)d(\varpi,\xi\varpi))<F(d(\varpi,\xi\varpi))$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Durum 4. $K^*(\varpi,\varpi_0)=\frac{\rho+r}{2}$ olsun. r nin tanımından ve (6.3) eşitsizliğinden,

$$F(\rho)<F(r)\le F(d(\xi\varpi,\varpi))<F\left(\frac{\rho+r}{2}\right)<F(r)$$

çelişkisi elde edilir.

Sonuç olarak; tüm $\varpi\in C_{\varpi_0,\rho}$ için $\xi\varpi=\varpi$ olmalıdır. Bu nedenle, $\rho<r$ ile ξ fonksiyonu tüm $C_{\varpi_0,\rho}$ çemberlerini sabit bırakır. Buradan,

$$D_{\varpi_0,r}=\{\varpi\in\zeta : d(\varpi,\varpi_0)\le r\}$$

diskinin ξ nin bir sabit diski olduğu açıktır [17]. Aşağıdaki örnekte Teorem 6.1.2 nin tersinin her zaman doğru olmadığını göreceğiz.

Örnek 6.1.3. $(\zeta,\|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\varpi_0\in\zeta$ herhangi bir nokta olsun. Her $\varpi\in\zeta$ ve herhangi bir $r>0$ için $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu,

$$\xi\varpi=\begin{cases}\varpi & ; \quad \|\varpi-\varpi_0\|\le r\\ \varpi_0 & ; \quad \|\varpi-\varpi_0\|>r\end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Norm tarafından indirgenen $d(\varpi,\omega)=\|\varpi-\omega\|$ metriğini dikkate alalım. Bu durumda, ξ fonksiyonu ϖ_0 noktası ile bir $F_{C-K^*\varpi_0}$-daralma değildir. Gerçekten; herhangi bir $0\le a<1$, herhangi bir $F\in\mathbb{F}$, her $\varpi\in\zeta$ ve $\|\varpi-\varpi_0\|>r$ için,

$$t+F(d(\varpi,\xi\varpi))=t+F(\|\varpi-\varpi_0\|)\le F(K^*(\varpi,\varpi_0))$$

$$= F\left(\max\left\{ \begin{array}{l} d(\varpi,\varpi_0), \\ ad(\varpi,\xi\varpi)+(1-a)d(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ \dfrac{d(\varpi_0,\xi\varpi)+d(\varpi,\xi\varpi_0)}{2}, \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)+ad(\varpi_0,\xi\varpi_0) \end{array} \right\} \right)$$

$$= F\left(\max\left\{ \|\varpi-\varpi_0\|, a\|\varpi-\varpi_0\|, (1-a)\|\varpi-\varpi_0\|, \frac{\|\varpi-\varpi_0\|}{2} \right\} \right)$$

$$= F\left(\|\varpi-\varpi_0\|\right)$$

elde edilir.

$t>0$ olduğundan bu bir çelişkidir. Sonuç olarak, ξ fonksiyonu bir $F_{C-K^{*}\varpi_0}$-daralma değildir fakat $\rho \le r$ olmak üzere, her $C_{\varpi_0,\rho}$ çemberini sabit bırakır [17].

Şimdi Teorem 6.1.2 yi sağlayan örneği verelim.

Örnek 6.1.4. $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi ve $\zeta = \mathbb{C}$,

$$d(\varpi,\omega) = |\varpi-\omega|$$

alışılmış metriği ile bir metrik uzay olsun. Her $\varpi \in \zeta$ için $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu

$$\xi\varpi = \begin{cases} \varpi & ; \quad |\varpi| < 4 \\ \varpi+2 & ; \quad |\varpi| \ge 4 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

ξ fonksiyonu $F = \ln\varpi$, $\varpi_0 = 0$, $a = \dfrac{1}{2}$ ve $\beta = \min\left\{ \dfrac{|\varpi+2|}{2} : |\varpi| \ge 4 \right\}$ iken $t = \ln\left(1+\dfrac{\beta}{2}\right)$ ile bir $F_{C-K^{*}\varpi_0}$-daralmadır. Gerçekten; $|\varpi| \ge 4$ olacak şekildeki her ϖ için,

$$d(\varpi,\xi\varpi) = d(\varpi,\varpi+2) = |\varpi-(\varpi+2)| = 2 > 0$$

ve

$$K^{*}(\varpi,0) = \max\left\{ d(\varpi,0), ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi), \frac{d(\varpi,0)+d(0,\xi\varpi)}{2} \right\}$$

$$= \max\left\{ |\varpi|, 1, 1, \frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2} \right\}$$

$$= \max\left\{ |\varpi|, \frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2} \right\}$$

elde edilir. Buradan;

$$K^*(\varpi,0)=|\varpi|$$

ise bu durumda,

$$\ln\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+\ln 2\leq \ln\left(|\varpi|\right)$$

dir ve eğer,

$$K^*(\varpi,0)=\frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2}$$

ise bu durumda,

$$\ln\left(1+\frac{\beta}{2}\right)+\ln 2\leq \ln\left(\frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2}\right)$$

olur. Ayrıca

$$r=\inf\left\{d(\varpi,\xi\varpi):\varpi\neq\xi\varpi\right\}=2$$

elde edilir. Sonuç olarak, ξ fonksiyonu $C_{0,2}$ çemberini ve $D_{0,2}$ diskini sabit bırakır. Dikkat edilirse ξ nin sabit çember sayısı sonsuzdur [17].

Teorem 6.1.5. (ζ,d) bir metrik uzay, $\xi:\zeta\to\zeta$ fonksiyonu $\varpi_0\in\zeta$ ile bir $F_{C-K^*\varpi_0}$-daralma ve r sayısı Teorem 6.1.2 deki gibi tanımlansın.

(*i*) Her $\varpi\in C_{\varpi_0,r}$ için,

$$r\leq K^*(\varpi,\varpi_0)<r+\delta(r)\Rightarrow d(\xi\varpi,\varpi_0)\leq r$$

olacak şekilde bir $\delta(r)>0$ vardır.

(*ii*) Her $t>0$ için $\phi(t)<t$ olacak şekilde $\phi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ bir fonksiyon olmak üzere, her $\varpi\in\zeta$ için,

$$d(\xi\varpi,\varpi)>0\Rightarrow d(\xi\varpi,\varpi)\leq\phi\left(K^*(\varpi,\varpi_0)\right)$$

dir.

Bu durumda yukarıdaki koşulları sağlayan bir $\varpi_0\in\zeta$ varsa, $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir ve $\xi\varpi_0=\varpi_0$ dir [17].

İspat. $\varpi\in C_{\varpi_0,r}$ olsun. Şimdi $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin ξ nin bir sabit çemberi olduğunu gösterelim. $\xi\varpi\neq\varpi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (*ii*) koşulunu kullanarak,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)\leq\phi\left(K^{*}\left(\varpi,\varpi_{0}\right)\right)<K^{*}\left(\varpi,\varpi_{0}\right)$$

$$=\max\left\{\begin{array}{l}d\left(\varpi,\varpi_{0}\right),ad\left(\varpi,\xi\varpi\right)+\left(1-a\right)d\left(\varpi_{0},\xi\varpi_{0}\right),\\ \dfrac{d\left(\varpi,\xi\varpi_{0}\right)+d\left(\varpi_{0},\xi\varpi\right)}{2},\\ ad\left(\varpi_{0},\xi\varpi_{0}\right)+\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\end{array}\right\} \tag{6.4}$$

elde edilir. İlk olarak (6.4) eşitsizliğini kullanarak $\xi\varpi_0=\varpi_0$ olduğunu ispatlayalım. $\xi\varpi_0\neq\varpi_0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$d\left(\xi\varpi_{0},\varpi_{0}\right)\leq\phi\left(K^{*}\left(\varpi_{0},\varpi_{0}\right)\right)<K^{*}\left(\varpi_{0},\varpi_{0}\right)=d\left(\varpi_{0},\xi\varpi_{0}\right)$$

çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\xi\varpi_0=\varpi_0$ dir. $\xi\varpi_0=\varpi_0$ ve (6.4) eşitsizliğinden,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)<\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right),\frac{r+d\left(\varpi_{0},\xi\varpi\right)}{2}\right\}$$

elde edilir. (i) koşuluna göre,

$$r\leq K^{*}\left(\varpi,\varpi_{0}\right)<r+\delta\left(r\right)\Rightarrow d\left(\xi\varpi,\varpi_{0}\right)\leq r$$

ve buradan,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)<\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\} \tag{6.5}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki durumlarda $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin ξ nin bir sabit çemberi olduğunu ispatlıyoruz:

Durum 1. $\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\}=r$ olsun. (6.5) eşitsizliğinden,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)<r$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Durum 2. $\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\}=ad\left(\varpi,\xi\varpi\right)$ olsun. (6.5) eşitsizliğinden,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)<ad\left(\varpi,\xi\varpi\right)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Durum 3. $\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\}=\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)$ olsun.

(6.5) eşitsizliğinden,

$$d\left(\xi\varpi,\varpi\right)<\left(1-a\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)$$

çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak, $\xi\varpi = \varpi$ olmalıdır ve bu nedenle $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir. □

Teorem 6.1.5 in tersi her zaman doğru değildir. Örnek 6.1.3 de tanımladığımız ξ fonksiyonunu alalım. ξ fonksiyonu Teorem 6.1.5 in (*ii*) koşulunu sağlamaz. Gerçekten; herhangi bir $0 \le a < 1$, her $\varpi \in \zeta$ ve $\|\varpi - \varpi_0\| > r$ için,

$$d(\xi\varpi,\varpi) \le \phi\left(K^*(\varpi,\varpi_0)\right) < K^*(\varpi,\varpi_0)$$

$$= \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,\varpi_0), ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) + ad(\varpi_0,\xi\varpi_0), \dfrac{d(\varpi,\xi\varpi_0) + d(\varpi_0,\xi\varpi)}{2} \end{array}\right\}$$

$$= \max\left\{\|\varpi - \varpi_0\|, a\|\varpi - \varpi_0\|, (1-a)\|\varpi - \varpi_0\|, \frac{\|\varpi - \varpi_0\|}{2}\right\}$$

$$= \|\varpi - \varpi_0\|$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder. Fakat ξ fonksiyonu $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ve $D_{\varpi_0,r}$ diskini sabit bırakır [17].

Örnek 6.1.6. $\zeta = \mathbb{C}$ bir metrik uzay ve bu uzay üzerinde tanımlı olan metrik alışılmış metrik olsun. $\xi : \zeta \to \zeta$ fonksiyonu her $\varpi \in \zeta$ için,

$$\xi\varpi = \begin{cases} \varpi + 2 & ; \quad |\varpi| \ge 3 \\ \varpi & ; \quad |\varpi| < 3 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, ξ fonksiyonu $\phi(t) = \dfrac{3t}{4}$, $\delta(r) = r$, $\varpi_0 = 0$, $r = 2$ ve $0 \le a < 1$ ile Teorem 6.1.5 i sağlar [17]. Gerçekten; her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için,

(*i*) $r \le K^*(\varpi,\varpi_0) < r + \delta(r) \Rightarrow d(\xi\varpi,\varpi_0) \le r$

dir. $\varpi_0 = 0$ ve $r = 2$ için,

$$r = \inf\left\{d(\xi\varpi,\varpi) : \varpi \notin Fix(\xi)\right\}$$

$$= \inf\left\{d(\varpi + 2,\varpi) : |\varpi| \ge 3\right\}$$

$$= 2$$

elde edilir. $C_{0,2}$ olur.

$\varpi = -2$ için,

$$K^*(-2,0)=\max\left\{\begin{array}{l} d(-2,0), ad(-2,\xi(-2))+(1-a)d(0,\xi(0)), \\ (1-a)d(-2,\xi(-2))+ad(0,\xi(0)), \dfrac{d(-2,\xi(0))+d(0,\xi(-2))}{2} \end{array}\right\}$$

$$=\max\{2,0,0,2\}=2$$

elde edilir. Buradan,

$$2\le 2<2+\delta(r)\Rightarrow 2\le 2<4\Rightarrow d(\xi(-2),0)=2\le r$$

dir.

$\varpi=2$ için,

$$K^*(2,0)=\max\left\{\begin{array}{l} d(2,0), ad(2,\xi(2))+(1-a)d(0,\xi(0)), \\ (1-a)d(2,\xi(2))+ad(0,\xi(0)), \dfrac{d(2,\xi(0))+d(0,\xi(2))}{2} \end{array}\right\}$$

$$=\max\{2,0,0,2\}=2$$

elde edilir. Buradan,

$$2\le 2<2+\delta(r)\Rightarrow 2\le 2<4\Rightarrow d(\xi(2),0)=2\le r$$

dir.

(*ii*) Her $\varpi\in\zeta$ için,

$$d(\xi\varpi,\varpi)>0\Rightarrow d(\xi\varpi,\varpi)\le\phi(K^*(\varpi,\varpi_0))$$

dir.

$|\varpi|\ge 3$ alalım. $d(\xi\varpi,\varpi)=2$ olduğu (*i*) koşulundan kolayca görülür.

$$K^*(\varpi,0)=\max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,0), ad(\varpi,\xi\varpi)+(1-a)d(0,\xi(0)), \\ \dfrac{d(\varpi,\xi(0))+d(0,\xi\varpi)}{2}, \\ ad(0,\xi(0))+(1-a)d(\varpi,\xi\varpi) \end{array}\right\}$$

$$=\max\left\{|\varpi|, 2a, (1-a)2, \frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2}\right\}$$

$$=\max\left\{|\varpi|, \frac{|\varpi|+|\varpi+2|}{2}\right\}$$

elde edilir.

Durum 1. $K^*(\varpi,0)=|\varpi|$ alalım.

$$2 \le \phi(|\varpi|) = \frac{3}{4}|\varpi|$$

elde edilir.

Durum 2. $K^*(\varpi, 0) = \dfrac{|\varpi| + |\varpi + 2|}{2} \Rightarrow \dfrac{|\varpi| + |\varpi + 2|}{2} \ge |\varpi| \ge 3$

olmalıdır.

Şimdi elde edilen sabit çember sonuçlarının geometrik yorumlarını verelim [17]:

(1) Teorem 6.1.2 de ξ fonksiyonu yalnızca $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bırakmaz. Aynı zamanda $D_{\varpi_0,r}$ diskini de sabit bırakır. Özellikle, ξ fonksiyonu $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin merkezini de sabit bırakır.

(2) Teorem 6.1.2 den, sabit çemberlerin sayısı sonsuz sayıda olabilir. (bknz. Örnek 6.1.4)

(3) Teorem 6.1.5 in (*i*) koşulu, her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için $\xi\varpi$ nin $C_{\varpi_0,r}$ çemberinin dışında olmadığını garanti eder.

(4) Teorem 6.1.5 den ξ fonksiyonunun, $D_{\varpi_0,r}$ diskini sabit bıraktığı kolayca görülür ve bu nedenle sabit çemberlerin sayısı birden fazla olabilir. ξ fonksiyonunun herhangi bir sabit çemberin ϖ_0 merkezini sabit bıraktığı kolayca görülür. (bknz. Örnek 6.1.6)

6.2 Meir-Keeler ve Caristi Yöntemi ile Bazı Sabit Çember Sonuçları

Bu bölümde, (5.1) de tanımlanan φ yardımcı fonksiyonu ve (6.1) de tanımlanan r sayısı ile birlikte Meir-Keeler [5] tipi ve Caristi [3] tipi tekniklerinden faydalanarak, yeni sabit disk ve sabit çember sonuçları elde edeceğiz. Ayrıca, bu sonuçları sağlayan bazı örnekler vereceğiz.

Teorem 6.2.1. ζ uzayı üzerinde d alışılmış metriğini alalım ve $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için,

$$d(\varpi_0, \xi\varpi) \le r \text{ ve } 0 \le \varphi(\varpi) \le 1,$$

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için,

$$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow \varphi(\varpi) < [\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)] K^*(\varpi, \varpi_0),$$

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir [34].

İspat. $r = 0$ olsun. Bu durumda $C_{\varpi_0,r} = \{\varpi_0\}$ olur. $\varphi(\varpi_0) > 0$ olduğunu varsayalım. (2) koşulunu kullanarak,

$$\varphi(\varpi_0) = d(\varpi_0, \xi\varpi_0) < \left[\varphi(\varpi_0) - \varphi(\varpi_0)\right] K^*(\varpi, \varpi_0) = 0$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder. O halde $\varphi(\varpi_0) = 0$ olmalıdır ve buradan

$$\xi\varpi_0 = \varpi_0 \tag{6.6}$$

elde edilir.

$\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ olsun ve $r > 0$ alalım. ξ fonksiyonunun $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bıraktığını gösterelim. Bunun için $\varphi(\varpi) > 0$ olduğunu varsayalım. (1), (2) koşullarını ve (6.6) eşitliğini kullanarak,

$$\varphi(\varpi) = d(\varpi, \xi\varpi) < \left[\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)\right] K^*(\varpi, \varpi_0)$$

$$= d(\varpi, \xi\varpi) \max \left\{ \begin{array}{l} d(\varpi, \varpi_0), ad(\varpi, \xi\varpi) + (1-a) d(\varpi_0, \xi\varpi_0), \\ (1-a) d(\varpi, \xi\varpi) + ad(\varpi_0, \xi\varpi_0), \dfrac{d(\varpi, \xi\varpi_0) + d(\varpi_0, \xi\varpi)}{2} \end{array} \right\}$$

$$= d(\varpi, \xi\varpi) \max \left\{ r, ad(\varpi, \xi\varpi), (1-a) d(\varpi, \xi\varpi), \frac{r + d(\varpi_0, \xi\varpi)}{2} \right\}$$

$$\leq d(\varpi, \xi\varpi) \max \left\{ r, ad(\varpi, \xi\varpi), (1-a) d(\varpi, \xi\varpi) \right\} \tag{6.7}$$

elde edilir.

$$\max \left\{ r, ad(\varpi, \xi\varpi), (1-a) d(\varpi, \xi\varpi) \right\} = l$$

diyelim.

- $l = r$ olsun. (6.7) eşitsizliği ve (1) koşulundan,

$$d(\varpi, \xi\varpi) < d(\varpi, \xi\varpi) r \leq d(\varpi, \xi\varpi) d(\varpi, \xi\varpi) = \left[d(\varpi, \xi\varpi)\right]^2$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder.

- $l = d(\varpi, \xi\varpi) a$ olsun. (1) koşulu ve (6.7) eşitsizliğinden,

$$d(\varpi, \xi\varpi) < d(\varpi, \xi\varpi) d(\varpi, \xi\varpi) a = a\left[d(\varpi, \xi\varpi)\right]^2$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

- $l = d(\varpi, \xi\varpi)(1-a)$ olsun. (6.7) eşitsizliği ve (1) koşulundan,

$$d(\varpi, \xi\varpi) < d(\varpi, \xi\varpi)(1-a) d(\varpi, \xi\varpi) = (1-a)\left[d(\varpi, \xi\varpi)\right]^2$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan $\xi\varpi = \varpi$ olmalıdır ve dolayısıyla ξ fonksiyonu $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bırakır. □

Sonuç 6.2.2. (ζ, d) bir metrik uzay ve $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in D_{\varpi_0,r}$ için

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \leq r$ ve $0 \leq \varphi(\varpi) \leq 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için

$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow \varphi(\varpi) < [\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)] K^*(\varpi, \varpi_0)$,

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dir ve $D_{\varpi_0,r}$ diski ξ nin bir sabit diskidir [34].

Örnek 6.2.3. $\zeta = \mathbb{R}$ kümesi üzerinde alışılmış metriği ele alalım. Her $\varpi \in \mathbb{R}$ için $\xi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\xi\varpi = \begin{cases} 1 & ; \quad \varpi = 2 \\ \varpi & ; \quad \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$r = \inf\{d(\varpi, \xi\varpi) : \varpi = 2\} = 1$

elde edilir.

$\varpi_0 = 0$ alalım. O halde ξ fonksiyonu Teorem 6.2.1 ve Sonuç 6.2.2 nin koşullarını sağlar. Sonuç olarak, ξ fonksiyonu $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberini ve $D_{0,1} = [-1,1]$ diskini sabit bırakır. Ayrıca, ξ fonksiyonunun sabit nokta sayısı sonsuzdur [34].

Teorem 6.2.4. (ζ, d) bir metrik uzay ve $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \leq r$ ve $0 \leq \varphi(\varpi) \leq 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için

$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow t + F(\varphi(\varpi)) \leq F([\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)] K^*(\varpi, \varpi_0))$,

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$, $t > 0$ ve $F \in \mathbb{F}$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir [34].

İspat. $r = 0$ olsun. Bu durumda $C_{\varpi_0,r} = \{\varpi_0\}$ olur. Sonuç olarak (2) koşulundan, $\varpi_0 = \xi\varpi_0$ elde edilir.

Şimdi $r>0$ ve $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için $\varpi \neq \xi\varpi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (1), (2) koşullarını ve F nin kesinlikle artan özelliğini kullanarak,

$$F\left(\varphi(\varpi)\right)+t=F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)+t\leq F\left(\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\varpi_0)\right]K^*\left(\varpi,\varpi_0\right)\right)$$

$$=F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\max\left\{\begin{array}{l} d\left(\varpi,\varpi_0\right), \\ ad\left(\varpi,\xi\varpi\right)+(1-a)d\left(\varpi_0,\xi\varpi_0\right), \\ \dfrac{d\left(\varpi_0,\xi\varpi\right)+d\left(\varpi,\xi\varpi_0\right)}{2}, \\ ad\left(\varpi_0,\xi\varpi_0\right)+(1-a)d\left(\varpi,\xi\varpi\right) \end{array}\right\}\right)$$

$$=F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),(1-a)d\left(\varpi,\xi\varpi\right),\frac{r+d\left(\varpi_0,\xi\varpi\right)}{2}\right\}\right)$$

$$\leq F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),(1-a)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\}\right) \tag{6.8}$$

elde edilir.

$$\max\left\{r,ad\left(\varpi,\xi\varpi\right),(1-a)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right\}=f$$

olsun.

- $f=r$ olsun. (6.8) eşitsizliği kullanılarak,

$$t+F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)\leq F\left(rd\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)<F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

- $f=d\left(\varpi,\xi\varpi\right)a$ olsun. (6.8) eşitsizliğinden,

$$t+F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)\leq F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)a\right)<F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder.

- $f=d\left(\varpi,\xi\varpi\right)(1-a)$ olsun. (6.8) eşitsizliği kullanılarak,

$$t+F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)\leq F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)(1-a)\right)<F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

elde edilir ve bu bir çelişki ifade eder.

Yukarıda elde ettiğimiz sonuçlardan $\xi\varpi=\varpi$ olmalıdır ve $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir. □

Sonuç 6.2.5. ζ uzayı üzerinde d alışılmış metriğini alalım ve $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in D_{\varpi_0,r}$ için

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \leq r$ ve $0 \leq \varphi(\varpi) \leq 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için

$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow t + F(\varphi(\varpi)) \leq F([\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)]K^*(\varpi, \varpi_0))$,

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$, $t > 0$ ve $F \in \mathbb{F}$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $D_{\varpi_0,r}$ diski ξ nin bir sabit diskidir [34].

Örnek 6.2.6. Örnek 6.2.3 ü ele alalım. $\varpi_0 = 0$ ve $F = \ln \varpi$ olsun. Bu durumda ξ fonksiyonu Teorem 6.2.4 ve Sonuç 6.2.5 in koşullarını sağlar. Sonuç olarak, ξ fonksiyonu $C_{0,1} = \{-1,1\}$ çemberini ve $D_{0,1} = [-1,1]$ diskini sabit bırakır [34].

Teorem 6.2.7. ζ uzayı üzerinde d alışılmış metriğini alalım ve $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için,

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \leq r$ ve $0 \leq \varphi(\varpi) \leq 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için,

$$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow \varphi(\varpi) < [\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)]\left(\frac{K(\varpi, \varpi_0) + K^*(\varpi, \varpi_0)}{2}\right),$$

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir [2].

İspat. $r = 0$ olsun. Bu durumda, $C_{\varpi_0,r} = \{\varpi_0\}$ olur. $\varphi(\varpi_0) > 0$ oldugunu varsayalım. (2) koşulunu kullanarak,

$$\varphi(\varpi_0) = d(\varpi_0, \xi\varpi_0) < [\varphi(\varpi_0) - \varphi(\varpi_0)]\left(\frac{K(\varpi, \varpi_0) + K^*(\varpi, \varpi_0)}{2}\right) = 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla, $\varphi(\varpi_0) = 0$ olmalıdır ve buradan

$$\xi\varpi_0 = \varpi_0 \tag{6.9}$$

elde edilir.

$\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ alalım ve $r > 0$ olsun. ξ fonksiyonunun $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bıraktığını gösterelim:

$\varphi(\varpi) > 0$ olduğunu varsayalım. (1), (2) koşulları ve (6.9) eşitliği kullanılarak,

$$\varphi(\varpi) = d(\varpi,\xi\varpi) < [\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)]\left(\frac{K(\varpi,\varpi_0) + K^*(\varpi,\varpi_0)}{2}\right) \tag{6.10}$$

eşitsizliği elde edilir. $K(\varpi,\varpi_0)$ ve $K^*(\varpi,\varpi_0)$ sayılarını düzenlersek,

$$\begin{aligned} K(\varpi,\varpi_0) &= \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,\varpi_0), ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) + ad(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ \dfrac{b[d(\varpi,\xi\varpi_0) + d(\varpi_0,\xi\varpi)]}{2} \end{array}\right\} \\ &= \max\left\{r, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi), \frac{b[r + d(\varpi_0,\xi\varpi)]}{2}\right\} \\ &\le \max\{r, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi)\} = k \end{aligned} \tag{6.11}$$

ve

$$\begin{aligned} K^*(\varpi,\varpi_0) &= \max\left\{\begin{array}{l} d(\varpi,\varpi_0), ad(\varpi,\xi\varpi) + (1-a)d(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ (1-a)d(\varpi,\xi\varpi) + ad(\varpi_0,\xi\varpi_0), \\ \dfrac{d(\varpi,\xi\varpi_0) + d(\varpi_0,\xi\varpi)}{2} \end{array}\right\} \\ &= \max\left\{r, ad(\varpi,\xi\varpi), (1-a)d(\varpi,\xi\varpi), \frac{r + d(\varpi_0,\xi\varpi)}{2}\right\} \\ &\le \max\{r, (1-a)d(\varpi,\xi\varpi), ad(\varpi,\xi\varpi)\} = k \end{aligned}$$

dir. (6.10) ve (6.11) eşitsizliği kullanılarak,

$$\varphi(\varpi) = d(\varpi,\xi\varpi) \le d(\varpi,\xi\varpi)\left(\frac{k+k}{2}\right) \tag{6.12}$$

elde edilir.

- (6.11) den $k = r$ olsun. (6.12) eşitsizliğiden,

$$d(\varpi,\xi\varpi) < d(\varpi,\xi\varpi)\frac{r+r}{2} = d(\varpi,\xi\varpi)r \le d(\varpi,\xi\varpi)d(\varpi,\xi\varpi) = [d(\varpi,\xi\varpi)]^2$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder.

- (6.11) den $k = d(\varpi,\xi\varpi)a$ olsun. (6.12) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned} d(\varpi,\xi\varpi) &< d(\varpi,\xi\varpi)\left(\frac{ad(\varpi,\xi\varpi) + ad(\varpi,\xi\varpi)}{2}\right) = d(\varpi,\xi\varpi)ad(\varpi,\xi\varpi) \\ &< [d(\varpi,\xi\varpi)]^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir.

- (6.11) den $k = d(\varpi, \xi\varpi)(1-a)$ olsun. (6.12) eşitsizliği kullanılarak,

$$d(\varpi, \xi\varpi) < d(\varpi, \xi\varpi)\left(\frac{(1-a)d(\varpi, \xi\varpi) + (1-a)d(\varpi, \xi\varpi)}{2}\right)$$
$$= d(\varpi, \xi\varpi)(1-a)d(\varpi, \xi\varpi) < \left[d(\varpi, \xi\varpi)\right]^2$$

elde edilir ve bu bir çelişkidir.

Bu üç durumun sonucundan $\xi\varpi = \varpi$ olmalıdır. Dolayısıyla ξ fonksiyonu $C_{\varpi_0,r}$ çemberini sabit bırakır. □

Sonuç 6.2.8. (ζ, d) bir metrik uzay, $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in D_{\varpi_0,r}$ için,

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \le r$ ve $0 \le \varphi(\varpi) \le 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için,

$$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow \varphi(\varpi) < \left[\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)\right]\left(\frac{K(\varpi, \varpi_0) + K^*(\varpi, \varpi_0)}{2}\right)$$

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $D_{\varpi_0,r}$ diski ξ nin bir sabit diskidir [2].

Teorem 6.2.9. ζ uzayı üzerinde d alışılmış metriğini alalım ve $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Her $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için,

$d(\varpi_0, \xi\varpi) \le r$ ve $0 \le \varphi(\varpi) \le 1$,

(2) Her $\varpi \in \zeta$ için,

$$\varphi(\varpi) > 0 \Rightarrow t + F(\varphi(\varpi)) \le F\left(\left[\varphi(\varpi) - \varphi(\varpi_0)\right]\left(\frac{K(\varpi, \varpi_0) + K^*(\varpi, \varpi_0)}{2}\right)\right),$$

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0 \in \zeta$, $t > 0$ ve $F \in \mathbb{F}$ varsa bu durumda, $\xi\varpi_0 = \varpi_0$ dır ve $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir [2].

İspat. $r = 0$ olsun. Bu durumda $C_{\varpi_0,r} = \{\varpi_0\}$ olur. Dolayısıyla (2) koşulundan, $\varpi_0 = \xi\varpi_0$ elde edilir.

Şimdi $r > 0$ ve $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ için $\varpi \ne \xi\varpi$ olduğunu varsayalım. Bu durumda (6.11) de tanımladığımız k sayısını, F nin (F1) özelliğini ve (1) , (2) koşullarını kullanarak,

$$F\left(\varphi(\varpi)\right)+t=F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)+t\leq F\left(\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\varpi_0)\right]\left(\frac{K\left(\varpi,\varpi_0\right)+K^*\left(\varpi,\varpi_0\right)}{2}\right)\right)$$

$$\leq F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\frac{k+k}{2}\right) \tag{6.13}$$

eşitsizliği elde edilir.

- (6.11) den $k=r$ olsun. (6.13) eşitsizliğinden,

$$t+F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)\leq F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\frac{r+r}{2}\right)\leq F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

dir ve bu bir çelişki ifade eder.

- (6.11) den $k=ad\left(\varpi,\xi\varpi\right)$ olsun. (6.13) eşitsizliğinden,

$$F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)+t\leq F\left(a\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)<F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

çelişkisi ortaya çıkar.

- (6.11) den $k=(1-a)d\left(\varpi,\xi\varpi\right)$ olsun. (6.13) eşitsizliği kullanılarak,

$$F\left(d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right)+t\leq F\left((1-a)\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)<F\left(\left[d\left(\varpi,\xi\varpi\right)\right]^2\right)$$

çelişkisi elde edilir.

Elde edilen bu çelişkilerden dolayı $\xi\varpi=\varpi$ olmalıdır. Ayrıca sonuç olarak, $C_{\varpi_0,r}$ çemberi ξ nin bir sabit çemberidir. □

Sonuç 6.2.10. ζ uzayı üzerinde d alışılmış metriğini alalım ve $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon olsun. Eğer,

(1) Tüm $\varpi\in D_{\varpi_0,r}$ için,

$d\left(\varpi_0,\xi\varpi\right)\leq r$ ve $0\leq\varphi(\varpi)\leq 1$,

(2) Her $\varpi\in\zeta$ için,

$$\varphi(\varpi)>0\Rightarrow t+F\left(\varphi(\varpi)\right)\leq F\left(\left[\varphi(\varpi)-\varphi(\varpi_0)\right]\left(\frac{K\left(\varpi,\varpi_0\right)+K^*\left(\varpi,\varpi_0\right)}{2}\right)\right),$$

koşullarını sağlayan bir $\varpi_0\in\zeta$, $t>0$ ve $F\in\mathbb{F}$ varsa bu durumda $\xi\varpi_0=\varpi_0$ dır ve $D_{\varpi_0,r}$ diski ξ nin bir sabit diskidir [2].

7. AKTİVASYON FONKSİYONLARINA UYGULAMA

Bu bölümde, çeşitli aktivasyon fonksiyonlarına uygulamalar verilmiştir.

7.1 Reel Değerli Aktivasyon Fonksiyonlarına Bir Uygulama

Bu bölümde, uygun bir sabit çember ve $K^*(\varpi,\omega)$ sayısını kullanarak süreksizlik ve k-süreklilik kavramlarının, süreksiz aktivasyon fonksiyonlarına bazı uygulamalarını ele alacağız. Süreksiz aktivasyon fonksiyonları son yıllarda gerçek değerli sinir ağlarında kapsamlı bir şekilde çalışıldığı için, bu tür uygulamalar bir çok uygulama alanında önemli olacaktır.

Önerme 7.1.1. (ζ,d) bir metrik uzay, $\xi:\zeta\to\zeta$ bir fonksiyon ve $C_{\varpi_0,r}$, ξ nin bir sabit çemberi olsun. Bu durumda, ξ nin herhangi bir $\varpi\in C_{\varpi_0,r}$ üzerinde süreksiz olması için yeterli ve gerekli koşul,

$$\lim_{z\to\varpi} K^*(z,\varpi)\neq 0$$

dir [17].

İspat. ξ, $\varpi\in C_{\varpi_0,r}$ de sürekli bir fonksiyon ve $\varpi_n\to\varpi$ olsun. Bu durumda,

$$\xi\varpi_n\to\xi\varpi=\varpi \text{ ve } d(\varpi_n,\xi\varpi_n)=0$$

elde edilir. Böylece,

$$\lim_n K^*(\varpi_n,\varpi)=0$$

olur.

Diğer taraftan, $\lim_{\varpi_n\to\varpi} K^*(\varpi_n,\varpi)=0$ ise bu durumda,

$$\varpi_n\to\varpi \text{ iken } d(\varpi_n,\xi\varpi_n)\to 0$$

olmalıdır. Bu da,

$$\xi\varpi_n\to\varpi=\xi\varpi$$

olmasını sağlar yani ξ, ϖ de süreklidir. □

$K^*(\varpi,\omega)$ sayısında $a=0$ alırsak,

$$K^*(\varpi,\omega)=\max\left\{d(\varpi,\omega),d(\omega,\xi\omega),d(\varpi,\xi\varpi),\frac{d(\varpi,\xi\omega)+d(\omega,\xi\varpi)}{2}\right\}$$

elde edilir ve Önerme 7.1.1, [19] da verilen Önerme 4.1 ile çakışır [17].

Aşağıdaki önermede, sabit bir çember üzerinde k-sürekliliğinin bir karakterizasyonu elde edilir.

Önerme 7.1.2. (ζ, d) bir metrik uzay, $\xi : \zeta \to \zeta$ bir fonksiyon ve $C_{\varpi_0,r}$, ξ nin bir sabit çemberi olsun. Bu durumda, $k \geq 2$ için herhangi bir $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ noktasında ξ nin k-sürekli olması için yeterli ve gerekli koşul

$$\lim_{z\to\varpi} K^*(z,\varpi) = 0$$

olmasıdır [17].

İspat. $C_{\varpi_0,r}$, ξ nin bir sabit çemberi ve $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ herhangi bir nokta olsun. ζ ' de $\{\varpi_n\}$ dizisi

$$\xi^{k-1}\varpi_n \to \varpi$$

şeklinde tanımlansın. Eğer ξ, $\varpi \in C_{\varpi_0,r}$ de k-sürekli ise bu durumda,

$$\xi^k\varpi_n \to \xi\varpi_n$$

ve

$$d\left(\xi^k\varpi_n, \xi^{k-1}\varpi_n\right) \to 0$$

dır. Dolayısıyla,

$$\lim_n\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \varpi\right) = \lim_n \max\left\{\begin{array}{l} d\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \varpi\right), ad\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \xi^k\varpi_n\right), (1-a)d\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \xi^k\varpi_n\right), \\ \dfrac{d\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \xi\varpi\right) + d\left(\varpi, \xi^k\varpi_n\right)}{2} \end{array}\right\}$$

$$= 0$$

elde edilir. Diğer taraftan eğer,

$$\lim_n K^*\left(\xi^{k-1}\varpi_n, \varpi\right) = 0$$

ise bu durumda,

$$d\left(\xi^k\varpi_n, \xi^{k-1}\varpi_n\right) \to 0$$

dir. Buradan,

$$\xi^k\varpi_n \to \varpi = \xi\varpi$$

dir yani ξ, ϖ de k-süreklidir. □

Şimdi süreksiz aktivasyon fonksiyonlarına bir uygulama verelim. [36] nolu çalışmada aşağıdaki süreksiz aktivasyon fonksiyonu tanımlanmıştır:

$-\infty < a_i < b_i < c_i < +\infty,$
$f_{i,1} > 0, f_{i,2} < 0,$
$d_i = f_{i,1}a_i + g_{i,1} = f_{i,2}c_i + g_{i,2},$
$f_{i,1}b_i + g_{i,1} = f_{i,2}b_i + g_{i,2},$
$e_i > \xi_i b_i, i = 1, 2, ..., n.$

olacak şekilde $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_{i,1}, f_{i,2}, g_{i,1}$ ve $g_{i,2}$ sabitler olmak üzere,

$$\xi_i \varpi = \begin{cases} d_i & ; \ -\infty < \varpi < a_i \\ f_{i,1}\varpi + g_{i,1} & ; \ a_i \le \varpi \le b_i \\ f_{i,2}\varpi + g_{i,2} & ; \ b_i < \varpi \le c_i \\ e_i & ; \ c_i < \varpi < +\infty \end{cases} \tag{7.1}$$

şeklinde tanımlansın.

Bu süreksiz aktivasyon fonksiyonu, sinir ağlarındaki kararlılık problemlerinin çözümünde kullanılmıştır. Dikkat edilirse, bu ξ_i fonksiyonu $\varpi = c_i$ noktası dışında tüm $\mathbb{R}$ de süreklidir [17].

İspatladığımız teorik sonuçlara bir uygulama elde etmek için $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_{i,1}, f_{i,2}, g_{i,1}$ ve $g_{i,2}$ katsayılarını aşağıdaki gibi alalım:

$a_i = 0$, $b_i = 1$, $c_i = 2$, $d_i = 2$, $e_i = 5$, $f_{i,1} = 1$, $g_{i,1} = 2$, $f_{i,2} = -1$, $g_{i,2} = 4$.

Bu durumda aşağıdaki aktivasyon fonksiyonu elde edilir:

$$\xi \varpi = \begin{cases} 2 & ; \ -\infty < \varpi < 0 \\ \varpi + 2 & ; \ 0 \le \varpi \le 1 \\ -\varpi + 4 & ; \ 1 < \varpi \le 2 \\ 5 & ; \ 2 < \varpi < +\infty \end{cases} \tag{7.2}$$

ξ fonksiyonunun $\varpi_1 = 2$ ve $\varpi_2 = 5$ şeklinde iki farklı sabit noktası vardır.

$$\lim_{\varpi \to 5} K^*(\varpi, 5) = 0$$

olduğundan, ξ fonksiyonu 5 noktasında süreklidir. Fakat $\varpi \to 2$ iken $K^*(\varpi, z)$ limiti mevcut olmadığından, ξ fonksiyonu 2 noktasında sürekli değildir. Böylece, $K^*(\varpi, \omega)$ sayısını kullanarak aktivasyon fonksiyonunun hangi noktalarda süreksiz olduğunu belirleyebiliriz [17]. Şimdi aşağıdaki örneği verelim.

Örnek 7.1.3. (7.2) de tanımlanan ξ fonksiyonunu alalım. Görüldüğü üzere, ξ nin sabit noktaları aynı zamanda $C_{\frac{7}{2},\frac{3}{2}} = \{2, 5\}$ çemberinin elemanlarıdır ve dolayısıyla ξ, $C_{\frac{7}{2},\frac{3}{2}}$ çemberini sabit bırakır. Yukarıdaki önermelerden, ξ fonksiyonunun $\varpi_1 = 5$ noktasında sürekli olduğu kolayca görülür. Ayrıca $\varpi_2 = 2$ noktasında süreksizdir ancak $\varpi_1 = 5$ ve $\varpi_2 = 2$ noktalarında 2-süreklidir [17].

7.2 Düzleştirilmiş Doğrusal Birim (Rectified Linear Unit: ReLU) Aktivasyon Fonksiyonuna Bir Uygulama

Düzleştirilmiş doğrusal birim (Rectified Linear Unit: ReLU) aktivasyon fonksiyonu

$$\operatorname{Re}LU(\varpi) = \begin{cases} 0 & ; \quad \varpi \leq 0 \\ \varpi & ; \quad \varpi > 0 \end{cases}$$

$$= \max\{0, \varpi\}$$

şeklinde tanımlıdır [37].

$\zeta = [0, \infty) \cup \{-1\}$ kümesi üzerinde alışılmış metriği ele alalım. Bu durumda, r sayısı (6.1) deki gibi tanımlı olmak üzere,

$$r = \inf\{|\varpi - \operatorname{Re}LU(\varpi)| : \varpi = -1\} = 1$$

ve

$$K^*(-1,1) = \max\left\{2, a, (1-a), \frac{3}{2}\right\} = 2$$

olarak elde edilir.

$\varpi_0 = 1$ ve $F = \ln \varpi$ fonksiyonunu alalım. O halde, $\operatorname{Re}LU$ fonksiyonu Teorem 6.2.1 ve Teorem 6.2.4 ün koşullarını sağlar. Sonuç olarak $C_{1,1} = \{0, 2\}$ çemberi $\operatorname{Re}LU$ fonksiyonunun bir sabit çemberidir [34].

8. SONUÇ

Bu tez çalışmasında Rhoades'in sabit noktada süreksizlik açık problemine literatürde elde edilen bazı sonuçlara ayrıntılı bir şekilde yer verilmiş olup, Meir-Keeler ve Caristi daralma koşulu teknikleri bir arada kullanılarak bu açık probleme metrik uzaylar üzerinde yeni sonuçlar kazandırılmıştır. Sabit noktada süreksizlik sonucu elde etmek için kullanılan yaklaşım yardımıyla ayrıca, sabit noktaların geometrisi anlamında sabit çember ve sabit disk sonuçları elde edilmiştir. Yapılan teorik sonuçların önemini vurgulamak için reel değerli bazı aktivasyon fonksiyonlarına uygulama verilmiştir. Bu tez çalışması metrik uzaylar üzerinde olup, çeşitli genelleştirilmiş metrik uzaylar üzerinde aynı problemin çalışılması açık problem olarak karşımıza gelmektedir. Literatürde çok sayıda genelleştirilmiş metrik uzay örneğinin mevcut olması aslında bu tezin çok sayıda açık probleme ışık tuttuğunu da göstermektedir.

9. KAYNAKLAR

[1] S. Banach, “Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrals”, *Fundamenta Mathematicae*, vol. 3, pp. 133-181, 1922.

[2] N. Taş and K. Karaağaç, “Metrik uzaylarda bazı Caristi ve Meir-Keeler tipi sabit figür sonuçları”, *1st International Conference on Frontiers in Academic Research*, pp. 290-294, 2023.

[3] J. Caristi, “Fixed point theorems for mappings satisfying inwardness conditions”, *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 215, pp. 241-251, 1976.

[4] M.S. Khan, M. Swaleh and S. Sessa, “Fixed point theorems by altering distances between the points”, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, vol. 30, pp. 1-9, 1984.

[5] A. Meir and E. Keeler, “A theorem on contraction mappings”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 28, pp. 326-329, 1969.

[6] L. B. Ciric, “A generalization of Banach’s contraction principle”, *Proceedings of the American Mathematical Society*, vol. 45, no. 2, pp. 267-273, 1974.

[7] S. Sedghi, N. Shobe and A. Aliouche, “A generalization of fixed point theorems in $S-$metric spaces”, *Matematicki Vesnik*, vol. 64, no. 3, pp. 258-266, 2012.

[8] N. Hussain, P. Salimi and V. Parvaneh, “Fixed point results for various contractions in parametric an fuzzy $b-$metric spaces”, *Journal of Nonlinear Science and Its Applications*, vol. 8, no. 5, pp. 719-739, 2015.

[9] Z. Mustafa and B. Sims, “A new approach to generalized metric spaces”, *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, vol. 7, pp. 289-297, 2006.

[10] B. E. Rhoades, “Contractive definitions and continuity”, *Contemporary Mathematics*, vol. 72, pp. 233-245, 1988.

[11] N. Özgür and N. Taş, “Some fixed-circle theorems and discontinuity at fixed circle”, *AIP Conference Proceedings*, 2018.

[12] R. P. Pant, “Discontinuity and fixed points”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 240, no. 1, pp. 284-289, 1999.

[13] R. K. Bisht and R. P. Pant, “Contractive definitions and discontinuity at fixed point”, *Applied General Topology*, vol. 18, no. 1, pp. 173-182, 2017.

[14] R. K. Bisht and V. Rakocevic, “Fixed points of convex and generalized convex contractions”, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2*, vol. 69, pp. 21-28, 2018.

[15] R. K. Bisht and V. Rakocevic, “Generalized Meir-Keeler type contractions and discontinuity at fixed point”, *Fixed Point Theory*, vol. 19, no. 1, pp. 57-64, 2018.

[16] A. Pant, R. P. Pant, V. Rakocevic and R. K. Bisht, “Generalized Meir-Keeler type contractions and discontinuity at fixed point II”, *Mathematica Slovaca*, vol. 69, no. 6, pp. 1501-1507, 2019.

[17] R. P. Pant, N. Y. Özgür and N. Taş, “On discontinuity problem at fixed point”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 43, pp. 499-517, 2020.

[18] U. Çelik, “Sabit noktaların geometrisi ve sabit noktalardaki süreksizlik”, *Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü*, 2021.

[19] N. Y. Özgür and N. Taş, “Some fixed-circle theorems on metric space”, *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, vol. 42, no. 4, pp. 1433-1449, 2019.

[20] N. Y. Özgür and N. Taş, “Fixed-circle problem on $S-$ metric spaces with a geometric viewpoint”, *Facta Universitatis. Series: Mathematics and Informatics*, vol. 34, no. 3, pp. 459-472, 2019.

[21] N. Mlaiki, N. Taş and N. Y. Özgür, “On the fixed-circle problem and Khan type contractions”, *Axioms*, vol. 7, no. 4, 2018.

[22] N. Taş, “Bilateral-type solutions to the fixed-circle problem with rectified linear units application”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 44, no. 4, pp. 1330-1344, 2020.

[23] K. Karaağaç, Ö. M. Kızanlık and N. Taş, “New contributions to nonunique fixed-point results via power type contractions”, *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 11, no. 1, pp. 206-221, 2023.

[24] S. Willard, “General topology”, *Addison-Wesley Publishing Company*, 1970.

[25] S. Lipschutz, “General topology”, *Schaum’s Outlines*, 1965.

[26] S. A. Kılıç, M. Erdem, “Metrik uzaylar ve topoloji, *Vipaş A. Ş.*, 1999.

[27] E. Kreyszig, “Introductory functional analysis with applications”, *Wiley Classics Library*, 1978.

[28] T. Başkan, O. Bizim, İ. N. Cangül, “Metrik uzaylar ve genel topolojiye giriş”, *Nobel Yayın Dağıtım*, 2006.

[29] J. R. Munkres, “Topology”, *Prentice Hall*, 2000.

[30] N. Y. Özgür, “Fixed-disc results via simulation functions”, *Turkish Journal of Mathematics*, vol. 43, pp. 2794-2805, 2019.

[31] J. Jachymski, “Equivalent conditions and Meir-Keeler type theorems”, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 194, no. 1, pp. 293-303, 1995.

[32] A. Pant and R. P. Pant, “Fixed points and continuity of contractive maps”, *Filomat*, vol. 31, no. 11, pp. 3501-3506, 2017.

[33] N. Taş, “New answers to the Rhoades’ open problem and the fixed-circle problem”, *Conference Proceeding Science and Technology*, vol. 3, no. 1, pp. 160-165, 2020.

[34] N. Taş and K. Karaağaç, “New discontinuity and fixed disc results via Meir-Keeler and Caristi techniques on metric spaces”, *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, vol. 13, no. 1, pp. 119-127, 2023.

[35] D. Wardowski, “Fixed points of a new type contractive mappings in complete metric spaces”, *Fixed Point Theory and Applications*, vol. 94, pp. 1-6, 2012.

[36] X. Nie and W. X. Zheng, “On multistability of competitive neural networks with discontinuous activation functions”, *4th Australian Control Conference (AUCC)*, pp. 245-250, 2014.

[37] V. Nair and G. E. Hinton, “Rectified linear units improve restricted boltzmann machines”, *Proceedings of the 27th International Conference on Machine Learning, ICML’ 10, USA: Omnipress*, pp. 807-814, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Kübra KARAAĞAÇ

Doğum tarihi ve yeri : **27.10.1991 - BALIKESİR**

e-posta : kubra.mergen@gmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	Okul/Program	Yıl
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2014
Lise	Balıkesir Cumhuriyet Anadolu Lisesi	2009

Yayın Listesi

[1] N. Taş and K. Karaağaç, "Metrik uzaylarda bazı Caristi ve Meir-Keeler tipi sabit figür sonuçları", *1st International Conference on Frontiers in Academic Research*, pp. 290-294, 2023. **[Tezden türetilmiştir]**
[2] N. Taş and K. Karaağaç, "New discontinuity and fixed disc results via Meir-Keeler and Caristi techniques on metric spaces", *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, vol. 13, no. 1, pp. 119-127, 2023. **[Tezden türetilmiştir]**
[3] K. Karaağaç, Ö. M. Kızanlık and N. Taş, "New contributions to nonunique fixed-point results via power type contractions", *Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications*, vol. 11, no. 1, pp. 206-221, 2023.
[4] K. Karaağaç and N. Taş, "Metrik uzaylar üzerinde bazı sabit çember teoremleri ve örnekleri", *Izmır Mathematics Days-IV*, pp. 33, 2022.