T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

# KENAR İDEALLERİN CEBİRSEL İNCELENMESİ

NEŞE İZİDOĞRU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Jüri Üyeleri : Doç. Dr. Pınar METE (Tez Danışmanı)
Dr. Öğr. Üyesi Dilek DİLSİZOĞLU
Doç. Dr. Fatma KARAOĞLU CEYHAN

BALIKESİR, AĞUSTOS - 2024

# ETİK BEYAN

Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak tarafımca hazırlanan "**Kenar İdeallerin Cebirsel İncelenmesi**" başlıklı tezde;

- Tüm bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Kullanılan veriler ve sonuçlarda herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi ve sonuçları bilimsel araştırma ve etik ilkelere uygun şekilde sunduğumu,
- Yararlandığım eserlere atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,

beyan eder, aksinin ortaya çıkması durumunda her türlü yasal sonucu kabul ederim.

**Neşe İZİDOĞRU**

# ÖZET


**KENAR İDEALLERİN CEBİRSEL İNCELENMESİ**
**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**NEŞE İZİDOĞRU**
**BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**
**(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. PINAR METE)**
**BALIKESİR, AĞUSTOS - 2024**

Tekterimli idealler, kombinatorikteki problemler tekterimli idealler biçiminde kodlandırıldıklarından değişmeli cebir ve kombinatorik arasındaki bağlantıların incelenmesinde önemli bir rol oynarlar. Bunun başlangıç noktası, kenar ideal adı verilen, bir basit çizgenin kenarları kullanılarak bir karesiz tekterimli oluşturulan idealdir. Bir derleme olan bu tezde amacımız kenar ideallerin yapısını, cebirsel yönden çalışmaktır.



**ANAHTAR KELİMELER:** Basit çizgeler, tekterimli idealler, simplisyal kompleksler, kenar idealler

Bilim Kod / Kodları : 20401 Sayfa Sayısı : 40

# ABSTRACT

**ALGEBRAIC INVESTIGATION OF EDGE IDEALS**
**MSC THESIS**
**NEŞE İZİDOĞRU**
**BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE**
**MATHEMATICS**
**(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. PINAR METE )**
**BALIKESİR, AUGUST - 2024**

Monomial ideals play an important role in studying the connections between commutative algebra and combinatorics, since problems in combinatorics are encoded into monomial ideals. The starting point is to use edges of a simple graph to construct a square-free monomial ideal, which is called the edge ideal. This thesis is a survey on edge ideals, where our aim is to study the structure of edge ideals in an algebraic way.



**KEYWORDS:** Simple graphs, monomial ideals, simplicial complexes, edge ideals

Science Code / Codes : 20401 Page Number : 40

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SEMBOL LİSTESİ

| | |
|---|---|
| $\mathbf{G = (X, E)}$ | **:** Çizge |
| **X** | **:** G çizgesinin köşelerinin kümesi |
| **E** | **:** G çizgesinin kenarlarının kümesi |
| **d(x)** | **:** x köşesinin derecesi |
| $\Delta(\mathbf{G})$ | **:** G çizgesinin maksimum derecesi |
| **N(x)** | **:** x köşesinin komşuluğu |
| **\|N(x)\|** | **:** N(x) kümesinin eleman sayısı |
| **H = (X, E)** | **:** Hiperçizge |
| **n (H)** | **:** H hiperçizgesinin mertebesi |
| **m(H)** | **:** H hiperçizgesinin kenarlarının sayısı |
| **L(G)** | **:** G çizgesinin komşuluk listesi |
| **A(G)** | **:** G çizgesinin komşuluk matrisi |
| **Inc(G)** | **:** G çizgesinin bitişik matrisi |
| **E(G)** | **:** G çizgesinin kenar listesi |
| **Inc(H)** | **:** H hiperçizgesinin bitişik matrisi |
| **A(H)** | **:** H hiperçizgesinin komşuluk matrisi |
| $\mathbf{S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]}$ | **:** n değişkenli polinom halkası |
| $\mathbf{x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}}$ | **:** Tekterimli |
| **supp(f)** | **:** f polinomunun desteği |
| $\mathbf{deg}(\mathbf{x^a})$ | **:** $x^a$ tekterimlisinin derecesi |
| $\langle \mathbf{f_1, f_2, \dots, f_s} \rangle$ | **:** $f_1, f_2, \dots, f_s$ polinomları ile üretilen ideal |
| $\mathbf{okek}(\mathbf{f}, \mathbf{g})$ | **:** f ve g polinomlarının en küçük ortak katı |
| $\mathbf{obeb}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$ | **:** u ve v tekterimlilerinin en büyük ortak böleni |
| **G(I)** | **:** I idealinin minimal üreteç kümesi |
| $\Delta$ | **:** Simplisyal kompleks |
| **F** | **:** Simplisyal kompleksin yüzü |
| $\mathbf{dim}\Delta$ | **:** $\Delta$ simplisyal kompleksinin boyutu |
| $\mathbf{f}(\Delta)$ | **:** $\Delta$’ nın f-vektörü |
| $\mathbf{f_\Delta(t)}$ | **:** $\Delta$’ nın f-polinomu |

| | |
|---|---|
| $\mathbf{h}(\Delta)$ | **:** $\Delta$’ nın h-vektörü |
| $\mathbf{h}_{\Delta}(\mathbf{t})$ | **:** $\Delta$’ nın h-polinomu |
| $\Delta_{\mathbf{I}}$ | **:** I idealinin Stanley-Reisner kompleksi |
| $\mathbf{I}_{\Delta}$ | **:** $\Delta$’ nın Stanley-Reisner ideali |
| $\Delta^{\mathbf{v}}$ | **:** $\Delta$’nın Alexander duali |
| $\mathbf{I}(\mathbf{G})$ | **:** G çizgesinin kenar ideali |
| $\mathbf{J}(\mathbf{G})$ | **:** G çizgesinin örtü ideali |
| $\mathbf{I}(\mathbf{H})$ | **:** H hiperçizgesinin kenar ideali |
| $\mathbf{J}(\mathbf{H})$ | **:** H hiperçizgesinin örtü ideali |
| $\mathbf{I}_{\mathbf{t}}(\mathbf{G})$ | **:** G çizgesinin t uzunluktaki yol ideali |

# ÖNSÖZ

Bu tez çalışmalarımda bana her an yardımcı olan ve her zaman yanımda olduğunu hissettiren değerli hocam Doç. Dr. Pınar Mete'ye saygı ve teşekkürlerimi sunarım.
Son olarak hayatımın her anında yanımda olan bana her zaman kol kanat geren, desteğini benden esirgemeyen aileme teşekkür ederim. Değerli meslektaşım Feyzullah Akdere ve yakın arkadaşım Ceren Tutguner bu çalışma boyunca benden desteğini esirgemediği için teşekkür ederim.

**Balıkesir, 2024** **Neşe İzidoğru**

# 1.GİRİŞ

Tekterimli idealler, değişmeli cebir ve kombinatorik arasındaki bağlantıların incelenmesinde önemli bir rol oynar. Son dönemlerde, tekterimli idealler kullanılarak basit çizgelerin özelliklerini incelemek oldukça ilgi çekmektedir [1], [2]. Sonlu basit bir çizgenin kenarlarını kullanarak, kenar ideal adı verilen bir tekterimli ideal oluşturmak ve bu çizgenin özelliklerini incelemek, diğer yandan bu idealin özelliklerini kullanarak çizgenin özelliklerini incelemek bu çalışmaların başlangıç noktasıdır. Bu tezde, kenar idealler ile ilgili temel bilgiler verilecek ve bu ideallerin çalışılmasında ana temalardan olan çizge teori ve değişmeli cebir arasında bağlantı tartışılacaktır.

Tezin 2. bölümünde, basit çizgeler ve hiperçizgeler ile ilgili temel tanım ve kavramlar çalışılmıştır.

Tezin 3. bölümünde, kenar idealler, karesiz tekterimli ideallerin bir sınıfı olmasından, tekterimli ve karesiz tekterimli idealler ile ilgili temel tanımlar ve özellikler incelenmiştir.

Tezin 4. bölümünde, simplisyal kompleksler ve bazı temel değişmezleri tanıtılmıştır. Ayrıca, simplisyal kompleksleri, karesiz tekterimli idealler ile ilişkilendiren Stanley-Reisner teorisi incelenmiştir. Sonrasında, Alexander dualitesi tartışılmıştır.

Tezin 5. bölümünde, basit çizgelerin ve hiperçizgelerin kenar ve örtü idealleri tanıtılmış ve bu ideallerin nasıl oluşturulduğu örneklerle açıklanmıştır. Yine, kenar ideallerin bir genişletilmesi olan yol idealler kavramı açıklanmıştır.

# 2. ÇİZGELER VE HİPERÇİZGELER

## 2.1 Basit Çizgeler

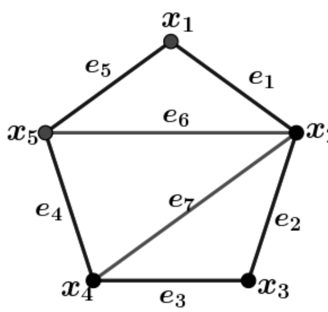
Çizge teori, modern matematiğin, bilgisayar bilimleri, genetik, kimya, endüstri, işletme ve sosyal bilimlerde pek çok uygulamaları olan önemli bir alanıdır. Cebir veya kalkülüsün zayıf olduğu bilgisayar tabanlı zor problemleri çözmek için keşfedilen ve geliştirilen yeni bir bilim dalıdır. Çizge teorisinin kökeni, 1735 yılında L. Euler tarafından tasarlanan ve Königsberg'in Yedi Köprüsü olarak bilinen probleme kadar gitmektedir [3]. Bu bölümde, çizge teori ile ilgili temel bilgiler için [4] kaynak olarak kullanılmıştır.

X=$\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinde, $x_i$'ler i.köşeyi ve n köşelerin sayısını ve E=$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kümesinde, $e_i$'ler i.kenarı ve m kenarlarının sayısını göstersin. Herbir $e_i$ kenarı, $e_i$ ile bağlanan ilgili köşe çifti ile belirlenir.

**2.1.1 Tanım** X= $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ köşeler kümesi ve E=$\{e_1, e_2, \dots, e_m\}$ kenarlar kümesi olmak üzere, (X, E) ikilisine bir çizge denir ve G = (X, E) ile gösterilir. Bir çizgede köşeler arasında birden fazla kenar veya köşe noktalarını kendisine birleştiren kenarlar yoksa, çizgeye basit çizge denir.

Çizgeler, diyagramlar (şemalar) ile gösterilebilirler. Her bir köşe, bir nokta ile ve her bir kenar uçlarını temsil eden noktaları birleştiren bir doğru ile gösterilir.

**2.1.2 Örnek** X= $\{x_1, x_2, \dots, x_5\}$ ve E=$\{e_1, e_2, \dots, e_7\}$ olsun.




diyagramında, 5 tane köşe ve 7 tane kenar vardır. $e_1$, $x_1$ ve $x_2$ köşelerini bağladığı için $e_1 = \{x_1, x_2\}$ yazabiliriz. Benzer şekilde,

$e_2 = \{x_2, x_3\}$, $e_3 = \{x_3, x_4\}$, $e_4 = \{x_4, x_5\}$, $e_5 = \{x_5, x_1\}$, $e_6 = \{x_2, x_5\}$, $e_7 = \{x_2, x_4\}$ olarak yazılabilir. Böylece, G = (X, E) bir çizgedir.

**2.1.3 Tanım** G = (X, E) çizgesinde, iki köşe, bir kenar ile bağlı ise, bu köşelere bitişiktir denir. Aksi durumda, ayrıktırlar denir.

**2.1.4 Örnek** 2.1.2 Örnekteki G çizgesinde, $x_1$ ve $x_2$ köşeleri bitişiktir, fakat $x_1$ ve $x_3$ köşeleri ayrıktırlar.

**2.1.5 Tanım** G = (X, E) çizge ve $x \in X$ olsun. x köşesine bitişik olan tüm köşelerin sayısına x köşesinin derecesi denir ve $d(x)$ ile gösterilir. G çizgesinde, tüm köşeler üzerinden maksimum dereceye, G çizgesinin maksimum derecesi denir ve $\Delta$(G) ile gösterilir.

**2.1.6 Örnek** 2.1.2 Örnekte, $x_1$ köşesinin derecesi, $x_1$, $x_2$ ve $x_5$ köşeleri ile bitişik olduğundan

$$d(x_1)=2$$

bulunur. Benzer şekilde

$$d(x_2)=4, d(x_3)=2, d(x_4)=3, d(x_5)=3$$

olduğu görülebilir. Bu durumda, G çizgesinin maksimum derecesi

$$\Delta(G)=4$$

olarak bulunur.

**2.1.7 Tanım** G = (X, E) çizgesinde, bitişik köşelere birbirlerinin komşuları denir. Bir x köşesinin tüm komşularına, x köşesinin komşuluğu denir ve $N(x)$ ile gösterilir. $|N(x)|$, $N(x)$‘in eleman sayısını göstersin. x köşesinin derecesinin, komşuluğunun eleman sayısı olduğu açıktır. Bir başka deyişle,

$$d(x) = |N(x)|.$$

**2.1.8 Örnek** G çizgesi, 2.1.2 Örnekteki çizge olsun.

$x_1$ köşesinin komşuları, $N(x_1) = \{x_2, x_5\}$

$x_2$ köşesinin komşuları, $N(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$

$x_3$ köşesinin komşuları, $N(x_3) = \{x_2, x_4\}$

$x_4$ köşesinin komşuları, $N(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}$

$x_5$ köşesinin komşuları, $N(x_5) = \{x_1, x_2, x_4\}$

olduğundan,

$d(x_1) = |N(x_1)| = 2$
$d(x_2) = |N(x_2)| = 4$
$d(x_3) = |N(x_3)| = 2$
$d(x_4) = |N(x_4)| = 3$
$d(x_5) = |N(x_5)| = 3$
elde edilir.

**2.1.9 Tanım** Bir G çizgesinde, köşelerin derecelerinin azalmayan sırada düzenlenmesi ile elde edilen diziye, G'nin derece dizisi denir.

**2.1.10 Örnek** 2.1.8 Örnekten,

$$d(x_1) = 2,\ d(x_2) = 4,\ d(x_3) = 2,\ d(x_4) = 3,\ d(x_5) = 3$$

olduğunu biliyoruz. Böylece, G çizgesinin derece dizisi

$$(2,\ 4,\ 2,\ 3,\ 3)$$

olarak bulunur.

**2.1.11 Tanım** Bir G = (X, E) çizgesinde, eğer iki kenarın ortak bir köşesi var ise, bu kenarlara bitişik kenarlar denir. Aksi durumda, kenarlar ayrıktırlar.

**2.1.12 Örnek** 2.1.2 Örnekteki G çizgesinde, $x_1$, $e_1$ ve $e_5$ kenarlarının ortak noktası olduğundan, $e_1$ ve $e_5$ bitişik kenarlardır. Benzer şekilde, $e_1$ ve $e_2$ (ortak köşeleri $x_2$) olduğundan bitişiktirler. Ancak, $e_1$ ve $e_3$ ile $e_1$ ve $e_4$ kenarlarının hiç ortak köşesi olmadığı için, ayrıktırlar.

**2.1.13 Tanım** Bir G = (X, E) çizgesinde, bir x köşesi, bir e kenarına ait ise, x köşesi ve e kenarı birbirine bağlıdır, denir.

**2.1.14 Örnek** Yine 2.1.2 Örnekten,
$x_1$, $e_1$ kenarına ait olduğundan, $x_1$ ve $e_1$ bağlıdır,
$x_3$, $e_1$ kenarına ait olmadığından $e_1$, $x_3$ köşesine bağlı değildir.

**2.1.15 Yardımcı Teorem** G = (X, E) bir çizge ve $n = |X|$, G'nin köşelerinin sayısı ve $m = |E|$, G'nin kenarlarının sayısı olsun. Bu durumda,

$$\sum_{i=1}^{n} d(x_i) = 2 \cdot m.$$

**İspat** $d(x_i)$, $x_i$ köşesine bitişik olan kenarlarının sayısı ve her bir kenarın iki ucu olduğundan her bir kenar iki kere sayılır.

**2.1.16 Örnek** 2.1.2 Örnekte,

$$n = |X| = 5,\ m = |E| = 7.$$

Böylece,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{5} d(x_i) &= d(x_1) + d(x_2) + d(x_3) + d(x_4) + d(x_5)\\ &= 2 + 4 + 2 + 3 + 3\\ &= 14\\ &= 2 \cdot m\,.\end{aligned}$$

**2.1.17 Yardımcı Teorem** Bir G = (X, E) çizgesinde derecesi aynı olan iki köşe vardır.

**İspat** G çizgesinin n tane köşesi olsun. Bu durumda, G'nin derece dizisinde n tane tam sayı vardır. $x \in X$ olsun. $|N(x)|$, x köşesinin komşuluğunun eleman sayısı olmak üzere,

$$0 \leq |N(x)| \leq n - 1$$

yazabiliriz. x köşesinin derecesi, $d(x)$, komşuluğun eleman sayısı olduğundan

$$0 \leq d(x) \leq n - 1$$

yazabiliriz. Tüm n tam sayılarının farklı olduğunu varsayalım. Bu durumda $d(x)$, $[0,\ n - 1]$ arasındaki tüm tam sayı değerlerini alır.

$d(x) = 0$ ise, x köşesinin hiç komşusu yoktur.

$d(x) = n - 1$ ise, diğer tüm köşelere komşu olan bir köşe vardır.

Bu iki durum aynı anda gerçekleşemez. Böylece, tüm n tam sayıları farklı olamaz. Bu durumda, çizgenin aynı dereceye ait iki köşesi olmalıdır.

**2.1.18 Örnek** 2.1.8 Örnekten

$$d(x_1) = 2 = d(x_3)$$

$$d(x_4) = 3 = d(x_5)$$

elde edilir.

## 2.2 Hiperçizgeler

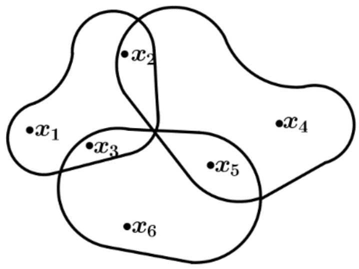
Hiperçizgeler, çizgelerin bir genellemesidir. Dolayısıyla, çizgelerdeki pek çok tanım hiperçizgelere aynen taşınır.

**2.2.1 Tanım** $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ sonlu bir küme ve $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$, X kümesinin farklı alt kümelerinin bir koleksiyonu olsun. Eğer her $i = 1, 2, \dots, m$ için $e_i \neq \emptyset$ ise,
H = (X, E) ikilisine bir hiperçizge denir.

X kümesinin elemanları köşeler ve E kümesinin elemanlarına, H hiperçizgesinin hiperkenarları denir.

H = (X, E) bir hiperçizge olsun. Eğer her $e \in E$ için, $|e|$, e'nin eleman sayısı olmak üzere, $|e| \geq 2$ ve H'nin kenarlarından hiçbirisi diğerinin içinde yer almıyorsa, H'ye basit hiperçizge denir.

**2.2.2 Örnek** $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ ve $E = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_3, x_5, x_6\}\}$ olsun. H bir basit hiperçizgedir ve




şeklindedir.

**2.2.3 Tanım** H = (X, E) hiperçizgesinde, H'nin köşelerinin sayısı, bir başka deyişle, $|X| = n$ sayısına, H hiperçizgesinin mertebesi denir ve n(H) ile gösterilir. H'nin kenarlarının sayısı, m(H) ile gösterilir.

$X = \emptyset$, $E = \emptyset$ ise H= (X, E) hiperçizgesine boş hiperçizge denir.

$X \neq \emptyset$, $E = \emptyset$ ise H= (X, E) hiperçizgesine aşikar hiperçizge denir.

Aksi belirtilmedikçe, hiperçizgeler köşelerin ve hiperkenarların boş olmayan bir kümesine sahiptirler.

Bir hiperçizgede, hiperkenarlar, diğer hiperkenarların alt kümesi değil ise, bu hiperçizgelere basit hiperçizgeler denir. Basit hiperçizgeler, Sperner aileleri olarak da bilinirler.

**2.2.4 Tanım** H = (X, E) bir hiperçizge olsun. H'de, herhangi iki köşeyi içeren bir $e \in E$ kenarı var ise, bu köşeler bitişiktir denir. Bitişik köşeler, bazen birbirinin komşusu olarak da adlandırılırlar. Çizgelerdekine benzer şekilde, N(x), x köşesinin komşuluğunu gösterir. Yine, H'de iki hiperkenarın arakesiti boş küme değilse, kenarlar bitişiktir denir. Eğer, bir $x_i \in X$ köşesi bir $e_j \in E$ kenarına ait ise, $x_i$ köşesi ile $e_j$ kenarı birbirlerine bağlıdırlar denir. Bir hiperçizgede, hiçbir kenara bağlı olmayan köşeye izole köşe denir. Eğer bir kenarın içerdiği köşe sayısı 1 ise, bu kenara döngü denir.

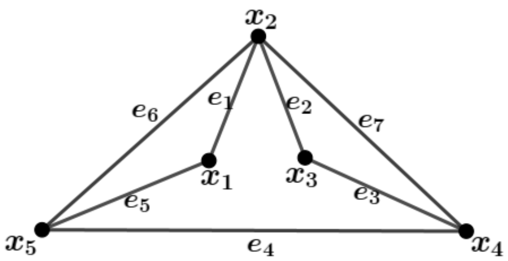
Hiperçizgeler, farklı bilimlerdeki kavramları, çizgelerden çok daha genel ortamlarda modelleyebilmektedirler.

## 2.3 Çizge Temsilleri

Çizgeler, yüzlerce ve binlerce köşe ve kenar içerebilirler. Çok fazla sayıda elemanı olan bir problemi sadece tanımını kullanarak veya çizgeleri kullanarak çözmek mümkün değildir. Çizgeleri anlamanın farklı yolları vardır.

**2.3.1 Tanım** G = (X, E) bir çizge ve $x \in X$ olsun. x köşesinin, tüm komşularından oluşan listeye, G'nin komşuluk listesi denir ve L(G) ile gösterilir.

**2.3.2 Örnek**




çizgesini düşünelim.

$x_1$ köşesinin komşuları, $N(x_1) = \{x_2, x_5\}$,

$x_2$ köşesinin komşuları, $N(x_2) = \{x_1, x_3, x_4, x_5\}$,

$x_3$ köşesinin komşuları, $N(x_3) = \{x_2, x_4\}$,

$x_4$ köşesinin komşuları, $N(x_4) = \{x_2, x_3, x_5\}$

$x_5$ köşesinin komşuları, $N(x_5) = \{x_1, x_2, x_4\}$

olduğundan, G'nin komşuluk listesi,

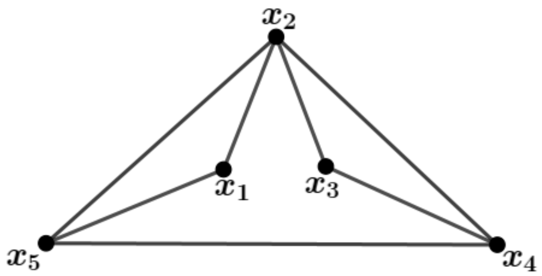
$$L(G) = \{\{x_2,\ x_5\},\ \{x_1,\ x_3,\ x_4,\ x_5\},\ \{x_2,\ x_4\},\ \{x_2,\ x_3,\ x_5\},\ \{x_1,\ x_2,\ x_4\}\}.$$

**2.3.3 Tanım** G = (X, E) bir çizge olsun. G çizgesinin komşuluk matrisi, G'nin her bir köşesi için bir satırı ve bir sütunu olan ve çizgenin aralarında komşuluk olan köşeler için 1, komşuluk olmayan köşeler için 0 değeri kullanılarak oluşturulan matristir. Bir başka deyişle, A(G) matrisi, G çizgesinin komşuluk matrisi ise, A(G)'nin $a_{ij}$ girdisi,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i, x_j' \text{ye komşu} \\ 0, & x_i, x_j' \text{ye komşu değilse} \end{cases}$$

olarak elde edilir.

**2.3.4 Örnek**




çizgesini alalım.

$x_1$ köşesi, $x_1$'e komşu değil $\Rightarrow a_{11} = 0$

$x_1$ köşesi, $x_2$'ye komşu $\Rightarrow a_{12} = 1$

$x_1$ köşesi, $x_3$'e komşu değil $\Rightarrow a_{13} = 0$

$x_1$ köşesi, $x_4$'e komşu değil $\Rightarrow a_{14} = 0$

$x_1$ köşesi, $x_5$'e komşu $\Rightarrow a_{15} = 1$

Böylece, G'nin komşu matrisi A(G)'nin ilk satırı bulunmuş olur. $x_2$, $x_3$, $x_4$, $x_5$ köşeleri içinde benzer yöntem tekrarlanarak, A(G) matrisi

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

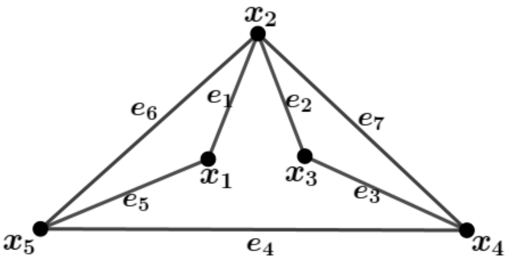
olarak elde edilir.

**2.3.5 Tanım** G çizgesinin bitişik matrisi, G'nin her bir kenarı için bir satır ve bir sütunu olan matristir. Bu matris, çizgenin hangi köşelerinin bir kenar ile bağlı olduğunu belirler. Eğer, $x_i$ köşesi $e_j$ kenarına bitişik ise, matriste (i, j) girdisi 1, diğer durumlarda 0 olur. Bir başka deyişle, Inc(G), G'nin bitişik matrisi ise Inc(G)'nin $b_{ij}$ girdisi,

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in e_j \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olarak bulunur.

**2.3.6 Örnek**




çizgesini alalım.

$x_1$ köşesi, $e_1$ kenarına bitişik $\Rightarrow b_{11} = 1$

$x_1$ köşesi, $e_2$ kenarına bitişik değil $\Rightarrow b_{12} = 0$

$x_1$ köşesi, $e_3$ kenarına bitişik değil $\Rightarrow b_{13} = 0$

$x_1$ köşesi, $e_4$ kenarına bitişik değil $\Rightarrow b_{14} = 0$

$x_1$ köşesi, $e_5$ kenarına bitişik $\Rightarrow b_{15} = 1$

$x_1$ köşesi, $e_6$ kenarına bitişik değil $\Rightarrow b_{16} = 0$

$x_1$ köşesi, $e_7$ kenarına bitişik değil $\Rightarrow b_{17} = 0$

Böylece, Inc(G) matrisinin ilk satırı bulunmuş olur. Benzer şekilde devam edersek, G çizgesinin Inc(G) bitişik matrisi,

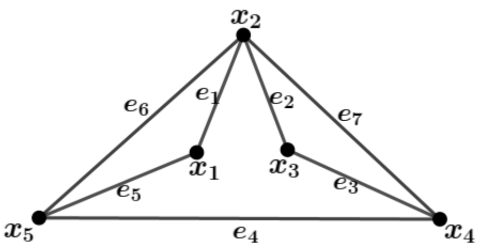
$$\mathrm{Inc(G)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir.

Inc(G) bitişik matrisinin, her satırında iki tane 1 bulunur. Bu satırlar, ilgili kenarla bağlanan köşeleri gösterir.

**2.3.7 Tanım** G = (X, E) bir çizge olsun. G çizgesinin tüm kenarlarının listesine G'nin kenar listesi denir ve E(G) ile gösterilir.

**2.3.8 Örnek**

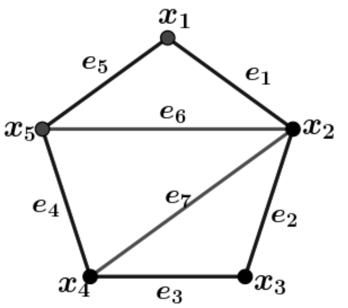


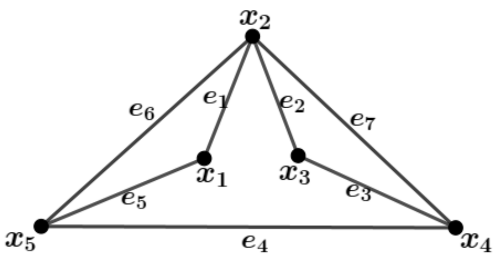

çizgesinin kenar listesi,

$E(G) = \{e_1 = \{x_1, x_2\}, e_2 = \{x_2, x_3\}, e_3 = \{x_3, x_4\}, e_4 = \{x_4, x_5\}, e_5 = \{x_1, x_5\},$
$e_6 = \{x_2, x_5\}, e_7 = \{x_2, x_4\}\}$

kümesidir.

**2.3.9 Uyarı**




Üstteki iki şekil, aynı çizgeyi temsil eder. Sadece çizgelerin köşelerinin düzlemdeki pozisyonları farklıdır. Aynı çizgenin bir çok farklı şekilde çizilebilmesi, çizge teorisinin bir özelliğidir. Köşe ve kenarların isimleri aynı kaldığı sürece, aynı matematiksel modele sahip olduğu kabul edilir.

## 2.4 Hiperçizgelerin Temsilleri

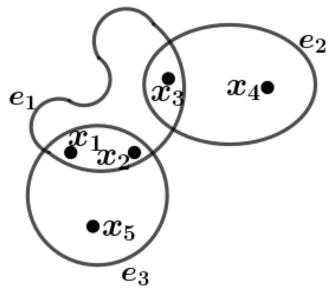
Bu bölümde, hiperçizgelerden gelen cebirsel tanımları verelim.

**2.4.1 Tanım** H = (X, E) hiç izole köşesi olmayan bir hiperçizge olsun. H'nin bitişik matrisi, Inc(H), $a_{ij}$ girdileri,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in e_j \\ 0, & \text{diğer durumda} \end{cases}$$

olan n satırlı ve m sütunlu Inc(H)= $(a_{ij})$ matrisidir.

**2.4.2 Örnek**




şeklinde verilen H = ($X = \{x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5\}, E = \{e_1, e_2, e_3\ \}$) hiperçizgesini alalım.

$x_1 \in e_1 \ \Rightarrow\ a_{11} = 1$

$x_2 \in e_1 \ \Rightarrow\ a_{12} = 1$

$x_3 \in e_1 \ \Rightarrow\ a_{13} = 1$

$x_4 \notin e_1 \ \Rightarrow\ a_{14} = 0$

$x_5 \notin e_1 \ \Rightarrow\ a_{15} = 0$

bulunur. Benzer şekilde devam edilirse,

$$\mathrm{Inc(H)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

matrisi elde edilir.

**2.4.3 Tanım** H = (X, E) hiperçizge olsun. H'nin komşuluk matrisi, A(H), aşağıdaki şekilde tanımlanır. A(H) matrisinin satırları ve sütunları, H hiperçizgesinin köşeleri ile indekslenir ve bu kare matrisinin girdileri, her $x, y \in X$ ve $x \neq y$ için,

$$a_{x,y} = |\{e \in E\ |x, y \in e\}|\ \text{ve}\ \ a_{x,x} = 0$$

olacak şekilde yazılır.

**2.4.4 Örnek** 2.4.2 Örnekte verilen H hiperçizgesini düşünelim.

$$x_1 \in X\ \text{için}\ x_1 = x_1 \ \Rightarrow\ a_{x_1,x_1} \Rightarrow 0 = a_{11} = 0$$

$x_1, x_2 \in X\ \text{ve}\ x_1 \neq x_2 \ \Rightarrow\ a_{x_1,x_2} = |\{e \in E\ |x_1, x_2 \in e\}|$

$x_1, x_2$ köşeleri, H hiperçizgesinin $e_1$ ve $e_3$ kenarlarında bulunurlar. Böylece,

$$a_{x_1,x_2} = |\{e_1, e_3\}| = 2 \ \Rightarrow\ a_{12} = 2$$

$x_1, x_3 \in X\ \text{ve}\ x_1 \neq x_3 \ \Rightarrow\ a_{x_1,x_3} = |\{e \in E\ |x_1, x_3 \in e\}|$

$$a_{x_1,x_3} = |\{e_1\}| = 1 \ \Rightarrow\ a_{13} = 1$$

$x_1, x_4 \in X\ \text{ve}\ x_1 \neq x_4 \ \Rightarrow\ a_{x_1,x_4} = |\{e \in E\ |x_1, x_4 \in e\}|$

H hiperçizgesinin, $x_1$ ve $x_4$ köşelerinin ikisini birden içeren kenarı yoktur. Bu durumda,

$$a_{x_1,x_4} = 0 \ \Rightarrow\ a_{14} = 0$$

Benzer şekilde, H'nin $x_1$ ve $x_5$ köşelerinin ikisini birden içeren kenarı olmadığından

$$a_{x_1,x_5} = |\{e_3\}| = 1 \Rightarrow a_{15} = 1$$

olur. Benzer şekilde devam edersek, H'nin A(H) komşuluk matrisi

$$A(H) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

# 3.TEKTERİMLİLER CEBİRİ

Bu bölümde, tekterimliler ve idealler ile ilgili temel bilgiler [5] kaynak kullanılarak verilecektir.

## 3.1 Tekterimliler

**3.1.1 Tanım** k bir cisim olsun. $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, k cismi üzerinde n değişkenli polinom halkası olsun. $\mathbb{N}$, negatif olmayan tamsayılar ve $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olmak üzere,

$$x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}, \; a_i \in \mathbb{N}$$

formundaki ifadelere tekterimli denir.

**3.1.2 Örnek** $k[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkası alalım.

$$x_1^3 x_3^2 = x_1^3 x_2^0 x_3^2$$

tekterimlisinde

$$a_1 = 3, \; a_2 = 0, \; a_3 = 2$$

dir.

**3.1.3 Tanım** $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinom halkasında herhangi bir eleman katsayıları k cisminden olan tekterimlilerin bir kombinasyonudur. Bir başka deyişle, $f \in S$ ise

$$f = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} c_a x^a \quad, c_a \in k$$

şeklinde yazılabilir. f'ye polinom denir.

**3.1.4 Örnek** $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkasını alalım.

$$f = \frac{1}{3} x_1 x_2^2 x_3^5 - 2x_1^2 x_3 \in \mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$$

bir polinomdur.

**3.1.5 Tanım** $f = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} c_a x^a \in S$ polinomunda, sonlu sayıda $c_a$ hariç hepsi sıfırdır.

$$\{x^a | c_a \neq 0\}$$

tekterimliler kümesine f polinomunun desteği denir ve supp(f) ile gösterilir.

$$\begin{aligned} f = 0 &\Leftrightarrow 0 = \sum_{a \in \mathbb{N}^n} 0 \cdot x^a \\ &\Leftrightarrow c_a = 0 \\ &\Leftrightarrow \mathrm{supp}(f) = \emptyset . \end{aligned}$$

**3.1.6 Tanım** k bir cisim olmak üzere,

$$cx^{a}\,, c \in k$$

formundaki ifadeye terim denir.

S'deki halka yapısını anlamak için, polinomları nasıl toplayıp, nasıl çarpacağımızı açıklayalım. S'den

$$f = \sum_{a\in\mathbb{N}^n} c_a x^a \text{ ve } g = \sum_{a\in\mathbb{N}^n} d_a x^a$$

polinomlarını alalım.

$$f + g = \sum_{a\in\mathbb{N}^n}(c_a + d_a)x^a$$

ve

$$f \cdot g = \sum_{A\in\mathbb{N}^n}\Big(\sum_{a+b=A} c_a d_b\Big)x^A$$

olarak tanımlıdır. S, bu toplama ve çarpma işlemlerine göre bir halka yapısına sahiptir.

**3.1.7 Tanım** $x^a = x_1^{a_1}\, x_2^{a_2}\ \ldots\ x_n^{a_n}$ bir tekterimli olsun. $x^a$ tekterimlinin derecesi,

$$\deg(x^a) = |a| = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

ve f polinomunun derecesi,

$$\deg(f) = \max\{\deg(x^a)\ |x^a \in \operatorname{supp}(f)\}$$

olarak tanımlanır.

**3.1.8 Örnek** $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkasında,

$$f = \frac{1}{7}x_1x_2^3x_3^2 - 5x_1^3x_3^5 + \frac{12}{15}$$

polinomu verilsin. Burada, f'nin tekterimlileri

$$m_1 = x_1^1x_2^3x_3^2\,, m_2 = x_1^3x_2^0x_3^5\,, m_3 = x_1^0x_2^0x_3^0$$

şeklindedir.

$$\deg(m_1) = 1 + 3 + 2 = 6$$

$$\deg(m_2) = 3 + 0 + 5 = 8$$

$$\deg(m_3) = 0 + 0 + 0 = 0$$

olur. Böylece,

$$\deg(f) = 8$$

olarak bulunur.

**3.1.9 Tanım** $f \in S$ polinomunun, eğer supp(f) kümesindeki tüm tekterimlilerin derecesi i ise, f'ye derecesi i olan homojen polinom denir.

$$f_i = \sum_{a\in\mathbb{N}^n, |a|=i} c_a x^a$$

olsun. $f_i$'ye f polinomunun i.dereceden homojen bileşeni denir.

**3.1.10 Örnek** $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkasında,

$$f = x_1^5 + 2x_1^3x_2x_3 + 7x_1x_3^4$$

polinomunu alalım. f'nin tekterimlileri ve dereceleri

$$m_1 = x_1^5x_2^0x_3^0 \text{ ve } \deg(m_1) = 5 + 0 + 0 = 5$$

$$m_2 = x_1^3x_2^1x_3^1 \text{ ve } \deg(m_2) = 3 + 1 + 1 = 5$$

$$m_3 = x_1^1x_2^0x_3^4 \text{ ve } \deg(m_3) = 1 + 0 + 4 = 5$$

şeklindedir. Tüm tekterimlilerin derecesi aynı olduğundan f homojen bir polinomdur.

$$g = x_1^3x_2 + 3x_1x_3^3 + 7x_3^2$$

polinomunda,

$$m_1 = x_1^3x_2 \text{ ve } \deg(m_1) = 4$$

$$m_2 = x_1x_3^3 \text{ ve } \deg(m_2) = 4$$

$$m_3 = x_3^2 \text{ ve } \deg(m_3) = 2$$

olduğundan g homojen değildir. g polinomunda

$$g = x_1^3x_2 + 3x_1x_3^3$$

kısmına, g'nin 4.dereceden homojen bileşeni denir.

## 3.2 İdealler

**3.2.1 Tanım** $S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$, bir k cismi üzerinde n değişkenli polinom halkası ve $I \subset S$ olsun. Eğer,

- $0 \in I$
- $f, g \in I$ iken $f + g \in I$
- $f \in I$ ve $h \in S$ iken $h \cdot f \in I$

şartları sağlanıyor ise, I'ya ideal denir.

Verilebilecek ilk doğal ideal örneği, sonlu sayıda polinomlar tarafından üretilen idealdir.

**3.2.2 Tanım** $f_1, f_2, \dots, f_s \in S$ polinomlar olsun.

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle = \{\textstyle\sum_{i=1}^{s} h_if_i \mid h_1, h_2, \dots, h_s \in S\}$$

kümesine $f_1, f_2, \dots, f_s$ polinomlar ile üretilen küme denir.

**3.2.3 Yardımcı Teorem** $f_1, f_2, \dots, f_s \in S$ olmak üzere,

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle = \{\sum_{i=1}^{s} h_i f_i \mid h_1, h_2, \dots, h_s \in S\}$$

kümesi, S halkasının bir idealidir.

**İspat** $0 = 0 \cdot f_1 + 0 \cdot f_2 + \cdots + 0 \cdot f_s\,,\ 0 \in k[x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n]$

$= \sum_{i=1}^{s} 0 \cdot f_i$

olarak yazılabileceğinden $0 \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$ elde edilir.

$f = \sum_{i=1}^{s} p_i f_i$ ve $g = \sum_{i=1}^{s} q_i f_i$ , $p_i, q_i \in S$ olsun.Böylece,

$$\begin{aligned} f + g &= (\textstyle\sum_{i=1}^{s} p_i f_i) + (\sum_{i=1}^{s} q_i f_i) \\ &= (p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_s f_s) + (q_1 f_1 + q_2 f_2 + \cdots + q_s f_s) \end{aligned}$$

yazabiliriz. $p_i, q_i, f_i \in S$ ve S halka olduğundan,

$$\begin{aligned} &= (p_1 f_1 + q_1 f_1) + (p_2 f_2 + q_2 f_2) + \cdots + (p_s f_s + q_s f_s) \\ &= (p_1 + q_1) f_1 + (p_2 + q_2) f_2 + \cdots + (p_s + q_s) f_s \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$f + g = \sum_{i=1}^{s} (p_i + q_i) f_i$$

olarak yazılır. Bu, $f + g \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$ olduğu anlamına gelir.

$f = \sum_{i=1}^{s} p_i f_i \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$ ve $h \in S$ alalım.

$$\begin{aligned} hf &= h(\textstyle\sum_{i=1}^{s} p_i f_i) \\ &= h(p_1 f_1 + p_2 f_2 + \cdots + p_s f_s) \end{aligned}$$

yazarız. Yine, $p_i, f_i, h \in S$ ve S halka olduğundan,

$$= (hp_1) f_1 + (hp_2) f_2 + \cdots + (hp_s) f_s$$

olur. Buradan,

$$hf = \sum_{i=1}^{s} (hp_i) f_i \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$$

bulunur. Böylece, 3.2.1 tanımdan, $\langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$, S halkasının bir ideali olur.

**3.2.4 Tanım** I, $S = k[x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n]$ halkasında bir ideal olsun. $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle$ olacak şekilde $f_1, f_2, \dots, f_s \in S$ polinomları var ise, I idealine sonlu üretilmiş ideal ve $f_1, f_2, \dots, f_s$ polinomlarına I idealinin tabanı denir.

**3.2.5 Tanım** I ve J, $S = k[x_1,\ x_2,\ \dots\ ,\ x_n]$ polinom halkasında iki ideal olsun. I ve J ideallerinin toplamı,

$$I + J = \{f + g \mid f \in I, g \in J\}$$

kümesidir.

**3.2.6 Yardımcı Teorem** I ve J, $S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında iki ideal ise, $I + J$'de S halkasında bir idealdir. Eğer, $I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ ve $J = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$ ise,

$$I + J = \langle f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$$

olur.

**İspat** I ve J ideal olduğundan $0 \in I$ ve $0 \in J$'dir.

$$0 = 0 + 0 \in I + J$$

elde edilir. $h_1, h_2 \in I + J$ olsun. $I + J$'nin tanımından

$$h_1 = f_1 + g_1,\ f_1 \in I, g_1 \in J$$

$$h_2 = f_2 + g_2,\ f_2 \in I, g_2 \in J$$

olur.

$$h_1 + h_2 = (f_1 + g_1) + (f_2 + g_2) \in S$$

ve S halka olduğundan

$$= (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2)$$

yazabiliriz.

$f_1,\ f_2 \in I$ ve I ideal $\Rightarrow\ f_1 + f_2 \in I$

$g_1,\ g_2 \in J$ ve J ideal $\Rightarrow\ g_1 + g_2 \in J$

olacağından,

$$h_1 + h_2 \in I + J$$

elde edilir. $h \in I + J$ ve $l \in S$ olsun.$h \in I + J$ olduğundan,

$$h = f + g$$

olacak şekilde $f \in I$ ve $g \in J$ vardır.

$$lh = l(f + g) \in S$$

$$= lf + lg$$

$f \in I$ ve I ideal $\Rightarrow\ lf \in I$

$g \in J$ ve J ideal $\Rightarrow\ lg \in J$

Böylece, $lh \in I + J$ elde edilir. 3.2.1 Tanımdan $I + J$ bir idealdir.

$I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle$ ve $J = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$ ideallerini alalım.

$I + J = \langle f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_r \rangle$ olduğunu görmek istiyoruz.

$h \in I + J$ alalım. Böylece,

$$h = f + g$$

olacak şekilde $f \in I$ ve $g \in J$ vardır.

$$f \in I \text{ ve } I = \langle f_1, f_2, \dots, f_s \rangle\ \Rightarrow f = h_1 f_1 + h_2 f_2 + \cdots + h_s f_s, \qquad h_i \in S$$

$$g \in J \text{ ve } J = \langle g_1, g_2, \dots, g_r \rangle\ \Rightarrow g = k_1 g_1 + k_2 g_2 + \cdots + k_r g_r, \qquad k_i \in S$$

yazabiliriz.

$$h = f + g = (h_1f_1 + h_2f_2 + \cdots + h_sf_s\,) + (k_1g_1 + k_2g_2 + \cdots + k_rg_r\,)$$

olduğundan $h \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_r\rangle$ olur.

Tersine, $h \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s, g_1, g_2, \dots, g_r\rangle$ olsun. 3.2.2 Tanımdan,

$$h = h_1f_1 + h_2f_2 + \cdots + h_sf_s\; + h_{s+1}g_1 + h_{s+2}g_2 + \cdots + h_{s+r}g_r$$

olur. Burada,

$$h_1f_1 + h_2f_2 + \cdots + h_sf_s\; \in \langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle = I$$

$$h_{s+1}g_1 + h_{s+2}g_2 + \cdots + h_{s+r}g_r\; \in \langle g_1, g_2, \dots, g_r\rangle = J$$

olduğundan $h \in I + J$ elde edilir.

**3.2.7 Sonuç** $f_1, f_2, \dots, f_s \in S = k[x_1,\, x_2,\, \dots\, ,\, x_n]$ ise,

$$\langle f_1, f_2, \dots, f_s\rangle = \langle f_1\rangle + \langle f_2\rangle + \cdots + \langle f_s\rangle\,.$$

**İspat** 3.2.6 Yardımcı teoremden açıktır.

**3.2.8 Tanım** I ve J, $S = k[x_1,\, x_2,\, \dots\, ,\, x_n]$ halkasında idealler olsun. I ve J ideallerinin çarpımı,

$$IJ = \{f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r\; | f_1, f_2, \dots, f_r \in I,\; g_1, g_2, \dots, g_r \in J \text{ ve r pozitif tamsayı}\}$$

kümesidir.

**3.2.9 Yardımcı Teorem** I ve J, $S = k[x_1,\, x_2,\, \dots\, ,\, x_n]$ halkasında idealler olsun. I ve J ideallerinin,

$$IJ = \{f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r\; | f_1, f_2, \dots, f_r \in I,\; g_1, g_2, \dots, g_r \in J, \text{r pozitif tamsayı}\}$$

kümesi, S halkasında bir idealdir.

**İspat** I ve J ideal olduklarından $0 \in I$ ve $0 \in J$'dir. Böylece,

$$0 = 0 \cdot 0 \in IJ$$

olur. $h_1, h_2 \in IJ$ alalım.

$$h_1 \in IJ \Rightarrow\; h_1 = f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r\,, f_i \in I, g_i \in J$$

$$h_2 \in IJ \Rightarrow\; h_2 = \bar{f}_1\bar{g}_1 + \bar{f}_2\bar{g}_2 + \cdots + \bar{f}_r\bar{g}_r\,, \bar{f}_i \in I, \bar{g}_i \in J$$

yazabiliriz.

$$h_1 + h_2 = f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r + \bar{f}_1\bar{g}_1 + \bar{f}_2\bar{g}_2 + \cdots + \bar{f}_r\bar{g}_r \in IJ$$

elde edilir. Son olarak, $h = f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r \in IJ$ ve $p \in k[x_1,\, x_2,\, \dots\, ,\, x_n]$ olsun.

$$\begin{aligned} ph &= p(f_1g_1 + f_2g_2 + \cdots + f_rg_r) \\ &= (pf_1)g_1 + (pf_2)g_2 + \cdots + (pf_r)g_r \end{aligned}$$

Burada, $1 \leq i \leq r, f_i \in I$ ve I ideal olduğundan $1 \leq i \leq r, pf_i \in I$ olur. $1 \leq j \leq r$ için $g_j \in J$ olduğundan,

$$ph \in IJ$$

elde edilir.

**3.2.10 Yardımcı Teorem** $S = k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasında $I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$ ve $J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_r \rangle$ ideallerini alalım. Bu durumda,

$$IJ = \left\langle f_i g_j \,\middle|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r \right\rangle$$

olur.

**İspat** İlk olarak

$$\left\langle f_i g_j \,\middle|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r \right\rangle \subseteq IJ$$

olduğunu görelim.

$$f \in \left\langle f_i g_j \,\middle|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r \right\rangle$$

alalım. Buradan,

$$f = f_1 g_1 + f_1 g_2 + \cdots + f_1 g_r + f_2 g_1 + f_2 g_2 + \cdots + f_2 g_r + \cdots + f_s g_1 + f_s g_2 + \cdots + f_s g_r$$

yazarız. $1 \leq i \leq s, f_i \in I$ ve $1 \leq j \leq r, g_j \in J$ olduğundan IJ'nin tanımından

$$f \in IJ$$

elde edilir. Şimdi,

$$IJ \subseteq \left\langle f_i g_j \,\middle|\, 1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r \right\rangle$$

ispatlayalım. $h \in IJ$ alalım. Bu durumda, $f \in I = \langle f_1, f_2, \ldots, f_s \rangle$ ve $g \in J = \langle g_1, g_2, \ldots, g_r \rangle$ olmak üzere,

$$h = fg$$

yazabiliriz.

$$f \in I \text{ olmasından } f = a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_s f_s$$

$$g \in J \text{ olmasından } g = b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_r g_r$$

olacak şekilde $a_1, a_2, \ldots, a_s, b_1, b_2, \ldots, b_r \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomları vardır.

$$\begin{aligned} H &= (a_1 f_1 + a_2 f_2 + \cdots + a_s f_s)(b_1 g_1 + b_2 g_2 + \cdots + b_r g_r \\ &= (a_1 f_1)(b_1 g_1) + \cdots + (a_1 f_1)(b_r g_r) + (a_2 f_2)(b_1 g_1) + \cdots + (a_2 f_2)(b_r g_r) + \cdots + \\ &\qquad (a_s f_s)(b_1 g_1) + \cdots + (a_s f_s)(b_r g_r) \\ &= \sum c_{ij} f_i g_j, \quad c_{ij} \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n] \end{aligned}$$

formunda ifade edilebilir. Çift taraflı kapsamadan sonuç elde edilmiş olur.

**3.2.11 Tanım** I ve J, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında idealler olsun. I ve J ideallerin kesişimi,

$$I \cap J = \{f \in k[x_1, x_2, \dots, x_n] \mid f \in I \text{ ve } f \in J\}$$

kümesidir.

**3.2.12 Yardımcı Teorem** I ve J, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında idealler ise, $I \cap J$'de bir idealdir.

**İspat** I ve J ideal olduklarından $0 \in I$ ve $0 \in J$'dir. Böylece,

$$0 \in I \cap J$$

olur. $f, g \in I \cap J$ alalım.

$$f \in I \text{ ve } f \in J$$

$$g \in I \text{ ve } g \in J$$

ise

$$f \in I \text{ ve } g \in I$$

$$f \in J \text{ ve } g \in J$$

ve I ve J ideal olduklarından

$$f + g \in I \text{ ve } f + g \in J$$

olur. Bu,

$$f + g \in I \cap J$$

olması demektir. $f \in I \cap J$ ve $h \in k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ alalım.

$$f \in I \cap J \Rightarrow f \in I \text{ ve } f \in J$$

olur.

$$f \in I \text{ ve I ideal olduğundan } hf \in I$$

$$f \in J \text{ ve J ideal olduğundan } hf \in J$$

Böylece,

$$hf \in I \cap J$$

elde edilir.

**3.2.13 Uyarı** I ve J, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında idealler olsun.

$$IJ \subset I \cap J$$

olur.

$f, g \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ polinomları, $1 \leq i \leq s, 1 \leq j \leq r$ için $f_i, g_j \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ olmak üzere,

$$f = cf_1^{a_1} f_2^{a_2} \ldots f_s^{a_s}$$

$$g = \bar{c} g_1^{b_1} g_2^{b_2} \ldots g_r^{b_r}$$

formunda olsun. f ve g polinomlarının en küçük ortak katı okek(f,g), $1 \leq l \leq \min(s, r)$ için, $1 \leq i \leq l$ iken $f_i$'ler $g_j$ polinomlarının sabit bir katı ve her $i, j > l$ için $f_i$'ler $g_j$ polinomlarının sabit bir katı değil ise,

$$\mathrm{okek}(f, g) = f_1^{\max(a_1, b_1)} \ldots f_l^{\max(a_l, b_l)} g_{l+1}^{b_{l+1}} \ldots g_r^{b_r} f_{l+1}^{a_{l+1}} \ldots f_s^{a_s}$$

olarak bulunur.

**3.2.14 Yardımcı Teorem** I ve J, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasında idealler, $I = \langle f \rangle$ ve $J = \langle g \rangle$ olsun. Bu durumda,

$$I \cap J = \langle h \rangle \text{ ve } h = \mathrm{okek}(f, g)$$

olur.

**3.2.15 Örnek** $\mathbb{Q}[x, y]$ halkasında

$$I = \langle (x+y)^4 (x^2+y)^2 (x-5y) \rangle$$

$$J = \langle (x+y)(x^2+y)^3 (x+3y) \rangle$$

ideallerini alalım.

$$f = (x+y)^4 (x^2+y)^2 (x-5y)$$

$$g = (x+y)(x^2+y)^3 (x+3y)$$

dersek,

$$\mathrm{okek}(f, g) = (x+y)^4 (x^2+y)^3 (x-5y)(x+3y)$$

bulunur. Böylece, 3.2.14 Yardımcı Teoremden,

$$I \cap J = \langle (x+y)^4 (x^2+y)^3 (x-5y)(x+3y) \rangle$$

elde edilir.

**3.2.16 Tanım** I, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasında bir ideal olsun. $f, g \in k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ için

$$fg \in I \text{ iken } f \in I \text{ veya } g \in I$$

oluyor ise, I'ya asal ideal denir.

### 3.3 Tekterimli İdealler

Gröbner Teori, zor cebirsel hesaplamaları, kombinatorik yapıya sahip olan tekterimli idealler ile yapılan hesaplamalara indirgediği için, bu ideal sınıfı oldukça ilgi çekicidir.

**3.3.1 Tanım** I, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında bir ideal olsun. I ideali tekterimliler tarafından üretiliyor ise, I'ya tekterimli ideal denir. I bir tekterimli ideal ise,

$$I = \left\langle x^a = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \;\middle|\; a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^n \right\rangle$$

yazarız.

**3.3.2 Örnek** $k[x, y]$ polinom halkasını alalım.

$$I = \langle x^5y^2, x^3y^4, x^2y^5 \rangle$$

ideali, $k[x, y]$ halkasında bir tekterimli idealdir.

$S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında,

$$u = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n} \text{ ve } v = x_1^{b_1} x_2^{b_2} \dots x_n^{b_n}$$

iki tekterimli olsun.

$$\mathrm{obeb}(u, v) = x_1^{\min\{a_1, b_1\}} x_2^{\min\{a_2, b_2\}} \dots x_n^{\min\{a_n, b_n\}}$$

$$\mathrm{okek}(u, v) = x_1^{\max\{a_1, b_1\}} x_2^{\max\{a_2, b_2\}} \dots x_n^{\max\{a_n, b_n\}}$$

olduğu açıktır.

**3.3.3 Teorem (Dickson's Lemma)** I, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında bir ideal olsun. I idealinin tekterimli üreteçlerinin her bir kümesi, yine I idealini üreten sonlu bir küme içerir.

**İspat** [5].

**3.3.4 Tanım** I, S'de bir tekterimli ideal olsun. I idealinin tekterimli üreteçlerinin kümesi, eğer bu kümenin herhangi bir altkümesi I idealini üretmiyor ise, minimal üreteç kümesi olarak adlandırılır.

**3.3.5 Yardımcı Teorem** I, S halkasında bir tekterimli ideal olsun. Bu durumda, I idealinin tekterimli üreteçlerinin bir tek minimal kümesi vardır.

**İspat** [6].

**3.3.6 Uyarı** I tekterimli idealinin bir tek olan minimal üreteç kümesi, G(I) ile gösterilecektir. I ve J, tekterimli idealler olsun. Bu durumda,

$$G(I + J) \subseteq G(I) \cup G(J)$$

ve $G(I)G(J) = \{uv \mid u \in G(I), v \in G(J)\}$ olmak üzere,

$$G(IJ) \subseteq G(I)G(J)$$

olduğu açıktır.

**3.3.7 Örnek** $k[x_1, x_2, x_3]$ polinom halkasında,

$$I = \langle x_1x_2, x_2x_3^2\rangle \text{ ve } J = \langle x_1^2x_2, x_2x_3\rangle$$

İdeallerini alalım. Bu durumda, 3.2.6 Yardımcı Teoremden,

$$I + J = \langle x_1x_2, x_2x_3^2, x_1^2x_2, x_2x_3\rangle$$

elde edilir.

$$x_1^2x_2 = x_1(x_1x_2)$$

$$x_2x_3^2 = x_3(x_2x_3)$$

olduğundan, $I + J$ tekterimli idealinin minimal üreteç kümesi

$$G(I + J) = \{x_1x_2, x_2x_3\}$$

olarak bulunur. Yine, IJ ideali, 3.2.9 Yardımcı Teoremden,

$$IJ = (x_1^3x_2^2, x_1x_2^2x_3, x_1^2x_2^2x_3^2, x_2^2x_3^3)$$

olarak bulunur.

$$x_1^2x_2^2x_3^2 = x_1x_3(x_1x_2^2x_3)$$

olarak yazılabileceğinden

$$G(IJ) = \{x_1^3x_2^2, x_1x_2^2x_3, x_2^2x_3^3\}$$

elde edilir.

**3.3.8 Yardımcı Teorem** I ve J, $k[x_1,\ x_2,\ \ldots\ ,\ x_n]$ halkasında tekterimli idealler, $G(I) = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$ ve $G(J) = \{v_1, v_2, \ldots, v_s\}$ olsun. Bu durumda,

$$I \cap J = \left\langle \{\mathrm{okek}\left(u_i, v_j\right) \middle|\ i = 1,2, \ldots, r,\ \ j = 1,2, \ldots, s\}\right\rangle$$

olur.

**İspat:** [6].

### 3.4 Karesiz Tekterimli İdealler

Stanley-Reisner idealleri olarakta bilinen karesiz tekterimli idealler kombinatorik bir yapıya sahiptirler ve bu yapı, bu ideallerin simplisyal topoloji ile olan yakın bağlantısından kaynaklanır.

**3.4.1 Tanım** $x^a = x_1^{a_1}x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında bir tekterimli olsun. Her $i = 1,2,\dots,n$ için $a_i \leq 1$ ise, $x^a$ tekterimlisine, karesiz tekterimli denir. I tekterimli idealinin, minimal üreteç kümesi G(I), karesiz tekterimlilerden oluşuyor ise, I'ya karesiz tekterimli ideal denir.

**3.4.2 Örnek** $k[x_1, x_2, x_3]$ halkasında,

$$I = \langle x_1x_2, x_2x_3 \rangle$$

ideali bir karesiz tekterimli ideal iken,

$$I = \langle x_1^2x_2, x_2x_3^2 \rangle$$

ideali karesiz tekterimli ideal değildir.

**3.4.3 Uyarı** I ve J, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasında iki karesiz tekterimli idealler olsun. Bu durumda, $I \cap J$ idealide bir karesiz tekterimli idealdir.

**3.4.4 Örnek** $k[x, y, z, w]$ halkasında,

$$I = \langle xy, yz, zx \rangle \text{ ve } J = \langle yw, zw, xw \rangle$$

Karesiz tekterimli ideallerini alalım. 3.3.8 Yardımcı Teorem kullanılarak

$$I \cap J = \langle xyw, xyzw, xyw, yzw, yzw, yzxw, zxyw, zxw, zxw \rangle$$

bulunur. Burada,

$$xyzw = z(xyw)$$

$$yzxw = x(yzw)$$

$$zxyw = y(zxw)$$

olduğundan, $I \cap J$ idealinin minimal üreteç kümesi

$$G(I \cap J) = \{xyw, yzw, zxw\}$$

olarak bulunur.

**3.4.5 Yardımcı Teorem** I, $k[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ halkasında karesiz tekterimli ideal olsun. Bu durumda, I, tekterimli asal ideallerin sonlu kesişimidir.

**İspat** I bir karesiz tekterimli ideal olsun. I'nın minimal üreteç kümesi

$$G(I) = \{u_1, u_2, \ldots, u_r\}$$

olsun. r üzerinden tümevarım yapalım.

$r = 1$ ise, $I = \langle u_1 \rangle = \langle x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_d} \rangle = \bigcap_{j=1}^{d} \langle x_{i_j} \rangle$.

$r > 1$ ve $u_1 = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_d}$ olduğunu varsayalım. 3.3.8 Yardımcı Teoremden,

$$I = \bigcap_{j=1}^{d} \langle x_{i_j}, u_2, \ldots, u_r \rangle$$

yazabiliriz. Tümevarım hipotezinden, her bir $P_i$ tekterimli asal ideal olmak üzere,

$$\langle u_2, \ldots, u_r \rangle = \bigcap_{i=1}^{s} P_i$$

olur. Bu durumda,

$$I = \bigcap_{j=1}^{d} \left( \bigcap_{i=1}^{s} \langle \langle x_{i_j} \rangle + P_i \rangle \right)$$

elde edilir.

# 4.STANLEY-REISNER TEORİ

Stanley-Reisner teorisi, kombinatorik ve değişmeli cebir arasındaki bağlantıyı sağlar. 1970’li yılların ortalarında Hochster ve Stanley [7], [8] tarafından ortaya atılan ve simplisyal kompleksler ve karesiz tekterimli idealler arasındaki karşılık gelme, her iki alanda da önemli gelişmelere sebep olmuştur.

## 4.1 Simplisyal Kompleksler

**4.1.1 Tanım** $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ köşe kümesi üzerinde bir $\Delta$ simplisyal kompleksi, X ’in altkümelerinin,

- $\forall i = 1, 2, \dots, n$ için $\{x_i\} \in \Delta$
- $F \in \Delta$ ve $G \subseteq F$ iken $G \in \Delta$

koşullarını sağlayan bir koleksiyonudur. $\Delta$ ‘nın elemanlarına yüzler veya simpleksler denir. $\Delta$ simplisyal kompleksinin bir F yüzü, $\Delta$ ‘nın bir başka yüzü tarafından kapsanmıyor ise F ‘ye faset adı verilir.

**4.1.2 Örnek** $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ olmak üzere, X köşe kümesi üzerinde,

$$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$$

kümesini alalım.

$i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ için $\{x_i\} \in \Delta$ olduğu açıktır.

$F_1 = \{x_1, x_2\} \in \Delta$ iken $\{x_1\} \in \Delta, \{x_2\} \in \Delta$

$F_2 = \{x_1, x_3\} \in \Delta$ iken $\{x_1\} \in \Delta, \{x_3\} \in \Delta$

$F_3 = \{x_2, x_3\} \in \Delta$ iken $\{x_2\} \in \Delta, \{x_3\} \in \Delta$

$F_4 = \{x_3, x_4\} \in \Delta$ iken $\{x_3\} \in \Delta, \{x_4\} \in \Delta$

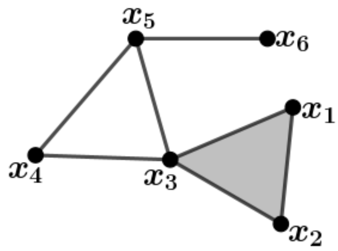
$F_5 = \{x_3, x_5\} \in \Delta$ iken $\{x_3\} \in \Delta, \{x_5\} \in \Delta$

$F_6 = \{x_4, x_5\} \in \Delta$ iken $\{x_4\} \in \Delta, \{x_5\} \in \Delta$

$F_7 = \{x_5, x_6\} \in \Delta$ iken $\{x_5\} \in \Delta, \{x_6\} \in \Delta$

$F_8 = \{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ iken $\{x_1\} \in \Delta, \{x_2\} \in \Delta, \{x_3\} \in \Delta, \{x_1, x_2\} \in \Delta, \{x_1, x_3\} \in \Delta, \{x_2, x_3\} \in \Delta$

olduğundan 4.1.1 Tanımdan $\Delta$ bir simplisyal komplekstir. $\Delta$ simplisyal kompleksi




olarak çizilebilir.

**4.1.3 Örnek** $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ olmak üzere, X köşe kümesi üzerinde,

$\Delta = \{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3\}\}$

kümesini alalım.

$F = \{x_1, x_2, x_3\} \in \Delta$ iken $\{x_1, x_2\} \in \Delta, \{x_1, x_3\} \in \Delta$ fakat $\{x_2, x_3\} \notin \Delta$

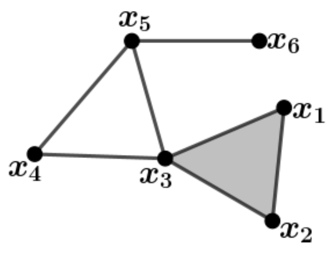
olduğundan $\Delta$ bir simplisyal kompleks değildir.

**4.1.4 Tanım** $\Delta$ bir simplisyal kompleks ve $F \in \Delta$ olsun. $|F|$, F yüzünün eleman sayısı olmak üzere $|F| = i + 1$ ise, F 'nın boyutu i'dir ve $\dim F = i$ ile gösterilir. $\Delta$ simplisyal kompleksinin boyutu,

$$\dim\Delta = \max\{\dim F \mid F \in \Delta\}$$

olarak tanımlanır. $\Delta = \{\ \}$, bir başka deyişle $\Delta$ boş kompleks ise $\dim\Delta = -\infty$ olur.

**4.1.5 Örnek** $\Delta$,




simplisyal kompleksi olsun.

$\Delta$'nın F yüzlerinin boyutunu bulalım:

$F_1 = \{x_1\}$ ise $|F_1| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_1) = 0$

$F_2 = \{x_2\}$ ise $|F_2| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_2) = 0$

$F_3 = \{x_3\}$ ise $|F_3| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_3) = 0$

$F_4 = \{x_4\}$ ise $|F_4| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_4) = 0$

$F_5 = \{x_5\}$ ise $|F_5| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_5) = 0$

$F_6 = \{x_6\}$ ise $|F_6| = 1 = 0 + 1 \Rightarrow \dim(F_6) = 0$

$F_7 = \{x_1, x_2\}$ ise $|F_7| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_7) = 1$

$F_8 = \{x_1, x_3\}$ ise $|F_8| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_8) = 1$

$F_9 = \{x_2, x_3\}$ ise $|F_9| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_9) = 1$

$F_{10} = \{x_3, x_4\}$ ise $|F_{10}| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_{10}) = 1$

$F_{11} = \{x_3, x_5\}$ ise $|F_{11}| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_{11}) = 1$

$F_{12} = \{x_4, x_5\}$ ise $|F_{12}| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_{12}) = 1$

$F_{13} = \{x_5, x_6\}$ ise $|F_{13}| = 2 = 1 + 1 \Rightarrow \dim(F_{13}) = 1$

$F_{14} = \{x_1, x_2, x_3\}$ ise $|F_{14}| = 3 = 2 + 1 \Rightarrow \dim(F_{14}) = 2$

olur. Böylece,

$$\dim\Delta = \max\{\dim F | F \in \Delta\}$$

$$\dim\Delta = \max\{0, 1, 2\} = 2$$

olarak elde edilir.

**4.1.6 Tanım** $\Delta$ simplisyal kompleks ve F, $\Delta$'nın bir yüzü olsun. $\dim F = i$ ise, F yüzüne $\Delta$'nın i-yüzü denir. $\Delta$'nın i-yüzlerinin sayısı $f_i$ ile gösterilir. $f_{-1} = 1$ olarak tanımlanır.

**4.1.7 Örnek** $\Delta$, 4.1.5 Örnekteki simplisyal kompleks olsun. $\Delta$'nın boyutu $\dim\Delta = 2$ idi. $i = 0, \dots, \dim\Delta$ olmak üzere $\Delta$'nın i-yüzlerini bulalım.

$f_{-1} = 1$

$f_0 =$ $\Delta$'nın 0-boyutlu yüzlerinin sayısı $= 5$

$f_1 =$ $\Delta$'nın 1-boyutlu yüzlerinin sayısı $= 9$

$f_2 =$ $\Delta$'nın 2-boyutlu yüzlerinin sayısı $= 5$

bulunur.

**4.1.8 Tanım** $\Delta$ simplisyal kompleks, $\dim\Delta = d - 1$ ve $f_i$'ler, $\Delta$'nın i-yüzlerinin sayısı olmak üzere,

$$f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, f_1, f_2, \dots, f_{d-2}, f_{d-1})$$

dizisine, $\Delta$ simplisyal kompleksinin f-vektörü ve

$$f_\Delta(t) = f_{-1}t^d + f_0 t^{d-1} + \dots + f_{d-2}t + f_{d-1}$$

polinomuna, f-polinomu denir.

$$h_\Delta(t) = f_\Delta(t-1) = h_0 t^d + h_1 t^{d-1} + \dots + h_{d-1}t + h_d$$

polinomu, $\Delta$'nın h-polinomudur.

$$h(\Delta) = (h_0, h_1, \ldots, h_d)$$

dizisine de $\Delta$'nın h-vektörü denir.

**4.1.9 Örnek** $\Delta$ simplisyal kompleksi, 4.1.5 Örnekteki kompleks olsun. 4.1.7 Örnekten, $\Delta$'nın f-vektörü

$$f(\Delta) = (f_{-1}, f_0, f_1, f_2) = (1, 5, 9, 5)$$

olarak bulunur. $\dim\Delta = 2 = d - 1$ olmasından $d = 3$ olduğuna dikkat edersek, $\Delta$'nın f-polinomu

$$\begin{aligned} f_\Delta(t) &= f_{-1}t^3 + f_0t^2 + f_1t + f_2 \\ &= t^3 + 5t^2 + 9t + 5 \end{aligned}$$

elde edilir. $\Delta$'nın h-polinomu, f-polinomunda t yerine $t - 1$ yazılarak,

$$\begin{aligned} h_\Delta(t) = f_\Delta(t-1) &= (t-1)^3 + 5(t-1)^2 + 9(t-1) + 5 \\ &= (t^3 - 3t^2 + 3t - 1) + 5(t^2 - 2t + 1) + 9(t-1) + 5 \end{aligned}$$

eşitliğinden

$$h_\Delta(t) = t^3 + 2t^2 + 2t + 0$$

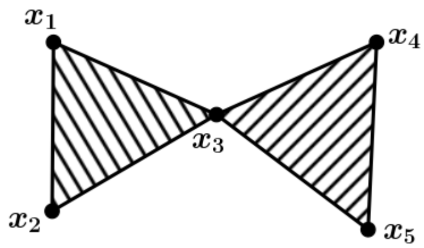
olarak elde edilir. Burada, $\Delta$'nın h-vektörü

$$h(\Delta) = (h_0, h_1, h_2, h_3) = (1, 2, 2, 0)$$

dizisidir.

**4.1.10 Tanım** $\Delta$ bir simplisyal kompleks olsun. Eğer $F \notin \Delta$ fakat her $G \subseteq F$ için $G \in \Delta$ ise F'ye, $\Delta$'nın minimal yüz olmayanları denir.

**4.1.11 Örnek** $\Delta$ simplisyal kompleks,




şeklinde verilsin. $\Delta$'yı

$$\{\{x_1\}, \{x_2\}, \{x_3\}, \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_1, x_2\}, \{x_1, x_3\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_3, x_5\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_2, x_3\}, \{x_3, x_4, x_5\}\}$$

olarak yazabiliriz.

$\Delta$'nın yüzü olmayanları,

$\{\{x_1,x_4\},\{x_1,x_5\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_1,x_2,x_5\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_5\},$
$\{x_1,x_2,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_3,x_5\},\{x_2,x_3,x_4,x_5\}\}$

olarak bulunur. Burada,

$$\{x_1,x_4\} \notin \Delta \text{ fakat } \{x_1\},\{x_4\} \in \Delta$$
$$\{x_1,x_5\} \notin \Delta \text{ fakat } \{x_1\},\{x_5\} \in \Delta$$
$$\{x_2,x_4\} \notin \Delta \text{ fakat } \{x_2\},\{x_4\} \in \Delta$$
$$\{x_2,x_5\} \notin \Delta \text{ fakat } \{x_2\},\{x_5\} \in \Delta$$

olduğu görülür. Böylece, 4.1.10 Tanımdan

$$\{\{x_1,x_4\},\{x_1,x_5\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\}\}$$

$\Delta$'nın minimal yüzü olmayanlarıdır. Burada,

$$\{x_1,x_2,x_4\} \notin \Delta \text{ fakat } \{x_1,x_2\} \in \Delta \text{ iken } \{x_1,x_4\} \notin \Delta \text{ ve } \{x_2,x_4\} \notin \Delta$$

olmadığından $\{x_1,x_2,x_4\}$, $\Delta$'nın minimal yüzü olmayanı olamaz. Diğerleri de benzer şekilde gösterilebilir.

## 4.2 Stanley-Reisner Karşılık Gelmesi

Stanley-Reisner karşılık gelmesi, simplekslerdeki bilgileri, karesiz tekterimlilerdeki bilgilere bağlayan gözlemlerden ortaya çıkar.

**4.2.1 Tanım** $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ve $A\subseteq X$ olsun. A kümesi üzerinde desteklenen tekterimli,

$$x^A=\prod_{x_i\in A} x_i$$

olan karesiz tekterimlidir. Tersine, eğer m bir karesiz tekterimli ise, m'nin desteği,

$$\mathrm{supp}(m)=\{x_i \mid x_i|m\}$$

olarak tanımlanır.

**4.2.2 Tanım** I bir karesiz tekterimli ideal olsun. I idealinin Stanley-Reisner kompleksi, $\Delta_I$,

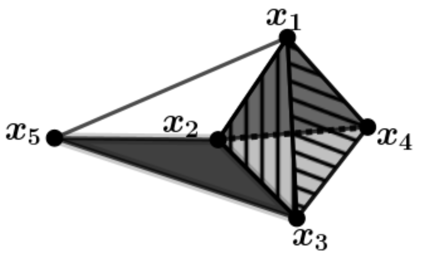
$$\Delta_I=\{F\subseteq X \mid x^F\notin I\}$$

kompleksidir. Bir başka deyişle, $\Delta_I$, I idealinde olmayan tekterimlilerin oluşturduğu simplisyal komplekstir. Benzer şekilde, $\Delta$'nın Stanley-Reisner ideali, $I_\Delta$, $\Delta$'nın yüz olmayan elemanları ile üretilen karesiz tekterimli idealdir. Böylece,

$$I_\Delta=\langle x^F \mid F\notin\Delta\rangle$$

olur.

**4.2.3 Örnek** $\Delta$ simplisyal kompleksi,




$\Delta = \{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_4\},\{x_1,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\},$
$\{x_3,x_4\},\{x_3,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_5\}\}$

olsun. $\Delta$'nın yüz olmayanları,

$\{x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_5\},\{x_1,x_3,x_5\},\{x_1,x_4,x_5\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$
$\{x_1,x_2,x_3,x_5\},\{x_1,x_2,x_4,x_5\},\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2,x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$

olarak bulunur. $\Delta$'nın Stanley-Reisner ideali $I_\Delta$,

$$I_\Delta =< x_4x_5, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_1x_4x_5, x_2x_4x_5, x_3x_4\,x_5, x_1x_2x_3x_4, x_1x_2x_3x_5, x_1x_2x_4x_5, x_1x_3x_4x_5, x_2x_3x_4x_5, x_1x_2x_3x_4x_5 >$$

olur. $I_\Delta$'nın üreteçleri minimal değildir.

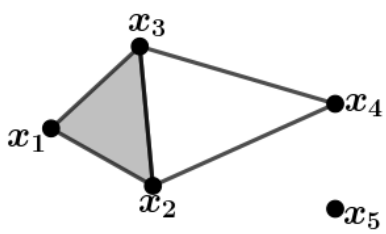
$$I_\Delta =< x_4x_5, x_1x_2x_5, x_1x_3x_5, x_1x_2x_3x_4 >$$

şeklinde minimal olarak yazılabilir.

**4.2.4 Örnek** $k[x_1,x_2,x_3,x_4,x_5]$ halkasında, $I = \langle x_1x_4, x_1x_5, x_2x_5, x_3x_5, x_4x_5, x_2x_3x_4\rangle$ karesiz tekterimli idealini alalım. I idealinde olmayan tekterimliler,

$$\Delta_I = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_1x_2,x_1x_3,x_2x_3,x_2x_4,x_3x_4,x_1x_2x_3\}$$

olarak bulunur. Burada, örneğin $x_1x_2x_4 = x_2(x_1x_4)$ olarak yazılabileceğinden $x_1x_2x_4$ tekterimlisinin bu kümede olmayacağına dikkat ediniz. Bu, $\Delta_I$ kümesine, I idealinin Stanley-Reisner kompleksi denir ve




şeklinde gösterilir.

**4.2.5 Tanım** $\Delta$ bir simplisyal kompleks olsun. $I_\Delta$, $\Delta$'nın Stanley-Reisner ideali olmak üzere, $\Delta$'nın Stanley-Reisner halkası veya yüz halkası,

$$R_\Delta = S/_{I_\Delta} = k[x_1, x_2, \dots, x_n]/_{I_\Delta}$$

bölüm halkasıdır.

**4.2.6 Uyarı** A, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ kümesinin boş küme olmayan bir alt kümesi ise, A'nın elemanları ile üretilen asal ideal $P_A$,

$$P_A = \langle x_i \mid x_i \in A \rangle$$

olarak gösterilir. m bir tekterimli ise, $P_m$ yazarız.

**4.2.7 Teorem** Köşelerinin kümesi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan $\Delta$ simplisyal kompleksi ile, $S = k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ halkasındaki karesiz tekterimli idealler arasında birebir bir karşılık gelme vardır. Üstelik, F, $\Delta$'nın bir faseti ve

$$P_F = \langle x_i \mid x_i \notin F \rangle$$

olmak üzere

$$I_\Delta = \bigcap_{F \in \Delta} P_F.$$

**İspat:** [9], [10].

### 4.3 Alexander Dualite Teorisi

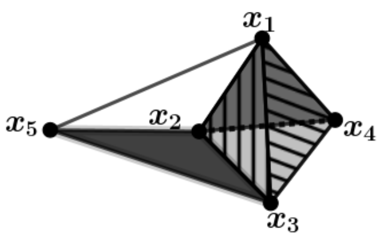
Bu bölümde, Alexander dualite kavramını kombinatorik açıdan tanıtarak, bir $\Delta$ simplisyal kompleksinin $\Delta^\vee$ dual kompleksini elde edeceğiz.

**4.3.1 Tanım** $\Delta$, köşelerinin kümesi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olan bir simplisyal kompleks olsun. $\Delta$'nın, $\Delta^\vee$ ile gösterilen Alexander duali, yüzleri

$$\{X/F = F^c \mid F \notin \Delta\}$$

olan simplisyal kompleksdir. Bir başka deyişle, $\Delta^\vee$'nın yüzleri, $\Delta$'nın yüz olmayanlarının tümleyenlerinden oluşur.

**4.3.2 Örnek** $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ kümesi üzerinde,



$\Delta = \{\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\{x_4\},\{x_5\},\{x_1,x_2\},\{x_1,x_3\},\{x_1,x_4\},\{x_1,x_5\},\{x_2,x_3\},\{x_2,x_4\},\{x_2,x_5\},$
$\{x_3,x_4\},\{x_3,x_5\},\{x_1,x_2,x_3\},\{x_1,x_3,x_4\},\{x_1,x_2,x_4\},\{x_2,x_3,x_4\},\{x_2,x_3,x_5\}\}$
simplisyal kompleksini düşünelim. $\Delta$'nın yüz olmayanları,
$\{x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_5\},\{x_1,x_3,x_5\},\{x_1,x_4,x_5\},\{x_2,x_4,x_5\},\{x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3,x_4\},$
$\{x_1,x_2,x_3,x_5\},\{x_1,x_2,x_4,x_5\},\{x_1,x_3,x_4,x_5\},\{x_2,x_3,x_4,x_5\},\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$
olarak bulunur. Bu elemanları sırasıyla alırsak

$\{x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_1,x_2,x_3\}$

$\{x_1,x_2,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_3,x_4\}$

$\{x_1,x_3,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_2,x_4\}$

$\{x_1,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_2,x_3\}$

$\{x_3,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_1,x_2\}$

$\{x_2,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_1,x_3\}$

$\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \Rightarrow F^c = \{x_5\}$

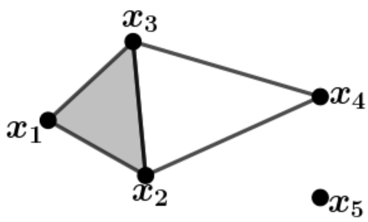
$\{x_1,x_2,x_3,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_4\}$

$\{x_1,x_2,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_3\}$

$\{x_1,x_3,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_2\}$

$\{x_2,x_3,x_4,x_5\} \Rightarrow F^c = \{x_1\}$

elde edilir. Böylece $\Delta$'nın $\Delta^{\vee}$ Alexander duali,




simplisyal kompleksidir.

**4.3.3 Uyarı** $\Delta$ bir simplisyal kompleks ve I bir karesiz tekterimli ideal olsun. Bu durumda,

$$(\Delta^{\vee})^{\vee} = \Delta \text{ ve } (I^{\vee})^{\vee} = I$$

olur.

# 5.KENAR İDEALLER

Çizgeler, uygun bir polinom halkasındaki tekterimli idealler kullanılarak çalışılabilmektedir. $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olmak üzere, $G = (X, E)$ basit çizgesi verilsin. Üreteçleri, bu çizgenin kenarları tarafından oluşturulan bir ideali, cebirsel olarak çalışmak istiyoruz. Bu ideal $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom halkasında bulunur ve bu polinom halkasının değişkenleri , G çizgesinin köşe kümesine karşılık gelir. Bir karesiz tekterimli idealin minimal üreteçlerini, basit bir çizgenin kenarları ile tanımlayan kenar ideal kavramı, ilk olarak Villareal [11] tarafından çizgeler için tanıtılmış ve daha sonra hiperçizgelere genişletilmiştir.

## 5.1 Basit Çizgelerin Kenar İdealleri

Bu bölümde, basit çizgelerin kenar ve örtü ideallerini tanıtacağız.

**5.1.1 Tanım** $G = (X, E)$ basit çizgesi verilsin. G çizgesinin kenar ideali

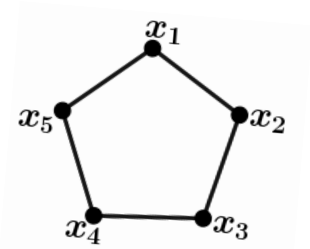
$$I(G) = \langle x_i x_j \mid \{x_i x_j\} \in E \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

ve G'nın örtü ideali

$$J(G) = \bigcup_{\{x_i, x_j\} \in E} \langle x_i, x_j \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

karesiz tekterimli idealleridir.

**5.1.2 Örnek** G basit çizgesi




şekli ile verilsin. G çizgesinin kenar idealini bulalım. G'nın kenarları

$$\{x_1, x_2\}, \{x_2, x_3\}, \{x_3, x_4\}, \{x_4, x_5\}, \{x_1, x_5\}$$

olduğundan, 5.1.1 Tanımdan, G'nın kenar ideali,

$$I(G) = \langle x_1 x_2, x_2 x_3, x_3 x_4, x_4 x_5, x_5 x_1 \rangle$$

karesiz tekterimli idealdir. Şimdi, G çizgesinin örtü idealini bulalım. Yine, 5.1.1 Tanımdan,

$$J(G) = \langle x_1, x_2 \rangle \cap \langle x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_3, x_4 \rangle \cap \langle x_4, x_5 \rangle \cap \langle x_1, x_5 \rangle$$

bulunur. Burada,

$I_1 = \langle x_1, x_2 \rangle$, $I_2 = \langle x_2, x_3 \rangle$, $I_3 = \langle x_3, x_4 \rangle$, $I_4 = \langle x_4, x_5 \rangle$ ve $I_5 = \langle x_1, x_5 \rangle$ olsun.

$I_1 \cap I_2$ idealini bulalım.

$$I_1 = \langle x_1, x_2 \rangle,\ f_1 = x_1,\ f_2 = x_2$$

$$I_2 = \langle x_2, x_3 \rangle,\ g_1 = x_2,\ g_2 = x_3$$

yazalım. Böylece,

$$\text{okek}(f_1, g_1) = x_1 x_2$$

$$\text{okek}(f_1, g_2) = x_1 x_3$$

$$\text{okek}(f_2, g_1) = x_2$$

$$\text{okek}(f_2, g_2) = x_2 x_3$$

bulunur. Böylece, 3.2.14 Yardımcı Teoremden,

$$I_1 \cap I_2 = \langle x_1 x_2, x_1 x_3, x_2, x_2 x_3 \rangle$$

Bu ideali, $x_1 x_2 = (x_1) x_2$ ve $x_2 x_3 = (x_3) x_2$ olduğundan

$$I_1 \cap I_2 = \langle x_1 x_3, x_2 \rangle$$

elde edilir. Şimdi, $(I_1 \cap I_2) \cap I_3$ idealini bulalım.

$$I_1 \cap I_2 = \langle x_1 x_3, x_2 \rangle,\ f_1 = x_1 x_3,\ f_2 = x_2$$

$$I_3 = \langle x_3, x_4 \rangle,\ g_1 = x_3,\ g_2 = x_4$$

yazalım. Böylece,

$$\text{okek}(f_1, g_1) = x_1 x_3$$

$$\text{okek}(f_1, g_2) = x_1 x_3 x_4$$

$$\text{okek}(f_2, g_1) = x_2 x_3$$

$$\text{okek}(f_2, g_2) = x_2 x_4$$

Bu eşitliklerden ve 3.2.14 Yardımcı Teoremden,

$$(I_1 \cap I_2) \cap I_3 = \langle x_1 x_3, x_1 x_3 x_4, x_2 x_3, x_2 x_4 \rangle$$

Yine, $x_1 x_3 x_4 = x_4 (x_1 x_3)$ olduğundan

$$(I_1 \cap I_2) \cap I_3 = \langle x_1 x_3, x_2 x_3, x_2 x_4 \rangle$$

bulunur. Benzer şekilde devam edersek,

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 = \langle x_1 x_3, x_2 x_3, x_2 x_4 \rangle,\ f_1 = x_1 x_3,\ f_2 = x_2 x_3,\ f_3 = x_2 x_4$$

$$I_4 = \langle x_4, x_5 \rangle,\ g_1 = x_4,\ g_2 = x_5$$

yazalım. Böylece,

$$\text{okek}(f_1, g_1) = x_1 x_3 x_4$$

$$\text{okek}(f_1, g_2) = x_1 x_3 x_5$$

$$\text{okek}(f_2, g_1) = x_2 x_3 x_4$$

$$\text{okek}(f_2, g_2) = x_2 x_3 x_5$$

$$\text{okek}(f_3, g_1) = x_2 x_4$$

$$\text{okek}(f_3, g_2) = x_2x_4x_5$$

Bu eşitliklerden ve 3.2.14 Yardımcı Teoremden,

$$(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cap I_4 = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_4, x_2x_3x_5, x_2x_4, x_2x_4x_5 \rangle$$

Burada, $x_2x_3x_4 = x_3(x_2x_4)$ ve $x_2x_4x_5 = x_5(x_2x_4)$ olduğundan

$$(I_1 \cap I_2 \cap I_3) \cap I_4 = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_2x_4 \rangle$$

bulunur.

$$I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_2x_4 \rangle, f_1 = x_1x_3x_4,\ f_2 = x_1x_3x_5,$$
$$f_3 = x_2x_3x_5\ , f_4 = x_2x_4$$
$$I_5 = \langle x_1, x_5 \rangle,\ g_1 = x_1,\ g_2 = x_5$$

yazalım. Böylece,

$$\text{okek}(f_1, g_1) = x_1x_3x_4$$
$$\text{okek}(f_1, g_2) = x_1x_3x_4x_5$$
$$\text{okek}(f_2, g_1) = x_1x_3x_5$$
$$\text{okek}(f_2, g_2) = x_1x_3x_5$$
$$\text{okek}(f_3, g_1) = x_1x_2x_3x_5$$
$$\text{okek}(f_3, g_2) = x_2x_3x_5$$
$$\text{okek}(f_4, g_1) = x_1x_2x_4$$
$$\text{okek}(f_4, g_2) = x_2x_4x_5$$

Yine bu eşitliklerden ve 3.2.14 Yardımcı Teoremden,

$$(I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4) \cap I_4 = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_4x_5, x_1x_3x_5, x_1x_2x_3x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_4, x_2x_4x_5 \rangle$$

ve böylece,

$$J(G) = \langle x_1x_3x_4, x_1x_3x_5, x_2x_3x_5, x_1x_2x_4, x_2x_4x_5 \rangle$$

olarak bulunur.

5.1.1 Tanımdaki yapıyı tersine çevirebiliriz. I, $k[x_1, x_2, \dots, x_n]$ polinom halkasında,

$$I = \langle x_{1,1}, x_{1,2}, \dots, x_{k,1}, x_{k,2} \rangle$$

formundaki herhangi bir karesiz tekterimli ideal ise, kenar ideali I olan bir basit G çizgesi oluşturabiliriz. Böylece,

$$I \to G = \left(X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \left\{\{x_{1,1}, x_{1,2}\}, \{x_{2,1}, x_{2,2}\}, \dots, \{x_{k,1}, x_{k,2}\}\right\}\right)$$

çizgesine karşılık gelir. Yine, eğer

$$J = \cap_{i=1}^{k} \langle x_{i,1}, x_{i,2} \rangle$$

olan bir karesiz tekterimli ise, örtü ideali J olan G çizgesini

$$\mathrm{J} \to \mathrm{G} = (\mathrm{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \left\{\{x_{i,1}, x_{i,2}\}\middle| i = 1,2,..,k\right\})$$

olacak şekilde oluşturabiliriz.

## 5.2 Hiperçizgelerin Kenar İdealleri

Bir çizgenin kenar ve örtü ideal tanımları, hiperçizgelere genişletilebilmektedir.

**5.2.1 Tanım** H, köşe kümesi $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve kenar kümesi E olan bir hiperçizge olsun. H'nın kenar ideali

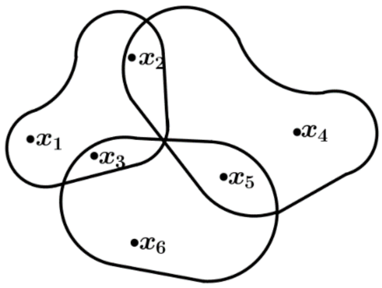
$$I(H) = \langle x_e = \prod_{x \in e} x \mid e \in E \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

ve örtü ideali

$$J(H) = \bigcap_{e \in E} \langle x \mid x \in E \rangle \subseteq k[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

olarak tanımlanır.

**5.2.2 Örnek**




şeklinde verilen

$$H = (X = \{x_1,\ x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}, E = \{\{x_1, x_2, x_3\}, \{x_2, x_4, x_5\}, \{x_3, x_5, x_6\}\}$$

hiperçizgesini alalım.

$$I(H) = \langle x_1x_2x_3, x_2x_4x_5, x_3x_5x_6 \rangle$$

$$J(H) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle \cap \langle x_2, x_4, x_5 \rangle \cap \langle x_3, x_5, x_6 \rangle$$

idealleri sırasıyla H hiperçizgesinin kenar ve örtü idealleridir.

Bu yapı, karesiz tekterimli idealler ve hiperçizgeler arasında birebir bir karşılık gelme sağlar. Bu karşılık gelme, karesiz tekterimli ideallerin cebirsel özelliklerini ilişkili olduğu hiperçizgelerden elde edilen kombinatorik veriler açısından incelememize olanak sağlar.

## 5.3 Çizgelerin Yol İdealleri

Çizgelerin yol idealleri, ilk olarak Conca ve De Negri [12] tarafından, kenar idealleri genişletmek için ortaya atılmıştır.

**5.3.1 Tanım** $\mathrm{G} = (\mathrm{X}, \mathrm{E})$ çizgesini alalım. G çizgesinde, $\mathrm{j} = 1, 2, \dots, \mathrm{t} - 1$ için $\{x_{i_j}, x_{i_{j+1}}\} \in \mathrm{E}$ olacak şekilde t sayıdaki farklı köşelerin oluşturduğu $\{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}$ kümesine, G çizgesinde t uzunlukta bir yol denir.

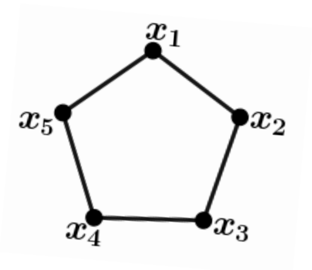
**5.3.2 Tanım** $\mathrm{G} = (\mathrm{X}, \mathrm{E})$ çizgesinde t uzunluktaki yol ideali, $\mathrm{I_t(G)}$ ile gösterilir ve

$$\mathrm{I_t(G)} = \left\langle x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_t} \,\middle|\, \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_t}\}, \text{t uzunlukta yol} \right\rangle$$

olarak tanımlanır.

$\mathrm{t} = 2$ durumunda, uzunluğu 2 olan bir yol, bir kenardır ve böylece, $\mathrm{I_2(G)}$, G çizgesinin kenar idealidir. Bu yapı, kenar idealler yapısını genişletebilmenin bir yoludur.

**5.3.3 Örnek** G çizgesi,




olarak verilsin. G'nın uzunluğu 3 olan yollar tarafından üretilen ideali,

$$\mathrm{I_3(G)} = \langle x_1x_2x_3, x_2x_3x_4, x_3x_4x_5, x_4x_5x_1, x_5x_1x_2 \rangle$$

olarak bulunur. Uzunluğu 2 olan yollar tarafından üretilen ideali ise,

$$\mathrm{I_3(G)} = \langle x_1x_2, x_2x_3, x_3x_4, x_4x_5, x_5x_1 \rangle$$

idealidir. $\mathrm{I_3(G)}$ ideali, G'nın kenar idealidir.

Bir G çizgesini bir tekterimli ideal ile ilişkilendirdiğimiz bu yapılar, buzdağının sadece görünen kısmıdır ve hepsinin kendine göre avantajları vardır. Bu durumda,

"Cebirsel bir objeyi, bir çizge ile ilişkilendirmenin yeni bir yolunu bulmak''

açık problemi kaçınılmaz olur.

## 6.KAYNAKLAR (IEEE)


[1] A. V. Tuyl, “A beginner’s guide to edge and cover ideals”, *Monomial Ideals, Computations and Applications,* Lecture Notes in Mathematics, vol. 2083, Springer, 2013.

[2] S. Morey ve R. H. Villarreal, “Edge ideals: algebraic and combinatorial properties”, *Progress in Commutative Algebra 1,* De Gruyter Proceedings in Mathematics, 2012.

[3] L. Euler, “Solutio problematis and geometriam situs pertinentis”, *Comment. Acad. Sci. U. Petrop,* 8, 128-140, 1741.

[4] V. I. Voloshin, “Introduction to graph and hypergraph theory”, *Nova Science Publishers,* New York, 2009.

[5] D. A. Cox, J. Little ve D. O’Shea, “Ideals, varieties and algorithms”, *Springer,* 2015.

[6] V. Ene ve J. Herzog, “Gröbner bases in commutative algebra”, *Graduate studies in Mathematics*, vol. 130, AMS, Providence, Rhode Island, 2012.

[7] M. Hochster, “Cohen-Macaulay rings, combinatorics and simplicial complexes”, *Lecture Notes in Pure and Applied Math.*, vol. 26, 171-223, 1977.

[8] R. Stanley, “Cohen-Macaulay complexes”, *NATO Adv. Study Inst. Ser.*, Ser. C: Math and Phys. Sci., 31, 51-62, 1977.

[9] R. Stanley, “Combinatorics and commutative algebra”, *Birkhauser*, Boston, 1996.

[10] J. Herzog ve T. Hibi, “Monomial ideals”, *Graduate Texts in Mathematics*, vol. 260, Springer, 2011.

[11] R. H. Villarreal, “Rees algebras of edge ideals”, *Communications in Algebra*, 23, no. 9, 3513-3524, 1995.

[12] A. Conca, E. De Negri, “M-Sequences, graph ideals and ladder ideals of linear type”, *Journal of Algebra*, 211, no. 2, 599-624, 1999.