T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MODÜLER VE GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI

ELİF TUNCER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Özden KORUOĞLU(Tez Danışmanı)
Doç. Dr. Bilal DEMİR
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN

BALIKESİR, HAZİRAN- 2024

KABUL VE ONAY SAYFASI

Elif TUNCER tarafından hazırlanan "**MODÜLER VE GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 14 Haziran 2024 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri İmza

Danışman
Prof. Dr. Özden KORUOĞLU
Balıkesir Üniversitesi

Üye
Doç. Dr. Bilal DEMİR
Balıkesir Üniversitesi
Üye
Dr. Öğr. Üyesi Ahmet EMİN
Karabük Üniversitesi

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Dilek TÜRKER ....

ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan **“Modüler ve Genişletilmiş Modüler Grupta İz Sınıfları** ” başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

Elif TUNCER

ÖZET

MODÜLER VE GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ELİF TUNCER
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, HAZİRAN-2024

Bu tezde, modüler ve genişletilmiş modüler gruptaki iz sınıfları verilmiştir. Bu iz sınıfları ile blok uzunlukları arasındaki ilişki açıklanmıştır.
Bu tez, beş bölümden oluşmakta olup birinci bölümde konuyla ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir.
İkinci bölümde, diğer bölümler için çalışmada gerekli olan tanım, teorem, örnek ve sonuçlara yer verilmiştir.
Üçüncü bölümde, modüler grubun elemanları izlerine göre nasıl sınıflandırılmıştır. Blok uzunluğu ile iz arasındaki ilişki incelenmiştir.Herhangi bir iz için, iz sınıflarının temsilci kümesini veren bir yöntem sunulmuştur.
Dördüncü bölümde, genişletilmiş modüler gruplardaki iz sınıfları incelenerek blok uzunlukları ve izler arasındaki ilişki irdelenmiştir.
Beşinci bölümde, önceki bölümlerde ele alınan konulardan elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Genişletilmiş modüler grup, iz sınıfları, blok uzunluğu

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 33

ABSTRACT

TRACE CLASSES IN THE MODULAR AND EXTENDED MODULAR GROUP
MSC THESIS
ELİF TUNCER
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, JUNE - 2024

In this thesis, the trace classes in the modular group and the extended modular group are given. The relationship between these trace classes and block lenghts is explained.
This thesis consists of five chapters, and in the first chapter, the studies on the subject are briefly mentioned.
In the second chapter, the definitions, theorems, examples and results required for this study are given.
In the third section, the elements of the modular group are classified according to their traces. The relationship between block length and trace is analyzed. A method that gives a representative set of trace classes for any trace is presented.
In the fourth chapter, the trace classes in the extended modular groups are examined and the relationship between block lengths and trace is examined.
In the fifth section, the results obtained from the topics discussed in the previous sections are briefly summarized.

KEYWORDS: Extended modular group, trace classes, block length

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 33

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET i
ABSTRACT ii
İÇİNDEKİLER iii
TABLO LİSTESİ iv
SEMBOL LİSTESİ v
ÖNSÖZ vi
1. GİRİŞ 1
2. ÖN BİLGİLER 3
2.1 Gruplarla İlgili Temel Kavramlar ve Grup Sunuşları……………………………..….3
2.2 Möbius Dönüşümleri………………………………………………………………6
2.3 İz Sınıfları…………………………………………………………………………… 7
2.4 Hecke Grupları……………………………………...……………………….10
2.5 Genişletilmiş Hecke Grupları………………………………………………….11
2.6 Modüler Grup ve Genişletilmiş Modüler Grup………..…………………………12
3. MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI………….………………………………….15
4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI……….……………...23
5. SONUÇ VE ÖNERİLER…………………………………………………………30
6. KAYNAKLAR…………………………………………………………………….31

ÖZGEÇMİŞ…………………………………………………………….……………33

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Tablo 3.1 : Blok uzunlukları ile izler arasındaki ilişki…………………………………......19

Tablo 3.2 : İzlere göre sınıf sayıları ve temsilciler………………………………………20

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{P} = < \boldsymbol{X} \mid \boldsymbol{R}^* >$: Grup sunuşu
$\boldsymbol{AxB}$: Direkt çarpım grubu
$|\boldsymbol{G}|$: G grubunun mertebesi
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{n}}$: n mertebeli devirli grup
A $*_C$ B : Karışımlı serbest çarpım grubu
$\mathbb{Z}$: Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}^+$: Pozitif Tam Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$: Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{R}$: Reel sayılar kümesi
GL(2, $\mathbb{C}$) : Genel Lineer Grup
K : 2-Kompleks
PSL (2, $\mathbb{R}$) : $\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \}$
Aut($\mathcal{U}$) : Üst yarı düzlemdeki tüm otomorfizmaların kümesi
tr(V) : V dönüşümünün izi
$\mathbf{H}_{p,q}$: Genel Hecke Grubu
H($\boldsymbol{\lambda}$) : Hecke Grubu
BL(W) : Blok indirgenmiş formdaki W kelimesinin uzunluğu
$\mathbf{D}_n$: Dihedral Grup
$\boldsymbol{\Gamma}$: Modüler Grup
$\overline{\boldsymbol{\Gamma}}$: Genişletilmiş modüler grup

ÖNSÖZ

Bu çalışmamda büyük emeği olan, desteğini hiçbir zaman esirgemeyerek kıymetli vaktini ayırmaktan çekinmeyen, öğrencisi olduğum için kendimi çok şanslı hissettiğim değerli hocam ve danışmanım Sayın Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na, yüksek lisans sürecinde kendilerinden ders aldığım ve bana çok şey katan saygıdeğer hocalarım Sayın Prof. Dr. Fırat ATEŞ'e, Sayın Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e, Sayın Doç. Dr. Bilal DEMİR'e tüm eğitim öğretim hayatım boyunca kendilerinden feyzaldığım kıymetli öğretmenlerime sonsuz saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum.
Bu süreçte ve her zaman ailemizin en büyük destek kuvveti, her zorlukta hızır gibi yetişeni canım babam Kamil KAÇAK'a, tüm fedakarlıkları için kıymetli annem Nafiye KAÇAK'a ve destekleri için ablam Gönül GÜNEY'e, hayatımda var olduğu günden beri her anımda en büyük destekçim ve dayanağım olan; bu süreçte de büyük fedakarlıklarda bulunan değerli eşim Nazmi TUNCER'e, yoğun çalışmalarım döneminde gösterdikleri anlayış için varlıklarıyla hayatımıza anlamların en büyüğünü katan canım kızım Nil Yağmur TUNCER ve canım oğlum Alp Arda TUNCER'e sonsuz teşekkürler.
Son olarak "öldürmeyen şey güçlendirir"e olan inancımı perçinleyen (küçük çocuklu anneler için) yüksek lisans ve tez sürecinin bizzat kendisine de ayrıca teşekkürü bir borç bilirim :)

Balıkesir, 2024 **Elif TUNCER**

1. GİRİŞ

[1] Eric Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen " isimli makalesinde ;

$T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z + \lambda$ $(\lambda \in \mathbb{R}^{+})$

kesirli lineer dönüşümleri tarafından üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen grupları ilk kez tanımlamıştır.

Bu üreteçler için $S = T.U$ denilirse

$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$ elde edilir.

[2] Cangül ; $q \geq 3$ tek tamsayı ve q=4, 6 özel değerleri, $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ için $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ve bunların normal alt gruplarına çalışmalarında yer vermiştir.

[3,4] q=3 için çalışılan $H(\lambda_3)$ Hecke grubu Modüler grup olarak isimlendirilir ve Γ=PSL(2,$\mathbb{Z}$) sembolüyle gösterilir. Lehner ve Newman, 1965 yılında Modüler grubun sunuşlarını çalışmışlardır. Aynı zamanda M. Newman, kuvvet alt grupları yardımıyla Modüler grubun serbest alt gruplarıyla ilgili sonuçlar elde etmiştir. [6-10] Ek olarak Şahin, Bizim, Sheingorn, Kulkarni, Schmidt, Singerman, Fine, Cangül, Lang, Yılmaz Hecke grupları ve bunların normal alt gruplarını çalışan isimlerden bazılarıdır.

[5] nolu makalede Bizim ve Şahin $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümünün, $H(\lambda_q)$ Hecke grubuna eklenmesiyle tanımlanan genişletilmiş Hecke gruplarını literature kazandırmışlardır. Demir [11] nolu çalışmasında genel Hecke gruplarını açıklamıştır.

[12-16] 1980'li yıllardan bu yana, modüler gruptan faydalanılarak tanımlanan genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma} = PGL(2,\mathbb{Z})$ ile bunun alt grupları Bizim, Koruoğlu, Singerman, Thornton gibi isimler tarafından çalışılmıştır.

[14] Benjamin Fine, "Trace Classes and Quadratic Forms in the Moduler Group" adlı makalesinde modüler grupları izlerine göre sınıflandırmış; Koruoğlu, İkikardeş ve Şahin "Trace Classes and Fixed Points for Extended Modular Group" adlı makalede bu çalışmayı genişletilmiş modüler gruba taşımışlardır. [7] Bu tez ile yapılan bu çalışmalar incelenerek

bir takım sonuçlar elde edilmiştir. Bu çalışmada her bir d tamsayısı için, d izindeki iz sınıflarının tam bir temsilci kümesini belirlemek için etkili bir algoritma verilmektedir. Bu çalışmada Γ'un grup teorik yapısına dayanan, herhangi bir d izi için iz sınıflarının tam bir temsilci kümesini belirlemekte kullanılan etkili bir algoritma sunulmaktadır. Bu algoritma $Q(\sqrt{d^2-4}\ )$ alanının ideal sınıf sayısı olan $h(d)$'yi saymak için yeni ve basit bir teknik sunmaktadır.

İkinci bölüm olan ön bilgiler bölümünde, sonraki bölümlerde karşılaşılacak bazı tanım, kavram ve teoremlere yer verilmektedir. Bu bölümde grup sunuşları, konjuge eleman, devirli grup, devirsel indirgenmiş eleman, Möbius dönüşümleri, Hecke grupları, Modüler ve Genişletilmiş Modüler grup ile ilgili bazı tanım, teorem, örnek ve yöntemler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Modüler grup tanımı, $W(T,S)$ blok kelimeleri ile Benjamin Fine'ın [7] nolu çalışmasında yer verdiği modüler gruplarda iz sınıfları ele alınmıştır. Bu çalışmada $\boldsymbol{\Gamma}$ nın grup teorik yapısına dayanan, herhangi bir d izi için, iz sınıflarının tam bir temsilci kümesini belirlemekte kullanılan etkili bir algoritma sunulmaktadır. Bu algoritmanın genel olarak Hecke gruplarına genişletilebileceği M.Sheingorn [8] tarafından bize gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş modüler grup tanımı, blok kelimeleri ve iz sınıfları ilişkisi ile Koruoğlu, Şahin ve İkikardeş'in [14] nolu çalışmalarında, Fine'ın [7] nolu çalışmasını, genişletilmiş modüler gruba taşıması sonucunda elde edilen durumlar ele alınmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan teoremler, yöntemler ve kavramlara yer verilmiştir.

2.1 Gruplarla İlgili Temel Kavramlar ve Grup Sunuşları

Bu bölümde grup sunuşları, konjuge eleman, devirli grup, devirsel indirgenmiş eleman kavramlarını kısaca tanıtacağız.

2.1.1 Tanım : [17] X, elemanları üreteçlerden oluşan bir küme ve R^*, X kümesindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan, boş olmayan bir küme olmak üzere ;

$$P = < X \mid R^* >$$

gösterimine grup sunuşu denir. P sunuşu, X ve R^* kümelerinin ikisi birden sonlu olduğunda sonludur.

2.1.2 Teorem : [17] Üreteci bir t elemanı olan sonsuz mertebeli ve devirli bir grubun sunuşu;

$$P = < t \mid \quad >$$

olur.

2.1.3 Tanım :

A grubunun grup sunuşu;

$P_A =< X \mid R_1{}^* >$

B grubunun grup sunuşu;

$P_B =< Y \mid R_2{}^* >$ ve $R^* = \{xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y\}$

olmak üzere bu A ve B 'nin direkt çarpım grubu olan G'nin grup sunuşu;

$P_G =< X, Y \mid R_1{}^*, R_2{}^*, R_1{}^* >$

olarak tanımlanır.

[17,18] A ve B iki grup olmak üzere direkt çarpımları $G = A \times B$ ile gösterilir. Kartezyen çarpımın bir sonucu olarak $|G| = |A||B|$ elde edilir.

2.1.4 Örnek: $\mathbb{Z}_2 = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ $|\mathbb{Z}_2| = 2$, $\mathbb{Z}_3 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}\}$ $|\mathbb{Z}_3| = 3$

$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3 = \{(\bar{0},\bar{0}), (\bar{0},\bar{1}), (\bar{0},\bar{2}), (\bar{1},\bar{0}), (\bar{1},\bar{1}), (\bar{1},\bar{2})\}$, $|\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_3| = 6$

Şimdi başka bir grup sunuşu olan serbest çarpım grubunu tanıtalım.

2.1.5 Tanım:

$P_A =< X \mid {R_1}^* >$ A'nın grup sunuşu,

$P_B =< Y \mid {R_2}^* >$ B ' nin grup sunuşu olmak üzere;

[17] $G = A * B$ serbest çarpım grubunun sunuşu;

$\boldsymbol{P_G =< X, Y \mid {R_1}^*, {R_2}^* >}$

şeklindedir.

2.1.6 Örnek:

$\mathbb{Z}_2$ nin grup sunuşu ; $\mathbb{Z}_2 = < x \mid x^2 = e >$,

$\mathbb{Z}_3$ ün grup sunuşu; $\mathbb{Z}_3 = < y \mid y^3 = e >$

$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ ün grup sunuşu; $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3 = < x, y \mid x^2 = e, y^3 = e >$ şeklindedir.

2.1.7 Tanım : [17,18] A ve B birer grup ve C, A'nın bir alt grubu olarak verilsin. $\phi: C \to B$ birebir homomorfizma olmak üzere A ve B 'nin C ile tanımladıkları karışımlı serbest çarpım grubu $G = A *_C B$ şeklinde gösterilir ve grup sunuşu aşağıda verildiği gibidir.

A ve B gruplarının grup sunuşları sırasıyla;

$P_A =< X| R_1{}^* >$ ve $P_B =< Y| R_2{}^* >$

şeklinde verilsin. [17] Z kümesi, A'nın alt grubu olan C'nin üreteç kümesi olsun. Bu durumda $G = A *_C B$ grubunun sunuşu

$P_G =< X, Y \mid R_1{}^*, R_2{}^*, \{\phi(z)z^{-1} : z \in Z\} >$

olarak tanımlanır.

Şimdi gruplarda konjuge eleman ve devirsel konjuge eleman kavramlarını inceleyelim.

2.1.8 Tanım : G herhangi bir grup olmak üzere $a, b, c \in G$ için $a = c \cdot b \cdot c^{-1}$olacak şekilde bir $c \in G$ varsa a ve b elemanlarına $konjuge\ eleman$ denir.

2.1.9 Sonuç : Değişmeli gruplarda her eleman sadece kendisiyle konjugedir.

İspat : G değişmeli bir grup ve $a, b, c \in G$ olsun. a ve b konjuge elemanlar ise

$a = c \cdot b \cdot c^{-1}$dir.

G değişmeli olduğundan $cb = bc$ olarak yazılabilir. Buradan;

$a = b \cdot c \cdot c^{-1}$

$a = b$

elde edilir.

2.1.8 Örnek: G grubunda herhangi $a \cdot b \cdot c$ elemanı için sırasıyla $b \cdot c \cdot a$ ve $c \cdot a \cdot b$ devirsel konjuge elemanlardır.

Burada $c \cdot a \cdot b \cdot c \cdot c^{-1} = c \cdot a \cdot b$ olduğundan $a \cdot b \cdot c$ ve $c \cdot a \cdot b$ elemanları konjugedir. Bu elemanlara $devirsel\, konjuge\, elemanlar$ denir. Kısaca bir kelimeyi döndürerek devirsel konjuge elemanları elde ederiz.

Bir G grubunun herhangi bir elemanını grup sunuşundan faydalanarak kelimeler şeklinde ifade edebiliriz. İndirgenmiş eleman ile ilgili aşağıdaki örneği verelim.

2.1.10 Örnek : $G = < a, b, c : a^2 = b^3 = c^2 = I >$ grup sunuşu için $W = a \cdot b \cdot b^2 \cdot c$ indirgenmiş kelime değildir. Bunun indirgenmiş hali $a \cdot c$ dir.

2.1.11 Tanım : G herhangi bir grup olmak üzere bu gruptaki w kelimesinin birinci ve son harfi birbirinin tersi değilse bu w kelimesine $devirsel\ indirgenmiş\ kelime$ denir.

(2.1.10) örneğindeki G grubu için $a \cdot b \cdot c \cdot a$ devirsel indirgenmiş kelime değildir ancak

$a \cdot b \cdot c \cdot b$ devirsel indirgenmiş bir kelimedir.

2.2 Möbius Dönüşümleri

[19,20] Tezde çalışacağımız gruplar özel birer möbius dönüşümüdür. Bu bölümde kısaca tanımlanacak olan möbius dönüşümleri ile ilgili ayrıntılı bilgilere nolu kaynaktan ulaşılabilir.

2.2.1 Tanım: [19] $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere $V(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ biçimindeki dönüşümler *möbius dönüşümleri* (kesirli doğrusal dönüşüm) olarak adlandırılır

2.2.2 Teorem : [20] Möbius dönüşümleri, fonksiyonlardaki bileşke işlemine göre bir gruptur.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak için fonksiyonlardaki bileşke işleminden faydalanılır. Möbius dönüşümleri ve matrisler arasında birebir ilişkiyi göz önünde bulundurduğumuzda;

$V(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini ele alacağız.

2.2.3 Tanım : $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ koşullarını sağlayan $2x2$ matrislerinin kümesine $\mathbb{C}$'de genel lineer grup denir ve $GL(\,2, \mathbb{C}\,)$ ile gösterilir.

2.2.4 Tanım : $GL(2, \mathbb{C})/K$ reel katsayılı doğrusal dönüşümlerin kümesi olan,

$PSL(2, \mathbb{R}) = \left\{ V(z) \colon V(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1 \right\}$ kümesini ele alacağız.

$\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} \colon\ Im(z) \geq 0\}$ üst yarı düzlemi göstermek üzere, $PSL(2, \mathbb{R})$ ile ilgili şu teoremi verelim.

2.2.5 Teorem : [19] $Aut(\mathcal{U}) \cong PSL(2, \mathbb{R})$.

2.2.6 Tanım:$G' = \left\{ U(z) \colon U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\ ; a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc = -1 \right\}$ kümesinin elemanlarına üst yarı düzlemin $anti - otomorfizmleri$ denir.

2.2.7 Teorem : [19] $G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G'$ kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur. İleride çalışacağımız Hecke grupları $PSL(2, \mathbb{R})$ nin bir alt grubudur. Genişletilmiş Hecke grupları ise G nin bir alt grubudur.

2.3 İz Sınıfları

[19,20] Bu bölümde $G = PSL(2, \mathbb{R}) \cup G'$ grubunun elemanlarını, iz sınıflarından faydalanarak sınıflandıracak ve sabit noktalardan söz edeceğiz.

2.3.1 Tanım : $V(z) = \frac{az+b}{cz+d} \in G$ ve $U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} \in G$ dönüşümlerinin, $V(z) = z$ ve

$U(z) = z$ koşullarını sağlayan noktalarına, bu dönüşümlerin *sabit noktaları* denir.

Önce $PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ V(z) : V(z) = \frac{az+b}{cz+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc=1 \right\}$ kümesinin sabit noktalarını ele alalım.

2.3.2 Tanım : $tr(V) = a+d$ değerine V dönüşümünün izi denir. İzlerden yararlanarak sabit noktaları belirleyebiliriz. Belirlediğimiz bu sabit noktalardan faydalanarak dönüşümleri aşağıdaki gibi sınıflandırabiliriz:

1. Durum : Eğer $|tr(V)| > 2$ ise $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde iki sabit nokta elde edilir. Bu koşulu sağlayan $V(z)$ dönüşümüne $hiperbolik\ dönüşüm$ denir.

2. Durum : $|tr(V)| = 2$ ise $\mathbb{R}$ üzerinde iki çakışık sabit nokta vardır. Bu koşulu sağlayan dönüşümlere, $parabolik\ dönüşüm$ denir.

3. Durum : $|\boldsymbol{tr(V)}| < \mathbf{2}$ ise $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ üzerinde birbirinin eşleniği olan iki sabit nokta elde edilir. Sabit noktalardan biri $\boldsymbol{\mathcal{U}}$ üst yarı düzlemindedir. Bu koşulları sağlayan $\boldsymbol{V(z)}$ dönüşümüne *eliptik dönüşüm* denir.

Şimdi $G' = \left\{ U(z) : U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d};\ a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = -1 \right\}$ kümesinin sabit noktalarını inceleyelim.

1. Durum : $tr(U) = a+d$ ve $a+d \neq 0$ ise U dönüşümünün $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ üzerinde iki sabit noktası vardır. Bu dönüşümlere *kayan-yansıma dönüşümü* adı verilir.

2. Durum : $tr(U) = a+d$ ve $a+d = 0$ ise U dönüşümünün sabit noktalarının kümesi, merkezi $(\frac{a}{c}, 0)$ noktası ve de yarıçapı $\frac{1}{|c|}$ olan bir çember belirtir. Bu dönüşümler de *yansıma dönüşümü* olarak adlandırılır.

2.3.3 Örnek (Hiperbolik Dönüşüm):

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $tr(A) = |3| > 2$ ise ;

$$f(z) = \frac{2z+1}{z+1}$$

$z = \frac{2z+1}{z+1} \Rightarrow z^2 + z = 2z + 1 \quad \Rightarrow z^2 + z = 2z + 1$

$\Rightarrow z^2 - z - 1 = 0$

$\Rightarrow \Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

$\Rightarrow Z_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \in \mathbb{R}$

düzlemde iki sabit nokta belirtir ve $f(z)$ hiperbolik bir dönüşümdür.

2.3.4 Örnek(Parabolik Dönüşüm) :

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 2$

$f(z) = \frac{2z+1}{-z} \Rightarrow z = \frac{2z+1}{-z} \Rightarrow z^2 + 2z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 4 - 4 = 0$

$\Rightarrow z_{1,2} = \frac{-2}{2} = -1 \in \mathbb{R}$,

iki çakışık sabit nokta belirtir ve $f(z)$ parabolik bir dönüşümdür.

2.3.5 Örnek (Eliptik Dönüşüm) :

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 1 < 2$

$f(z) = \frac{z-1}{z} \Rightarrow z = \frac{z-1}{z} \rightarrow z^2 = z - 1 \Rightarrow z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 1 - 4 = -3 < 0$

$z_1 = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$, $z_2 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \in \mathbb{C}$ olacak şekilde birbirinin eşleniği olan iki sabit nokta elde edilir. Bu dönüşüm eliptiktir.

2.3.5 Örnek (Kayan Yansıma) :

$f(z\,) = \frac{3\bar{z}+2}{2\bar{z}+1}$, $a + d = 4 \neq 0$, $z = x + iy$ alınırsa,

$$z = \frac{3\bar{z}+2}{2\bar{z}+1} \Rightarrow 3.\bar{z} + 2 = 2\bar{z}.z + z \Rightarrow 3.(x - iy) + 2 = 2.(x^2 + y^2) + x + iy$$

$$\Rightarrow 3x - 3iy + 2 = 2x^2 + 2y^2 + y + iy, \text{ (y=0)}$$

$$\Rightarrow 3x + 2 = 2x^2 + x$$

$$\Rightarrow 0 = 2x^2 - 2x - 2$$

$$\Rightarrow \Delta = 4 + 16 = 20 > 0 \in \mathbb{R} \text{ , iki reel kök}$$

olduğundan $f(z)$ dönüşümü kayan yansımadır.

2.3.6 Örnek (yansıma):

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $tr(A) = 0$, $z = x + iy$ alınırsa,

$$f(z) = \frac{2\overline{z}-3}{\overline{z}-2} \Rightarrow x = \frac{2\overline{z}-3}{\overline{z}-2} \Rightarrow z.\overline{z} - 2z = 2\overline{z} - 3$$

$$\Rightarrow (x + iy).(x - iy) - 2.(x + iy) = 2.(x - iy) - 3$$

$$\Rightarrow x^2 - ixy + ixy + y^2 - 2x - 2iy = 2x - 2iy - 3$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 2x = 2x - 3$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = -3$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 - 4x = -4 + 1$$

$$\Rightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = 1$$

$$\Rightarrow (x - 2)^2 + y^2 = 1$$

olduğundan $f(z)$ dönüşümünün sabit noktalarının kümesi merkezi $(2,0)$ ve yarı çapı 1 olan bir çember belirtir. Bu dönüşüm bir yansıma dönüşümüdür.

2.4 Hecke Grupları

[1] Erich Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.4.1 Tanım : $\lambda \in \mathbb{R}^+$ olmak üzere;

$$T = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + \lambda$$

doğrusal kesirli dönüşümleri tarafından üretilen gruplara $Hecke\ grupları$ denir ve bu grup $H(\lambda)$ ile gösterilir.

$T(z)$ ve $U(z)$dönüşümlerinden faydalanarak $S = T.U$ alındığında;

$$S = -\frac{1}{z+1}$$

olarak bulunur.

Burada λ, $\lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ $(q \geq 3)$ şeklinde tanımlandığında S üreteci $H(\lambda_q)$ grubunda q mertebeli bir elemanken, T üreteci 2 mertebelidir. Bu durumda T ve S elemanlarının ürettiği devirli gruplar;

$$< T > = \{I, T\} \cong \mathbb{Z}_2 \text{ ve } < S > = \{I, S, S^2, \dots, S^{q-1}\} \cong \mathbb{Z}_q$$

şeklindedir. [2] $H(\lambda_q)$ grubunda T ve S elemanlarının birbirleri arasında bir ilişki olmadığından $H(\lambda_q)$, 2 mertebeli devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

2.4.2 Teorem : [2] $H(\lambda_q)$ sembolü ile gösterilen Hecke grubunun sunuşu,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır.

2.5 Genişletilmiş Hecke Grupları

Bu bölümde, Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünün eklenmesiyle elde edilen genişletilmiş Hecke gruplarını tanıtacağız. Genişletilmiş modüler grup özel bir genişletilmiş Hecke grubu olup bu gruplarla ilgili ayrıntılı bilgilere [5,6,11,14] kaynaklarından ulaşılabilir.

Faydalanacağımız $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre bir yansıma dönüşümüdür.

$\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke gruplarından faydalanarak şu tanımı verelim.**:**

2.5.1 Tanım : [6] Hecke gruplarına, $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizminin eklenmesiyle elde edilen gruplar genişletilmiş Hecke grupları olarak adlandırılır. Genişletilmiş Hecke grupları $\bar{H}(\lambda_q)$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri içerir. Genişletilmiş Hecke grubunun grup gösterimi;

$$\bar{H}(\lambda_q) \; = < \; T, S, R \mid T^2 = S^3 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \; >$$

şeklindedir.

2.6 Modüler Grup Ve Genişletilmiş Modüler Grup

$H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, $q = 3$ için elde edilen $H(\lambda_3)$ modüler grup olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbb{Z})$ şeklinde gösterilir. Modüler grubun katsayılarının tamsayı olması bu grubun sayılar teorisindeki önemini arttırmıştır. Grubun önemli bazı alt grupları da çok sayıda çalışmada kullanılmıştır. 1962 ve 1964 yıllarında M. Newman [3,4] yaptığı çalışmalarda bu alt grupları ve aralarındaki ilişkileri incelemiştir.

2.6.1 Tanım : $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun

$$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) = \{V(z) \mid V(z) = \frac{az+b}{cz+d} \; ; \; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1\}$$

alt grubuna modüler grup ismi verilir.

Bu grup, 2×2 lik tam sayı katsayılı matrislerle de temsil edilebilir. Buna göre;

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \; detA = 1$$

Γ modüler grubun bir gösterimidir.

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayrım yapılmayacaktır. Ayrıca;

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} -a & -b \\ -c & -d \end{pmatrix}$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden, matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler birbirinin yerine yazılabilir.

2.6.2 Tanım : Modüler gruba $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmasının eklenmesi sonucu ortaya çıkan gruba genişletilmiş modüler grup adı verilir ve bu grup $\bar{\Gamma}$ sembolü ile gösterilir.

Modüler grup ile genişletilmiş modüler grubun elemanları bloklar kullanılarak yazılabilir. Bu gösterim biçimi, Modüler ve Genişletilmiş modüler grubun elemanlarını sınıflandırmamızı sağlayarak gösterimde kolaylık sunar. Blok gösterim Stern-Brocot sayı dizisi sürekli kesirlerle de ilişki kurmamızı sağlar. Şimdi modüler ve Genişletilmiş modüler grupta blok tanımını verelim.

2.6.3 Tanım : [7] Modüler ve genişletilmiş modüler grupta,

$TS(z) = z + 1$ ve $TS^2(z) = \frac{z}{z+1}$

dönüşümlerine bloklar denir.

Modüler grup ve genişletilmiş modüler gruptaki herhangi bir indirgenmiş kelimenin bu bloklar ile ifadesine o kelimenin indirgenmiş blok formu denir ve BRF ile gösterilir.

2.6.4 Teorem : [7] m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$(TS)^m(z) = z + m$ ve $(TS^2)^n(z) = \frac{z}{nz+1}$

dir .

Modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T,S)$ kelimesi blok formda yazılabilir. Modüler gruptaki herhangi bir kelime blokları kullanarak

$W(T,S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \ldots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$ (i=0,1,2; j=0,1)

şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir. Bu gösterim, modüler grup için genel bir gösterimdir.

2.6.5 Örnek : Modüler grupta ;

$W(T,S) = STSTSTS^2TS^2TS^2TS^2TS$

kelimesi için bu kelimenin blok formu ;

$W(T,S) = S(TS)^2(TS^2)^4\,(TS)^2TS$

biçimindedir.Genişletilmiş modüler gruptaki blok yapısı 4. bölümde ayrıca verildiğinden o bölüme bakılabilir.

3. MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI

Klasik modüler grup $PSL(2,\mathbb{Z})$'nin pozitif girişli ve determinantı 1 olan, 2×2 projektif matrisler grubu olduğundan Γ 'nın elemanları $\pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ projektif matrisler olarak düşünülebilir.($a, b, c, d \in Z\ ve\ ad - bc = 1$ olmak üzere)

Eşdeğer olarak elamanlar lineer kesirli dönüşümler olarak düşünülebilir.

$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ $\quad a, b, c, d \in Z$ ve $\ ad - bc = 1$

Bu tür dönüşümlerin çarpımı matris çarpımı ile yapılmaktadır.

$T = -\frac{1}{z}$ $\qquad S = -\frac{1}{z+1}$ $\qquad TS = z + 1$ $\qquad TS^2 = \frac{z}{z+1}$

Γ, grup teorisine göre T ve S tarafından üretilir ve aşağıdaki gibi bir grup sunuşuna sahiptir;

$\Gamma = < T, S |\ T^2 = S^3 = 1 >.$

Bu, T tarafından oluşturulan 2. mertebeden devirsel grup ile 3. mertebeden devirsel grubun serbest çarpımı yapısındadır. Buradan herhangi bir g ϵ Γ elemanının T ve S'de W(T,S) kelimesi olarak bir gösterime sahiptir. Yani;

$g = T^{t_1} S^{u_1} \ldots T^{t_n} S^{u_n}$ $(t_1 = 0\ veya\ 1),\ t_i = 1, i = 2, \ldots, n$ ve $\quad u_1 = 0{,}1$ veya 2,

$i = 1{,}2, \ldots, n$.

Γ 'nın bir elemanından kelime olarak bahsedildiğinde, kelimenin temsil ettiği eleman kastedilmektedir.

Eşlenik (Konjuge) matrisler aynı ize sahip olduğundan Γ 'daki eşlenik elemanlar aynı iz sınıfında bulunurlar.

Γ'deki bir $W(T,S)$kelimesi W_1ve W_2kelimeleri için eğer $W \neq W_1{}^{-1} W_2 W_1$ ise $W(T,S)$ devirsel indirgenmiştir. Bu Γ da $W(T,S)$ T ile başlayıp T ile bitmiyor veya S ile başlayıp $S^2 = S^{-1}$ ile bitmiyor veya S^{-1}ile başlayıp S ile bitmiyor anlamına gelir.

Γ'deki bir $W(T,S)$ kelimesi eğer $W(T,S)T$ ile başlayıp S veya S^2 ile bitiyorsa BRF olarak kısaltılan blok indirgenmiş formdadır. TS veya TS^2 biçimindeki her bir parçaya blok denir. Eğer W, BRF'de ise $BL(W)$ olarak gösterilen blok uzunluğu, W'deki TS ve TS^2 'lerin toplam blok sayısıdır. Sonlu mertebeli elemanlar için Γ 'daki bir W elemanı 2 mertebelidir ancak ve ancak T 'ye konjugedir ve izi 0'dır. Benzer şekilde bir eleman 3. mertebeye sahipse izi ±1'dir ve S veya S^2 'ye konjugedir.

3.1 Lemma : [7] Γ'nin her elemanı T, S, S^2 veya BRF'deki bir kelimeye konjugedir.

İspat: Γ'nin her elemanı devirsel olarak indirgenmiş bir kelimeye eşlenik olduğundan devirsel indirgenmiş sözcükler üzerinde yoğunlaşırız. $g = W(T,S)$ devirsel olarak indirgenmiş olsun ve T, S veya S^2'ye eşit olmasın. Eğer g, T ile başlıyorsa devirsel olarak indirgenmiş olduğundan S veya S^2 ile bitmelidir ve bu nedenle g blok indirgenmiş formdadır. Eğer g, S veya S^2 ile başlıyorsa bunu T takip etmelidir. Bu T ile başlayan W'nin döngüsel permütasyonu olan W kelimesi g'ye konjugedir. Bu da döngüsel olarak indirgenmiş olmalıdır ve bu nedenle yukarıdaki gibi S veya S^2 ile bitmelidir ve böylece blok indirgenmiş formda olmalıdır.

Blok indirgenmiş bir sözcük şu formdadır;

$(TS)^{a_1}\,(TS^2)^{b_1}\,\ldots\,(TS^2)^{b_k}$.

Blok indirgenmiş formdaki kelimelere bir sıralama uyguluyoruz. Bir $W(T,S)$ sözcüğünün aşağıdaki formlardan birine sahip olması durumunda standart blok indirgenmiş formda kısaltılmış $SBRF$ olduğunu söyleriz.

i. $W = (TS)^n$, $n \epsilon \mathbb{Z}$
ii. $W = (TS^2)^n$, $n \epsilon \mathbb{Z}$
iii. $W = ((TS)^n (TS^2)^k)^t$, $n, k, t \epsilon \mathbb{Z}$
iv. $W = (TS)^{a_1}\,(TS^2)^{b_1}\,\ldots(TS)^{a_k}\,(TS^2)^{b_k}$ $a_1 = \max\{a_i\}$

Bazı i değerleri için $a_1 = a_i$ ise $b_1 \geq b_i$'dir. $B_1 = b_i$ ise $b_2 \geq b_i+1$ şeklinde devam eder. (TS)'nin en büyük oluşumu öndedir ve en büyük oluşum birden fazla kez meydana gelirse sıralama (TS^2)'nin oluşumlarına geçer.

Bu tanım $SBRF$'deki kelimelere bir sıralama getirir. $SBRF$'deki herhangi farklı iki kelimenin birbirinin döngüsel permütasyonu olmadığı , BRF'deki herhangi bir kelimenin ise $SBRF$'deki bir kelimenin döngüsel permütasyonu olduğu görülür.

3.2 Teorem : [7] Γ'deki iz sınıfları , $\{T\}$, $\{S\}$, $\{S^2\}$ ile birlikte $SBRF$'deki kelimelerle birebir örtüşmektedir. $SBRF$ kelimelerine karşılık gelen matrisler T, S, S^2 matrisleri ile birlikte her bir iz sınıfı için temsilci verir.

İspat : 3.1 Lemma ispatında görüldüğü gibi T, S, S^2 sonlu mertebeden elemanlar için temsilciler verir. Eğer g sonsuz mertebeden ise yukarıdaki üçünden herhangi birine eşlenik olmayan bir $W(T, S)$ kelimesi ile temsil edilir. Bu nedenle 3.1 Lemma ve 3.2 Teorem'den önceki açıklamalardan $SBRF$'de tam olarak bir kelimeye eşleniktir.

Konjuge sınıflarını sıralarken $SBRF$ sözcükleri yerine , üsler dizisi ile uğraşmak daha kolaydır. Bunu göz önünde bulundurarak sonlu bir tam sayı dizisine standart blok indirgenmiş dizi ya da $SBRS$ denilmektedir. Eğer bu dizi aşağıdaki formlardan birindeyse, bir $SBRF$, kelimelerin üsleriyle ilişkili olarak aşağıdaki diziler yardımıyla verilir.

i. $(a, 0)$
ii. $(0, b)$
iii. $(a, b, a, b, \ldots, a, b)$
iv. $(a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k)$

3.3 Teorem:[7] d >2 izi için Γ'daki iz sınıfları standart blok indirgenmiş dizilerle birebir eşleşir.

İspat: İz 0 veya 1 ise eleman sonlu mertebeye sahiptir ve T, S, S^2'ye konjugedir. Aksi halde bir $SBRF$ kelimesine konjugedir ve dolayısıyla $SBRS$ ile ilişkilidir.

Şimdi konjuge sınıflarını izler yoluyla sınıflandıralım.

3.4 Lemma:[7] Eğer $W(T, S)$, Γ'da $BL(W) \geq 1$ olan BRF'de bir sözcük ise W matrisi sadece pozitif bileşenlere sahiptir.

İspat: $BL(W) = 1$ ise $W = TS = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ile temsil edilir veya $W = TS^2 = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ile temsil edilir.

Lemma tümevarım yoluyla tamamlanır. Eğer $W = W_1(T,S)$ ise ve W_1 sadece pozitif girişlere sahipse, bunu (TS) ile çarpmak yine sadece pozitif girişler verecektir. Benzer şekilde TS^2 ile çarpmak da sadece pozitif girişler verecektir.

3.5 Lemma : [7] Eğer $W \neq (TS)^n$ veya $(TS^2)^k$
Γ'da BRF'de bir sözcük ise ve $BL(W) = n$ ise $tr(W) \geq n+1$ olur.

İspat: İspat yine blok uzunluğu üzerinde tümevarım yoluyla yapılır. $BL(W) = 1$ ise ,
$W = TS$ veya $W = TS^2$'dir.Yukarıda her iki durumda da $tr(W) = 2$ olduğunu görürüz. W'nin blok uzunluğunun $n+1$ olduğunu varsayalım. O zaman $W=W_1TS$ veya $W=W_1TS^2$ ve $BL(W_1)=n$ olsun. Öncelikle $W_1=(TS)^n$ olduğunu varsayalım. O halde $W \neq (TS)^{n+1}$ olduğundan $W = (TS)^n(TS^2)$ olur. $(TS)^n$, $\pm\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matrisi ile temsil edildiğinden W, $\pm\begin{pmatrix} n+1 & n \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ile temsil edilir ve izi (n+2)'dir. Aynı argüman $W_1=(TS^2)^n$ için de çalışır. Şimdi W_1'in bu iki formdan herhangi birine sahip olmadığını varsayalım. O zaman tümevarım hipotezinden $tr(W) > n+1$'dir. $W_1 = \pm\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a + d \geq n+1$ olsun. Ayrıca $c > 0$ 'dır çünkü (3.4 Lemma'dan) sadece pozitif girişler var. O zaman $tr(W) = a + d + c \geq n+1+c$ olur. Böylece $c \geq 1$ olduğundan $tr(W) \geq n+2$ olur. Aynı argüman $W = W_1TS^2$ olduğunda da çalışır ve Lemma'yı kanıtlar.

Bu iki Lemma'dan her bir iz sınıfı için etkin bir temsilci belirleme yöntemi elde ediyoruz.

3.6 Teorem :[7] Pozitif bir d tamsayısı verildiğinde d izindeki her iz sınıfı için bir temsilci belirlemek için etkili bir yöntem vardır. Bu yöntem aşağıdaki gibidir;

1) $d = 0$ ise temsilci T
2) $d = 1$ ise temsilciler S ve S^2
3) $d = 2$ ise sonsuz sayıda iz sınıfı vardır. n pozitif tam sayı olmak üzere, $(TS)^n$ ve $(TS^2)^n$ ile temsil edilir.

i. Blok uzunluğu $(d-1)$ veya daha az olan $SBRF$'deki tüm kelimeler listelenir. Eşdeğer olarak toplamı $(d-1)$ veya daha az olan tüm standart blok indirgenmiş diziler listelenir.

ii. (i)'deki liste tarafından belirlenen her bir kelimenin izleri belirlenir. Listedeki d izine sahip her sözcük bir temsilci belirler ve bu tam bir liste verir.

İspatı belirtmeden önce, d izi için temsilcilerin bulunmasının aynı zamanda d'den küçük tüm izler için temsilcileri belirlediğine dikkat edilmelidir.

3.6 Örnek : İzi 6 olan iz sınıfları için eksiksiz bir temsilci kümesi bulunur. İlk olarak toplamı 5 veya daha az olan tüm $SBRF$'ler oluşturulur. Daha sonra ($SBRF$'de) karşılık gelen kelimeler ve bunların izleri bulunur. Bunlar da aşağıdaki tabloyu verir:

Tablo 3.1 : Blok uzunlukları ile izler arasındaki ilişki

Dizi	**Kelime**	**Blok Uzunluğu**	**İz**
(1,1)	$TSTS^2$	2	3
(1,2)	$TS(TS^2)^2$	3	4
(2,1)	$(TS)^2\,TS^2$	3	4
(1,3)	$TS(TS^2)^3$	4	5
(1,1,1,1)	$TSTS^2\,TSTS^2$	4	7
(2,2)	$(TS)^2(TS^2)^2$	4	6
(3,1)	$(TS)^3\,TS^2$	4	5
(1,4)	$TS(TS^2)^4$	5	6
(1,2,1,1)	$TS(TS^2)^2\,TS\,TS^2$	5	10
(2,3)	$(TS)^2\,(TS^2)^3$	5	8
(2,1,1,1)	$(TS)^2\,TS^2\,TS\,TS^2$	5	10
(3,2)	$(TS)^3(TS^2)^2$	5	8
(4,1)	$(TS)^4\,TS^2$	5	6

Buradan aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

Tablo 3.2 : İzlere göre sınıf sayıları ve temsilciler

İz	**Sınıf Sayısı**	**Temsilciler**
3	1	$TSTS^2 = \pm\begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$
4	2	$(TS)(TS^2)^2 = \pm\begin{pmatrix}3 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$ $(TS)^2\,(TS^2) = \pm\begin{pmatrix}3 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}$
5	2	$(TS)(TS^2)^3 = \pm\begin{pmatrix}4 & 1\\3 & 1\end{pmatrix}$ $(TS)^3\,(TS^2) = \pm\begin{pmatrix}4 & 3\\1 & 1\end{pmatrix}$
6	3	$(TS)^2(TS^2)^2 = \pm\begin{pmatrix}5 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$ $(TS)^4\,(TS^2) = \pm\begin{pmatrix}5 & 4\\1 & 1\end{pmatrix}$ $(TS)(TS^2)^4 = \pm\begin{pmatrix}5 & 1\\4 & 1\end{pmatrix}$

Aşağıda R.Kulkarni [17] tarafından önerilen ayrı bir algoritma açıklanmaktadır. (3.4 Lemma)'dan , matrisleri yalnızca pozitif bileşenlere sahip olan tam bir iz sınıfı temsilcileri kümesinin var olduğu görülmektedir. 3.3 Teorem'deki verilere alternatif algoritma aşağıdaki gibidir.

İz sınıflarını bulmak için alternatif algoritma :

[7] Bir d izi verildiğinde;

1) İzi d olan ve sadece pozitif girişleri olan tüm projektif tek modüler matrisler belirlenir.

2) Standart algoritmayı kullanarak bu matrislerin her biri standart $T,\ S$ üreteçleri cinsinden ifade edilir.

3) 2.adımda bulunan kelimeler arasından $SBRF$'de olanlar seçilir. Bunlar tam bir temsilci kümesi verecektir.

Örnek : İz 6 için temsilcileri tekrar buluyoruz. 1.adımdan aşağıdaki matrisler elde edilir;

$\pm\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix}$

$\pm\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

$\pm\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix}$ $\pm\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

Bunlar ilgili $SBRF$ 'lerin belirttiği standart üreteçler cinsinden ifade edildiğinde ;

$\pm\begin{pmatrix}5 & 4\\ 1 & 1\end{pmatrix} = (TS)^4\,(TS^2)$, $\pm\begin{pmatrix}5 & 1\\ 4 & 1\end{pmatrix} = (TS)(TS^2)^4$

$\pm\begin{pmatrix}1 & 4\\ 1 & 5\end{pmatrix} = (TS^2)(TS)^4 \sim (TS)^4\,(TS^2)$

$\pm\begin{pmatrix}1 & 1\\ 4 & 5\end{pmatrix} = (TS^2)^4(TS) \sim (TS)(TS^2)^4$

$\pm\begin{pmatrix}4 & 1\\ 7 & 2\end{pmatrix} = (TS^2)\,(TS)\,(TS^2)^3 \sim (TS)(TS^2)^4$

$\pm\begin{pmatrix}4 & 7\\ 1 & 2\end{pmatrix} = (TS)^3\,(TS^2)(TS) \sim (TS)^4\,(TS^2)$

$\pm\begin{pmatrix}2 & 1\\ 7 & 4\end{pmatrix} = (TS^2)^3\,(TS)\,(TS^2) \sim (TS)(TS^2)^4$

$\pm\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & 4\end{pmatrix} = (TS)\,(TS^2)\,(TS)^3 \sim (TS)^4\,(TS^2)$

$\pm\begin{pmatrix}5 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix} = (TS)^2(TS^2)^2$

$\pm\begin{pmatrix}3 & 1\\ 8 & 3\end{pmatrix} = (TS^2)^2\,(TS)(TS^2)^2 \sim (TS)(TS^2)^4$

$\pm\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix} = (TS)^2\,(TS^2)(TS)^2 \sim (TS)^4\,(TS^2)$

$SBRF$' leri seçerek, önceki tabloda olduğu gibi $(TS)(TS^2)^4$, $(TS)^4\,(TS^2)$, $(TS)^2(TS^2)^2$ tarafından verilen temsilcileri olan üç iz sınıfı olduğu görülür.

Bu ikinci algoritma sadece tek bir iz için, iz sınıflarını bulma avantajına sahip olsa da, bir matrisi standart üreteçler cinsinden ifade etmenin zorluğu (özellikle büyük girişler için) ilk algoritmayla çalışmayı biraz daha kolay hale getirir.

4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUPTA İZ SINIFLARI

Genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ =$PGL(2,\mathbb{Z})$, $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ modüler grubunun üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansımasının eklenmesiyle elde edilen gruptur.

$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{z \to \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R},\ ad - bc = 1\right\}$ üst yarı düzlemin tüm konformal otomorfizmalarının grubudur. U üst yarı düzleminin tüm anti-konformal otomorfizmalarını $PSL(2,\mathbb{R})$'ye ekleyerek $G = PSL(2,\mathbb{R}) \cup G'$ grubunu elde ederiz, burada ;

$$G' = \left\{z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} : a,b,c,d \in \mathbb{R}, \qquad ad - bc = -1\right\}$$

$\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ modüler grubu $PSL(2,\mathbb{R})$ 'nin tam sayı katsayılı özel alt grubu olup iki doğrusal kesirli dönüşüm tarafından üretilir;

$T(z) = -\frac{1}{z}$ ve $U(z) = z + 1,\ S = TU$ olmak üzere; $S(z) = -\frac{1}{z+1}$

O halde T modüler grubu, 2 ve 3. mertebeden iki sonlu devirli grubun serbest çarpımına izomorftur ve grup sunuşu;

$$\Gamma =< T,S|T^2 = S^3 = I > \cong C_2 * C_3$$

şeklindedir.

Genişletilmiş modüler grup $\Gamma = PSL(2,\mathbb{Z})$ modüler grubun üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansımasının eklenmesiyle tanımlanır ve G'nin alt grubudur. Böylece genişletilmiş modüler grup aşağıdaki sunuma sahip olur:

(1.1) $\bar{\Gamma}$ =< T,S,R|T^2=S^3=R^2 $= (TR)^2$=$(SR)^2$=I > $\cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_3$

Genişletilmiş modüler grup $PGL(2,\mathbb{Z})$'nin $\frac{GL(2,\mathbb{Z})}{\{\pm I\}}$'ya eşit olduğu ve modüler grup $PSL(2,\mathbb{Z})$'nin $SL(2,\mathbb{Z})/\{\pm \mathrm{I}\}$'ya eşit olduğu bilinmektedir. (Burada $GL(2,\mathbb{Z})$'deki her bir A matrisini $-A$ ile tanımlıyoruz. Böylece her biri $PSL(2,\mathbb{Z})$'nin aynı elemanını temsil ediyor.) Buradan genişletilmiş modüler grubun üreteçlerini şu şekilde temsil edebiliriz .

$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Bu nedenle genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ =PGL(2, ℤ) , $PSL(2,\mathbb{Z})UM'$ olur. Burada;

M' =$\left\{z \to \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d} : a,b,c,d \in Z\ ,\ ad - bc = -1\right\}$

dir.

[3,4,9] PSL(2, ℤ) modüler grubu ve onun normal alt grupları özellikle sayılar teorisi, otomorfik fonksiyon teorisi ve grup teorisi gibi matematiğin birçok alanında büyük ilgi görmüştür. [14-16]Genişletilmiş modüler grup yoğun şekilde çalışılmıştır.

[7] nolu çalışmada Fine modüler gruptaki iz sınıfları üzerinde çalışmıştır. Her bir tam sayı için d izindeki iz sınıflarının tam temsilci kümesini belirlemek için etkili bir algoritma vermiştir. Bu algoritma Schmidt ve Sheingorn tarafından genel Hecke gruplarına genişletilmiştir [8].

Burada genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ 'in iz sınıflarını bulacağız. Bunun için [1]'de modüler grup Γ için kullanılan yöntemler kullanılmaktadır. Son olarak, bu sınıflandırmanın bir uygulaması olarak $\bar{\Gamma}$ 'in elemanlarının türleri verilmektedir.

(1.1)'den, genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ 'in $\bar{\Gamma}$ =$D_2 *_{Z_2} D_3$ şeklinde bir karışımlı serbest çarpım olduğunu biliyoruz. [26] Karışımlı bir serbest çarpımın her elemanı bir normal forma sahiptir. Böylece eğer $g \in F$ ise g; T, S ve R'de $W(T,S,R)$ indirgenmiş kelimesi olarak iki gösterimden birine sahiptir. Yani;

$$g = T^{a_1}S^{b_1} \dots T^{a_n}S^{b_n}\ ya\ da\ g = T^{a_1}S^{b_1} \dots T^{a_n}S^{b_n}R,$$

$a = 0$ veya $a_i = 1$ $i = 2, \dots, n$ için ve $b_i = 0{,}1\ veya\ 2$, $i = 1,2, \dots, n$ için.

Bu sonuçların $\bar{\Gamma}$ 'in sunuşlarıyla elde edilebileceği görülmektedir. İz sınıflarını bulmak için aşağıdaki dönüşümlere ihtiyacımız vardır.

TS: $z \to z + 1$, TS^2: $z \to \frac{z}{z+1}$, R: $z \to \frac{1}{\bar{z}}$

Eşlenik matrisler aynı ize sahiptir. Bunun tersi doğru değildir. Örneğin S ve $(TS)R$ aynı ize sahiptir ancak eşlenik değildirler. Böylece $\bar{\Gamma}$ 'teki konjuge sınıfları izlerine göre bölümlere ayrılabilir.

[25] Her bir iz sınıfı için, temsilciler belirlenirse indirgenmiş bir $W(T,S,R) \in \bar{\Gamma}$ sözcüğü eğer $W \neq W_1{}^{-1}W_2W_1$ ise $W(T,S,R)$ döngüsel indirgenmiş kelime olarak adlandırılır. $\bar{\Gamma}$' teki döngüsel olarak indirgenmiş bir sözcük T ile başlayıp T ile bitmeyen veya S ile başlayıp S^2 ile bitmeyen, veya S^2 ile başlayıp S ile bitmeyen veya R ile başlayıp R ile bitmeyen $W(T,S,R)$'ye eşleniktir. İki $W_1\ ve\ W_2$ kelimeleri devirsel olarak indirgenmiştir ancak ve ancak W_1, W_2'nin devirsel bir permütasyonuysa konjugedir.

$\bar{\Gamma}$ grubunda W(T,S,R) sözcüğü T ile başlayıp S, S^2 veya R ile bitiyorsa BRF olarak kısaltılan blok indirgenmiş form olarak adlandırılır. Ayrıca (TS)ve (TS^2) formundaki her bir parça blok olarak adlandırılır. Eğer W, BRF'de ise $BL(W)$ olarak gösterilen blok uzunluğu W'deki blok sayısıdır.

4.1 Örnek: $W = (TS)^3(TS^2)(TS)^2$ ise $BL(W) = 6$ ve eğer $W = (TS^2)(TS^2)^3(TS)^4R$ ise $BL(W) = 9$'dur.

4.2 Lemma:[7] $\bar{\Gamma}$ 'te sonlu mertebeli elemanların dört eşlenik sınıfı vardır; mertebesi 2 olanlar için üç ve mertebesi 3 olanlar için bir eşlenik sınıfı vardır. Dolaylı olarak bunlar, determinantı 1 olan 3. mertebeden $\{S\}$; determinantı 1 olan 2. mertebeden $\{T\}$ ve determinantı -1 olan 2. mertebeden $\{R\}$ ile $\{TR\}$'dir.

4.3 Lemma : (TS) ve (TS^2), Γ 'da eşlenik değildir ancak $\bar{\Gamma}$ 'te R ile eşleniktirler.

4.4 Lemma : $\bar{\Gamma}$ 'in her elemanı ya T'ye , ya R'ye ya TR'ye ya da BRF'deki bir kelimeye eşleniktir.

İspat : $\bar{\Gamma}$ 'in her elemanının devirsel olarak indirgenmiş bir sözcüğe eşlenik olduğunu biliyoruz. Bu nedenle devirsel olarak indirgenmiş sözcüklerden faydanılacaktır. $g = W(T,S,R)$döngüsel olarak indirgenmiş olsun ve T'ye, R'ye, TR'ye ve S'ye ya da bunların eşleniğine eşit olmasın. Eğer $g = W(T,S,R)T$ ile başlıyorsa, $g = W(T,S,R)$ döngüsel olarak indirgenmiş bir kelime olduğundan S, S^2 veya R ile bitmelidir. Dolayısıyla $g = W(T,S,R)$ blok indirgenmiş kelime olmalıdır.

Eğer $g = W(T,S,R)R$ ile başlıyorsa bu durumda g'nin ardından T,S veya S^2 gelmelidir. Bu nedenle W'nin T, S veya S^2 ile başlayan döngüsel permütasyonu olan bir W_1 kelimesi vardır. Ayrıca W_1, $g = W(T,S,R)$ ile eşleniktir. Dolayısıyla W_1 döngüsel olarak indirgenmiş bir kelime olmalıdır. Son durumda $g = W(T,S,R)$, S veya S^2 ile başlıyorsa bunu T veya R takip etmelidir. Benzer şekilde W,T ile başlayan ve S, R veya S^2 ile bitmesi gereken döngüsel olarak indirgenmiş bir kelimeye eşdeğerdir. Bu nedenle $\bar{\Gamma}$'in her $g = W(T,S,R)$ elemanı S, T, TR, R veya BRF'deki bir kelimeye eşleniktir.

Eğer bir $W(T,S,R)$kelimesi aşağıdaki formlardan birine sahipse bu kelimeye standart blok indirgenmiş formdadır ;

i. Bazı n tamsayıları için $W = (TS)^n$
ii. Bazı n tamsayıları için $W = (TS^2)^n$
iii. $((TS)^n(TS^2)^k)^t$ bazı n,k,t tamsayıları için
iv. $W = (TS)^{a_1}(TS^2)^{b_1} \ldots (TS)^{a_k}(TS^2)^{b_k}$, $a_1 = \max\{a_i\}$. Eğer $a_1 = a_i$ ise $b_1 \geq b_i$. Eğer $b_1 = b_i$ ise $b_2 \geq b_{i+1}$
v. $W = (TS)^n R$ (Bazı n tamsayıları için)
vi. W= (TS^2)^n R (Bazı n tamsayıları için)
vii. $W = ((TS)^n(TS^2)^k)^t R \;\; n,k,t \in \mathbb{Z}$
viii. $W = (TS)^{a_1}(TS^2)^{b_1} \ldots (TS)^{a_k}(TS^2)^{b_k}R$; $a_1 = \max\{a_i\}$, Eğer bazı i değerleri için $a_1 = a_i$ oluyorsa $b_1 \geq b_i$'dir. Eğer $b_1 = b_i$ ise $b_2 \geq b_{i+1}$ olur.

4.5 Lemma :[14] $\bar{\Gamma}'$ deki iz sınıfları {T}, {R} , {TR} , {S}'nin yanı sıra $SBRF$'deki sözcüklerle de birebir örtüşmektedir.

4.6 Lemma : [14] Eğer BRF'deki $W(T,S,R)$, $\bar{\Gamma}$'te $BL(W) \geq 1$ olan bir kelime ise, bu durumda W'ya yönelik dönüşümün yalnızca pozitif girişleri vardır.

İspat: $W(T,S,R)$'deki R'nin üslerinin toplamının çift olma durumu $\big(W(T,S,R) = W(T,S)\big)$ [7]'de ispatlanmıştır. R'nin üslerinin tek olduğunu varsayalım. O halde

$W(T,S,R)$'nin formu $W = W_1R$'dir. Burada W_1 yukarıdaki $(i),(ii),(iii)$ ve (iv) formlarından biridir. [1]'de W_1'in sadece pozitif girdilere sahip olduğu, yani bir matris temsiline sahip olduğu gösterilmiştir.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $a,b,c,d > 0$. $W = W_1R = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$, W yalnızca pozitif girdilere sahiptir.

4.7 Teorem:[14] $W(T,S,R)R$'nin üslerinin toplamı çift ve $(TS)^n$, $(TS^2)^n$'den farklı olacak şekilde BRF'de bir kelime olsun. Eğer $BL(W) = n$ ise $tr(W) \geq n+1$ olur.

4.8 Teorem: $W(T,S,R)$, $\overline{\Gamma}$'te R'nin üslerinin toplamı BRF'de tek olacak şekilde bir kelime olsun. Eğer $BL(W) = n$ ise $tr(W) \geq n$ olur.

İspat : İspat, blok uzunluğu üzerinde tümevarımla yapılır. $W = W(T,S,R)$ formunun W_1R olduğu açıktır, burada W_1 yukarıdaki (i), (ii), (iii) ve (iv) formlarından biridir. Eğer $BL(W) = 1$ ise bu durumda $W = (TS)R$ veya $W = (TS^2)R$'dir. Böylece $(TS)R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $(TS^2)R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ olur. Bu nedenle $tr(W) = 1$ elde edilir.

BRF'de $W = W_1R = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$'nin blok uzunluğunun n olduğunu varsayalım; burada $W_1 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ve a,b,c,d pozitif girdilerdir. (2.5 Lemma'dan)

W' blok uzunluğu $n+1$ olan bir kelime olsun. W' elemanı, W_1R'ye (TS) veya (TS^2) eklenerek elde edilir. W_1 kelimesinin biçimi $W_1R(TS)$ veya (TS^2) eklenerek elde edilir. W' kelimesinin biçimi $W_1R(TS)$ veya $W_1R(TS^2)$ şeklindedir. Bu kelimeler sırasıyla $W_1(TS^2)R$ *ve* $W_1(TS)R$ 'dir. Böylece [7]'deki ilişkilerden ve tümevarım hipotezinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

$$W' = W_1R(TS) = \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & a+b \\ d & c+d \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow tr(W') = b + c + d \geq n + d \geq n + 1$.

Buradan genişletilmiş modüler grup Γ 'nın her elemanının yalnızca bir iz sınıfına ait olduğu sonucuna varılır. Aşağıdaki teoremlerde, R'nin üslerinin toplamı çift olan $W(T,S,R)$ kelimeleri için (yani $W(T,S,R) = W(T,S)$) ve R'nin üslerinin toplamı tek olan $W(T,S,R)$ kelimeleri için iz sınıfları verilecektir.

Belirli bir pozitif iz için yöntem aşağıdaki teorem ile verilecektir:

4.9 Teorem : [14]

1) $tr(W) = 0$ ise temsilci $\{T\}$'dir.
2) $tr(W) = 1$ ise temsilci $\{S\}$'dir.
3) $tr(W) = 2$ ise sonsuz iz sınıfı vardır. n pozitif tam sayıların üzerinden geçerken farklı $(\mathrm{TS})^{\mathrm{n}}$ kelimeleri temsilcileri verir.
4) Eğer $tr(W) > 2$ ise; SBRF'deki blok uzunluğu $(tr(W) - 1)$ veya daha kısa olan tüm kelimeleri listelenir. Aynı şekilde toplamı $(tr(W) - 1)$ 'den küçük olan tüm standart blok indirgenmiş dizileri listelenir.

4.10 Teorem : [14]

1) $tr(W) = 0$ ise temsilciler $\{R\}$ ve $\{TR\}$
2) $tr(W) = 1$ ise temsilci $\{(TS)R\}$
3) $tr(W) > 1$ ise temsilciler $SBRF$'de blok uzunluğu $tr(W)$ veya daha az olan kelimelerdir.

Aşağıdaki sonuç R'nin üslerinin toplamı çift olduğu durumlarda elde edilir.

4.11 Sonuç :

i. Genişletilmiş iz sınıflarındaki modüler grup $\overline{\Gamma}$'nin bir elemanı $\{T\}$ veya S ise bu eleman eliptik elemandır.

ii. İz sınıfındaki genişletilmiş modüler grubun bir elamanı $\{(\mathrm{TS})^{\mathrm{n}}\}$ ise bu eleman paraboliktir.

iii. Genişletilmiş modüler grubun bir elemanı yukarıdaki (i) ve (ii)'den farklı bir iz sınıfına aitse bu eleman hiperbolik elemandır.

Eğer R'nin üslerinin toplamı tek ise o zaman aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.12 Sonuç: Eğer bir elemanı $\{R\}$ veya $\{TR\}$ iz sınıflarındaysa bu bir yansımadır, diğer durumlarda ise kayan yansımadır.

Örnek 4.13 :[15] $\bar{\Gamma}'$ nin ikinci komütatör alt grubu $\bar{\Gamma}''$ sunuşu aşağıdaki gibidir.

$\bar{\Gamma}$= $<[\mathrm{S},\mathrm{TST}]$, $[\mathrm{S},\mathrm{TS}^2\mathrm{T}]$, $[\mathrm{S}^2,\mathrm{TST}]$, $[\mathrm{S}^2,\mathrm{TS}^2,\mathrm{T}]>$.

Burada $[a,b]$= $aba^{-1}b^{-1}$. Dolayısıyla $\bar{\Gamma}''$ 'in tüm üreteçlerinin uzunluğunun 4 olduğu ve ayrıca T ve S elemanları arasında herhangi bir ilişkinin olmadığı görülmektedir. $\overline{\Gamma}''$'nin her elemanı $\bar{\Gamma}''$'in üreteçlerinden elde edildiği için blok bulunur $\overline{\Gamma}''$'in her elemanının uzunluğu 4 veya 4'ten büyüktür. Bu nedenle $\bar{\Gamma}''$ eliptik veya parabolik bir eleman içermez. Yani $\bar{\Gamma}''$ sadece hiperbolik elemanları içerir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

[7] nolu çalışmada her bir d tamsayısı için, d izindeki iz sınıflarının tam bir temsilci kümesini belirlemek için etkili bir algoritma verilmiştir.

Bahsedilen algoritma $h(d)$'yi belirlemek için bir hesaplama yöntemi sağlamıştır. Γ 'nın grup teorik yapısına dayanan, herhangi bir d izi için iz sınıflarının tam bir temsilci kümesini belirlemekte kullanılan etkili bir algoritma sunulmuştur. Bu algoritma $Q(\sqrt{d^2-4}\ )$alanının ideal sınıf sayısı olan $h(d)$'yi saymak için yeni ve basit bir teknik sunmuştur. Böylece sayılar teorisi kuadratik formlar ile grup teorisi arasında kuvvetli bir ilişki elde edilmiştir.

3. bölümde Γ nın herhangi bir elemanının T ve S 'de $W(T,S)$ kelimesi olarak benzersiz bir gösterime sahip olduğu ve Γ nın her bir elemanının T,S,S^2 veya BRF'deki bir kelimeye konjuge olduğu gösterilmiştir. Yine bu bölümde konjuge sınıfları sıralanırken $SBRF$ sözcükleri yerine üsler dizisi ile çalışmanın daha kolay olduğu görülmüştür. Bir $d \in \mathbb{Z}^+$ verildiğinde d izine sahip her iz sınıfı için temsilciler belirlenmiştir. Buna ek olarak bir d izi verildiğinde iz sınıflarını bulmak için alternatif bir algoritma sunulmuştur.

Tezin 4. bölümünde $\overline{\Gamma}$ 'in her $g = W(T,S,R)$elemanının $S,\ T,\ TR,\ R$ veya BRF'deki bir kelimeye eşlenik olduğu görülmüş olup bir $W(T,S,R)$ kelimesinin $SBRF$ olma durumları listelenmiştir. BRF'de bir kelimede R 'lerin üsler toplamına göre blok uzunluğu ve izleri arasındaki ilişki ortaya konulmuştur.

R 'nin üsleri toplamının çift olduğu durumlarda elde genişletilmiş iz sınıflarındaki modüler grup 'nin bir elemanı $\{T\}$ veya $\{S\}$ ise bu elemanın eliptik eleman olduğu, iz sınıfındaki genişletilmiş modüler grubun bir elamanı $\{(\mathrm{TS})^{\mathrm{n}}\}$ ise bu elemanın parabolik olduğu, genişletilmiş modüler grubun bir elemanı bunlardan farklı bir iz sınıfına aitse bu elemanın hiperbolik eleman olduğu sonucuna varılmıştır. R'nin üslerinin toplamı tek iken; bir elemanı $\{R\}$ veya $\{TR\}$ iz sınıflarındaysa bunun bir yansıma olduğu, diğer durumlarda ise kayan yansıma olduğu sonucu elde edilmiştir.

KAYNAKLAR

[1] Hecke E., “Über die Bestimmung Dirichletcher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen ”, Math. Ann., 112, (1936), s.664-699.

[2] Cangül İ. N., Normal Subgroups of Hecke Groups, Ph.D. Thesis, Southampton University, (1993).

[3] Newman M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, Illionis Math., 8, (1962),s. 480-487.

[4] Newman M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, Illionis J. Math., 8, (1964), s.262-265.

[5] Şahin, R. and Bizim, O., “Some subgroups of extended Hecke groups Actua Math. Sci., 23, 497-502, (2003).

[6] Şahin R., Genişletilmiş Hecke Grupları, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[7] Fine, B., “Trace classes and quadratic forms in the modular group”, Canadian Mathematical Bulletin, 37 (2), 202-212, (1994).

[8] Schmidt, T.A.; Sheingorn, M. Length spectra of the Hecke triangle groups, Math. Z. 220, no. 3, 369–397 (1995).

[9] Lang M. L., Lim C. H., Tan S. P., “Principal congruence subgroups of the Hecke Groups”, Journal of the Number Theory, 85, (2000), s. 220-230

[10] Yılmaz N., Cangül İ. N., “Power Subgroups of Hecke Groups H($\sqrt{n}$)”, Int. J. Math. Sci., 11, (2001), s. 703-708.

[11] Demir, B., “Genişletilmiş Genel Hecke grupları”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2015).

[12] Koruoğlu, Ö., “The determination of parabolic points in modular and extended modular groups by continued fractions”, Bull. Malays. Math. Sci. Soc., 33 (2), 439445, (2010).

[13] Singerman, D. $PSL(2,q)$ as an image of the extended modular group with applications to group actions on surfaces, Proc. Edinb. Math. Soc., II. Ser. 30, 143-151, (1987).

[14] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., “Trace Classes and Fixed Points for the Extended Modular group $\overline{\Gamma}$ ”, Turkish Journal of Mathematics., 32 (1), 11-19, (2008).

[15] Bizim O., Genişletilmiş Modüler Grup, Doktora Tezi, Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1995).

[16] Jones, G. A. and Thornton, J. S., “Automorphisms and congrunce subgroups of the extended modular group”, Journal of the London Mathematical Society, 34 (2), 26 40, (1986).

[17] Johnson D. L., Presentation of Groups, Cambridge University Press, (1990), s. 1-17, 41-45.

[18] Magnus W., Karras A., Solitar D., Combinatorial Group Theory, Dover Publications, Inc. New York, (1976).

[19] Jones, G. A., & Singerman, D. “Complex functions: an algebraic and geometric viewpoint”, Cambridge university press. (1987).

[20] Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, Bursa: Vipaş, 318-324, (2001).

[21] Coxeter H.S.M., Moser, W. O. J., Generators and Relations For Discrete Gruups, second ed., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, (1965), 85-87.

[22] Şahin R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö., “On the power subgroups of the extended modular group $\bar{\Gamma}$ ” Tr. J. of Math., 29, 143-151, (2004).

[23] Kulkarni, R. S. An arithmetic-geometricmethod in the study of the subgroups of the modular group, Am. J. Math. 113, No.6, 1053-1133, (1991).

[24] Lang, M. L. Normalisers of subgroups of the modular group, J.Algebra,248, No.1, 202-218, (2002)

[25] Kern-Isberner, G.; Rosenberger, G. A note on numbers of the form $n = x^2 + Ny^2$. Arch. Math. (Basel) 43 (2), 148–156 (1984).

[26] Koruoğlu Ö., “$\bar{H}\left(\lambda\right)$ ile $\bar{H}\left(\lambda_p\right)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler”, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı : Elif TUNCER

Doğum tarihi ve yeri : **14.10.1986**

e-posta : elf_kck@hotmail.com

Öğrenim Bilgileri

Derece	**Okul/Program**	**Yıl**
Y. Lisans	Balıkesir Üniversitesi/Matematik Bölümü	2024
Lisans	Balıkesir Üniversitesi/İlköğretim Matematik Öğretmenliği	2008
Lise	Sırrı Yırcalı Anadolu Lisesi	2004