T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
ORTAÖĞRETİM FEN ve MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ

LİMİT KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ BELİRLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Başak BARAK

Balıkesir, Ağustos-2007

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
ORTAÖĞRETİM FEN ve MATEMATİK ALANLAR EĞİTİMİ
ANABİLİM DALI
MATEMATİK EĞİTİMİ

LİMİT KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ BELİRLENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Başak BARAK

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR

Sınav Tarihi: 13.08.2007

Jüri Üyeleri: Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR (Danışman-BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Gözde AKYÜZ (BAÜ)

Yrd. Doç. Dr. Özden KORUOĞLU (BAÜ)

Balıkesir, Ağustos-2007

ÖZET

LİMİT KONUSUNDAKİ KAVRAM YANILGILARININ BELİRLENMESİ

Başak BARAK
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Anabilim Dalı
Matematik Eğitimi

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Hülya GÜR

Balıkesir, 2007

Bu çalışmanın amacı, üniversite öğrencilerinin analizin temel konularından biri olan limit hakkındaki kavram yanılgılarını belirlemektir. 2006-2007 öğretim yılının ikinci döneminde, 34 matematik öğretmenliği birinci sınıf, 30 matematik öğretmenliği beşinci sınıf, 12 fen bilgisi öğretmenliği birinci sınıf ve 30 bilgisayar öğretmenliği birinci sınıf öğrencisi olmak üzere, 106 üniversite öğrencisiyle çalışma gerçekleştirilmiştir.

Çalışma nitel araştırma yöntemlerinden durum çalışmasıdır. Araştırmacı tarafından, öğrencilerin ön bilgilerini ölçmek için limit ön test, limit konusundaki kavram yanılgılarını belirlemek için limit diagnostik test ve öğrencilerin işlemsel hatalarını belirlemek için limit işlemsel test geliştirilerek uygulanmıştır. Limit ön test ve limit işlemsel testin verileri yüzde ve frekans olarak analiz edilmiştir. Limit diagnostik testin verileri ise 5'li rubrik geliştirilerek analiz edilmiştir.

Sonuç olarak çalışmada, öğrencilerin limit ve limitle ilgili bazı temel kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bunlar epsilon-delta tanımı, limit kavramı tanımı, fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı, sağdan ve soldan limit kavramları, limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki, bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyon grafiklerinin çizimi, sonsuz kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılması ile ilgili hata ve kavram yanılgılarıdır. Bu sonuçların literatüre uygun olduğu görülmüştür. Çalışmanın sonunda, elde edilen bulgulara göre bazı önerilere yer verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: analiz, hata, kavram yanılgısı, limit, süreklilik

ABSTRACT

DIAGNOSIS OF MISCONCEPTIONS ABOUT LIMIT CONCEPT

Başak BARAK
Balikesir University, Institute of Sciences,
Secondary Science and Mathematics Education
Department of Mathematics Education

Master of Science Thesis

Supervisor: Asist. Prof. Dr. Hülya GÜR

Balikesir, 2007

The aim of this study is to identify the university students' misconceptions about limit that is one of the main subjects of calculus. The study is carried out with 106 university students who are 34 freshman mathematics teacher candidates, 30 senior mathematics teacher candidates, 12 freshman science teacher candidates and 30 freshman computer teacher candidates in the second term in 2006-2007 academic year.

The study is a case study that is one of the qualitative research methods. A limit pre-test to measure the students' prior knowledges, a limit diagnostic test to identify the students' misconceptions, a limit operational test to identify the students' computational errors were designed by the researcher. Data of the limit pre-test and the operational limit test were analyzed as percent and frequency. Data of limit diagnostic test were analyzed by developing a rubric that have 5 items.

As a result of the study, some misconceptions that students have about limit and some main concepts related to limit have been identified. These are errors and misconceptions about epsilon-delta definition, definition of limit concept, a function's limit at a point, limits on the right and the left, relation between limit and continuity concepts, a function that is defined at one point, graphing functions, understanding of infinite concept and using it at operations. It has been seen that these results fit relevant literature. At the end of this study, according the findings obtained from the study some recommendations have been placed.

Key Words: calculus, error, misconception, limit, continuity

İÇİNDEKİLER **Sayfa**

ÖZET	ii
ABSTRACT	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİL LİSTESİ	vii
TABLO LİSTESİ	ix
ÖNSÖZ	xi
1. GİRİŞ	1
2. LİTERATÜR	3
2.1 Kavram ve Kavram Yanılgısı	3
2.2 Kavram Yanılgıları Nasıl Oluşur?	4
2.3 Matematikteki Kavram Teorileri ve Kavram Yanılgıları	6
2.3.1 APOS Teorisi	6
2.3.2 Kavram İmajı-Kavram Tanımı	9
2.3.3 Procept Kavramı	9
2.4 Analiz ve Analiz Eğitimi	11
2.4.1 Analiz	11
2.4.2 Analiz Eğitimi	12
2.5 Limit Kavramı	14
2.6 Limit Konusuyla İlgili Yurtdışında Yapılmış Çalışmalar	15
2.7 Limit Konusuyla İlgili Yurtiçinde Yapılmış Çalışmalar	24
2.8 Çalışmanın Önemi	26
2.9 Çalışmanın Amacı	27

2.10 Çalışmanın Problem Cümleleri 27

2.11 Varsayımlar 28

2.12 Sınırlılıklar 28

3. YÖNTEM 29

3.1 Çalışma Grubu 29

3.2 Araştırma Modeli 29

3.3 Veri Toplama Araçları 30

3.3.1 Limit Ön Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması 31

3.3.2 Limit Diagnostik Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması 32

3.3.3 Limit İşlemsel Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması 34

3.4 Veri Analizi 35

3.5 İşlem 37

4. BULGULAR 38

4.1 Birinci Alt Probleme Ait Bulgular: Limit Ön Testten Elde Edilen Bulgular 38

4.2 İkinci Alt Probleme Ait Bulgular: Limit Diagnostik Testten Elde Edilen Bulgular 41

4.3 Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular: Matematik Öğretmenliği 1. ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Sahip Oldukları Kavram Yanılgıları Açısından Karşılaştırılması 92

4.4 Dördüncü Alt Probleme Ait Bulgular: Limit İşlemsel Testten Elde Edilen Bulgular 100

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR 104

5.1 Birinci Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar 104

5.2 İkinci Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar 104

5.2.1 Limitin $\varepsilon-\delta$ Tanımı ile İlgili Kavram Yanılgıları 105

5.2.2 Limit Kavramı Tanımı ile İlgili Kavram Yanılgıları 107

5.2.3 Fonksiyonun Bir Noktadaki Limitinin Varlığı ile
İlgili Kavram Yanılgıları 110

5.2.4 Sağ ve Sol Limit Kavramları ile İlgili Kavram Yanılgıları 112

5.2.5 Limit ve Süreklilik Kavramları Arasındaki İlişki ile
İlgili Kavram Yanılgıları 115

5.2.6 Bir Fonksiyonun Bir Noktada Tanımlı Olması ile
İlgili Kavram Yanılgıları 116

5.2.7 Fonksiyon Grafiklerinin Çizimi ile İlgili Hata ve
Kavram Yanılgıları 118

5.2.8 ∞ Kavramının Algılanması ve İşlemlerde Kullanılması ile
İlgili Kavram Yanılgıları 120

5.2.9 Çelişkili İfadeler 121

5.3 Üçüncü Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar 122

5.4 Dördüncü Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar 123

6. ÖNERİLER 125

7. EKLER 128

7.1 EK A Limit Ön Test 128

7.2 EK B Limit Diagnostik Test 129

7.3 EK C Limit İşlemsel Test 131

8. KAYNAKÇA 132

ŞEKİL LİSTESİ **Sayfa**

Şekil 2.1 Simgesel matematikte kavram / işlem gelişimi	12
Şekil 2.2 Williams (1989)'un anketi	17
Şekil 4.1 Ö67'nin sekizinci soruya verdiği yanıt	66
Şekil 5.1 Ö7'nin limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt	105
Şekil 5.2 Ö28'in limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt	106
Şekil 5.3 Ö57'nin limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt	106
Şekil 5.4 Ö15'in limit diagnostik testin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	107
Şekil 5.5 Ö68'in limit diagnostik testin üçüncü sorusuna verdiği yanıt	107
Şekil 5.6 Ö2'nin ikinci soruya verdiği yanıt	108
Şekil 5.7 Ö68'in ikinci soruya verdiği yanıt	109
Şekil 5.8 Ö8'in ikinci soruya verdiği yanıt	109
Şekil 5.9 Ö46'nın ikinci soruya verdiği yanıt	109
Şekil 5.10 Ö2'nin beşinci soruya verdiği yanıt	110
Şekil 5.11 Ö2'nin altıncı sorunun (a) şıkkına yaptığı açıklama	111
Şekil 5.12 Ö70'in on üçüncü sorunun (a) şıkkına yaptığı açıklama	111
Şekil 5.13 Ö70'in on üçüncü sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama	111
Şekil 5.14 Ö4'ün yedinci soruya verdiği yanıt	111
Şekil 5.15 Ö2'nin yedinci sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama	112
Şekil 5.16 Ö2'nin dördüncü soruya verdiği yanıt	112
Şekil 5.17 Ö17'nin dördüncü soruya verdiği yanıt	113
Şekil 5.18 Ö102'nin dördüncü soruya verdiği yanıt	113
Şekil 5.19 Ö20'nin on birinci soruya verdiği yanıt	114

Şekil 5.20 Ö106’nın on dördüncü soruya verdiği yanıt 114

Şekil 5.21 Ö2’nin on birinci soruya verdiği yanıt 115

Şekil 5.22 Ö47’nin altıncı sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama 115

Şekil 5.23 Ö78’in on birinci sorunun (b1) şıkkına yaptığı açıklama 116

Şekil 5.24 Ö66’nın on birinci sorunun (a) şıkkına vermiş olduğu yanıt 117

Şekil 5.25 Ö92’nin on üçüncü sorunun (a) şıkkına verdiği yanıt 117

Şekil 5.26 Ö25’in sekizinci soruya verdiği yanıt 118

Şekil 5.27 Ö71’in on birinci soru için çizdiği f(x) = $\frac{x^2-1}{2x-2}$’in grafiği 119

Şekil 5.28 Ö4’ün 12. soru için çizdiği f(x)=$\frac{1}{x}$’in grafiği 119

Şekil 5.29 Ö27’nin 12. soru için çizdiği f(x)=$\frac{1}{x}$’in grafiği 120

Şekil 5.30 Ö2’nin 12. sorunun (a) şıkkına verdiği yanıt 121

Şekil 5.31 Ö66’nın 12. sorunun (a), (b) ve (c) şıklarına verdiği yanıt 121

TABLO LİSTESİ Sayfa

Tablo 3.1 Limit ön test sorularının amaçları 31

Tablo 3.2 Limit diagnostik testteki soruların amaçları 33

Tablo 3.3 Limit işlemsel testteki soruların amaçlar 35

Tablo 4.1 Birinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 42

Tablo 4.2 Birinci soruya verilen hatalı cevap örneklerinin analizi 43

Tablo 4.3 İkinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 45

Tablo 4.4 İkinci soruya verilen hatalı cevap örneklerinin analizi 46

Tablo 4.5 Üçüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 47

Tablo 4.6 Üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri 48

Tablo 4.7 İkinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 50

Tablo 4.8 Dördüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri 51

Tablo 4.9 Beşinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans yüzdeleri 53

Tablo 4.10 Beşinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri 54

Tablo 4.11 Öğrencilerin altıncı soruya cevap olarak seçtikleri şıklar 56

Tablo 4.12 Öğrencilerin yedinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış yüzdeleri 60

Tablo 4.13 Yedinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 61

Tablo 4.14 Yedinci soruya verilen hatalı cevap örnekler 62

Tablo 4.15 Öğrencilerin Sekizinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 63

Tablo 4.16 Sekizinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 64

Tablo 4.17 Sekizinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri 65

Tablo 4.18 Dokuzuncu soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 66

Tablo 4.19 Dokuzuncu soruya verilen hatalı cevap örnekleri 68

Tablo 4.20 Öğrencilerin onuncu soruya verdikleri cevapların doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 70

Tablo 4.21 Öğrencilerin on birinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 73

Tablo 4.22 On birinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 74

Tablo 4.23 On birinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri 75

Tablo 4.24 Öğrencilerin on birinci soruya cevap olarak seçtikleri şıklar 78

Tablo 4.25 Öğrencilerin on ikinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 82

Tablo 4.26 On ikinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 83

Tablo 4.27 On ikinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri 85

Tablo 4.28 On üçüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 88

Tablo 4.29 On üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri 89

Tablo 4.30 On dördüncü soruya verilen cevapların doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 90

Tablo 4.31 On dördüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri 91

Tablo 4.32 On dördüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri 92

Tablo 4.33 Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin limit diagnostik testteki puanlarının karşılaştırması 93

Tablo 4.34 Öğrencilerin limit işlemsel teste verdikleri cevapların doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri 100

ÖNSÖZ

Kalıcı bir öğrenme ancak, öğrencilerin kendi şemalarını oluşturmalarıyla, öğrendiklerini içselleştirmeleriyle mümkündür. Önemli olan öğrencilerin herhangi bir kavramın tanımını ezbere bilmeleri değil, o kavramla ilgili kendi şemalarını oluşturabilmeleri, o kavram hakkında yorumlar yapabilmeleridir.

Öğrencilerin bir konu hakkında sahip olacakları kavram yanılgıları ise sadece o konu için değil diğer konular için de engel teşkil edecektir. Bu çalışmada öğrencilerin limit kavramı ile ilgili ne tür kavram yanılgılarına sahip oldukları ve limitle ilgili soruları çözerken yaptıkları hatalar araştırılmıştır.

Her çalışmamda, lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca, engin bilgilerinden her fırsatta yararlandığım, manevi desteğini hiçbir zaman benden esirgemeyen, değerli fikirleriyle çalışmama büyük katkılar sağlayan ve sabırla bana yardımcı olan çok değerli hocam, danışmanım Yrd. Doç Dr. Hülya GÜR'e sonsuz teşekkürler ediyorum.

Çalışmamın uygulanmasında bana yardımcı olan ve her tür kolaylığı sağlayan Yrd. Doç Dr. Necati Özdemir, Öğr. Gör. Gülcan Öztürk, Doç Dr. A. Sinan Çevik, Arş. Gör. Fırat Evirgen ve Arş. Gör. Eylem Güzel'e teşekkür ederim.

Ayrıca benim bugünlere gelmemi sağlayan ve çalışmamın her aşamasında bana destek olan biricik ailem, annem, babam ve kardeşime teşekkür ederim.

Balıkesir, Ağustos 2007 **Başak BARAK**

1. GİRİŞ

Öğrenmeler sürekli ve ihtiyaç halinde gerçekleşmektedir. Ama öğrenmenin gerçekleşebilmesi için ön öğrenmeyle bağ kurulması gerekir. Ön öğrenmeler olmadan yeni öğrenmeler gerçekleşemez. Her yanlış öğrenme sonraki öğrenmenin gerçekleşmesini etkileyeceğinden, o öğrenme alanıyla ilgili, sonraki öğrenmeleri de etkileyecek olan kavram yanılgılarının belirlenmesi son derece önemlidir.

Çalışmada öğrencilerin soyut buldukları ve anlamakta güçlük çektikleri limit konusundaki kavram yanılgıları araştırılmıştır. Limit uygulamalı bilim dallarında büyük öneme sahiptir. 1981-1999 yılları arasında Yükseköğretime giriş sınavı ÖSS ve ÖYS olmak üzere iki basamaklı olarak uygulanmıştır. 1999 yılından itibaren uygulanmaya başlanan yeni sınav sisteminde ÖYS kaldırılmıştır [1]. 1999-2005 yılları arası uygulanmış olan ÖSS'de, limit konusuyla ilgili sorular sorulmadığından limit konusu sadece ders kitaplarının içinde yer almıştır. Limit konusunun ÖSS'de soru sorulmayan bir konu olması, öğrencilerin konuya olan motivasyonlarını etkilemiştir. Ayrıca öğretmenler de sınav kapsamında yer almayan konuları bir külfet olarak görmüşler ve sınavda yer almayan diğer tüm konular gibi limit konusu da programda görünmesine rağmen işlenmeyen ya da üzerinde ayrıntılı durulmayan matematik konularından biri haline gelmiştir [2]. Limit konusu, üniversiteye giriş sınavında yapılan son değişikliklerle, ÖSS'ye dahil edilmiş olsa da geçmiş yıllarda üzerinde çok durulmayan konu olması ve böylece öğretmenlerin bu konudaki mevcut bilgilerinin körelmesi ya da konu hakkında yeterli bilgiye sahip olmamalarından konunun, öğrencilere doğru bir şekilde anlatılamaması gibi nedenlerle çeşitli hata ve kavram yanılgılarının oluşmasına yol açmıştır.

Baki (1998)'nin de belirttiği gibi öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanılgıları sadece o konuyu öğrenmelerinde engel oluşturmaz [3]. Özellikle matematiğin ardışık ve yığmalı bir bilim olmasından dolayı verilecek olan herhangi bir kavram onun önkoşulu olan kavramlar kazandırılmadan verilmemelidir

[4, s.9]. Bu nedenle, öğrencilerin yaptıkları hatalar ve sahip oldukları kavram yanılgıları onların sonraki öğrenmelerini de etkiler. Öğrenmenin daha sağlam temellere dayandırılması için oluşabilecek kavram yanılgılarının önceden belirlenmesi ve buna uygun olarak kavramların verilmesi gerekir. Kavram yanılgılarının oluşmaması için öğrencilerde oluşabilecek kavram yanılgılarının önceden farkında olunmalıdır [5].

Çalışma, 6 bölümden oluşmaktadır. 1. Bölüm, Giriş Bölümüdür ve çalışma konusu olarak neden limit konusundaki kavram yanılgıları seçildiği açıklanmıştır. Literatürü içeren 2. Bölümde "kavram nedir", "kavram yanılgısı nedir", "matematikte kavram nedir", "matematik kavramları öğrenci zihninde nasıl yapılanmaktadır", "matematik kavramları yapılanırken hangi aşamalardan geçmektedir" sorularına yanıt aranacak ve matematik kavramlarıyla ilgili teorilerin, kavramları nasıl ele aldığına yer verilecektir. Çalışmanın 3. Bölümünü oluşturan Yöntem kısmında, çalışmanın evren örneklem, araştırma modeli, veri toplama araçları ve veri analizi açıklanacaktır. Çalışmanın 4. Bölümü, Bulgular kısmı olup, bu bölümde çalışmanın problemlerine ait bulgular sunulacaktır. 5. Bölümde çalışmadan elde edilen sonuçlar tartışılacak, sonuçların literatürle ilişkisi belirlenecektir. Son bölümde ise çalışmadan elde edilen sonuçlara göre bir takım önerilere yer verilecektir.

2. LİTERATÜR

Bu bölümde, kavram ve kavram yanılgısı kavramlarının ne anlama geldiği, matematikteki kavram teorilerinin, kavramları nasıl ele aldığı incelenecektir.

2.1 Kavram ve Kavram Yanılgısı

Kavram (concept), insan zihninin somut ya da soyut bir düşünce nesnesinden oluşturduğu ve söz konusu nesneden edindiği çeşitli algıları o nesneye bağlamasına ve o nesneyle ilgili bilgileri düzene sokmasına olanak veren genel ve soyut fikirdir [6, s.6532]. Senemoğlu (2004) kavramı, benzer nesneleri, insanları, olayları, fikirleri, süreçleri gruplamada kullanılan bir kategoridir şeklinde tanımlamıştır [7].

Öğrencilerin bilimsel tanımlamalardan uzak ve farklı anlamlar yükleyerek bilimsel kavramları açıklamaları, araştırmacıları, "öğrencilerin kavramları bu şekilde öğrenmelerinin nedeni nedir?" sorusuna cevap bulmak üzere yeni incelemelere itmiştir. Zaman içinde değişik şekillerde isimlendirilen, bilimsel olmayan kavrayışlar en yaygın haliyle ***kavram yanılgısı (misconception)*** olarak literatürde yerini almaktadır [8].

Kavram yanılgısı diğer adıyla ***yanlış kavrama***, öğrencilerin anlamada güçlük çektikleri kavramları kendi anlayışlarına göre uygun bir şekilde yorumlamaları ve bilimsel kavramlara bakış açılarının bilim adamları tarafından kabul edilmiş olandan farklı olmasıdır [9]. Baki ve Şahin (2004), kavram yanılgısını, yanlış bir fikrin kişide bıraktığı çağrışımdır şeklinde tanımlamışlardır [10]. Ubuz, (2001) ise kavram yanılgısını, "kişinin bir konuyu veya problemi kendisine mantıklı gelecek şekilde kavraması fakat bu alandaki uzman bir kişinin kavramsal anlaması ile çelişki içinde olmasıdır" olarak tanımlar [11]. Guralnik (1986)'in Webster Yeni Dünya Sözlüğü'nde ise, kavram yanılgısı, "olay zincirlemelerinin veya bazı işlerin başlangıcı; zihinsel algılama davranışı, süreci veya gücü; özellikle soyut fikirlerin oluşması; orijinal bir fikir, model veya plan" anlamına gelen kavramsallaştırmanın (conception) eksik yapılmasıdır [Guralnik (1986) aktaran: 12]. Güneş'e (2005) göre kavram yanılgıları, kavram maskesi giymiştir, ancak maskenin arkasındaki kavram değil kavram görünümündeki yanılgıdır [13].

2.2 Kavram Yanılgıları Nasıl Oluşur?

Kavram yanılgılarının oluşmasının pek çok nedeni vardır. Kavram yanılgılarının oluşmasının nedenleri, farklı araştırmacılar tarafından, farklı boyutlarda incelenmiştir:

Skelly ve Hall (1993); "Öğrencinin ön bilgisindeki bilgi boşlukları zihinsel karışıklığa, yanlış yorumlamalara ve kaçınılmaz olarak kavram yanılgılarına sebep olur [14]. Eğer öğrencinin ön bilgileri kavram yanılgıları içeriyorsa, bu da ileride sahip olacağı yanlış kavramaların kaynağı olacaktır" demişlerdir [Skelly ve Hall (1993), s.1504; aktaran: 15]. Birden çok problemin aynı ve tek düze yolla çözülmesi halinde veya öğrencilere problem çözerken düşünmek için yeterli süre verilmemesi durumunda kavram yanılgıları ortaya çıkabilir [13].

Nakiboğlu (2006) ise kullanılan ders kitaplarının yanlış ifadeler içermesi ve kullanılan dilin yeterince açık olmaması, benzetim, mecaz, model ve simgelerin uygun olmayan bir şekilde, gerekli açıklamalara yer verilmeden kullanılması gibi nedenler kavram yanılgılarına yol açabileceğini belirtir [15].

Kavram yanılgıları, öğretmenlerin gerek konuya tam olarak hâkim olmamaları, gerekse kendilerinde olan bir takım kavram yanılgıları ya da konuya uygun öğretim yöntemi seçememelerinden kaynaklanabilir [15]. Planlı öğretim sürecindeki yaşantılar da kavram yanılgılarının oluşmasına neden olabilmektedir. Osborne ve Cosgrove (1983), öğrenme sürecinde öğrenenin sahip olduğu ön bilgiler ile tutumların yeni sunulan bilgiyi etkilemesi ve değiştirebilmesini kavram yanılgılarının nedenlerinden olduğunu belirtmişlerdir [Osborne ve Cosgrove (1983) aktaran: 16].

Osborne ve Freyberg (1985) daha iyi bir öğrenme sağlayabilmenin ilk aşamasının öğretim sürecinde öğrencilerin sahip oldukları alternatif görüşlere ve kavram yanılgılarına yer vermek olduğunu vurgulamışlardır [17].

Jose (1989) yaptığı araştırmada, çoğu öğrencinin matematikte kavram yanılgısına sahip olduğunu ve öğrencilerin problemleri çözmek için kendilerince oluşturdukları, acemice teoriler adı verilen yollar (naive theories) geliştirdiklerini belirtmiştir. Resnick (1983) öğrencilerin sınıfa boş bir levha olarak gelmediklerini ve öğrencilerin günlük deneyimlerinden oluşan kendi teorileriyle geldiklerini vurgulamıştır. Öğrenciler bu teorileri aktif bir şekilde kendileri oluşturmuşlardır. Öğrenciler oluşturdukları teorileri dünyayı anlamlandırmada kullanırlar (Jose, 1987). Ayrıca eksik kavramları da kullanırlar ki bunlar kavram yanılgılarıdır. Kavram yanılgıları iki nedenden dolayı problem yaratmaktadır.

1) Öğrenciler yeni deneyimleri yorumlamak için kendilerinin oluşturdukları kavram yanılgılarını kullanmak istediklerinde, bu kavram yanılgıları öğrenmeyi engellemektedir.
2) Öğrenciler duygusal ve zihinsel olarak kendi oluşturdukları kavram yanılgılarına bağlanmaktadırlar.

Bunun anlamı, öğrencilerin sınıfa karmaşık fikirlerle geldikleridir. Kavram yanılgısına sahip öğrencilere, dersi tekrar etmenin ve açıkça defalarca anlatılmasının yararı yoktur (Champapre, Klopferf ve Gunstone, 1982; Mc Dermatt, 1984; Resnick, 1983). Öğrenciler sıradan bir eğitimin hemen ardından tekrar eski kavram yanılgılarına dönebilmektedirler. Kavram yanılgılarının belirlenmesinde, öğrencilerin sınıfa karmaşık fikirlerle geldikleri ve önceden oluşturmuş oldukları bu kavram yanılgılarına sıkı sıkıya bağlı olduklarını göz önünde bulundurmak gerekir [Resnick, 1983; Jose, 1987; Champapre, Klopferf ve Gunstone, 1982; Mc Dermatt, 1984; aktaran: 18].

Bu çalışma boyunca tekrar edilen iki kelime hata ve kavram yanılgısıdır.

Burada dikkat edilmesi gereken en önemli noktalardan biri hata veya bilgi eksikliğinden dolayı verilen yanlış cevaplardır. Kavram yanılgısı bir hata değildir veya bilgi eksikliğinden dolayı yanlış verilen bir cevap değildir. Kavram yanılgısı zihinde bir kavramın yerine oturan fakat bilimsel olarak o kavramın tanımından farklı olması demektir. Ancak öğrenciler hatalarının doğru olduklarını sebepleri ile birlikte açıklıyorlarsa ve kendilerinden emin olduklarını söylüyorlarsa o zaman kavram yanılgıları var diyebiliriz. Yani her kavram yanılgısı bir hatadır; fakat her hata bir kavram yanılgısı değildir. *Hata**,** yanılgılardaki yanlışlıklar**;** kavram yanılgısı ise öğrenmeye engel oluşturan kavramsal engeller anlamında kullanılmaktadır* [19].

2.3 Matematikteki Kavram Teorileri ve Kavram Yanılgıları

Aşağıda matematikte kavram oluşumu ve öğrencilerin sahip olduğu kavram türlerine ait "APOS Teorisi", "Kavram İmajı-Kavram Tanımı" ve "Procept Kavramı"na yer verilmiştir.

2.3.1 APOS Teorisi

Dubinsky (1992) Piaget'nin Yapılandırmacılık kuramına dayanan Genetik Çözülme Teorisini (Genetic Decomposition), öğrencilerin anlamalarına yönelik geliştirerek teorik bir bakış açısı geliştirmiştir [20]. Dubinsky ve arkadaşları (1992) matematiksel bilgiyi 3 aşamada ele almıştır: eylem (action), işlem (process) ve nesne (object). Bu üç tür matematiksel bilginin oluşturduğu yapıyı şema (schema) olarak adlandırmıştır. APOS Teorisi ismini eylem, işlem, nesne ve şema sözcüklerinin İngilizce karşılıklarının baş harflerinden alır [20].

Dubinsky ve arkadaşları (1992) eylemi, özel bir tanımlama ya da formül gerektiren nesneleri elde etmek için nesnelerin zihinsel veya fiziksel dönüşümünün yapılması olarak tanımlamıştır [20]. Eylem, bilginin hatırlanmasıdır ya da fiziksel bir reflekstir. Tek adımda olabileceği gibi birkaç adımda da olabilir. Üniversite Düzeyindeki Matematik Eğitimini Araştırma Topluluğu (2001) (RUMEC-Research in Undergraduate Mathematics Education Community)'na göre eylem, dış özellikleriyle algılanan bir nesnenin dönüşümüdür. Dönüşüm, dışarıdan gelen ipuçlarına verilen reaksiyonlarla gerçekleşir. Eğer bir kişinin anlaması, o dönüşümü uygulamayla sınırlıysa, bu kişi verilen dönüşümün eylem basamağındadır. Kişi, dönüşümün eylemlerini sınırlı bir şekilde yapmıyorsa, o kişinin dönüşümün daha derin bir anlamasına sahip olduğu belirtilebilir. Örneğin bir öğrenciye, bir fonksiyonun formülü ve bir noktası verildiğinde, öğrencinin fonksiyonun o noktadaki değerini hesaplaması bir eylemdir. Fonksiyonun eylem aşamasında olan bir öğrenci, sadece fonksiyonun o noktadaki değerini hesaplar, bu durumu yorumlayamaz. Eylem aşamasına başka bir örnek de, bir denklemin çözümünde, verilen denkleme benzer bir denklemdeki çözüm yolu takip edilerek sonuca ulaşılmasıdır. Eğer öğrenci, denklem çözümünde, sadece o denkleme benzer başka bir denkleme bakarak çözüme ulaşıldığını düşünüyorsa, öğrencinin denklem çözümünde, eylem aşamasında olduğu söylenir. Ya da bir polinom fonksiyonunun türevini bulmak için genel kural verildiğinde ve özel bir polinom fonksiyonun türevini bulmak için genel formüle, verilen sayıyı yerleştirmek de bir eylemdir. Bir öğrenci bir fonksiyonun türevini dışarıdan sağlanan yardımlarla (ezberleme, kural listesine bakma) buluyorsa, bu öğrencinin türevin eylem düzeyinde olduğu söylenir. Kişi eylemi bilerek yaparsa, eylemi içselleştirmiş olur ve eylem işlem haline gelir [21].

İşlem, kişinin bilinçli bir şekilde kontrol ettiği nesne ya da nesnelerin dönüşümü ve eylemin içselleştirilmesidir. Kişi, işlemlerin dönüşümü eylemini derinlemesine düşündükçe işlemler nesneye dönüşür (Dubinsky ve arkadaşları, 1992). Üniversite Öğrencileri Matematik Eğitimi Araştırması Topluluğu (2001), işlemi, bir eylem tekrarlandığında ve kişi onu yansıttığında, eylemin işlem olarak içselleştirilmiş olabileceğini belirtir. Bu durum, iç yapının aynı eylemin gerçekleştirilmesiyle; fakat doğrudan dışarıdan gelen bir uyarana gerek duyulmadan yapılmasıdır. Bir kişi yaptığı işlemi tanımlayabilir veya aşamaları gerçekleştirmeden işlemin adımlarını tersinden alabilir. Eylemin tersine işlem, kişi tarafından içselleştirilerek algılanır ve kişinin kontrolündedir, dışarıdan gelecek ipuçlarına gerek yoktur. Eğer kişinin derinlemesine anlaması, işlem olarak dönüşümle sınırlıysa, bu kişi işlem düzeyindedir. Örneğin bir öğrenci, bir fonksiyona verilen değerleri ve sonucunda çıkan sayıları hesaplama yapmaksızın düşünebiliyorsa, kişinin yaptığı işlemdir. Öğrenci bir formülle özel bir fonksiyonun türevini alabiliyorsa ama türevi bulmak için fonksiyonların cebirsel kombinasyonlarında zorluk çekiyorsa, öğrenci işlem düzeyindedir ya da öğrenci standart kuralları kullanarak, verilen bir fonksiyonun türevini bulduğunda işlem düzeyindedir. Başka bir örnek ise öğrenci eğer standart fonksiyonların türevini bulabiliyor; fakat özel bir fonksiyon için hesaplanan birinci türev verilmeden fonksiyonun ikinci türevini bulamıyorsa, öğrencinin işlem düzeyinde olduğu ifade edilir [21].

Nesne ise, dönüşüm sürecindeki işlemler uygulanabiliyorsa bu durumda süreç nesneye dönüşmüş olur. Nesne, bütünün farkında olunduğunda gerçekleşir. Nesneleri oluşturan işlemler ayrıştırılabilir ve nesne ile işlem arasında hareket edilebilir [20].

Şema; eylem, işlem ve nesnelerin organize edildiği bütünlerdir [20].

Dubinsky ve arkadaşları (1992), APOS Teorisinin matematiksel bilginin doğasını;

> "Sosyal bağlamda ve matematiksel eylem, işlem ve nesneleri yapılandırarak veya yeniden yapılandırarak ve problemlerle başa çıkmada kullanılan şemalar içinde bunları organize ederek yansıtma yoluyla kişilerin kabul edilen problem durumlarını ve onların çözümlerini kendilerinin cevaplama eğilimleridir"

şeklinde yaptıkları tanım, yapılandırmacılığın niteliklerini taşır [20].

Son yıllarda APOS Teorisi, matematiksel kavramların oluşturulmasında ve öğrencilerin kavramları nasıl oluşturduklarının incelenmesinde kullanılmaya başlanmıştır. Çünkü öğrencilerin matematiksel kavramları anlamaları üzerine yapılan araştırmalar bilgiyi, kavramsal ve işlemsel bilgi olarak iki anlamlı kısma ayırarak ele aldıklarından fakat bunun sadece başlangıç noktası olduğu görülmüştür; çünkü kavramsal ve işlemsel bilginin daha derinlemesine incelenmesi gerekir [22, 23]. Bunu gerçekleştirmenin bir yolu da APOS Teorisini kullanarak kavramı oluşturma sürecini göz önünde bulundurmaktır [24, 25]. APOS Teorisi öğretimi planlamada etkili olmuştur. Örneğin Asiala ve arkadaşları (1997) türev konusunun APOS Teorisine göre planlanarak anlatılan öğrencilerin geleneksel yöntemlerle anlatılan öğrencilere göre daha başarılı olduklarını bulmuşlardır [24]. APOS Teorisini ayrıca, öğrencilerin anlamalarını analiz etmede de kullanmışlardır.

2.3.2 Kavram İmajı-Kavram Tanımı

Öğrencilerin matematik konularını anlamaları üzerine yapılan çalışmalar, Tall ve Vinner (1981)'ın kullandığı, öğrencinin kavram imajı ve kavram tanımı arasında yapılan ayrıma dayanır [26].

Tall ve Vinner (1981), kavram imajı terimini, özel bir matematiksel kavramla ilgili olan (herhangi bir kişinin kafasında oluşturduğu) bilişsel yapının tümünü tanımlamak ve anlamak için kullanır. Bu durum tüm zihinsel resimleri, ilgili özellik ve süreçleri içerir. Kavram imajı, kişinin yeni uyarıcılarla karşılaşması durumunda zaman içinde her tür deneyiminin ve değişikliğin üstüne kavramı oluşturmasıdır [26].

Kavram tanımı ise, biraz farklı bir anlama sahiptir. Tall ve Vinner (1981)'a göre kavram tanımı, kavramı belirten, anlatan kelimelerin bir formudur. Kavram tanımı formal olabileceği gibi informal de olabilir [26]. Bireylerin oluşturduğu kavram tanımı kavram imajının bir parçasıdır, fakat formal kavram tanımı kavram imajı değildir [27].

2.3.3. Procept Kavramı

Tall ve Gray (1991), matematikte bazı gösterimlerin hem kavramı (conception) temsil ettiğini hem de o kavramla ilgili işlemi (process) temsil ettiğini belirtmişlerdir. Böyle gösterimler, o sembollerin kullanıldığında ne denmek istendiğiyle ilgili bazı belirsizliklere yol açmıştır. İşte bu belirsizlikleri önlemek için

Tall ve Gray (1991) her iki anlamı da (kavram ve işlem) içinde barındıran İngilizce *process* ve *conception* kelimelerinin bir araya getirilmesiyle oluşan "procept" kavramını oluşturmuşlardır [28].

Sfard (1989)'un belirttiği gibi "Herhangi bir şey aynı zamanda hem işlem hem de nesne nasıl olabilir?" sorusu zor bir zihinsel aktivite olarak görülmektedir [Sfard (1989) aktaran: 28, s.1]. Tall ve Gray (1991)'in procept kavramıyla bahsettiği hem işlemin sonucunun, hem de işlemin aynı şekilde gösterilmesiyle *procept* kavramının gerçekleştiğidir. Matematikte procept ifadesini aşağıdaki örneklerle ifade etmişlerdir:

- Sayı kavramı ve sayma işlemi (7 sayısı hem sayma işlemini hem de sayma ile üretilen sayı anlamına gelir).
- Hepsini saymak ve toplama kavramı (5+4 hem sayma işlemidir hem de burada 9, yani sonuç kastedilmektedir).
- Tekrar eden toplamların çarpma işlemi olarak yorumlanması ve sonucu (4x5 hem 4 tane 5 hem de 4x5=20 anlamına gelir).
- Tam sayıları bölme işlemi ve kesir kavramı (Örneğin ¾).
- Sayı doğrusundaki sayıları toplama işlemi ve işaretli sayılar kavramı (+2 hem işlem hem kavram).
- "2 çıkarma" işlemi ve "-2" kavramı
- Trigonometrik oran sinA = $\frac{karşa dik\ kenar}{hipotenüs}$
- 3x+2 ifadesi hem 3x'e 2 ekleme işlemi hem de toplamın sonucu olarak yorumlanır.
- Limite yaklaşma işlemi ve limit değeri kavramı ifadelerinin ikisi de $\lim_{x\to a} f(x)$ sembolüyle gösterilir [28].

Çalışmada, limit konusu ile ilgili kavram yanılgıları belirlenecek ayrıca yukarıda bahsedilen "APOS Teorisi", "Kavram İmajı-Kavram Tanımı" ve "Procept Kavramı" teorilerine 5. Bölümde tekrar dönülerek, öğrencilerin vermiş oldukları cevaplar bu teoriler ışığında incelenmiştir.

Limit konusu, analizin en temel konularından biridir. Aşağıdaki bölümde analiz dersi ile ilgili tanımlara ve analiz eğitiminin ülkemizde ve diğer ülkelerde nasıl olduğu ve analiz eğitimi ile ilgili çalışmalara yer verilmiştir.

2.4 Analiz ve Analiz Eğitimi

2.4.1 Analiz

Hacısalihoğlu ve arkadaşları (2003), analiz ya da İngilizce ismiyle "calculus"u, fonksiyonların diferansiyeli, integrali ve bunlarla ilgili kavramlar ve uygulamalarla uğraşan matematik dalı, diferansiyel ve integral hesabı olarak tanımlamışlardır [29, s.205].

Matematik, fen bilimleri ve mühendislikteki çoğu öğrenci için matematiğin, limit, türev, integral kavramları ve uygulamalarıyla ilgili olan analiz (calculus), üniversitedeki matematik eğitimlerinin başlangıç noktasıdır [30].

Matematikte kavramların belli bir gelişim sırası vardır ve matematiksel kavramlar öğretilirken bu ardışıklığa uyulması gerekir. Şekil 1.'de de görüldüğü gibi analiz matematikteki kavram gelişimi göz önüne alındığında üst düzey matematik kavramlarının öncesinde yer almaktadır [31].

Formal Tanımlar Ve İspatlar	Tanımlanmış Özellikler Mantıksal Süreçler Formal Olarak Oluşturulmuş Süreçler
Analiz (Calculus)	Hesaplama Süreçleri (Kurallar) Kavramların Kullanımı (Formüller)
Cebir	İşlem Potansiyeli (Matematiksel İfadeleri Değerlendirme) Kavramların Kullanımı (Matematiksel İfadeler)
Aritmetik	Hesaplama Süreçleri Hesaplama Kavramları

Şekil 2.1. Simgesel matematikte kavram/işlem gelişimi [31]

2.4.2 Analiz Eğitimi

Ortaöğretim matematik programının bir ünitesi olan limit konusu, ortaöğretim 12. sınıfın ilk döneminin son konusu olup, ikinci dönemin ortalarına kadar devam eden bir konudur. Daha sonra öğrenciler, genellikle seçtikleri bölümlere göre (matematik, fizik, kimya gibi temel bilimler, mühendislik, işletme, ekonomi, iktisat vb.) üniversite 1. sınıfta “Analiz”, “Genel Matematik”, “Yüksek Matematik”, “Calculus” dersleri adı altında limit konusunu görmektedirler [32].

Üniversitelerde bu dersin içeriği, genel olarak fonksiyonlar, trigonometrik ve ters trigonometrik fonksiyonlar, limitler ve süreklilik, türevler, türevin uygulamaları (Rolle Teoremi, Ortalama Değer Teoremi, Ekstramumlar, Bükeylik, L’Hospital Kuralı, v.s.), grafik çizimleri, belirli ve belirsiz integraller, Diferansiyel ve İntegral Hesabın Temel Teoremi, yaklaşık integral (Yamuk ve Simpson Kuralı), logaritmik ve üstel fonksiyonlar, hiperbolik fonksiyonlar ve ters hiperbolik fonksiyonlar konularından oluşmaktadır [33].

İnformal analiz, değişimin oranı (limit), işlemsel olarak birbirinin tersi olan türev ve integralin kurallarını, integral uygulamalarını (alan, hacim, vb. hesaplamaları) içerirken; *formal analiz*, limitin sürekliliği, türevin - tanımlarını, Riemann integralini, ortalama değer teoremi, analizin temel teoremi gibi formal tümdengelim teoremlerini içerir.

Bazı ülkelerde *informal analiz* liselerde, *formal analiz* üniversitelerde verilirken bazılarında ikisi de üniversitelerin birinci sınıflarında verilmektedir. Örneğin Türkiye ve Yunanistan'da olduğu gibi bazı ülkelerde *formal analiz* de lisede verilmeye başlanır. Genel olarak *informal analiz*, *formal analiz* ile daha çok son yaklaşımları içeren *standart olmayan analize dayanan sonsuz küçükler hesabı* ve *grafiksel, sayısal ya da sembolik gösterimlerinin kolay bir şekilde sağlandığı bilgisayar yaklaşımları* olarak dörde ayrılan analiz, farklı ülkelerde değişik anlamlara gelmektedir [34].

Analizin birçok bilim dalı için önemli bir konu olması nedeniyle öğrencilerin analiz kavramlarını anlamaları üzerine pek çok çalışmalar yapılmaktadır. Başlangıç konularında yer alan ve sıkı bir ardışıklık içinde olan analiz konularının kavramsal olarak anlaşılamaması, çoğunlukla konuların soyut olmasıyla ve öğrenci başarısızlıklaryla ilgilidir. Romberg ve Tufte (1987) öğrencilerin matematiği teker teker öğrenilen kavram ve becerilerin dengeli bir yığını olduğunu ifade etmiştir [35]. Üniversitelerdeki geleneksel analiz dersleri, içeriğe önem verilerek, çok kapsamlı içeriğin düzenlenip belli kategorilere ayrılmasıyla belli bir sıra içinde yürütülür.

Günümüzdeki araştırmalar üniversitelerdeki matematik programın geliştirilmesi ve reformu konusunda pek çok fikir vermektedir. Ubuz (1999) son yıllarda analizde çok fazla araştırma yapılmasının nedenlerini:

1) "Ezbere işlem uygulamalarına yönelik eğilim"
2) "Kavramsal anlamdaki yetersizlik"

3) "İleri matematik öğretim ve öğrenimindeki kaliteyi yükseltmek"

başlıkları altında toplamıştır [30].

Kasten ve arkadaşları (1988) yaptıkları çalışmada öğrencilere verilen analiz eğitiminin yeteri kadar iyi olmadığını belirtmektedirler.

NCTM (A.B.D.'deki Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi) (1987)'ye göre analiz (calculus) dersinde öğrencilerin "sayısal ve grafiksel olarak informal keşifler yapabilmeleri; bir grafiğin maksimum ve minimum noktalarını bulabilmeleri; problem durumlarındaki sonuçları yorumlayabilmeleri; limit kavramını araştırabilmeleri; sonsuz dizi ve seri kavramlarını irdeleyerek, eğri altında kalan alanları araştırabilmeleri" amaç olarak belirtilirken; ayrıca üniversiteye gidecek öğrencilerin ise limit kavramı, eğrinin altında kalan alan, değişim oranı, teğet doğrusunun eğimi kavramlarının temelini almış olarak üniversiteye gelmeleri gerektiği özellikle belirtilmiştir [Kasten ve arkadaşları, 1988; NCTM, 1987; aktaran: 36, s.28].

Confrey (1980), öğrencilerin analiz dersine: sürekliliğin anlaşılmasından ayrı olarak; süreklilik kavramına bağımsız geçiş ve işlemsel yaklaşım şeklinde üç yoldan biriyle başladıklarını belirtmiştir [37].

White ve Mitchelmore (1996) öğrencilerin, analiz dersini öğrenme güçlükleriyle ilgilenmişlerdir. Analiz konularını kavrama ile ilgili yaptıkları çalışmalar, öğrencilerde problemlere neden olan tüm kavramları göstermiştir. Özellikle, öğrencilerin değişimin oranı, limit, teğet ve fonksiyon gibi soyut konularda zorlandıkları görülmüştür. Bu kavramlar analize özgü matematiksel nesne veya işlemleri içerirler [38].

2.5 Limit Kavramı

Limit, değişik nicelikler arasındaki fonksiyonel bağıntının belli olduğu durumlarda, birbirine bağlı büyüklüklerden birinin belli bir değere yaklaşması halinde, diğerinin hangi değere yaklaşacağının incelenmesi durumudur. Kısacası limit, “bir fonksiyondaki değişkenin yaklaştığı bir değere karşılık, fonksiyonun yaklaşabildiği değer olarak” tanımlanmaktadır [39, s.187].

Cornu’ya (1991) göre limit kavramı, bir fonksiyonun yaklaşma teorisi, süreklilik, diferansiyel ve integral gibi tüm matematiksel analizlerde yer alan, merkezi konumda bulunan matematiksel bir kavramdır [40].

Limit kavramının *informal (sezgisel)* ve *formal* ($\varepsilon - \delta$) olmak üzere iki tanımı yapılabilir.

Limitin İnformal Tanımı:

f fonksiyonu x’in *a* komşuluğunda tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer *x*, sağdan ve soldan *a*’ya yaklaşırken *f(x)* de *b* gibi bir sayıya yaklaşıyorsa, “*x*, *a*’ya yaklaşıyorken *f(x)*’in limiti *b*’dir denir ve $\lim_{x \to a} f(x) = b$ şeklinde gösterilir [41, s.21].

Limitin Formal Tanımı:

Verilen her $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilirse ki $0 < |x - a| < \delta$ olduğunda $|f(x) - b| < \varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonunun a noktasındaki limiti *b*’dir denir [41, s.22].

Aşağıda limit konusuyla ilgili yurtiçi ve yurtdışında yapılan çalışmalara yer verilecektir.

2.6 Limit Konusuyla İlgili Yurtdışında Yapılmış Çalışmalar

Cornu (1981) limit kavramını ileri düzeyde matematiksel düşünce gerektiren ve oldukça zor bir kavram olduğunu belirtmiştir [Cornu (1981) aktaran: 25]. Ayrıca Cornu, limit kavramını öğretme ve öğrenmedeki en büyük zorluklardan birinin sadece onun karmaşık bir konu olmasının değil aynı zamanda sadece matematiksel tanımdan üretilmeyen bilişsel bakış açılarını kapsadığından da kaynaklandığını belirtir. Kavramın kendisi ve tanım arasındaki fark oldukça önemlidir. Limitin tanımını hatırlamak başka bir şey, temel kavramı kazanmaksa başka bir şeydir. Cornu (1991) limitin bir çeşit sınırlılık veya sınır anlamına geldiğini belirtir. Yaklaşmak (tend to) ifadesi öğrenciler için

1) Varmadan yaklaşmak,
2) Hemen hemen varmış olduğunu kabul ederek yaklaşmak,
3) Değişiklik yapmadan benzetmek (Bu mavi menekşe rengine çalıyor)

şeklinde çok çeşitli anlamlara gelmektedir.

Cornu (1991), öğrencilerin sahip olduğu limit modellerinin sınıflamasını yapmıştır. Cornu (1991)'nun sınıfları; durağan (son terim ifadesi), sınır (değerler limit değerini geçemez), monoton (üstten sınırlı), dinamik-monoton (artış), dinamik (yaklaşmalar), statik (dizinin terimlerinin limit etrafında toplanması) ve karışık durumlardır [40].

Williams (1989, 1991) öğrencilerin limit kavramıyla ilgili geliştirdikleri modelleri daha derinlemesine araştırabilmek için bir çalışma yapmıştır. Önce 341 analiz öğrencisine onların limit hakkındaki görüşlerini kategorize edecek şekilde geliştirdiği anketi uygulamıştır [42, 43].

A. Aşağıda limitle ilgili verilen altı ifadeyi doğru veya yanlış olarak işaretleyiniz.

1. D.Y. Limit, x değişkeninin belirli bir noktaya giderken, fonksiyonun o noktadaki değerinin nasıl değiştiğini açıklar.
2. D.Y. Limit, bir fonksiyonun alamadığı, ulaşamadığı değerdir.
3. D.Y. x değişkenini belli değerleri kısıtlayarak bir fonksiyonun alabileceği y değerlerine istenilen kadar yakın olan sayıdır.
4. D.Y. Limit, fonksiyonun çok yaklaştığı fakat asla o değeri almadığı bir sayıdır.
5. D.Y. Limit, mümkün olduğunca doğru bir şekilde yapılmaya çalışılan bir tahmindir.
6. D.Y. Limit verilen bir sayıya yakın sayıların görüntülerinin limite ulaşılıncaya kadar alınması ile belirlenir.

B. Sizin limit kavramından anladığınıza en uygun ifade yukarıdakilerden hangisidir?

1 2 3 4 5 6 Hiçbiri

Şekil 2.2 Williams (1989)'ın anketi [42]

Öğrencilerin limitle ilgili verecekleri altı ifade Şekil 2.2'de verilmiştir. Bu ifadelerden ilki dinamik teorik, ikincisi sınır, üçüncüsü formal, dördüncüsü ulaşılmaz, beşincisi yaklaşım ve altıncısı dinamik pratik modellerdir. Williams limiti dinamik olarak tanımlayan 4, ulaşılmaz olarak tanımlayan 4, sınır olarak tanımlayan 1 ve yaklaşım olarak tanımlayan 1 öğrenci olmak üzere 10 öğrenci seçmiş ve seçtiği öğrencilerle 5 görüşme gerçekleştirmiştir. Bu görüşmelerde, öğrencilerin karşı olduğu ifadeler de sorulmuştur. Öğrencilerinden doğru buldukları ifadeleri açıklamaları istenmiştir. Ayrıca görüşülen öğrencilere bir dizi problemler verilmiş ve her bir bakış açısına göre tartışma yapmaları istenmiştir. Beşinci görüşmede, öğrencilerden her üç bakış açısına da cevap vermeleri istenmiş ve görüşlerinin değişip değişmediği sorulmuştur. Her görüşme sonunda, öğrencilere limit tanımlarını değiştirme fırsatı verilmiştir. Williams (1991) öğrencilerin özellikle aykırı örnekler hakkında tartışmalar yapılmış olmasına rağmen bakış açılarını değiştirmeye direnç gösterdiklerini vurgulamıştır [43].

Öğrencilerin limit kavramını öğrenirken zorlandıkları bilinen bir gerçektir ve çoğu araştırmaya konu olmuştur [2, 25, 26, 30, 34, 43]. Tall (1992) ve Orton (1983)'ün belirttiği gibi limit konusunda yaşanan zorluklar, öğrencilerin limitle ilgili diğer kavramlarda da (türev, integral) zorluklar yaşamalarına yol açmaktadır [34, 44].

Limit kavramının öğrenimi ile ilgili en çok araştırılan konu, öğrencilerin limit konusunda yaptıkları hataları sistematik bir şekilde listelemek ve öğrencilerin bu konudaki kavramsal güçlüklerini belirlemektir. Bazı araştırmacılar öğrencilerin limiti, bir fonksiyonun ya da dizinin ötesine geçemediği bir sınır olarak [25, 43, 45], limit işleminin "en uç" değeri olarak [44, 45], asla bitirilemeyen "sonsuzluk işlemi" olarak [43, 44] ve "yaklaşma" olarak [42, 43] kavradıklarını belirtmişlerdir. Ayrıca öğrenciler ortalama hız ile anlık hızı karıştırmakta [44], limiti matematiksel anlamından çok günlük hayattaki anlamıyla açıklamaktadırlar [34, 45]; limitle ilgili verilen grafiğin tesadüfü ve yanıltıcı yönlerine odaklanabilmektedirler [44].

Tall ve Schwarzenberger (1978), limitin kavramsal olarak anlaşılmasının zorluğunun bir bölümünün limite dayanan terimlerin, konuşma dilindeki anlamından kaynaklandığını belirtir. Tall ve Schwarzenberger (1978) çalışmasında, öğrencilerin, "s dizisini istediğimiz kadar s'ye yaklaştırabiliriz" ifadesiyle, s dizisini çakışık olmayacak şeklinde anladıklarını bulmuştur [46].

Tall ve Vinner (1981) 70 üniversite birinci sınıf öğrencisine bir anket uygulamış ve ankette öğrencilerden $\lim_{x \to a} f(x) = c$ ifadesinin tanımını yapmalarını istemişlerdir. Formal tanım veren öğrencilerin çoğu tanımı yanlış yaparken, dinamik tanım yapan öğrencilerin yanıtlarının genellikle doğru olduğu görülmüştür. Aynı ankette, Tall ve Vinner (1981) öğrencilere $\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$ ifadesinin ne anlama geldiğini açıklamalarını istemişlerdir. Limitin tanımını yapamayan öğrencilerin çoğu özel bir limit ifadesini açıklamışlardır. Öğrencilerin limit hakkındaki informal dinamik söylemleri hatalı çıkarımlar yapmalarına yol açmıştır. Tall ve Vinner (1981) bu çalışmasından 22 öğrencisiyle iki yıl sonra (öğrenciler limitin formal $\varepsilon - \delta$ tanımını görmüşlerdir) $x \to a$ *iken* $f(x) \to b$ *ve* $y \to b$ *iken* $g(y) \to c$ *olsun.*

$x \to a$ *iken* $g(f(x)) \to c$ *ifadesi doğru mu yanlış mıdır* sorusunu yanıtlamaları istenmiştir. Öğrencilerin biri hariç hepsi ifadenin doğru olduğunu söylemiş ve aksi anlatılmaya çalışılmasına rağmen, öğrenciler dinamik söylemleri gereği yanlış kavramsallaştırmalarına güvenerek cevaplarını değiştirmeyi reddetmişlerdir. “x a’ya yaklaşırken f(x) b’ye yaklaşır. y b’ye yaklaşırsa g(y) c’ye yaklaşır.” Diğer bir ifadeyle öğrenci ilk önermeye sahipse o zaman f(x) ikinci önermenin hipotezine uyar. Böylece dinamik söylemlerin $g(f(x))$ ’in c’ye yaklaşması gibi yanlış sonuçlar çıkarmaya yol açtığı bulunmuştur [26].

Davis ve Vinner (1986) on beş 11. sınıf öğrencisinin limit kavramıyla ilgili sahip oldukları acemi kavram yanılgılarını (naive misconceptions) araştırdıkları bir çalışma yapmışlardır. Öğrencilere “matematik mantıklı meydan okumalar için mantıklı cevaplar vermeye dayanan bir ders olarak görülmelidir” fikrine dayanan ve iki sene süren bir eğitim vermişlerdir. Öğrencilere çeşitli türlerde diziler vermişler (örneğin $\sqrt{2}$ ’nin bulunması veya bir dairenin alanının bulunması) ve onlardan genel terimi göz önünde bulundurdukları çeşitli özelliklere sahip kendi dizilerini oluşturmalarını ve sonunda bir limit tanımı oluşturmalarını istenmiştir. Süreç boyunca öğrencilerin limitle ilgili bazı kavram yanılgıları olduğu görülmüş ve bu kavram yanılgılarının üstesinden gelinmeye çalışılmıştır. Örneğin “terimlerin yaklaştığı sayı” (böyle bir sayı tek değildir ve bu durum sadece monoton diziler için doğrudur). Çalışma sonunda öğrenciler, üç tür tanıma ulaşmışlardır: $\varepsilon - \mathrm{N}$ tanımı ve diğerleri ise informal fakat dile ve grafiksel gösterime dayanan eş tanımlardır. Daha sonra öğrencilerden bu tanımları kullanarak limit özellikleriyle ilgili basit ispatlar yapmaları istenmiştir. İlk yılın sonunda öğrenciler “tipik teoremleri ispatlayabilmiş, doğru tanımlar yapabilmiş, dizi örnekleri verebilmiş, verilen yanlış bir tanımda söz konusu yanlışlığın nerede olduğunu bulabilmişlerdir. İkinci senenin başlarında, öğrencilere hem “formal tanım” hem de “sezgisel ve informal terimlerle” bir dizinin limitinin tanımını yapmalarının istendiği bir sınav yapılmıştır. Davis ve Vinner (1986) öğrencilerin önceki yıl öğrendikleri standart açıklamaları acemi kavram yanılgılarını nasıl yansıttıklarını belirlemek için cevapları analiz etmiş ve öğrencilerin hatalarını aşağıdaki gibi 9 kategoride toplamışlardır.

1) Dizinin limit değerine ulaşmadığı,

2) a_n tam monoton bir dizi ise günlük hayattaki anlama sahip olan “limit değerine yaklaşma” ifadesine göre dizilerin hep monoton dizi olduğu,

3) Limiti sınırla karıştırma (her a_n dizisi için limitin alt ya da üst sınır olması),

4) Dizinin “son” terime sahip olduğunu, a_∞ gibi bir ifadenin olduğunu varsayma,

5) Verilen bir dizi için onlara “hemen hemen tüm terimlerinin limit değerine gittiğini” söylendiğini varsayma,

6) $f(x_0)$ ile $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ifadelerini karıştırma,

7) Dizilerin açık ve uygun bir deseninin veya basit bir cebirsel formülünün olduğunu varsayma,

8) Geçici sıranın son derece önemli olan rolünü ihmal etme (İlk önce bir N değeri seçme ve $n > N$, $L - \varepsilon \le a_n \le L + \varepsilon \ \ \forall \varepsilon > 0$ için doğru olacağını bulma),

9) n’in sonsuza yaklaşmaması gerçeği ve a_n dizisinin L sayısına yaklaşıp yaklaşamayacağı sorusunu karıştırmadır.

Davis ve Vinner (1986) ilk 7 kategoriyi kısmen öğrencilerin ön öğrenmelerinden kaynaklandığı için saf kavram yanılgıları olarak tanımlar. Dil kullanımının özellikle limite benzer kelimelerin gerçek sınır, hız limiti gibi önemli bir etkiye sahip olduğunu belirtmiştir [45].

Ferrini-Mundy ve Graham (1989) yaptıkları çalışmada, öğrencilerden *limf(x)*’in değerini bulmaları istendiğinde öğrenciler oldukça başarılı olmuşlardır; fakat limitin geometrik yorumu sorulduğunda öğrencilerin limit konusunu çok az anladıklarını, cebirsel ve grafiksel gösterimlerin birbirinden bağımsız olduğunu ifade ettikleri belirtilmiştir [47]. Yapılan bir görüşmede “yaklaşma” kavramının öğrencinin limiti anlamasının bir parçası olmadığını göstermiştir. Görüşme yapılan öğrencilerden biri limit problemlerinde “grafiğin cevabı bulmada yardımcı olmadığını” sadece fonksiyonların değerlerini bulduğunu belirtmiştir [48]. Heid (1988), Pens State’de iki öğrenci grubunun limiti anlamalarında benzer güçlüklerin olduğunu belirtmiştir. Bir gruba grafik ve sembollerin bilgisayar programları kullanılarak diğer gruba ise daha geleneksel yöntemler kullanılarak öğretim yapılmıştır. Her iki grubun da limit kavramının belirlenmesinde bir sayıdan çok yapılan işleme, yaklaşılan sayıdan çok "yaklaşmaya" odaklandıkları görülmüştür. Limitle ilgili karışıklık öğrencilerin "türevin teğetin eğimine yaklaşmaktan çok teğetin eğimine eşittir" şeklinde belirttikleri, türevi açıklamalarına da etki etmiştir [49].

Cotrill ve arkadaşları (1996), bir fonksiyonun limitini anlamada gerekli olan zihinsel yapıları APOS Teorisini kullanarak araştırmışlardır. Cotrill ve arkadaşları (1996) limitin standart dinamik kavramsallaştırmalarının, şema içinde birbirine bağlı işlemler nedeniyle literatürde bahsedilenden daha karmaşık olduğunu belirtmişlerdir. Özellikle $\lim_{x \to a} f(x) = L$ için tanım kümesi işlemi ($x \to a$) ve değer işlemi ($f(x) \to L$) f'nin hareketiyle bağlantılıdır. Sadece bu dinamik yaklaşımı anlamak değil aynı zamanda formal tanımı anlamak da zordur, Cotrill ve arkadaşları (1996) öğrencilerin dinamik şemayı, $0 < |x - a| < \delta$ iken $|f(x) - L| < \varepsilon$ şeklindeki yeni işlemi içerecek şekilde yeniden yapılandırmaları ve bunu yeni nesne olarak nesne yerine koymaları gerektiğini belirtmişlerdir. Cotrill ve arkadaşları (1996)'na göre limit kavramının genetik çözülmesi (yapılandırılması) aşağıdaki gibidir:

1) *x*'in *a*'ya yakın olduğu ya da neredeyse *a*'ya eşit olduğu durumlarda *f* fonksiyonunun değerinin hesaplanması eylemi.

2) *f* fonksiyonunun *a*'ya yakın ardışık birkaç noktada değerinin hesaplanması eylemi.

3) Aşağıdaki gibi ilişkili bir şema kurma.

a) *x*'in *a*'ya yaklaşması işlemini kavramak için ikinci aşamanın içselleştirilmesi eylemi.

b) *y*'nin *L*'ye yaklaştığı bir dizi işlemin yapılması.

c) *a* ve *b* adımlarının birlikte düşünülmesi, yani *x*, *a*'ya yaklaşırken *f(x)*'in *L*'ye yaklaşması işleminin *f* 'ye uygulanması.

4) Limit kavramıyla ilgili eylemlerin gerçekleşmesi, örneğin fonksiyonları limitlerinden bahsedilmesi. Bu yolla 3. aşamadaki şema nesne yerine geçer.

5) 3 c)'deki işlemlerin aralık ve eşitsizliklere bağlı olarak yeniden yapılandırılması. Bu durum, sayısal olarak yaklaşmanın $0 < |x-a| < \delta$ ve $|f(x)-L| < \varepsilon$ sembolleri ile verilmesiyle olur.

6) Formal limit tanımıyla bir önceki adımlar arasında bağ kurularak belirli bir şemanın oluşturulması.

7) Tamamlanan $\varepsilon - \delta$ tanımı özel durumlara uygulanır [25].

Tall (1977, 1990) 36 matematik bölümü öğrencisiyle üniversiteye başladıklarının ilk haftasında onların görüşleri ile ilgili bir çalışma yapmıştır. Çalışmada "bir dizinin limiti tanımını bilmedikleri ve $s_n \to s$ iken $n \to \infty$ olmasının ne anlama geldiğini" yazmalarını istemiştir. Bir diğer soruda da $0,\overline{9}$ sayısı 1'e eşit mi yoksa 1'den küçük müdür şeklindedir. 36 öğrenciden sadece 10'u tanımı yaparken sadece 7'si matematiksel olarak kabul edilebilecek olan bir tanım yapabilmiştir. Bu 7 öğrenciden biri $0,\overline{9}=1$ cevabını vermiştir. 13 öğrenci ise $0,\overline{9}$'un 1'den küçük olduğunu söylerken $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{9}{10}+\frac{9}{10^2}+...+\frac{9}{10^n})$ sorusuna "2" cevabını vermiştir. Bir hafta sonra öğrencilerden çeşitli ondalık sayıları kesir olarak yazmaları istenmiştir (0,25-0,05-0,3-0,33…-$0,\overline{9}$=0,999…). Öğrencilerin 24'ü $0,\overline{9}=1$ $(\frac{1}{1})$ derken bu öğrencilerin 13'ünün önceki soruda $0,\overline{9}$'un 1'den küçük olduğunu söyledikleri görülmüştür [Tall (1977, 1990) aktaran: 50, s.17].

Szydlick (2000) üniversite 1. sınıftaki analiz dersini alan öğrencilerle yaptığı çalışmada, öğrencilerin matematiksel inançları ve bununla limiti anlama arasındaki ilişkiyi araştırmıştır. Çalışma iki aşamada yapılmıştır. Önce analiz dersi alan öğrencilere, anket uygulamış ve öğrencilerin vermiş olduğu cevaplara göre 27 öğrenci seçmiştir. Sonra 27 öğrenciyle reel sayılar, sonsuzluk, fonksiyon kavramları ve matematiksel doğruluk ve geçerliğin nasıl kurulduğu ile ilgili inançları hakkında görüşmeler yapmıştır. Görüşmede öğrencilere sorulan 8 sorudan birinde öğrencilerden limit tanımını yapmalarını istemiş ve öğrencilerin bir noktadaki limit kavramı tanıma üç şekilde cevap verdiklerini bulmuştur.

1) x limitinin alındığı s noktasına yakın olunduğunda fonksiyonda L'ye yakın oluyorsa fonksiyonun limiti L'dir (Sezgisel tanım).

2) Eğer s'ye yaklaşırken fonksiyon da L'ye gittikçe yaklaşıyorsa fonksiyonun limiti L'dir (Hareket tanımı).

3) Çok az sayıda öğrenci limitin bir tanımını verememiştir (Tutarsız veya Alakasız Cevap)

Çalışmada öğrencilerin limiti daha çok sınır veya ulaşılmaz olarak tanımladıkları belirlenmiştir. Szydlick (2000) sonuç olarak, öğrencilerin analiz dersini uygulanılan, hatırlanan yöntem ve gerçeklerin bir koleksiyonu olarak gördüklerini ve öğrencilerin yöntem ve tekniklerin altında yatan teoriye önem vermedikleri ve bunu anlamak için çabalamadıklarını belirtmiştir [Szydlick (2000) aktaran: 51, s.37].

Bezuidenhout (2001) öğrencilerin kavram imajlarının karakteristiklerini ve doğasını araştırmak için üç aşamadan oluşan bir çalışma yapmıştır. Çalışmanın ilk aşamasında 107 üniversite birinci sınıf mühendislik öğrencisine ön testler yapmıştır. Testler planlı ve düzenli bir şekilde 1994 yılının ikinci döneminin sonuna kadar tüm sınıfa uygulanmıştır. Ön testten elde edilen sonuçların analizine göre iki kısımdan oluşan bir diagnostik test hazırlanmıştır. 3 Güney Afrika üniversitesinden mühendislik ve fizik bölümlerinden toplam 523 öğrenci 1995 yılının ikinci döneminde çalışmanın ikinci aşamasına katılmıştır. Üçüncü aşamada ise öğrencilerden 15'i seçilerek görüşmeler yapılmıştır. Görüşme yöntemiyle öğrencilerin birçok kavram yanılgısı olduğu saptanmıştır. Çalışmanın sonunda öğrencilerin "limit", "süreklilik" ve "diferansiyellenebilme" kavramlarını anlamalarının ve kavramların bilgilerinin gerçeklerden uzak ve eksik yöntemlere dayandığı bu kavramlar arasındaki ilişkiyi tam kuramadıkları bulunmuştur [52].

Jordaan (2005) ise 47 mühendislik öğrencisiyle limitteki kavram yanılgılarıyla ilgili yaptığı çalışmada 5 açık uçlu ve doğru yanlış sorularından oluşan diagnostik bir test ile yarı yapılandırılmış 6 sorudan oluşan bir görüşme gerçekleştirmiştir. Çalışmanın sonunda öğrencilerin:

- Limiti bir sınırlılık olarak gördüğü,

- Limiti fonksiyonunun ulaşamadığı değer olarak algıladıkları,
- Bir fonksiyonun limitinin kesinlikle bir nokta olacağını düşündükleri,
- Fonksiyonun tanımlı olduğu noktada mutlaka limitinin olduğu,
- Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa o noktada sürekli olduğu ve $\frac{0}{0}$ belirsizliğini 0 buldukları,

şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır [53].

2.7 Limit Konusuyla İlgili Yurtiçinde Yapılmış Çalışmalar

Doğan ve arkadaşları (2002), 189 ilköğretim matematik öğretmen adayıyla yaptıkları çalışmada, özel fonksiyonlar, fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yetersizliklerini araştırmak için bu konularla ilgili ÖYS'de çıkmış sorulardan oluşan 18 soruluk bir test uygulamışlardır. 18 sorudan 6'sı fonksiyonlarda limit konusu ile ilgilidir. Yapılan çalışmanın sonunda öğrencilerin %19'unun limit sorularına doğru cevap verdiği, %13'ünün yanlış cevap verdiği, %68'inin de soruları boş bıraktığı gözlenmiştir. Özellikle değişkenin yaklaştığı değerin yerine konulması ile bulunan soruların öğrenciler tarafından yapıldığı fakat belirsizlikle ilgili soruların yapılamadığı görülmüştür [54].

Çolak (2002), yaptığı çalışmada geleneksel yöntemden farklı olarak geliştirilen eğitim durumunun öğrencilerin limit kavramını öğrenmelerine etkisini incelemiştir. 29'u kontrol, 32'si deney grubu olmak üzere 61 lise öğrenciyle yürüttüğü çalışmasında her iki gruba da erişi testi uygulamıştır. Çalışmasının sonucunda geleneksel yöntemle limit kavramının verildiği öğrencilerin limit kavramıyla ilgili problemleri çözebildikleri ancak limitin formal tanımını ve yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bilmediklerini görmüştür. Geliştirilen eğitim durumu ile limit kavramının verildiği öğrencilerin ise kavramlar ile işlemler arasında bağ kurdukları, yaptıkları işlemin ne anlama geldiğini bildikleri, bilgiyi ezbere öğrenmedikleri sonucuna ulaşmıştır [51].

Durmuş (2004), İlköğretim Matematik, Fen Bilgisi (N=158) ve Sınıf Öğretmenliği Bölümü öğrencileriyle (N=323) gerçekleştirdiği çalışmada öğrencilerin matematikteki öğrenme güçlüklerini belirlediği çalışmasında limit ve süreklilik konularının zorluk indeksini 67,1 olarak bulmuştur. Öğrencilerin zor olarak gördükleri konuları niçin böyle algıladıklarını anlamak için rasgele 20 öğrenciyle görüşme yapmış ve görüşme sonunda, zorlukların o konuyla ilgili ÖSS'de az soru sorulması ve o konuların kavramsal olarak soyut algılanması şeklinde iki nedenden kaynaklandığı sonucuna ulaşmıştır [2].

Akbulut ve Işık (2005)'in limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkiliğini incelemiş ve süreç boyunca öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgılarını incelemişlerdir. 100 İlköğretim Matematik Bölümü öğrencisiyle yaptıkları çalışmada limit kavramının öğretiminde etkileşimli öğretim stratejisinin geleneksel yöntemlerden daha etkili olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Öğrencilerin ∞ kavramını limit değeri olarak kabul ettikleri, bir fonksiyonun limitinin olması için sürekli olması gerektiği, limiti bir hareket olarak ele alma, limiti sınır olarak tanımlama ve limiti ulaşılmazlık olarak ifade etme şeklinde kavram yanılgılarına sahip olduklarını tespit etmişlerdir [55].

Bukova (2006), limit kavramının oluşturulmasına katkı sağlayacak, "Yapılandırmacı Öğrenme Yaklaşımı (YÖY)" ile uyumlu bir öğrenme ortamı geliştirmiştir. Geliştirdiği ortamı, 60 Analiz I öğrencisine uygulamış ve bu ortamın öğrencilerin limit kavramı ile ilgili başarılarını, matematiğe yönelik tutumlarını, yaşam ile olumlu ilişkilendirmelerini, bilimi tanımlamalarını, öğrenmeyi öğrenmelerini, sorgulayarak öğrenmelerini, iletişim kurarak öğrenmelerini ve matematiksel düşünmelerinin gelişimine katkısını araştırmıştır. Araştırmanın sonucunda geliştirilen yapılandırmacı ortamın, limit kavramının oluşturulması ve öğrenilmesinde katkı sağladığı sonucuna ulaşılmıştır. Ayrıca öğrencilerin $\delta - \varepsilon$ yaklaşımını kullanarak fonksiyonun bir noktasındaki limitinin varlığını ispat etmede zorlandıkları görülmüştür [56].

Yurt dışında limit konusundaki kavram yanılgılarıyla ilgili çok sayıda araştırma yapılırken Türkiye'de limit konusundaki kavram yanılgılarıyla ilgili araştırmalara çok fazla rastlanmamıştır.

Yapılan çalışmalarda kavram yanılgısının belirlenmesi için daha çok açık uçlu sorulardan oluşan diagnostik testlerin kullanıldığı görülmüştür. Yapılan çalışmalarda, açık uçlu sorulardan oluşan diagnostik testlerin yanı sıra, yarı yapılandırılmış görüşmeler de kullanılmıştır. Çalışmalarda çoktan seçmeli testlere çok fazla yer verilmemektedir. Bazı çalışmalarda anketler kullanılmıştır.

2.8 Çalışmanın Önemi

Öğrencilerin sahip olduğu kavramsal temel sonradan edinilen bilgileri etkileyebildiğine göre mevcut duruma bakarak geriye dönük değerlendirmeler yapmak mümkündür [57]. Özellikle matematiğin aşamalılık ilişkisi yüksek bir ders olması nedeniyle, her konu öncesi geriye dönük değerlendirme yapılması bir zorunluluk haline gelmektedir. Bu sayede öğrencilerin öğrenmelerine engel teşkil edecek kavram yanılgılarının belirlenecek ve öğrencilerin kavram yanılgıları zamanında giderilebilecektir.

Öğrencilerin öğrenmede zorlandıkları ve ileri düzey matematiğin de temelini oluşturan limit konusu, öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları nedeniyle sonraki öğrenmelerinde de büyük zorluklarla karşılaşmalarına yol açmaktadır. Bu çalışma, öğrenimine lisede başlanılan ancak yine de üniversite öğrencilerinin eksik ve hatalı öğrenmelere sahip olduğu limit konusunda, üniversite öğrencilerinin ne tür kavram yanılgılarına sahip olduğunu araştırdığından, matematik eğitimi ve matematik öğretmenlerine limit konusunda rehber olabilecektir. Ayrıca, limit konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesiyle ilgili yapılan çalışmalar yok denecek kadar azdır.

2.9 Çalışmanın Amacı

Çalışmanın amacı, fen bilgisi ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf ve matematik öğretmenliği 1. ve 5. sınıf öğrencilerinin limit konularında sahip oldukları kavram yanılgılarını belirlemektir. Ayrıca matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencileri, limit konusundaki kavram yanılgıları açısından karşılaştırılacaktır. Bu amaçla aşağıdaki sorulara cevap aranmıştır.

2.10 Çalışmanın Problem Cümleleri

Bu çalışmada aşağıdaki çalışma problemlerinin cevapları aranacaktır.

Birinci Alt Problem: Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konularını tam olarak öğrenebilmeleri için gerekli ön kavramlarla (fonksiyonlar, fonksiyonların tanım kümeleri, trigonometri) ilgili sahip oldukları kavram yanılgıları ya da bilgi eksiklikleri var mıdır?

İkinci Alt Problem: Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konusuyla ilgili kavram yanılgıları var mıdır?

Üçüncü Alt Problem: 1. sınıf matematik öğretmen adayları ile son sınıf (5. sınıf) matematik öğretmen adayları arasında limit konusundaki hata ve kavram yanılgıları açısından benzerlik ve farklılıkları var mıdır?

Dördüncü Alt Problem: Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konusuyla ilgili işlemsel hataları var mıdır?

2.11 Varsayımlar

1) Matematik öğretmenliği 1. sınıf, matematik öğretmenliği 5. sınıf, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri üniversite öğrencilerini temsil edecek niteliktedir.

2) Kullanılan limit ön test, diagnostik test, limit işlemsel testlerin çalışma için uygun veri toplama aracı olduğu kabul edilmiştir.

3) Araştırmaya katılan öğrencilerin testlere samimiyetle cevap verdikleri kabul edilmiştir.

2.12 Sınırlılıklar

1) Çalışmada öğrencilerin limit konusuyla ilgili kavram yanılgıları tespit edilip detaylı bir şekilde analiz edildiğinden az sayıda öğrenci ile çalışılmıştır. Çalışma nitel bir çalışma olduğundan diğer öğrencilere genellemez.

2) Çalışma, Balıkesir üniversitesindeki matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri ($N_{MÖ1}$=34), matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencileri ($N_{MÖ5}$=30), fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri ($N_{FBÖ1}$=12) ve bilgisayar öğretmenliği ($N_{BÖ1}$=30) öğrencileriyle,

3) Çalışma, kullanılan limit ön test, limit diagnostik test ve limit işlemsel testten elde edilen verilerle,

4) Çalışma kullanılan limit ön test, limit diagnostik test ve limit işlemsel test için öğrencilere verilen süre ile sınırlıdır.

5) Çalışmaya katılan öğrencilerin kimlikleri gizli tutulmuştur.

3. YÖNTEM

Bu bölümde çalışmanın problemlerinin araştırılması için çalışma, grubu verilerin toplanması analizi ve yorumlanmasında kullanılan yöntem ve teknikleri açıklanmıştır.

3.1 Çalışma Grubu

Çalışma, Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğtim Fakültesi öğrencileri ile yapılmıştır. Üniversite öğrencilerinin limit konusundaki kavram yanılgılarını belirlemek için araştırmanın örneklemi, 2006-2007 öğretim yılı 2. döneminde Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğtim Fakültesi Matematik Öğretmenliği 1. sınıf ($N_{MÖ1}$=34), Matematik Öğretmenliği 5. sınıf ($N_{MÖ5}$=30), Fen Bilgisi Öğretmenliği 1. sınıf ($N_{FBÖ1}$=12) ve Bilgisayar Öğretmenliği 1. sınıf ($N_{BÖ1}$=30) öğrencileri olmak üzere toplam 106 öğrenciden oluşmaktadır.

Araştırmanın çalışma grubu, amaçlı örnekleme yöntemlerinden kritik durum örneklemesi yöntemi kullanılarak oluşturulmuştur. Patton (1987), kritik durum örneklemesini "bu, burada oluyorsa başka benzer durumlarda kesinlikle olur" ya da "bu burada olmuyorsa, başka benzer durumlarda kesinlikle olmaz" şeklinde bir durumla karşılaşıldığında kullanıldığını belirtmiştir [Patton (1987) aktaran: 58, s.110].

3.2 Araştırma Modeli

Çalışma nitel bir çalışmadır. Denzin ve Lincoln (1998) nitel araştırmayı, "araştırmacıların araştırılacak konu ya da konuları doğal ortamda inceledikleri ve araştırılan insanların getirmiş oldukları anlamlar açısından olguyu anlamlaştırma ve yorumlama çabası" olarak tanımlar [Denzin ve Lincoln (1998) aktaran: 59, s.27].

Durum çalışmasının en belirgin özelliği, güncel bir olgu, olay, durum, birey ve gruplar üzerinde odaklanılıp, derinlemesine incelemeler yapılmasıdır (Basey, 1999; Stake, 1995; Yin, 1994). Çalışmada, durum çalışması desenlerinden iç içe geçmiş tek durum deseni (Tür 2) kullanılmıştır. İç içe geçmiş tek durum deseni, durum çalışmasının araştırılan durumu, durum içinde olabilecek birden fazla alt birime yönelmenin söz konusu olduğu çalışmalarda kullanılır [58].

3.3 Veri Toplama Araçları

Çalışmada veri toplama aracı olarak, limit ön test (EK A), limit diagnostik test (EK B) ve limit işlemsel test (EK C) araştırmacı tarafından geliştirilerek kullanılmıştır.

Çalışmada öğrencilerin kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla kullanılan limit diagnostik test açık uçlu sorulardan oluşmaktadır. Kavram yanılgılarının belirlenmesi için sonuca dayalı testler yerine, olayların nedenini ve sürecini açıklamaya yönelik açık uçlu sorular sorulması, kavram yanılgılarının belirlenmesi için çok yararlıdır [13]. İyi yapılandırılmış açık uçlu sorular, öğrencilere verdikleri cevabın nedenlerini de kendi sözcükleri ile ifade etme imkanı vermekte ve üst düzey düşünme becerilerini yansıtmaktadır [16].

Çalışmada kullanılan testlerin geliştirilmesi ve uygulanmasına 3.3.1, 3.3.2 ve 3.3.3 de yer verilmiştir.

3.3.1 Limit Ön Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması

Öğrencilerin limit konusundaki kavram yanılgılarını araştırmadan önce öğrencilerin limit için gerekli ön bilgilerinde eksiklik olup olmadığının belirlenmesi amacıyla limit ön test (EK A) geliştirilmiştir.

Hazırlanan testin soruları Thomas ve Finney (1988)'in *Calculus with Analytic Geometry* kitabından, Cooley (2002)'in çalışmasından yararlanılarak ve araştırmacı tarafından hazırlanmıştır [60, 61]. Limit ön test, limit konusunun öğrenilmesinde en temel konulardan biri olan fonksiyonlar konusunu içeren 7 açık uçlu sorudan oluşmaktadır. Test toplamda 23 maddeden oluşmaktadır. Limit ön test sorularının amaçları Tablo 3.1'de verilmiştir.

Tablo 3.1 Limit ön test sorularının amaçları

Soru	**Amaçlar**
1.	Fonksiyonlar konusundaki temel bilgileri ölçmek
2.	Fonksiyonun verilen bir noktadaki değerini bulmak
3.	Fonksiyonun tanım kümesini bulmak
4.	Fonksiyonun grafiğini çizmek
5.	Trigonometrik fonksiyonların eşitliklerini bulmak
6.	Bağımlı değişkenle bağımsız değişken arasında ilişki kurmak
7.	Komşuluk ifadesinin nasıl anlaşıldığını belirlemek

Limit ön testin pilot çalışması, 60 fen edebiyat fakültesi matematik bölümü öğrencisiyle 2006-2007 öğretim yılının birinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Pilot çalışma sonunda limit ön test için öğrencilere 30 dakika süre verilmesi uygun görülmüştür.

Testin güvenirliğini ölçmek için Spearman Brown iki yarı test korelasyonu kullanılmış ve testin güvenirliği 0.72 bulunmuştur.

Pilot çalışmadan elde edilen bulgulara göre 60 fen edebiyat fakültesi öğrencisinin fonksiyonlarla ilgili temel bilgilerinde eksiklikler olduğu özellikle, grafik çizme ve fonksiyonu tanımsız yapan değerlerde sorunlar yaşadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

3.3.2 Limit Diagnostik Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması

Limit diagnostik test (EK B) öğrencilerin limit konusunu kavramsal olarak nasıl algıladıklarını (anladıklarını) ve işlemsel olarak bu konunun uygulamalarını nasıl yaptıklarını araştırmak için geliştirilmiştir. Bu testin soruları, Bezuidenhout (2001), Jordaan (2005) ve Karahasan (2002)'ın çalışmalarından yararlanarak ve araştırmacı tarafından oluşturulmuştur [52, 53, 62].

Test, açık uçlu 14 sorudan ve bu 14 sorunun içinde yer alan toplamda 34 maddeden oluşmaktadır. Limit diagnostik test ve bu testteki her bir sorunun amacı soruların uygunluğu ve kapsamının yeterliliğini belirlemek için matematik eğitiminde uzman 3 kişi tarafından incelenmiş ve gerekli düzeltmeler yapılmıştır. Hazırlanan soruların amaçları Tablo 3.2'de verilmiştir.

Tablo 3.2 Limit diagnostik testteki soruların amaçları

Soru	Amaçlar
1.	Limitin formal tanımının nasıl anlaşıldığını ortaya koymak. ε ve δ ifadelerinin nasıl algılandığını belirlemek.
2.	Limitin çağrıştırdığı anlamlar ve nasıl kavramsallaştırıldığı ile limitin informal tanımlarının neler olabileceğini belirlenmek.
3.	$\varepsilon-\delta$ tanımının nasıl anlaşıldığını belirlemek.
4.	Sağ ve sol limit kavramlarının nasıl anlaşıldığını belirlemek.
5.	Limitin dinamik ifadesinin anlama geldiğini belirlemek.
6.	Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri, bu fonksiyonun bu noktadaki değeri ve bu noktadaki sürekliliği ve $\varepsilon-\delta$ tanımı arasında nasıl bir ilişki kurulduğunu belirlemek
7.	Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında nasıl bir ilişki kurulduğunu belirlemek, Bir fonksiyonun hangi durumlarda verilen bir noktada tanımlı olup limitinin olmadığını belirlemek ve bunun örneklendirilmesi
8.	Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında nasıl bir ilişki kurulduğunu belirlemek Bir fonksiyonun hangi durumlarda verilen bir noktada tanımlı olamayıp limitin olabildiğini belirlemek ve bunun örneklendirilmesi
9.	Bir dizinin limiti ile bir fonksiyonun limit arasında nasıl bir ilişki kurulduğunu belirlemek.
10.	Bir değere sağdan, soldan yaklaşma ile $-\infty$ ve ∞'a gitmenin nasıl anlaşıldığının belirlenmesi.
11.	Belirsizliğin olduğu noktalarda limit ve sürekliliğin nasıl araştırıldığının belirlenmesi
12.	∞ ifadesinin limitte nasıl kullanıldığını ve işlemsel olarak bu belirsizliğin nasıl aşıldığını belirlemek
13.	Bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında nasıl bir ilişki kurulduğunu belirlemek
14.	Limitin işlemsel olarak nasıl bulunduğunun belirlemek

Limit diagnostik test, 2006-2007 öğretim yılının birinci döneminde, 60 Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 1. sınıf öğrencisine uygulanarak pilot çalışması yapılmıştır. Pilot çalışması yapılmasının amacı, hazırlanan testin seçilen örnekleme uygulanmadan önce çalışıp çalışmadığının, çalışmada gerçekleştirilmek istenen amaçlara ulaşılıp ulaşılmadığının belirlenebilmesidir. Pilot çalışma sayesinde hem soruların öğrenciler tarafından net bir şekilde anlaşılıp anlaşılmadığı hem de soruların cevaplanması için ne kadar süre gerektiği belirlenmiştir. Araştırmacı tarafından 40 dakika olarak düşünülen uygulama süresi pilot çalışma sonucunda 45 dakikaya çıkarılmıştır.

Testin güvenirliğinin araştırılması için Spearman Brown iki yarı test korelasyonu kullanılmış ve testin güvenirliği 0.93 bulunmuştur. Limit diagnostik testin birinci sorusu amaca yeteri kadar hizmet etmediği, 8. sorunun f şıkkı da çalışmadığı gerekçesiyle testten çıkarılmıştır. Pilot çalışma sonunda öğrencilerin hata ve kavram yanılgıları şu kategoriler altında toplanmıştır:

- Limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı,
- Limit kavramı tanımı,
- Fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı,
- Sağ ve sol limit kavramları,
- Limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki,
- Bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması
- Fonksiyon grafiklerinin çizimi,
- "∞" kavramı ve işlemlerde kullanılması

ile ilgili yapılan hata ve kavram yanılgılarıdır.

3.3.3 Limit İşlemsel Testin Geliştirilmesi ve Uygulanması

Limit işlemsel test (EK C), öğrencilerin limit konusunda işlemsel yeteneklerinin düzeyinin belirlenmesi amacı ile oluşturulmuştur.

Hazırlanan testin soruları ÖSS'ye hazırlık kitapları taranarak oluşturulmuştur. Limit işlemsel test 10 çoktan seçmeli sorudan oluşmaktadır. Limit işlemsel testin amaçları Tablo 3.3'te verilmiştir.

Tablo 3.3 Limit işlemsel testteki soruların amaçları

Soru	Amaçlar
1.	Verilen bir fonksiyon grafiğinin limit değerinin nasıl bulunduğunun belirlenmesi
2.	Verilen bir fonksiyonun limit değerinin nasıl bulunduğunun belirlenmesi
3.	Trigonometrik fonksiyonların limitlerinin nasıl bulunduğunun belirlenmesi
4.	Sonsuza giderken nasıl limit alındığının belirlenmesi
5. 6. 7.	Limit alırken karşılaşılan belirsizlik durumlarının nasıl üstesinden gelindiğinin belirlenmesi
8.	Bir fonksiyonun sürekli olmasından ne anlaşıldığının belirlenmesi
9.	Trigonometrik fonksiyonların limitlerinin nasıl bulunduğunun belirlenmesi
10.	Verilen bir fonksiyonun limit değerinin nasıl bulunduğunun belirlenmesi

Limit son testin pilot çalışması, 60 fen edebiyat fakültesi matematik bölümü öğrencisiyle 2006-2007 öğretim yılının birinci döneminde gerçekleştirilmiştir. Testin güvenirliğini ölçmek için Spearman Brown iki yarı test korelasyonu kullanılmış ve testin güvenirliği 0.70 bulunmuştur.

Pilot çalışma sonunda limit ön test için öğrencilere 20 dakika süre verilmesi kararlaştırılmıştır.

Pilot çalışmadan elde edilen bulgulara göre öğrencilerin, limiti alınan trigonometrik fonksiyonların değerini bulmada (Soru5 ve Soru9) ve sonsuza yaklaşırken limit bulma ile ilgili soruda hata yaptıkları (Soru4), belirsizliğin olmadığı fonksiyonlarda limiti aranan değeri fonksiyonda yerine koyarak doğru sonuca ulaştıkları belirlenmiştir. Bazı öğrencilerin de kesir şeklindeki fonksiyonların limitini alırken belirsizlik olmamasına rağmen L-Hospital kuralını uyguladıkları belirlenmiştir (Soru3) (EK C).

3.4 Veri Analizi

Çalışmadan elde edilen veriler, nitel araştırmalarda sıklıkla kullanılan içerik analizi yöntemiyle analiz edilmiştir. Öğrencilerin limit diagnostik teste verdiği yanıtlar, Abraham ve arkadaşları (1994) tarafından geliştirilen 5'li anlama düzeyi ölçeğine göre, tekrarlanan ifadeler beş grupta kodlanarak analiz edilmiştir:

- *Tam Doğru Yanıt*: Geçerli cevabın tüm bileşenlerini içeren cevaplar.
- *Kısmen Doğru Yanıt*: Geçerli yanıtın bileşenlerinden en az birini içeren, hepsini içermeyen yanıtlar.
- *Kısmen Doğru/Kavram Yanılgısı Var*: Kavramın anlaşıldığını fakat yine de bir kavram yanılgısı olduğunu gösteren yanıtlar.
- *Kavram Yanılgısı Var*: Mantıksız veya yanlış bilgiyi içeren cevaplar
- *Yanıt Yok*: Konu ile ilgisi olmayan veya belirgin olmayan cevaplar, sorudaki bilgiyi tekrar eden cevaplar, boş bırakma.

kategorilerinden oluşmaktadır [63].

Kullanılan bu ölçek, öğrencilerin yanıtlarının kategorize edilmesi, kavrama düzeylerinin ortaya çıkarılması ve öğrenciler arasında kıyaslama yapılmasında birçok araştırmacı tarafından kullanılmıştır (Abraham ve arkadaşları (1994), Nakiboğlu (2003), Ayas ve Çalık (2005), Poyraz (2006)) [63-66].

Limit Diagnostik Testin analiz güvenirliği için uygulanan testlerin bir kısmı Matematik Eğitimi alanında uzman iki öğretim üyesi tarafından analiz edilmiş ve araştırmacı ile öğretim üyeleri arasında %95 uyum sağlandığı bulunmuştur.

Öğrencilerin cevapları *Tam Doğru Yanıt* için 3, *Kısmen Doğru Yanıt* için 2, *Kısmen Doğru/Kavram Yanılgısı Var* için 1, *Kavram Yanılgısı Var* ve *Yanıt Yok* için 0 olarak puanlanmıştır.

Çalışmaya katılan 106 öğrenci;

Ö1'den Ö34' kadar: Matematik Öğretmenliği 1. Sınıf Öğrencileri ($N_{MÖ1}=34$)

Ö35'den Ö64' kadar: Matematik Öğretmenliği 5. Sınıf Öğrencileri ($N_{MÖ5}=30$)

Ö65'ten Ö76'ya kadar: Fen Bilgisi Öğretmenliği 1. Sınıf Öğrencileri ($N_{FBÖ1}=12$)

Ö77'den Ö106'ya kadar: Bilgisayar Öğretmenliği 1. Sınıf Öğrencileri ($N_{BÖ1}$=30)
şeklinde kodlanmıştır.

Ayrıca çalışmadan elde edilen verileri doğru bir şekilde sunabilmek için, öğrencilerin kavram yanılgısı içeren yanıtlarından, doğrudan alıntılara yer verilmiştir.

3.5 İşlem

Çalışma, 2006-2007 öğretim yılının ikinci döneminde uygulanmıştır. Önce matematik öğretmenliği 1. sınıf, matematik öğretmenliği 5. sınıf, fen bilgisi 1. sınıf ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerine, öğrencilerin fonksiyonlar konusundaki ön bilgilerini ölçmek amacıyla, 1 Mayıs 2007 tarihinde limit ön test uygulanmıştır. Limit ön test için öğrencilere 30 dakika süre verilmiştir. Yetiştiremeyen öğrencilere 10 dakikalık bir ek süre verilmiştir. 3 Mayıs 2007 tarihinde hazırlanan limit diagnostik test uygulanmıştır. Limit diagnostik test için öğrencilere 45 dakika verilmiştir. En son olarak da 8 Mayıs 2007 tarihinde öğrencilere limit işlemsel test uygulanmıştır. Öğrencilere limit işlemsel test için 20 dakika süre verilmiştir.

4. BULGULAR

Bu bölümde, çalışmada araştırılan çalışma problemlerinin sınanması için elde edilen verilerin çözümlemeleri sonucunda ulaşılan bulgulara yer verilmiştir. Önce öğrencilerin ön bilgilerinin ölçülmesi için uygulanan Limit Ön Teste (EK A), sonra Limit Diagnostik Teste (EK B) vermiş olduğu cevaplar incelenerek, öğrencilerin sahip oldukları kavram yanılgıları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin verdikleri cevaplardaki kavram yanılgılarının betimlemeleri, frekans ve yüzdeleri tablolarla belirtilmiştir. Öğrencilerin verdikleri cevaplar, Abraham ve arkadaşlarının (1994) ölçeğine göre tam (istenen) doğru yanıt, kısmen doğru yanıt, kısmen doğru/kavram yanılgısı var, kavram yanılgısı var, yanıt yok kategorilerine göre incelenerek tablolaştırılmıştır [63]. En son olarak da Limit İşlemsel Teste (EK C) ait cevaplar tablolaştırılmıştır.

4.1 Birinci Alt Probleme Ait Bulgular: Limit Ön Testten Elde Edilen Bulgular

Birinci alt problemde "matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konularını tam olarak öğrenebilmeleri için gerekli ön kavramlarla (fonksiyonlar, fonksiyonların tanım kümeleri, trigonometri) ilgili sahip oldukları kavram yanılgıları ya da bilgi eksiklikleri var mıdır" sorusuna yanıt aranmıştır.

Birinci alt problemi test etmek için çalışmaya katılan 106 öğrencinin limit ön teste verdikleri yanıtlar betimsel olarak analiz edilmiştir.

1) a) Fonksiyon nedir? Tanımlayınız.

b) Bağımlı değişken ve bağımsız değişken nedir? Açıklayınız.

c) Bildiğiniz fonksiyon çeşitlerini yazınız.

d) Parçalı fonksiyon nedir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.

e) Artan ve azalan fonksiyon nedir? Tanımlayınız.

Birinci soruda öğrencilerin fonksiyonlarla ilgili temel bilgileri araştırılmıştır.

Fonksiyon nedir sorusuna verdikleri yanıtlar incelendiğinde, çalışmaya katılan 106 öğrencinin (N $_{MÖ1}$=34, N $_{MÖ5}$=30, $_{FBÖ1}$=12, N $_{BÖ1}$=30) formal tanım vermeye çalıştığı fakat bunlardan 93'ünün doğru bir formal tanım veremediği, öğrencilerin 72'sinin bağımlı ve bağımsız değişken kavramlarını tam olarak ifade edemedikleri ve fonksiyonlar konusunda temel bilgilerinde eksikler olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

2) a) f(x) = $x^2 + 3x + 5$ fonksiyonu için f($\sqrt{3}$) nedir?

b) h(x) = $\frac{|x|}{x}$ fonksiyonu için h(-99) nedir?

c) G(t) = $\sqrt{4-3t}$ fonksiyonu için G(4) nedir?

d) f(x) = x^2 fonksiyonu için $\frac{f(1+a)-f(1)}{a}$ ($a \neq 0$) nedir?

e) f(x)=$\frac{1}{x}$ fonksiyonu için $f(\infty)$ ve $f(0)$ nedir?

Fonksiyonun bir noktadaki değeri ile ilgili sorularda, verilen noktayı fonksiyonda yerine koymak suretiyle öğrencilerin genelde doğru cevaba ulaştıkları bulunmuştur. Ancak *f(x)=*x^2 için $\frac{f(1+a)-f(1)}{a}$ $(a \neq 0)$ ifadesinin değeri sorulduğunda 8 öğrencinin bu ifadeye limit tanımı dedikleri belirlenmiştir.

Fonksiyonu tanımsız yapan değerlerle ilgili sorular doğru cevaplanmıştır. Sadece, f(x)=$\frac{1}{x}$ için f(∞) ve f(0) sorulduğunda, 95 öğrencinin bu ifadeler için limitteki değerleriyle karıştırarak f(∞)=0 ve f(0)= ∞ buldukları belirlenmiştir. Bu durumda öğrencilerin sonsuzluk kavramıyla ilgili bilgilerinde eksiklikler olduğu görülmüştür.

3) a) y = $\sqrt{4-x}$ **b)** y = $\sqrt{1-x^2}$ **c)** y = $\sqrt{\dfrac{x+1}{2-x}}$ **d)** y = sgn($\dfrac{x-5}{x^2-9}$)

fonksiyonlarının tanım kümeleri nedir?

Fonksiyonun en geniş tanım kümesini bulma sorularında da öğrencilerin hemen hemen hepsinin başarılı olduğu bulunmuştur.

4) a) y = 3x – 5 **b)** y = x^2 + 1 **c)** y = sin2x **d)** y = cotx fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

Fonksiyon grafikleri ile ilgili sorularda öğrencilerin cotx'in grafiği hariç başarılı olduğu ve 63 öğrencinin cotx'in grafiğini yanlış çizip, 31'inin ise soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir.

5) a) sin (90 – x) = ? **b)** cos (225) = ? **c)** tan (360 – x) = ? **d)** cot (480) = ?

Basit trigonometrik eşitliklerle ilgili soruda 82 öğrencinin doğru sonuca ulaştığı ancak bazen hatalı işlemler de yaptıkları gözlenmiştir. Trigonometrik fonksiyonların işaret incelemelerinde bazı hatalara rastlanmıştır. Bunlar dikkatsizlikten olabileceği gibi öğrencilerin bilgi eksikliğinden kaynaklanmış olabilir.

6)

x	0	20	---	60	80	100
y	32	68	104	140	---	212

yukarıdaki grafikte x değerlerine karşılık y değerlerini alan x'e bağlı olan fonksiyonu yazınız. Boşluklara gelecek sayılarını ve x = - 40 için fonksiyonun değerini bulunuz.

Bağımlı değişkenle bağımsız değişken arasındaki ilişkinin kurulmasının istendiği bu soruya öğrencilerden 5'i doğru yanıt verebilmiştir. Diğer öğrencilerin 62'si soruyu boş bırakırken geriye kalan kısmı y ile x arasında yanlış ilişki kurmuşlardır.

7) Herhangi bir a noktasının 3 komşuluğu" ifadesi ile anlatılmak istenen nedir?

Komşuluk Kavramı ile ilgili soruya öğrencilerin verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin büyük bir çoğunluğunun bu kavramı sezgisel olarak anlayabildikleri görülmüştür. Fakat bazı öğrencilerin soruda istenen a'nın 3 komşuluğu ifadesinden, "3'ten a kadar sağa ve sola gidilmesiyle oluşan aralığı" yani tam tersine 3'ün a komşuluğunu anladıkları belirlenmiştir. Ayrıca yanıtı doğru olan öğrencilerin, formal tanım yerine, bu ifadeyi sayı doğrusu üzerinde gösterdikleri görülmüştür.

4.2 İkinci Alt Probleme Ait Bulgular: Limit Diagnostik Testten Elde Edilen Bulgular

Limit diagnostik test, matematik öğretmenliği 1. sınıf ($N_{MÖ1}$=3), matematik öğretmenliği 5. sınıf ($N_{MÖ5}$=30), fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf ($N_{FBÖ1}$=12) ve bilgisayar öğretmenliği 4. sınıftan ($N_{BÖ1}$=30) olmak üzere toplam 106 üniversitesi öğrencisine uygulanmıştır. Bu bölümde her soru ayrı ayrı incelenmiş ve her soruya ait iki tablo sunulmaktadır. İlk tabloda öğrencilerin verdikleri yanıtlar, "tam doğru yanıt", "kısmen doğru yanıt", "kısmen doğru/kavram yanılgısı var", "kavram yanılgısı var" ve "yanıt yok" şeklinde 5 grup altında toplanmış, öğrencilerin cevapları bu gruplara göre değerlendirilerek yüzde ve frekans tabloları oluşturulmuştur. İkinci tabloda ise öğrencilerin hatalarından örnekler ve bu hataları yapan öğrenci sayıları ile hatalara yönelik betimsel analizler gösterilmektedir. Ayrıca 6. ve 11. sorularda öğrencilerin doğru buldukları şıkları gösteren, 7. 8. 11. ve 12. sorularda öğrencilerin çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdelerini gösteren, 10. ve 14. sorularda şıklara verilen cevapların doğru-yanlış frekans ve yüzdelerini gösteren tablolara yer verilmiştir.

Limit diagnostik testin birinci sorusu, "*Eğer verilen* $\forall\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $\delta > 0$ *reel sayısı bulunabilirse ki* $0 < |x - x_0| < \delta$ *olduğunda* $|f(x) - l| < \varepsilon$ *oluyorsa,* f *fonksiyonunun* x_0 *'daki limiti* l *'dir*" *ifadesiyle anlatılmak istenen nedir* şeklindedir. Bu sorunun sorulma amacı, öğrencilerin limitin formal tanımını nasıl anladıklarını ortaya koymak ve öğrencilerin ε ve δ ifadelerini nasıl anladıklarını belirlemektir.

Tablo 4.1
Birinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 1	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	4	12	3	10	-	-	-	-	7	7
Kısmen Doğru Yanıt	17	50	7	23	-	-	2	7	26	24
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	2	6	1	4	-	-	-	-	3	3
Kavram Yanılgısı Var	5	15	9	30	-	-	6	20	20	19
Yanıt Yok	6	17	10	33	12	100	22	73	50	47

Öğrencilerden limitin $\varepsilon - \delta$ tanımından ne anladıklarının sorulduğu birinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde Tablo 4.1'den de görüldüğü gibi matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %12'sinin, matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin %10'unun tam doğru yanıt verdiği, fen bilgisi ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin ise hiç birinin bu soruya tam doğru yanıt veremediği belirlenmiştir. Fen bilgisi öğretmen adayları yaptıkları açıklamalarda Ö74 "çok karışık bir soru anlamadım", bilgisayar öğretmen adaylarından Ö90 ve Ö95 "görmüştük ama bir şey hatırlamıyorum" şeklinde düşüncelerini belirtmişlerdir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %50'sinin kısmen doğru yanıt verdiği matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %23'ünün, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin ise %7'sinin birinci soruya kısmen doğru yanıt verdiği sonucuna ulaşılmıştır. Matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin %15'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %30'u, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin ise %20'sinin kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur.

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
1.1.	*Genel limit tanımı. Yani f(x) = l fonksiyonunun* δ *'da limiti vardır ve l'dir.*	ε - δ tanımını yanlış anlama	2
1.2.	x_0 *sayısına yakın öyle bir reel sayı var ki bu da l'dir.*	ε - δ tanımını yanlış anlama	1
1.3.	*x giderken* x_0 *'a eğer fonksiyon tanımlanabiliyorsa ve bu da l ise fonksiyonun limiti l'dir.*	Limitin olabilmesi için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerektiğini düşünme	4
1.4.	*x'in* x_0 *komşuluğundaki değeri her* $\varepsilon > 0$ *sayısından küçük olmalıdır.*	ε - δ tanımını yanlış anlama	1
1.5.	$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ *'dir yani* x_0 *noktasında süreklidir.*	Süreklilik ile limit aynı kavramlar olarak algılama	1
1.6.	*Düzgün süreklilik tanımıdır.*	Limit ile düzgün süreklilik kavramlarını aynı olarak algılama	1
1.7.	*Limit kavramı. f fonksiyonunun* x_0 *'daki değeridir.*	Fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun o noktadaki değerinin aynı şeyler olduğunu düşünme	2
1.8.	*Fonksiyonun* x_0 *noktasında limitinin olduğunu ve bu noktada tanımlı olduğunu ifade eder.*	Fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun o noktadaki değerinin aynı şeyler olduğunu düşünme	1
1.9.	*f(x) fonksiyonu* x_0 *'da süreklidir anlamındadır. Ayrıca f(*x_0*)=l'dir.*	Limiti hem süreklilik hem de o noktada fonksiyonun değeri ile aynı olduğunu düşünme	2
1.10.	x_0 *'ın* δ *komşuluğunda f(x) fonksiyonunun değeri l'dir.*	ε - δ tanımını anlayamama	1
1.11.	*x noktasının* x_0 *noktasına olan uzaklığının belirlediği pozitif bölgeye karşılık f(x) değerinin de f(*x_0*) değeri ile olan uzaklığının pozitif olduğu anlamına gelir.*	ε - δ tanımını anlayamama	1
1.12.	x_0 *'ın* δ *komşuluğu anlatılmak isteniyor.*	ε - δ tanımını anlayamama	1
1.13.	*f(*x_0*)'ın limiti l'dir. x,* x_0 *'a yaklaştığında f(x)'in limiti l'dir.*	Dikkatsizlik	1

Öğrencilerin birinci soruya verdikleri hatalı cevapların bir kısmı Tablo 4.2'de verilmiştir. Tablo 4.1 incelendiğinde, öğrencilerin %47'si soruyu boş bırakmış ve açıklama olarak da "Anlayamadım, çok karışık bir ifade" diye belirtmişlerdir. Aslında cevap veren öğrencilerin hepsi, verilen ifadenin limitin tanımı olduğunu söylemiş ve kısaca "$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$" diye belirtmişlerdir; fakat yaptıkları açıklamalardan bu ifadenin ne anlama geldiğini tam olarak anlayamadıkları görülmüştür. Özellikle ε ve δ komşuluklarının akıllarını karıştırdığı gözlenmiştir. Burada öğrenciler ε ve δ'nın mümkün olduğunca küçük pozitif sayılar olması durumunu gözden kaçırmışlar, x'in x_0 ve f(x)'in $f(x_0)$ ile olan ilişkisini yorumlayamamışlardır. Çalışmaya katılan 106 öğrencinin, sadece %7'si bu ilişkileri tam olarak yorumlayabilmiştir (Tablo 4.1). Ayrıca öğrencilerin bir fonksiyonun limiti ile o noktada tanımlı olması kavramlarını birbirinden ayrı düşünemedikleri (Hata 1.3, Hata 1.7 ve Hata 1.8) ve bazı öğrencilerin de verilen ifadeyi süreklilik kavramıyla karıştırdıkları gözlenmiştir (Hata 1.5 ve Hata 1.9). Özellikle bilgisayar öğretmenliği bölümü öğrencileri bu konuyu görmelerine rağmen bu ifadeden hiçbir şey anlamadıklarını belirtmiş ve bu öğrencilerin %73'ü bu soruyu boş bırakmıştır.

Limit diagnostik testte ikinci soru, *Limit nedir? Kendi cümlelerinizle açıklayınız* şeklindedir. Sorunun amacı öğrencilerde limitin çağrıştırdığı anlamların neler olduğunun ve öğrencilerin limiti nasıl kavramsallaştırdıkları ile limiti informal olarak nasıl tanımladıklarının belirlenmesidir.

Aşağıda Tablo 4.3'de, öğrencilerin limit diagnostik testin birinci sorusuna verdikleri cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri verilmiştir.

Tablo 4.3
İkinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 2	Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	5	15	3	10	-	-	1	3	9	9
Kısmen Doğru Yanıt	10	29	3	10	-	-	2	7	15	14
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	3	9	4	13	1	8	1	3	9	9
Kavram Yanılgısı Var	5	15	8	27	10	84	21	70	44	41
Yanıt Yok	11	32	12	40	1	8	5	17	29	27

Tablo 4.3 incelendiğinde 106 öğrencinin %44'ünün kavram yanılgısına sahip olduğu, bunların da, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %15'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %27'sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %84'ünün ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %70'inin kavram yanılgısına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Özellikle fen bilgisi ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin limit kavramını yanlış anlamlandırdıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %32'sinin ve 5. sınıf öğrencilerinin %40'ının bu soruyu boş bırakması, onların limit kavramını anlamlandırmada yetersiz olduklarının bir göstergesidir.

Öğrencilerin bu soruya verdikleri hatalı yanıtları bir kısmı Tablo 4.4'te belirtildiği gibidir.

Tablo 4.4 İkinci soruya verilen hatalı cevap örneklerinin analizi

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
2.1.	*Limit, fonksiyonun belirli bir aralıkta almış olduğu değerdir.*	ε - δ tanımındaki komşuluk ifadesini yanlış anlamlandırma.	1
2.2.	*Limit, belli bir miktardır.*	Günlük hayattaki anlamıyla karıştırma.	1
2.3.	*Limit; bir fonksiyonun bir noktadaki yaklaşık değerlerinin bulunmasıdır.*	Limiti fonksiyonun o noktadaki değeri olarak düşünme.	1
2.4.	*Bir fonksiyonun alabileceği maksimum ya da minimum değer.*	Limiti sınır olarak algılama.	2
2.5.	*Limit, bir noktaya* ε *kadar sağından ve solundan yaklaşmaktır.*	$\varepsilon - \delta$ tanımından kaynaklanan ezbere düşünme.	1
2.6.	*Fonksiyonun yaklaştığı en son noktadır. Yani bir nevi sınırdır.*	Limiti sınır olarak algılama.	15
2.7.	*Bir noktaya sağdan ve soldan yaklaşımında aynı değeri veriyorsa limit vardır. Limitin olabilmesi için sayının o noktada tanımlı olması gerekir. Limit fonksiyonun çok yaklaştığı ancak o değeri alamadığı sayıdır.*	Limitin olmasını fonksiyonun o noktada tanımlı olmasına bağlama ve fonksiyonun limit değerini ulaşamadığını düşünme.	4
2.8.	*Ulaşılabilecek maksimum değerdir.*	Limiti sınır olarak algılama.	6
2.9.	*Fonksiyonun yaklaştığı fakat ulaşamadığı değerdir.*	Limiti sınır olarak algılama.	3
2.10.	*İstenilen koşullar altında fonksiyonun bir noktadaki değeri.*	Limiti fonksiyonun o noktadaki değeri olarak düşünme.	1
2.11.	*Bir şeyin bitmesi 0 olması, onun azalarak 0'a yaklaşmasına limit denir.*	Özel bir durumu genel bir duruma genelleme (limit için özel bir durumu tüm limit kavramına genelleme)	1
2.12.	*f(x) fonksiyonunun x değerleri için gidebileceği sonsuzdaki değer.*	Sonsuz ifadesi ile limit ifadesini aynı algılama	1

Tablo 4.3'ten de görüldüğü gibi çalışmaya katılan 106 öğrenciden, limit tanımını tam olarak doğru şekilde yapan çok az öğrenci vardır (%9). Öğrenciler limiti genellikle bir fonksiyonun ya da dizinin ötesine geçemediği bir sınır olarak (Hata 2.6), yaklaşma olarak veya maksimum ya da minimum (Hata 2.4) değer olarak,

fonksiyonun yaklaştığı fakat ulaşamadığı değer olarak (Hata 2.7, Hata 2.9) tanımlamışlardır. Ayrıca Hata 2.7'yi yapan öğrenciler, limitin olmasını fonksiyonun o noktada tanımlı olmasına bağlayarak limitle ilgili yanlış ilişkiler kurdukları belirlenmiştir. Öğrencilerin yaptıkları tanımlar genellikle informaldir. 106 öğrencinin %44'ünün informal ya da formal olarak yaptıkları limit tanımlarının yanlış olduğu görülmüştür (Tablo 4.3)

Limit diagnostik testin, $\lim_{x \to 1}(x+1) = 2$ *olduğunu* $\varepsilon - \delta$ *tanımını kullanarak gösteriniz* şeklindeki üçüncü sorusunun amacı, öğrencilerin $\varepsilon - \delta$ tanımını nasıl anladıklarının belirlenmesidir.

Tablo 4.5
Üçüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 3	Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Tam Doğru Yanıt	11	32	4	13	-	-	-	-	15	14
Kısmen Doğru Yanıt	1	3	0	0	-	-	-	-	1	1
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	5	15	0	0	-	-	-	-	5	5
Kavram Yanılgısı Var	4	12	14	47	3	25	-	-	21	20
Yanıt Yok	13	38	12	40	9	75	30	100	64	60

Öğrencilerin 3. soruya verdikleri yanıtlar 5'li anlama ölçeğine göre incelendiğinde 106 öğrencinin %60'ının bu soruyu boş bıraktığı görülmüştür. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden %38'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %40'ının, fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerinin %75'inin ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerin ise tamamının bu soruya cevap vermedikleri görülmüştür. Cevap vermeyen öğrencilerin 31'inin bu sorudaki ifadeyi tanıma uygun bir biçimde "$0 < |x-1| < \delta$ iken $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ olur" şeklinde tanımı aynen yazdıkları fakat asıl istenen limitin 2 çıktığı sonucuna ulaşamadıkları, $\varepsilon - \delta$ arasında

bir ilişki kuramadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin $\varepsilon - \delta$ tanımını uygulamada yetersiz oldukları, bu tanımı anlayamadıkları belirlenmiştir. Buradan öğrencilerin APOS Teorisine göre limitin formal tanımını ezbere bildiklerinden dolayı "eylem" aşamasında oldukları, limitin formal tanımını nesne haline dönüştüremedikleri belirlenmiştir. Fen bilgisi ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin hiçbirinin soruyu ne tam olarak ne kısmen doğru yanıtlayamadıkları bulunmuştur. Bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinden Ö90, bu soruya "*ε ve δ bana bir şey ifade etmiyor. Ne denmek istediğini anlamıyorum.*" şeklinde belirttiği açıklamasından da anlaşılacağı üzere fen bilgisi ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerin $\varepsilon - \delta$ tanımını kavrayamadıkları belirlenmiştir.

106 öğrencinin üçüncü soruya verdikleri hatalı cevaplardan bazıları Tablo 4.6'da verildiği gibidir.

Tablo 4.6 Üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	**Öğrenci Cevaplarından Örnekler**	**Betimsel Nitelendirme**	**Öğrenci Sayısı (frekans)**
3.1.	$x_0 = 1 \quad l = 2$ $\|x-1\| < \delta$ *ise* $\|x+1-2\| < \varepsilon$ $\delta = \varepsilon$ *'dur.*	Burada öğrencinin eşitsizlik konusu ile ilgili bir hatası söz konusudur.	2
3.2.	$0 < x + 1 - 1 < \delta$ $0 < x < \delta$ $\|x+1-2\| < \varepsilon$ $-\varepsilon + 1 < x < \varepsilon + 1$ $\varepsilon + 1 > 0$ *ise* $\varepsilon > -1$	Öğrenci δ ve ε sembolleriyle anlatılmak isteneni anlamamış, mutlak değer eşitsizlik konularında bilgilerini kullanmış fakat sonuca ulaşamamıştır.	2
3.3.	$\|x-1\| < \delta$ $\|x+1-2\| < \varepsilon$ $\|x-1\| < \varepsilon$ $0 < \delta < \varepsilon$	Eşitsizlik konusuyla ilgili hata	3
3.4.	$\forall \varepsilon > 0$ *için* $\|x+1-l\| < \varepsilon$ $\|x-1\| < \delta$ $\|x+1-l\| < \|x-1\| + \|2-l\|$	Mutlak değerde hata	1

Tablo 4.6'nın devamı

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
3.5	$\|x-1\|<\delta$ *iken* $\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$ $\|x+1-1\|=\|x\|<\delta+1=2$ $(\delta=\varepsilon=2)$ *alınırsa*	$\|f(x)-f(x_0)\|<\varepsilon$ ifadesinde fonksiyonun x=1 noktasındaki limit değeri yerine 1 noktası çıkarma.	1
3.6.	$\|x-2\|<\delta$ *iken* $\|x+1-2\|<\varepsilon$ *o.b.* $\varepsilon=1+\delta$ *var mı?* $\|x-2\|+\|1\|<\varepsilon$ $\|x-2\|+1<\varepsilon$ *ise* $\delta+1<\varepsilon$ *ise* $\varepsilon=1+\delta$	δ'ya bağlı ifadede apsisin yaklaştığı noktayı (1) değil fonksiyonun yaklaştığı değer (2) alınmış ($\varepsilon-\delta$ tanımı yanlış yorumlanmış). Ayrıca mutlak değerde hata yapılmış.	3
3.7.	$0<\|x-1\|<\delta$ *olsun* *f(x) = x + 1 f(1) = 2* $\|f(1)-2\|<\varepsilon$ *ise* $\|2-2\|<\varepsilon$ $0<\varepsilon$ *olduğundan*	$\varepsilon-\delta$ tanımını yanlış yorumlama.	1
3.8.	$\|a_n-a\|<\varepsilon$ $\|x+1-2\|<\varepsilon$ $\|x-1\|<\varepsilon$ $-\varepsilon<x-1<\varepsilon$ $1-\varepsilon<x<\varepsilon+1$ $\varepsilon=0{,}5$ *için* $0{,}55<x<1{,}05$ $x\cong 1$ $a_n=x+1$ $x=1$ *ise* $a_n=2$	Fonksiyon ile dizi kavramlarını karıştırma ve $\varepsilon-\delta$ tanımını anlamama/yanlış yorumlama.	3
3.9.	$\forall\varepsilon>0$ *için* $0<\|x-1\|<\delta$ *iken* *olduğundan* $\lim_{x\to 1}(x+1)=2$'*dir*	$\varepsilon-\delta$ ilişkisini kuramama.	5

Öğrencilerin büyük bir kısmı soruyu boş bırakırken (%60) bir kısmı da ifadeyi aynen yazmış, bir kısmı da tamamen alakasız ilişkiler kurmuştur. Buradan öğrencilerin ifadedeki ε ve δ sembollerini tam olarak kavrayamadıkları görülmektedir. Bazı öğrenciler ifadeyi $0<|x-1|<\delta$ iken $|f(x)-2|<\varepsilon$ şeklinde düzgün olarak yerleştirseler bile neye ulaşmaya çalıştıklarını ifade edememiş ve ifadeyi bu haliyle bırakarak buradan “limit 2”dir sonucuna ulaşmışlardır (Hata 3.9). Bazı öğrenciler de ezbere bilgiden kurtulamayıp ulaşılmak istenen limit değerini ifadenin genel halindeki “*l*” olarak almışlardır (Hata 3.4). Bu da öğrencilerin ifadeyi anlayamadıklarının, sadece ezberlediklerinin bir göstergesidir. Bazı öğrenciler de δ sembolüyle kurulan ilişkide değişkenden limiti aranan sayıyı değil limit değerini çıkardıkları (Hata 3.6), bazılarınınsa δ sembolüyle kurulan ilişkide fonksiyondan limiti aranan sayıyı çıkardıkları gözlenmiştir (Hata 3.2). Öğrencilerin büyük çoğunluğunun (%60) bu soruyu boş bırakması, birinci sorudan da gözlendiği gibi öğrencilerin, limitin $\varepsilon-\delta$ tanımını anlayamadıklarının bir göstergesidir.

Limit diagnostik testte dördüncü soru, *Sağ ve sol limit kavramlarından ne anlıyorsunuz? Açıklayınız* şeklindedir. Bu sorunun sorulmasındaki amaç, öğrencilerin sağ ve soldan yaklaşma kavramlarının nasıl anladıklarının belirlenmesidir.

Tablo 4.7
Dördüncü soruya verilen cevapların 5’li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 4	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	8	23	10	33	0	0	8	27	26	25
Kısmen Doğru Yanıt	9	26	6	20	5	42	6	20	26	25
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	5	15	1	3	3	25	1	3	10	9
Kavram Yanılgısı Var	6	18	4	14	0	0	7	23	17	16
Yanıt Yok	6	18	9	30	4	33	8	27	27	25

Tablo 4.7 incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18’inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %30’unun, fen bilgisi 1. sınıf öğrencilerinin %33’ünün ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %27’sinin sağ ve sol limit kavramlarında kavram yanılgılarına sahip oldukları bulunmuştur. Fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerinden bu soruyu tam olarak doğru

yapan öğrenci bulunamamıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %30'u, bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin ise %27'sinin sağ ve sol limit kavramlarında kavram yanılgılarına sahip oldukları bulunmuştur.

Tablo 4.8 Dördüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
4.1.	*Bir x noktasında tanımsız olan bir fonksiyon için o noktadaki limit alınırken x yerine x+h ve x-h alınır ve bunlara sağdan ve soldan limit denir.*	Dikkatsizlik	1
4.2.	*Sağdan limit: Fonksiyonu sıfır yapan değerler fonksiyonun kritik noktalarıdır. Bu kritik noktalara daha yakın fakat ondan büyük sayılarla fonksiyondaki değeri bulmaya çalışmaya sağdan limit denir. Soldan limit: Aynı şekilde kritik noktadan daha küçük sayılarla fonksiyonda değer bulmaya soldan limit denir.*	Sağ ve sol limit kavramlarının sadece kritik noktalar için bulunduğunu düşünme.	1
4.3.	*İstenilen limit değerlerine sağdan ve soldan yaklaşım aklıma geliyor.*	Limit değeri ile hangi noktadaki limite bakıldığı kavramları arasında karışıklık.	1
4.4.	*Sayının kendisinden çok küçük değer önceki değerinin limit değeri soldan limit, çok küçük değer sonraki değerinin limit değeri sağdan limit.*	Bir noktadaki limit değeri ile o noktadaki fonksiyonun değerini karıştırma.	8
4.5.	*Belirtilen değerden küçük ve büyük değerler. Bu değerlerde limit aynıysa süreklilik söz konusudur.*	Sağ ve sol limit kavramlarını anlayamama.	1
4.6.	*x'in gittiği sayının $\mp$ olarak incelenmesi.*	Sağ ve sol limit kavramlarını anlayamama.	1
4.7.	*Verilen sayının altındaki ve üstündeki sayılar.*	Sağ ve sol limit kavramlarını anlayamama.	2

Çalışmaya katılan 106 öğrencinin dördüncü soruya verdikleri hatalı cevaplardan bazıları Tablo 4.8'de belirtildiği gibidir. Öğrencilerin %25'i bu soruyu boş bırakırken, öğrencilerin 6 tanesi "$\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ *ise limit vardır*" diye belirtmiş herhangi bir açıklama yapmamışlardır. Her ne kadar ifade doğru da olsa öğrencilerin sadece sembolik olarak gösterimi soruya yanıt olarak vermeleri, öğrencilerin sağ ve sol limit kavramlarını kavrayamadıklarını ya da sağ ve sol limit kavramlarından anladıklarının sadece bu sembolik gösterim olduğunu göstermektedir. Aslında öğrencilerin hemen hemen hepsi sağdan ve soldan yaklaşmanın ne demek olduğunu sezgisel olarak anlamış; fakat sağ ve sol limit dendiğinde ya hangi sayıya göre limit alınıyorsa, sağdan limit için o sayıya çok yakın ama o sayıdan büyük bir sayının limiti aynı şeklide sol limit için de sayıya yakın ve sayıdan küçük bir sayının limiti olduğunu ifade etmişlerdir (Hata 4.4). Hata 4.2'yi yapan öğrencinin hatalı cevabı incelendiğinde de öğrencinin, sağ ve sol limit kavramlarının sadece fonksiyonun kritik noktalarında bulunduğu gibi bir sonuca ulaşması, öğrencinin sağ ve sol limit kavramlarını yanlış anladığını göstermektedir. Ayrıca öğrencilerin sayı doğrusunda sağ ve sol limit kavramlarını (sezgisel olarak), sayının sağ ve sol tarafından yaklaşmak olarak değil de sadece sayıdan büyük ve küçük sayılar (Hata 4.7) ya da x'in gittiği sayının $\mp$ olarak incelenmesi (Hata 4.6) olarak anladıkları bulunmuştur. Hata 4.5 incelendiğinde öğrencinin sağ ve sol limitin eşit olmasından aynı zamanda sürekli olması sonucunu çıkardığı belirlenmiştir. Söz konusu öğrenci sağ ve sol limit kavramlarıyla süreklilik arasında yanlış bir ilişki kurmuştur.

Limit diagnostik testin beşinci sorusu, *Bir f fonksiyonu için $x \to s$ iken bu fonksiyonun limitinin L olmasını ne demek olduğunu kendi cümlelerinizle açıklayınız* şeklinde olup, limitin dinamik ifadesinden öğrencilerin ne anladığı belirlenmeye çalışılmıştır.

Beşinci soruya verilen cevapların 5'li anlama düzeyine göre incelemesi Tablo 4.9'da verilmiştir.

Tablo 4.9

Beşinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 5	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	10	29	6	20	-	-	6	20	22	21
Kısmen Doğru Yanıt	6	18	2	7	4	33	3	10	15	14
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	4	12	3	10	3	25	1	3	11	10
Kavram Yanılgısı Var	10	29	4	13	5	42	10	33	29	27
Yanıt Yok	4	12	15	50	-	-	10	33	29	27

Öğrencilere limitin dinamik yaklaşımının onlara ne ifade ettiğinin sorulduğu 5. soruya verilen yanıtların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdelerinin verildiği Tablo 4.9 incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %12'sinin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %50'sinin, bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin ise %33'ünün bu soruyu boş bıraktıkları görülmüştür. Boş bırakan öğrencilerin hemen hemen hepsinin bu ifadenin $\lim_{x \to s} f(x) = L$ şeklinde sembolik gösterimi yazıp soruya herhangi bir açıklama getirmedikleri belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %29'unun, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %13'ünün, fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerinin %42'sinin ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin %33'ünün beşinci soruda kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Özellikle fen bilgisi öğretmenliğinden hiçbir öğrencinin bu soruyu tam olarak doğru yanıtlayamaması ve %42'sinin de kavram yanılgısına sahip olması, fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerin limitin verilen informal tanımını anlayamadıklarının göstergesidir.

Çalışmaya katılan öğrencilerden beşinci soruya hatalı yanıt verenlerin bir kısmının cevapları Tablo 4.10'da verilmiştir.

Tablo 4.10 Beşinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
5.1.	$\lim_{x \to s} f(x) = L$ *'dir. f(s)=L'dir yani bu fonksiyonda x yerine s yazarsak L değerini elde edeceğimizi gösterir.*	Fonksiyonun limitinin varlığından fonksiyonun o noktada tanımlı olması sonucu çıkarma.	17
5.2.	*x değişkenine bağlı bir fonksiyonda f(s) için aldığı değer L'ye yakınsamaktadır.*	Yakınsama kavramını yanlış yorumlama.	2
5.3.	*Bu fonksiyonun s komşuluğundaki değeri L'dir.*	Limit tanımındaki komşuluk kavramını anlamama.	2
5.4.	*f fonksiyonu s noktasına giderken s noktasının sağında, solunda ve s noktasında aldığı değerler aynı ise ve bu değerler eşit ise f fonksiyonunun s noktasında limiti vardır ve L'ye eşittir.*	$\lim_{x \to s} f(x) = L$ ifadesinin olması için f(s)=L'yi koşul kabul etme.	1
5.5.	*Fonksiyona x yerine s sayısına çok yakın bir sayı verdiğimizde sonuç L'dir.*	Yaklaşma kavramını anlamada hata.	3
5.6.	*x değişkeninin s noktasına yaklaşırken aldığı görüntü kümesi.*	Sağ ve sol limit kavramlarını anlamada hata.	1
5.7.	*x s noktasına yaklaşırken fonksiyonun değerinin de l'ye yaklaşmasıdır. Aslında gerçek bir s noktası olmadığı için l noktası tahminidir.*	Fonksiyonun değerinin limit değerine ulaşamayacağını düşünme.	1
5.8.	*x değişkeninin s noktasında giderken yaklaşabileceği en üst noktanın L olmasıdır.*	Limit değerini sınır olarak algılama.	6
5.9.	*f(x)=L, f(s)=L ise f(x)=f(s)* $\lim_{x \to s} f(x) = L$	Limit kavramını anlamada hata	1
5.10.	*f fonksiyonu x değişkeni s değerini aldığında L değerine çok çok yaklaşır ama o değeri alamaz.*	Fonksiyonun değerinin limit değerine ulaşamayacağını düşünme.	4

Tablo 4.10 incelendiğinde, soruyu boş bırakan öğrencilerin "f(x) fonksiyonunun x s'ye yaklaştığı durumda limiti L'dir" şeklinde sorudaki ifadeyi aynen tekrarladıkları ve ifadeye yönelik bir açıklama yapamadıkları belirlenmiştir. Genellikle öğrenciler fonksiyonda limiti aranan değeri fonksiyonda yerine yazarak

limit değerine ulaşılabileceğini anladıkları belirlenmiştir. Eğer incelenen noktada fonksiyon belirsiz değilse ya da fonksiyonun tanım kümesinde herhangi bir özel durum yoksa belki bu söylenebilir ancak bunun genellenmesi, her fonksiyonun limiti olduğu noktada fonksiyonun o noktada değeri olduğu açıklaması doğru değildir. Öğrenciler burada fonksiyonun bir noktada limitinin olmasıyla fonksiyonun bu noktada tanımlı olması arasında yanlış ilişki kurdukları görülmektedir. Öğrencilerin bazı özel durumları göz ardı ettikleri görülmektedir (Hata 5.1). Bunun tersine bazı öğrencilerin de Hata 5.2, Hata 5.8 ve Hata 5.10'da görüldüğü gibi fonksiyonun limit değerine asla ulaşamayacağını, limiti bir sınır değeri gibi düşündükleri belirlenmiştir. Hata 5.3 incelendiğinde öğrencinin fonksiyonun s komşuluğundaki değeri *L*'dir demekle, hem limit tanımındaki komşuluk kavramıyla hem de limit kavramıyla anlatılmak istenenin ne olduğunu anlayamadığı görülmektedir.

Limit diagnostik testin altıncı sorusu, *f bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur? Doğru olduğunu düşündüğünüz ifade/ifadelerin üstünü işaretleyiniz ve sebeplerini açıklayınız*

a) *f(1) = 2*

b) *f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir.*

c) *f(x), x = 1'de tanımlıdır.*

d) $\lim_{h\to 1}\{f(1+h)-2\} = 0$

e) $\forall\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık öyle bir* $\delta > 0$ *reel sayısı bulunabilir öyle ki* $0 < |x-1| < \delta$ *iken* $|f(x)-2| < \varepsilon$ *olur.*

şeklinde olup sorunun amacı, öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri, fonksiyonun o noktadaki değeri, o noktada fonksiyonun sürekliliği ve $\varepsilon-\delta$ tanımı arasında nasıl ilişkiler kurduklarını belirlemektir.

Öğrencilerin 6. soruya verdikleri cevapların listesi Tablo 4.11'de verilmiştir

Tablo 4.11 Öğrencilerin altıncı soruya cevap olarak seçtikleri şıklar

No	a	b	c	d	e	No	a	b	c	d	e
Ö1					x	**Ö54**					
Ö2	x	x	x		x	**Ö55**	x	x	x		x
Ö3	x	x	x		x	**Ö56**					x
Ö4	x	x	x		x	**Ö57**	x	x	x		x
Ö5					x	**Ö58**		x	x		x
Ö6	x	x	x		x	**Ö59**		x	x		x
Ö7	x	x		x	x	**Ö60**					
Ö8	x	x	x		x	**Ö61**	x	x	x		x
Ö9	x		x		x	**Ö62**					x
Ö10			x		x	**Ö63**	x	x	x		x
Ö11	x	x	x		x	**Ö64**	x	x		x	x
Ö12	x	x	x		x	**Ö65**	x	x	x		
Ö13						**Ö66**	x	x			
Ö14	x	x	x	x	x	**Ö67**		x			x
Ö15		x	x	x	x	**Ö68**	x	x	x		
Ö16	x	x	x		x	**Ö69**	x	x	x		
Ö17		x	x		x	**Ö70**		x	x		
Ö18						**Ö71**	x	x	x		
Ö19		x	x	x	x	**Ö72**	x	x	x		
Ö20	x				x	**Ö73**		x			
Ö21		x			x	**Ö74**					
Ö22					x	**Ö75**					
Ö23					x	**Ö76**					
Ö24					x	**Ö77**	x	x	x		x
Ö25		x	x	x	x	**Ö78**					
Ö26	x	x	x	x	x	**Ö79**	x	x			
Ö27		x	x		x	**Ö80**	x				
Ö28	x	x	x		x	**Ö81**					
Ö29	x	x	x		x	**Ö82**	x	x	x		
Ö30	x	x	x		x	**Ö83**		x	x		
Ö31	x				x	**Ö84**					
Ö32					x	**Ö85**					
Ö33	x	x	x		x	**Ö86**	x	x			
Ö34	x				x	**Ö87**	x	x			
Ö35					x	**Ö88**	x	x		x	
Ö36	x	x		x	x	**Ö89**					
Ö37	x	x	x		x	**Ö90**					
Ö38	x	x	x		x	**Ö91**	x	x	x	x	
Ö39	x				x	**Ö92**		x			
Ö40	x	x			x	**Ö93**	x	x	x	x	
Ö41	x	x	x		x	**Ö94**				x	
Ö42	x	x	x		x	**Ö95**	x	x	x		
Ö43			x		x	**Ö96**	x	x	x		
Ö44					x	**Ö97**					
Ö45					x	**Ö98**	x		x		
Ö46					x	**Ö99**					
Ö47						**Ö100**	x		x		
Ö48	x	x	x	x	x	**Ö101**		x	x		
Ö49					x	**Ö102**	x	x	x		
Ö50		x	x		x	**Ö103**	x	x	x		
Ö51		x	x	x	x	**Ö104**	x	x	x	x	
Ö52					x	**Ö105**					
Ö53					x	**Ö106**	x	x	x		
						f	55	63	55	15	61
						%	52	63	59	14	58

Çalışmaya katılan 106 öğrencinin soruya verdiği hatalı cevaplar (Tablo 4.11) ve bu cevaplara yönelik açıklamaları tek tek incelenecek olursa:

(a) Öğrencilerin %52'si yanlış olan a seçeneğini işaretlemiştir. Öğrenciler (a) seçeneği işaretlemelerinin sebebi olarak
Ö2: *Limit tanımı gereği f(1)=2 olmalıdır* (Ö8, Ö29, Ö67, Ö69 da benzer açıklamalar yapmışlardır).
Ö3: *Fonksiyonda x yerine 1 koyduğumuzda 2 çıkmış ki limit 2 olmuş* (Ö4, Ö11, Ö36, Ö40, Ö77, Ö86, Ö89, Ö90 ve Ö106 benzer bir açıklama yapmıştır).
Ö9: *Çünkü limitte fonksiyonun o noktadaki yaklaşık değeri hesaplanır.*
Ö20: *f(x)'in limitinin olması için o noktada tanımlı olması gerekir.*
Ö31: *Limitin sonucu belli bir sayı çıktığından ve* $x \to 1$ *noktası kritik nokta olmayacağından x'i fonksiyondaki yerine yazdığımızda da 2'ye ulaşabiliriz*.
Ö34: *x=1 için f(x) kritik nokta değildir ve fonksiyon süreklidir*.
Ö38: $x \to 1$ *olduğu için f(1)=2 olmalıdır*. (Ö38, Ö39, Ö68 ve Ö94 benzer açıklamalar yapmışlardır).
Ö63: *Çünkü sağdan ve soldan limitleri eşittir*.
şeklinde açıklamalar getirmişlerdir. Öğrencilerin *limitin tanımı gereği o noktada tanımlı olması gerektiği* ya da *limit ifadesinde x'in yaklaştığı noktanın fonksiyonda yerine konulması* şeklinde kavram yanılgılarına sahip oldukları bulunmuştur.

(b) Öğrencilerin %63'ü b seçeneğini işaretlemiştir. Aşağıda öğrencilerin bu seçeneği niye işaretlediklerinin açıklamaları verilmiştir.
Ö2: *Limit olduğundan dolayı o noktada sürekli olmalı* (Ö3, Ö8, Ö11, Ö16,Ö17, Ö21, Ö40, Ö50, Ö59, Ö79, Ö86, Ö87, Ö94, Ö101, Ö103 de benzer açıklamayı yapmışlardır).
Ö4: *Çünkü x = 1 değeri için y=2 değeri bulunmaktadır* (Ö12 aynı açıklamayı yapmıştır).
Ö15: *Sürekli olduğu limitin olduğunu gösterir. Fonksiyon x=1'de sürekli olduğundan limiti vardır. Önce sürekliliğe bakılır. Sürekli olmasa o noktada limiti olmaz* (Ö25 ve Ö27 de benzer açıklamalar yapmışlardır).
Ö26: *Sabit fonksiyon olduğu için süreklidir.*
Ö29: *Limit tanımı gereği sürekli olmalıdır.*

Ö30: *Limiti o noktada belli bir değer* (Ö106 da aynı açıklamayı yapmıştır).
Ö37: Sağdan ve soldan limitlerine bakmak gerekir.
Ö95: *Süreklidir çünkü sonuç her zaman 2 olacaktır diye düşünüyorum.*

Öğrencilerin açıklamalarından da görüldüğü gibi öğrencilerin büyük bir çoğunluğu bir fonksiyonun limitinin olduğu noktada sürekli olması gerektiği yanılgısına düşmektedirler. Bu da öğrencilerin kafalarında limit ile süreklilik kavramı arasında yanlış bir ilişki kurmuş olduklarını göstermektedir (Ö2). Bazı öğrencilerin ise bir açıdan bu ilişkiyi "sürekli ise limiti vardır" şeklinde doğru kurdukları fakat açıklamalarında gerekçe olarak bunu yanlış kullandıkları bulunmuştur. Mantıken sürekli ise limiti var demelerine rağmen (sürekli $\Rightarrow$ limiti var) bunu tersten alıp süreklidir çünkü limit vardır (limiti var $\Rightarrow$ sürekli) diyerek mantıktaki "ise" kavramını yanlış kullandıkları ya da süreklilik ile limit arasında "ancak ve ancak" ($\Leftrightarrow$) şeklinde bir ilişki kurdukları belirlenmiştir (Ö15).

(c) Öğrencilerin %59'u c seçeneğini işaretlemiştir. Bazı öğrencilerin bu seçeneği seçme nedenleri aşağıdaki gibidir:
Ö2: *Limitin olması için o noktada tanımlı olmalıdır* (Ö8, Ö9, Ö11, Ö15, Ö16, Ö29, Ö59, Ö69, Ö73, Ö101, Ö105 benzer açıklamalar yapmışlardır).
Ö3: *Limit şartından sağdan soldan limitleri eşit ve bu noktada tanımlı olması gerektiğinden doğrudur.*
Ö27: *Tanımlı olmadığı bir noktada sağdan ve soldan limitlerine ayrı ayrı bakılır.*
Ö50: $\forall x \in R$ *için f(x) tanımlı olduğundan* (Ö66 da aynı açıklamayı yapmıştır).
Ö55: *Limit değerini 2 bulduğumuz için tanımlıdır. Tanımsız olsaydı sonuç çıkmazdı.*

Bu açıklamalardan da görüldüğü gibi (a) seçeneğine getirdikleri açıklamalar gibi limitin olmasını o noktada fonksiyonun tanımlı olmasına bağlamışlardır (Ö2). Ö27 ise tanımlı olduğuna gerekçe sağ ve sol limitlere bakılmadığını göstermiştir. Fakat soruda zaten fonksiyonun limiti olduğu söylendiğine göre sağ ve sol limitlerin eşitliği sağlanmış demektir. Buradan bu öğrencinin limitin olması sağ ve sol limit kavramları arasındaki ilişkiyi kuramadığı görülmektedir. Bu öğrenciye göre bu üç kavram birbirinden bağımsızdır ve bu da bir kavram yanılgısıdır.

(d) Öğrencilerin %14'ü yanlış olan d seçeneğini işaretlemişlerdir. Bu soruda öğrencilere $\lim_{h\to 0}\{f(1+h)-2\}=0$ ifadesi yerine bu soru için tamamen yanlış olan $\lim_{h\to 1}\{f(1+h)-2\}=0$ ifadesi verilmiştir. Amaç öğrencilerin bu ifadeyi ezbere olarak mı yoksa bilinçli bir şekilde mi bildiklerini yoklamaktır. Aşağıda bazı öğrencilerin bu seçeneğe getirdikleri açıklamalar verilmiştir.

Ö15: *Limit tanımı gereği doğrudur.*

Ö36: *Doğru. Çünkü* $\lim_{h\to 0} f(h)$ *yazıldığında* $\lim_{h\to 1} f(1+h)=2$ *çıkar. Fark 0 olur.*

Ö88: $\lim_{h\to 1}\{f(1+1)-2\}=0$ $\lim_{h\to 1}\{f(2)-2\}=0$ $\lim_{h\to 1}\{2-2\}=0$ $\lim_{h\to 1} 0=0$

Ö90: *f(1+h)=2'dir* (Ö91).

Ö95: $h\to 1$ x=1+h $\lim_{h\to 0} f(1)-2\}=0$

Ö104: *Evet doğru. Çünkü limit değeri zaten 2'dir.*

Öğrencilerin çoğunluğu bu seçeneği açıklama yapmaksızın boş bırakırken bir kısmı da bu ifadenin yanlış olduğunu söylemiş ve doğru ifadeyi yazabilmişlerdir.

(e) Öğrencilerin %58'i bu seçeneği işaretlemiştir. Öğrenciler "limit tanımından görülür" şeklinde bu ifadenin doğru olduğuna dair açıklamalar yapmışlardır.

Sorudan istenene göre yanlış olsa da kendi içinde değerlendirildiğinde öğrenciler birinin doğruluğunu diğerinin de doğruluğunu gerektiren bazı seçenekler (a ile c, b ile a, b ile c, b ile e) arasında kavram yanılgısına düşmüşlerdir. Öğrenciler f(1)=2 ifadesine doğru derken (a), fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olmadığını söylemişler (c); fonksiyonun x=1 noktasında sürekli olduğunu söyleyip (b), f(1)=2 ifadesini doğru bulmamışlardır (a). Yine fonksiyonun x=1 noktasında sürekli olduğunu söyleyip (b), fonksiyonun x=1 noktasında tanımlı olur ifadesine yanlış demişlerdir (c) ya da fonksiyonun x=1 noktasında sürekli olduğuna doğru derken (b) limitin $\varepsilon-\delta$ tanımını yanlış bulmuşlardır (e). 14 öğrenci (a) seçeneğini seçmesine rağmen c seçeneğini, 14 öğrenci (b) seçeneğini seçmesine rağmen (a) seçeneğini, 13 öğrenci (b) seçeneğini seçmesine rağmen (c) seçeneğini, 23 öğrenci (b) seçeneğini seçmesine rağmen (e) seçeneğini seçmemiştir.

Limit diagnostik testin yedinci sorusu, *f(1)'in tanımlı olduğu fakat* $\lim_{x \to 1} f(x)$ *'in tanımlı olmadığı bir fonksiyon yazıp grafiğini çiziniz* şeklindedir. Sorunun amacı, bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında öğrencilerin nasıl bir ilişki kurduklarının belirlenmesi ve bir fonksiyonun hangi durumlarda verilen bir noktada tanımlı olup limitinin olmadığını öğrencilerden örneklendirmelerini istemektir.

Öğrencilerin bu soru için çizdikleri grafiklerin değerlendirmesi Tablo 4.12'de verilmiştir.

Tablo 4.12
Öğrencilerin yedinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri

Grafik Çizimi		**Doğru**	**Grafik Doğru/ Soruda İstenen Değil**	**Yanlış**	**Grafik Yok**
7.	**Mat Öğrt 1.**	15 (%44)	2 (%6)	2 (%6)	15 (%44)
	Mat Öğrt. 5.	10 (%33)	-	1 (%3)	19 (63)
	Fen Bilg. Öğrt. 1.	1 (%8)	-	-	11 (92)
	Bilg. Öğrt. 1.	3 (%10)	-	1 (%3)	26 (%87)
Toplam		29 (%27)	2 (%2)	4 (%4)	71 (%67) =64 (%90)+ (7 (%67))

Tablo 4.12'den de görüldüğü gibi öğrencilerin %27'si fonksiyonu doğru yazıp grafiğini doğru çizmiştir. Öğrencilerin %2'si ise yazdıkları fonksiyonun grafiğini doğru çizmişler; fakat soruda istenen koşulları sağlamamışlardır (f(1)'in tanımlı olup, $\lim_{x \to 1} f(x)$'in olmadığı). Öğrencilerin %4'ü fonksiyonu doğru yazmalarına rağmen grafiği yanlış çizmişlerdir. Öğrencilerin %70'i ise grafik

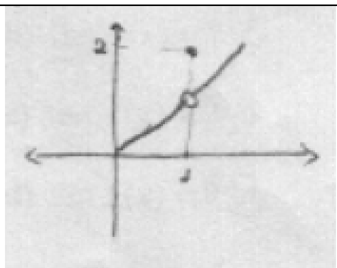
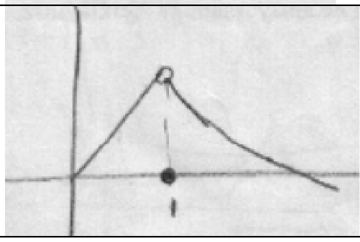
çizmemiştir. Grafik çizmeyen 71 öğrencinin %90'ı soruyu tamamen boş bırakırken, %10'u ise sadece koşulları sağlayan fonksiyonu yazabilmişlerdir.

Tablo 4.13
Yedinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 7	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	11	32	7	23	2	17	2	7	22	21
Kısmen Doğru Yanıt	4	12	3	10	-	-	1	3	8	7
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	3	9	-	-	-	-	-	-	3	3
Kavram Yanılgısı Var	6	18	2	7	3	25	2	7	13	12
Yanıt Yok	10	29	18	60	7	58	25	83	60	57

Tablo 4.13 incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %29'unun, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerin %60'ının, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %58'inin, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin ise %83'ünün bu soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %7'sinin, fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerin %25'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %7'sinin kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur. 106 öğrencinin %60'ının bu soruyu boş bırakması ve %21'i tam olarak doğru yapmıştır. Öğrencilerin büyük kısmının bu soruyu boş bırakması, onların fonksiyonun bir noktada tanımlı olması ile o noktada limitinin olamaması durumunu anlayamadıklarını göstermektedir.

Tablo 4.14 Yedinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	**Öğrenci Cevaplarından Örnekler**	**Betimsel Nitelendirme**	**Öğrenci Sayısı (frekans)**
7.1.	*Böyle bir fonksiyon yoktur.*	Bir fonksiyonun bir noktadaki limiti ile o noktada tanımlı olmasını birbirlerinin ön koşulu olarak düşünme.	2
7.2.	$Y=\|x-1\|$	Limiti türev ifadesiyle karıştırma. Yanlış limit alma.	1
7.3.		Sorudan isteneni anlamama. Limiti yanlış alma.	1
7.4.		Sorudan isteneni anlamama. Limiti yanlış alma.	1
7.5.	$y=\|x\|$	Limiti türev ifadesiyle karıştırma. Yanlış limit alma.	1
7.6.	$f(x)=1-x^2$	Yanlış limit alma.	1
7.7.	$Y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$	Yanlış limit alma.	1
7.8.	$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *yoksa sağdan ve soldan limitleri farklıdır. Bu yüzden tanımsızdır.*	Limitin olmasını fonksiyonun o noktada tanımlı olmasına bağlama.	1
7.9.	$f: R\to R \quad f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<1 \\ 2, & x=1 \\ x^2+2, & x>1 \end{cases}$	Yanlış limit alma.	1

Üç öğrenci soruyu anlamadıklarını ve Tablo 4.14 Hata 7.1'de de görüldüğü gibi, böyle bir fonksiyonun olamayacağını belirtmişlerdir. Hata 7.3 ve Hata 7.4'teki cevaplar incelenecek olursa öğrencilerin fonksiyonun verilen noktadaki değeri ile limit değerinin aynı olmadığı bir şekil çizdikleri, limitin olmadığı bir fonksiyon grafiği çizmedikleri görülmektedir. Öğrencilerin fonksiyonun verilen noktadaki değeri ile limit değeri aynı olmadığı durumda, fonksiyonun verilen noktada limiti olmayacağı şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları görülmektedir. Hata 7.2 ve 7.5'te de görüldüğü gibi öğrencilerin bu koşullara uyan fonksiyon olarak mutlak değer fonksiyonu yazmaları, onların limiti, fonksiyonun sağ ve sol türevleriyle karıştırmış olduklarını göstermektedir. Hata 7.8'de de öğrencinin limitin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olmasını şart koşma şeklinde bir kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur.

Limit diagnostik testin sekizinci sorusu, $\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ *olup f(2)≠ 4 olan bir fonksiyon yazıp grafiğini çiziniz* şeklindedir. Sorunun amacı, öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun verilen noktadaki değeri arasında nasıl ilişki kurduklarının ve öğrenciler tarafından bir fonksiyonun hangi durumlarda verilen bir noktada tanımlı olduğu aynı zamanda limitinin olmadığı durumların nasıl örneklendirildiğinin belirlenmesidir.

Tablo 4.15
Öğrencilerin sekizinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri

Grafik Çizimi		**Doğru**	**Grafik Doğru/ Soruda İstenen Değil**	**Yanlış**	**Grafik Yok**
8	**Mat Öğrt 1.**	22 (%64)	1 (%3)	1 (%3)	10 (%)
	Mat Öğrt. 5.	9 (%30)	-	2 (%7)	19 (%63)
	Fen Bilg. Öğrt. 1.	3 (%25)	1 (%8)	-	8 (%67)
	Bilg. Öğrt. 1.	1 (%10)	-	1 (%3)	28 (%87)
Toplam		35 (%33) =27 (%77) + 8 (%23)	2 (%2)	4 (%4)	65 (%61)

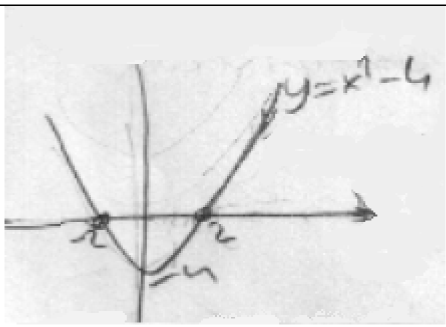
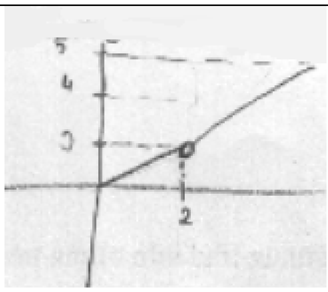
Öğrencilerin %35'i fonksiyonu doğru yazmış ve grafiği de doğru çizmiştir. Grafiği doğru çizen öğrencilerin %77'si sadece koşulları sağlayan ($\lim_{x \to 2} f(x) = 4$ olup $f(2) \neq 4$ olan fonksiyon) grafiği çizebilmiş; fonksiyonu yazamamışlardır; grafiği doğru çizen öğrencilerin %23'ü hem grafiği çizmiş hem de fonksiyonu yazmışlardır. Öğrencilerin %2'si ise yazdıkları fonksiyonun grafiğini doğru çizmişler; fakat soruda istenen koşulları sağlamamışlardır. Öğrencilerin %4'ü fonksiyonu doğru yazmalarına rağmen grafiği yanlış çizmişlerdir. Öğrencilerin %65'i ise soruyu boş bırakmıştır.

Tablo 4.16 Sekizinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

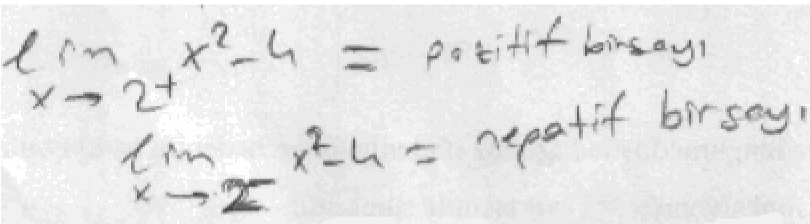
Soru 8	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	5	15	3	10	1	8	2	7	11	10
Kısmen Doğru Yanıt	18	53	6	20	3	25	1	3	28	26
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kavram Yanılgısı Var	3	9	2	7	1	8	2	7	8	8
Yanıt Yok	8	23	19	63	7	59	25	83	59	56

Tablo 4.16 incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %23'ünün, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %63'ünün, fen bilgisi 1. sınıf öğrencilerinin %59'unun ve bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin %83'ünün sekizinci soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir. Buradan da matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin fonksiyonun bir noktasında tanımlı olmasıyla o noktada limiti olması durumunu kavrayamadıkları anlaşılmaktadır.

Tablo 4.17 Sekizinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
8.1.	f(x)= $\dfrac{2x+6}{x^2-4}$	Limiti yanlış alma.	1
8.2.	f(x)= $\left\lVert \dfrac{9x}{4} \right\rVert$	Limiti yanlış alma.	1
8.3.		Limiti yanlış alma.	1
8.4.		Limiti yanlış alma.	1

Tablo 4.17 incelendiğinde öğrencilerin Hata 8.1 ve Hata 8.2'de yanlış limit aldıkları, Hata 8.3'te öğrencinin, soruda istenen fonksiyonun bir noktada limiti olup o noktadaki değerinin limit değeri olmaması koşulunu aşağıda Şekil 4.1'de görüldüğü gibi açıklama yaparak, x^2-4 fonksiyonunun limitinin 4 olduğunu söylemiştir. $f(2) \neq 4$ koşulu sağlanmıştır; fakat öğrencinin limit bulmada hata yaptığı görülmektedir. Öğrenci 2'ye sağdan yaklaşmak için 2'den büyük bir değeri, 2'ye soldan yaklaşmak için 2'den küçük bir değeri fonksiyonda yerine koymuş olabilir. Bu da öğrencinin sağ ve sol limit bulma konusunda kavram yanılgısı olduğunu gösterir.



Şekil 4.1 Ö67'nin sekizinci soruya verdiği yanıt

Limit diagnostik testin dokuzuncu sorusu, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *ve* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *olmak üzere bu iki limitin benzerlik ve farklarını yazınız, örnek verip açıklayınız* şeklindedir. Bu soruyla öğrencilerin bir dizinin limiti ile bir fonksiyonun limiti arasında nasıl bir ilişki kurulduklarının belirlenmesi amaçlanmaktadır.

Tablo 4.18
Dokuzuncu soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 9	Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
	f	%	f	%	f	%	f	%	f	%
Tam Doğru Yanıt	-	-	1	3	-	-	-	-	1	1
Kısmen Doğru Yanıt	-	-	5	17	-	-	-	-	5	4
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
Kavram Yanılgısı Var	9	26	5	17	5	42	2	7	21	20
Yanıt Yok	25	74	19	63	7	58	28	93	79	75

Tablo 4.18'e göre öğrencilerin dokuzuncu soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %74'ünün, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %63'ünün, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %58'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin%93'ünün dokuzuncu soruyu boş bıraktıkları belirlenmiştir. 106 öğrencinin %79'unun soruyu boş bırakması öğrencilerin dizinin limiti ile fonksiyonun limiti ifadeleri arasında ilişki kuramadıklarını göstermektedir. Yanıt veren öğrencilerin büyük bir kısmı da,

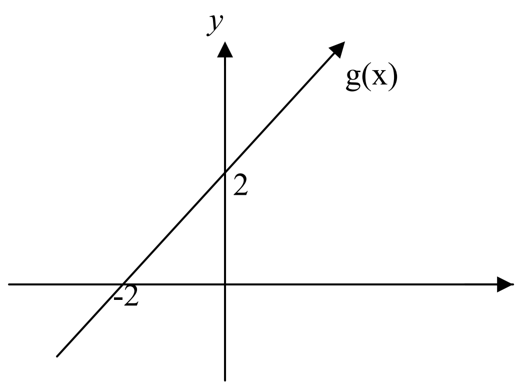
matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %26’sının, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %17’sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %42’sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %7’sinin kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur. Sadece matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinden bir kişinin bu soruyu tam doğru yanıtladığı belirlenmiştir.

Tablo 4.19 Dokuzuncu soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
9.1.	$\lim_{n\to\infty} a_n = L$ *olması bir dizide sonsuza giderken dizinin limitinin L'ye gitmesi demektir.* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *olması bir f(x) fonksiyonunun x a değerine giderken L değerini alması demektir. 1.'de varılabilen en son nokta L iken 2.'de a değeri için verilen en son nokta L'dir.*	$n \to \infty$ ifadesinde n değerini terim indisi gibi algılama.	9
9.2.	*İki limit de aynı değere gitmiştir; fakat yaklaştıkları nokta farklıdır.* $y = \frac{x^2+2x-1}{2x^2+x+3}$ *olsun.* $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\frac{1}{3}$ $\lim_{x\to 0} f(x) = -\frac{1}{3}$ *gibi.*	Dizinin limiti ile fonksiyonun limiti arasında ilişki kuramama.	3
9.3.	Birincisinde n değeri sonsuza gidiyor, ikincisinde ise x değeri a'ya gidiyor.	$n \to \infty$ ifadesinde n değerini terim indisi gibi algılama.	2
9.4.	$a_\infty = L$ *f(a)=L*	$n \to \infty$ n değerini terim indisi gibi algılama.	4
9.5.	*Örneğin* $\lim_{n\to\infty} \frac{3n^2+5}{n^2} = 3$ $\lim_{n\to 1} 2x+1=3$ *olsun* *İkisi de 3'e yaklaşır ama sağdaki* ∞ *'a gittiği için o değer bir nokta şeklinde değildir ama sağdaki kesin bir değerdir.*	$n \to \infty$ n değerini terim indisi gibi algılama.	4
9.6.	*Benzerliği ikisinin de limitinin L olması.* a_n *seri şeklindedir ve* $n \to \infty$ *'a giderkenki limit l'dir. f(x) fonksiyondur ve* $x \to a$ *'ya durumundaki limiti L'dir.*	$n \to \infty$ n değerini terim indisi gibi algılama.	1
9.7.	a_n *dizisinin sonsuza doğru gidildiğinde belli bir değerden sonra noktalar arasındaki uzaklığın sabit L olduğu görülür. f(x) fonksiyonunun a noktası ile mesafesi L'dir.*	Dizi kavramını anlayamama	1

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu, Tablo 4.18'de de görüldüğü gibi soruyu yanıtlayamamıştır (%79). Tablo 4.19 incelendiğinde, öğrencilerin bir dizinin limiti kavramını anlamadıkları görülmektedir. Öğrencilerin ∞'u bir sayı değeri gibi algıladıkları gözlenmiştir (Hata 9.4). Cevap veren öğrencilerin hemen hemen hepsi "a_n bir dizi, f(x) bir fonksiyon, her ikisi de L noktasına yakınsıyor" diye belirtmişler; fakat verilen ifadelerin ne anlama geldiğine yönelik açıklama yapmamışlardır. Hata 9.1, Hata 9.2, Hata 9.3, Hata 9.5, Hata 9.6 ve Hata 9.7'de öğrencilerin dizinin hemen hemen her teriminin yaklaşması anlamında kullanılan $n \to \infty$ ifadesi, öğrenciler tarafından bir sayıya yaklaşma gibi anlaşıldığı belirlenmiştir. Öğrencilerin dizilerin limiti ifadesini fonksiyonların limit gibi düşündükleri bulunmuştur.

Limit diagnostik testin onuncu sorusu, *Aşağıda g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre* ***a)*** $\lim_{x\to 2^-} g(x)$ ***b)*** $\lim_{x\to 2^+} g(x)$ ***c)*** $\lim_{x\to 2} g(x)$ ***d)*** *g(2)* ***e)*** $\lim_{x\to -\infty} g(x)$ ***f)*** $\lim_{x\to \infty} g(x)$ *değerlerini bulunuz* şeklindedir.



Sorunun amacı öğrencilerin, fonksiyonun bir değere sağdan, soldan yaklaşma ile $-\infty$ ve ∞'a yaklaşmayı nasıl anladıklarının belirlenmesidir.

Tablo 4.20
Öğrencilerin onuncu soruya verdikleri cevapların doğru–yanlış frekans ve yüzdeleri

10.soru		Doğru	Yanlış	Yanıt Yok
a	Mat Öğrt. 1. (34)	24 (%70)	5 (%15)	5 (%15)
	Mat Öğrt. 5. (30)	20 (%67)	7 (%23)	3 (%10)
	Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	6 (%50)	1 (%8)	5 (%42)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	11 (%37)	7 (%23)	12 (%40)
Toplam (106)		**61 (%57)**	**20 (%19)**	**25 (%24)**
b	Mat Öğrt. 1. (34)	25 (%74)	3 (%9)	6 (%17)
	Mat Öğrt. 5. (30)	23 (%77)	3 (%10)	4 (%13)
	Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	7 (%58)	-	5 (%42)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	13 (%43)	6 (%20)	11 (%37)
Toplam (106)		**68 (%64)**	**12 (%11)**	**26 (%25)**
c	Mat Öğrt. 1. (34)	26 (%76)	3 (%9)	5 (%14)
	Mat Öğrt. 5. (30)	25 (%83)	2 (%7)	3 (%10)
	Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	7 (%58)	-	5 (%42)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	16 (%54)	4 (%13)	10 (%33)
Toplam(106)		**74 (%70)**	**9 (%8)**	**23 (%22)**
d	Mat Öğrt. 1. (34)	24 (%71)	3 (%9)	7 (%20)
	Mat Öğrt. 5. (30)	25 (%83)	1 (%3)	4 (%13)
	Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	9 (%75)	-	3 (%25)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	20 (67)	1 (%3)	9 (%30)
Toplam(106)		**78 (%73)**	**5 (%5)**	**23 (%22)**
e	Mat Öğrt. 1. (34)	26 (%76)	2 (%6)	6 (%18)
	Mat Öğrt. 5. (30)	23 (%77)	1 (%3)	6 (%20)
	Fen Bil. Öğrt.1. (12)	5 (%42)	1 (%8)	6 (%50)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	11 (%37)	8 (%27)	11 (%36)
Toplam(106)		**65 (%61)**	**12 (%11)**	**29 (%28)**
f	Mat Öğrt. 1. (34)	26 (%76)	2 (%6)	6 (%18)
	Mat Öğrt. 5. (30)	24 (%80)	-	6 (%20)
	Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	6 (%50)	1 (%8)	5 (%42)
	Bilg Öğrt. 1. (30)	12 (%40)	5 (%17)	13 (%43)
Toplam(106)		**68 (%64)**	**8 (%8)**	**30 (%28)**

Tablo 4.20’den de görüldüğü gibi bu soruyu öğrencilerin büyük bir kısmı doğru yapmıştır. İşlemsel bilgi gerektiren bu soru ile testin diğer açık uçlu soruları karşılaştırıldığında öğrencilerin işlemsel olarak daha başarılı oldukları gözlenmektedir.

106 öğrencinin %57’si a şıkkını doğru, %19’u yanlış cevap vermiş; %24’ü ise boş bırakmıştır. Öğrencilerin yanlışları incelendiğinde 16 öğrencinin a şıkkını “0” bulduğu tespit edilmiştir. Burada öğrenciler 2’ye soldan yaklaşmak yerine “-2”ye soldan yaklaşarak ya da fonksiyonun grafiğini apsis 2’ye yaklaşmak yerine ordinat 2’ye yaklaşmak gibi düşünerek bir kavram yanılgısına sahip olabilecekleri görülmektedir. Bu bir kavram yanılgısı olabileceği gibi bir dikkatsizlik sonucu da gerçekleşmiş olabilir. Yine a şıkkı ile ilgili yanlış cevaplarda 1 öğrencinin cevabı “3” bulduğu, 1 öğrencinin “2” ve bir öğrencinin de “x+2” bulduğu görülmüştür. Cevabı “x+2” bulan öğrencinin bilinmeyen yerine “2” yazmayı unuttuğu ya da soldan limit bulmada bir kavram yanılgısına sahip olduğu söylenebilir.

106 öğrencinin %64’ü b şıkkını doğru, %11’i yanlış cevap vermiş ve %25’i de b şıkkını boş bırakmıştır. Bu şıkkı yanlış cevaplayan öğrencilerin cevaplarına bakıldığında 8 öğrencinin bu şıkkı “0” bulduğu, 1 öğrencinin “x+2” bulduğu, 3 öğrencinin de “2” bulduğu görülmüştür. Cevabı “0” bulan öğrenciler a şıkkında olduğu gibi ya limitte bir noktaya yaklaşma konusunda bir kavram yanılgısına sahipler ya da dikkatsizlik yapmış olabilirler.

Öğrencilerin %70’i c şıkkını doğru, %22’si yanlış cevap vermiş ve %8’i de boş bırakmıştır. Bu şıkka 9 öğrenci “0” cevabını vermiştir. Öğrencilerin hepsi sağ ve sol limitleri “0” buldukları için bu cevabı vermişlerdir.

Öğrencilerin %73’ü d şıkkını doğru, %5’i yanlış cevap vermiş ve %22’si de boş bırakmıştır. Öğrencilerin 6’sı fonksiyonun değerini “0” bulmuştur.

Öğrencilerin %61’i e şıkkını doğru, %11’i yanlış yapmış ve %28’i de bu şıkkı boş bırakmıştır. Öğrencilerin 4’ü $\lim_{x \to -\infty} g(x)$ ifadesini ∞ bulurken 4’ü “1”, 4’ü “0” ve 2’si de “-2” bulmuşlardır.

Öğrencilerin %64’ü f şıkkını doğru, %8’i yanlış yapmış ve %28’i de bu şıkkı boş bırakmıştır. Öğrencilerin 3’ü $\lim_{x \to \infty} g(x)$ ifadesini “0” bulurken 5’i “1”ve 2’si de “-∞” bulmuşlardır.

f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti vardır. Öğrencilerden bazıları $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$ bulmuş, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4$ bulup $\lim_{x\to 2} g(x) = 4$ demiştir. Bu, öğrencilerin sağ ve sol limit kavramını anlamadıklarını göstermektedir (Ö2, Ö38, Ö41, Ö55, Ö58). Bazıları da benzer şekilde $\lim_{x\to 2^-} g(x) = 0$ bulmuş, $\lim_{x\to 2^+} g(x) = 4$ bulup $\lim_{x\to 2} g(x) = 0$ bulmuştur (Ö62, Ö84). Buradan öğrencilerin sağ ve sol limit kavramları ve limitin olması ile ilgili bir kavram yanılgısına sahip olabileceklerini söylenebilir.

Limit diagnostik testin on birinci sorusu, *f(x)* = $\frac{x^2-1}{2x-2}$ *fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

a) *f fonksiyonunun x = 1 noktasındaki değeri nedir?*

b) *Doğru olduğunu düşündüğünüz ifadenin altına nedenini açıklayınız.*

b1. *f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir. Çünkü…*

b2. *f fonksiyonu x = 1 noktasında süreksizdir. Çünkü…*

b3. *f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti vardır. Çünkü…*

b4. *f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti yoktur. Çünkü…*

c) *Eğer "f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasındaki limiti vardır" ifadesine doğru dediyseniz bu limit nedir?"* şeklindedir. Bu sorunun sorulmasındaki amaç, öğrencilerin belirsizliğin olduğu noktalarda limit ve sürekliliği nasıl anladıklarını belirlemektir.

Öğrencilerin, f(x)=$\frac{x^2-1}{2x-2}$ fonksiyonunun grafiğini çizmeleri ile ilgili değerlendirme Tablo 4.21'de verilmiştir.

Tablo 4.21
Öğrencilerin on birinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri

11.soru	Doğru	Yanlış	Yanıt Yok
Mat Öğrt. 1. (34)	6 (%18)	14 (%41)	14 (%41)
Mat Öğrt. 5. (30)	3 (%10)	7 (%23)	20 (%67)
Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	2 (%17)	2 (%17)	8 (%66)
Bilg Öğrt. 1. (30)	3 (%10)	6 (%20)	21 (%70)
Toplam (106)	14 (%13)	29 (%27)	63 (%60)

Tablo 4.21'den de görüldüğü gibi matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %10'u, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %17'si ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %3'ü, toplamda ise 106 öğrencinin %13'ü, f(x) = $\frac{x^2-1}{2x-2}$ fonksiyonunun grafiğini doğru çizebilmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %14'ü, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %23'ü, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %17'si, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %20'si fonksiyonun grafiğini yanlış çizmiş, toplamda ise 106 öğrencinin %27'sinin verilen fonksiyonun grafiğini yanlış çizdikleri belirlenmiştir. Öğrencilerin çoğu, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %41'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %67'si, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %66'sı, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin ise %70'inin toplamda ise 106 öğrencinin %60'ı soruyu boş bırakmıştır.

Öğrencilerin 11. sorunun (a) ve (c) şıklarına verdikleri yanıtların 5'li anlama ölçeğine göre yüzdeleri Tablo 4.22'de verilmiştir.

Tablo 4.22

On birinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 11		Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
		f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
a.	**Tam Doğru Yanıt**	19	56	9	30	4	34	12	40	44	41
	Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	1	8	-	-	1	1
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	3	9	1	4	-	-	-	-	4	4
	Kavram Yanılgısı Var	10	29	13	43	6	50	10	33	39	37
	Yanıt Yok	2	6	7	23	1	8	8	27	18	17
c.	**Tam Doğru Yanıt**	21	61	16	53	6	50	10	33	53	50
	Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kavram Yanılgısı Var	5	15	1	4	2	17	16	53	24	23
	Yanıt Yok	8	24	13	43	4	33	4	14	29	27

Tablo 4.22 incelendiğinde, öğrencilerden (a) şıkkında, fonksiyonu tanımsız yapan bir noktada fonksiyonun değerini bulmaları istenmiş ve 106 öğrencinin %44'ünün soruyu doğru cevapladığı belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %29'unun, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğretmenliği öğrencilerinin %43'ünün, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %50'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %33'ünün kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Bu sonuç öğrencilerin, fonksiyonu tanımsız yapan değerle ilgili bilgilerinin yetersiz olduğunu göstermektedir.

Öğrencilerden, fonksiyonu tanımsız yapan değerde fonksiyonun limitinin olduğunu söyleyen öğrencilere (b2 seçeneğini işaretleyen), fonksiyonu belirsiz yapan noktada fonksiyonun limitinin ne olduğunun sorulduğu (c) şıkkına verdikleri cevaplar incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %61'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğretmenliği öğrencilerinin %53'ünün, fen bilgisi öğretmenliği 1.sınıf öğrencilerinin %50'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %33'ünün limiti doğru bir şekilde buldukları belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %24'ünün, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerin %43'ünün, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin

%33'ünün ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %14'ünün ise (c) şıkkını boş bıraktıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin 11. soruya verdikleri hatalı cevaplar Tablo 4.23'de verilmiştir.

Tablo 4.23 On birinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
11.a.1.	*f(1)=* $\frac{0}{0}$ *belirsizliği vardır. L-Hospital alırsak f(x)=* $\frac{2x}{2}$ *f(x)=x f(1)=1*	Fonksiyon değerini bulmada L-Hospital kuralını kullanma.	12
11.a.2.	*Tanımsızdır.* *f(1)=* $\frac{1-1}{2-2}=\frac{0}{0}=\infty$	$\frac{0}{0}$ belirsizliğini bilmeme.	3
11.a.3.	$f(x)=\frac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\frac{x+1}{2}=1$	Fonksiyon değerini bulmada hata	19
11.a.4.	*f(1)=0*	Paydayı hesaplamada hata Dikkatsizlik	4
11.a.5.	$f(1)=\frac{1^2-1}{2.1-2}=\frac{0}{0}=1$	$\frac{0}{0}$ belirsizliğini bilmeme.	1
11.a.6.	$f(x)=\frac{x^2-1}{(2x-2)(2x+2)}$ $=\frac{2x^3-2x+2x^2-2}{2x^2-4}$ $=\frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-2}=\frac{0}{-1}=\infty$	Fonksiyon değerini bulmada hata	1
11.c.1.	*Çünkü f(x) fonksiyonu x=1'de tanımsız olduğundan limiti yoktur*	Limit tanımını yanlış bilme	2
11.c.2.	∞ *'dur.*	Yanlış limit alma	1

Tablo 4.23'ün devamı

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
11.c.3.	*Fonksiyon x=1 noktasında tanımlı olmadığından süreksizdir ve limit yoktur.*	Limit ve süreklilik arasında yanlış ilişki kurma	1
11.c.4.	$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{2x-2}$ $= \lim_{h\to0} \frac{h^2+2h+1-1}{2(1+h)-2} = 2$ $\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{2x-2}$ $= \lim_{h\to0} \frac{h^2-2h+1-1}{2(1-h)-2} = 2$ $\lim_{x\to1} f(x) = 2$	İşlem hatası	2
11.c.5.	*Sağdan ve soldan yaklaşılınca limit değeri* *$-\infty$ 'dur.*	Fonksiyonun grafiği yanlış çizildiğinden limit değerini hatalı bulma.	1
11.c.6.	*Sağdan ve soldan limitler farklı olduğundan limit yoktur.*	Yanlış limit alma	2

Tablo 4.23 incelendiğinde öğrencilerin fonksiyonu tanımsız yapan değerlerde, limitte belirsizliği gidermede olduğu gibi L-Hospital Kuralını kullandıkları (Hata 11.a.1) ya da verilen ifadeyi çarpanlarına ayırarak gerekli sadeleştirmeleri yapıp belirsizliği ortadan kaldırma yoluna gittikleri (Hata 11.a.3) belirlenmiştir. Hata 11.a.1 ve Hata 11.a.3'ü yapan öğrencilerin fonksiyonun fonksiyonu tanımsız yapan noktadaki değerini bulmak için limiti bulmada kullanılan yöntemleri kullanması kavram yanılgısıdır. Yapılan hatalardan öğrencilerin, fonksiyon değeri bulma ile limit işlemini aynı düşündükleri sonucu çıkmaktadır. Hata 11.a.2 ve Hata 11.a.5 incelendiğinde ise öğrencilerin belirsizliklerle ilgili kavram yanılgıları olduğu görülmektedir. Hata 11.a.2'de öğrencinin $\frac{0}{0} = \infty$ demekle hem belirsizlik hem de sonsuz kavramıyla ilgili yanlış ilişkiler kurduğu belirlenmiştir. Hata 11.a.5'te de

öğrencinin $\frac{0}{0}=1$ demekle $\frac{0}{0}$ belirsizliği ile ilgili yanlış bilgilere sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır. Hata 11.a.4'te ise öğrencilerin dikkatsizlikle paydayı hesaplamadan pay "0" olduğu için "0" sonucun ulaştıkları ya da Hata 11.a.2 ve Hata 11.a.5'e benzer şekilde $\frac{0}{0}$ belirsizliğiyle ilgili kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür.

Öğrencilerin (c) şıkkına vedikleri hatalı yanıtlar incelendiğinde, fonksiyonun x=1 noktasında limiti olmadığına açıklama olarak, öğrenciler fonksiyonun o noktada tanımsız olduğunu belirtmişlerdir. Öğrencilerin, fonksiyonun bir noktada tanımlı olmasını, fonksiyonun o noktada limiti olması için gerekli olduğunu söylemeleri bir kavram yanılgısıdır (Hata 11.c.1). Hata 11.c.3'te ise öğrencilerin fonksiyonun bir noktada tanımlı olmaması sonucu fonksiyonun süreksiz olduğu ve süreksizlik nedeniyle de fonksiyonun o noktada limiti olmadığını belirtmeleri, sürekliliği limitin olması için bir koşul olarak gördükleri yani, süreklilikle limit arasında gerek şart ilişkisi kurdukları belirlenmiştir. Hata 11.c.2, Hata 11.c.4, Hata 11.c.5 ve Hata 11. c.6'da öğrencilerin yanlış limit aldıkları belirlenmiştir. Hata 11.c.5'te öğrenci fonksiyonun grafiğini yanlış çizdiğinden dolayı, grafiğe bakarak limiti yanlış bulmuştur.

Öğrencilerin (b) şıkkına verdikleri cevaplar aşağıda Tablo 4.24'te verildiği gibidir.

Tablo 4.24 Öğrencilerin on birinci soruya cevap olarak seçtikleri şıklar

No	b1	b2	b3	b4	No	b1	b2	b3	b4
Ö1		x	x		**Ö54**	x		x	
Ö2		x		x	**Ö55**			x	
Ö3		x	x		**Ö56**		x	x	
Ö4		x	x		**Ö57**		x	x	
Ö5		x	x		**Ö58**	x			
Ö6		x	x		**Ö59**				
Ö7		x	x		**Ö60**		x	x	
Ö8	x		x		**Ö61**				
Ö9		x	x		**Ö62**				
Ö10		x	x		**Ö63**		x		
Ö11		x		x	**Ö64**				
Ö12			x		**Ö65**			x	
Ö13					**Ö66**				
Ö14		x	x		**Ö67**				
Ö15		x	x		**Ö68**			x	
Ö16		x	x		**Ö69**		x	x	
Ö17		x	x		**Ö70**				
Ö18			x		**Ö71**	x		x	
Ö19		x	x		**Ö72**	x		x	
Ö20	x		x		**Ö73**	x		x	
Ö21		x			**Ö74**				
Ö22		x	x		**Ö75**		x	x	
Ö23		x	x		**Ö76**	x		x	
Ö24		x	x		**Ö77**				
Ö25		x	x		**Ö78**		x	x	
Ö26		x	x		**Ö79**		x	x	
Ö27	x		x		**Ö80**		x	x	
Ö28	x		x		**Ö81**		x	x	
Ö29		x	x		**Ö82**		x	x	
Ö30		x		x	**Ö83**		x	x	
Ö31	x		x		**Ö84**		x		
Ö32		x	x		**Ö85**				
Ö33		x			**Ö86**		x		x
Ö34		x	x		**Ö87**		x	x	
Ö35			x		**Ö88**				
Ö36	x				**Ö89**		x	x	
Ö37	x				**Ö90**		x		
Ö38	x		x		**Ö91**				x
Ö39		x		x	**Ö92**		x		x
Ö40		x	x		**Ö93**				
Ö41					**Ö94**		x	x	
Ö42			x		**Ö95**		x		
Ö43					**Ö96**				
Ö44		x	x		**Ö97**		x	x	
Ö45		x	x		**Ö98**	x			
Ö46			x		**Ö99**				
Ö47	x		x		**Ö100**		x		
Ö48	x		x		**Ö101**				
Ö49		x	x		**Ö102**		x		
Ö50		x		x	**Ö103**		x	x	
Ö51	x		x		**Ö104**				
Ö52		x	x		**Ö105**			x	
Ö53		x	x		**Ö106**				
					f	18	58	67	7
					%	18	55	63	7

(b1) Tablo 4.24'ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %18'i yanlış olan b1 seçeneğini işaretlemiştir. b1 seçeneğini seçen öğrenciler ve neden bu seçeneği seçtiklerine dair açıklamaları aşağıdaki gibidir:

Ö20, Ö27, Ö36, Ö37, Ö38, Ö47 ve Ö48: $f(x)=\dfrac{(x-1)(x+1)}{2(x-1)}=\dfrac{x+1}{2}$ *ise f(1)=1'dir.* $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=1=f(1)$ *olduğundan süreklidir* açıklamasını yapmışlardır. Buradan öğrencilerin fonksiyonun "1" noktasında fonksiyonun değerini yanlış bulmalarından dolayı hata yaptıkları görülmektedir.

Ö28, Ö72, Ö73 ve Ö76: *Sağdan ve soldan limitleri eşit ve 1'dir. Bu durumda süreklidir.* Bu öğrencilerin de bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması ile ilgili bir kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir. Öğrencilere göre sağ ve sol limitlerin birbirine eşit olması süreklilik için yeterlidir.

Ö31: *f(x) sadeleşebilen bir fonksiyondur. f(x), sadeleştikten sonra x=1 noktası kritik nokta olmaktan çıkar. Böylece fonksiyon sürekli olur.* Öğrencinin fonksiyonun x=1 noktasındaki değerini bulmada yaptığı hata yüzünden fonksiyonun sürekli olduğu sonucuna ulaştığı görülmüştür.

Ö51: *Limitine baktığımız zaman* $\dfrac{0}{0}$ *belirsizliği oluşuyor. Böyle durumlarda L-Hospital yöntemini uygularsak limitinin var olduğunu görürüz ve sağ limit sol limite eşit olduğundan süreklidir.* Bu öğrencinin fonksiyonun x=1'deki değerini bulmada da L-Hospital kuralını uyguladığı görülmüştür. Bu bir kavram yanılgısıdır; öğrenci limitin sonucunda elde edilen belirsizlikler için kullanabileceği L-Hospital kuralını fonksiyonu tanımsız yapan bir noktanın fonksiyondaki değerini bulmada kullanmıştır.

Ö58: *Fonksiyon tanımlıdır* (f(1)= $\dfrac{1-1}{2-2}=\dfrac{0}{0}=\infty$). Bu öğrencinin $\dfrac{0}{0}$ belirsizliğini ∞ bulduğu ve bulduğu ∞ kavramını da fonksiyonu tanımlı yapan değer olarak algıladığı görülmektedir. Öğrenci burada bir kavram yanılgısına sahiptir.

Ö71: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 1 \neq f(1)$ *olduğundan x=1 noktasında süreklidir.* Öğrencinin süreklilik konusu ile ilgili kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir.

Ö98: Tarama *grafikten görülüyor.* Öğrenci fonksiyonun grafiğini yanlış çizdiğinden fonksiyonun sürekli olduğunu söylemiştir. Öğrencinin hatası grafiği yanlış çizmesinden kaynaklanmaktadır.

(b2) Öğrencilerin %55'i doğru olan b2 seçeneğini işaretlemiştir.
Ö30 bu seçeneği doğru bulmasının nedenini *fonksiyon o noktada tanımlı değil x=1 düşey asimptot* şeklinde açıklamıştır. Fonksiyonun bu noktada tanımlı olmadığı doğrudur; fakat x=1 noktası düşey asimptot değildir; çünkü bu nokta paydayı da sıfır yapmaktadır. Öğrenci düşey asimptot konusunda kavram yanılgısına sahiptir.

(b3) Öğrencilerin %67'si doğru olan b3 seçeneğini işaretlemişlerdir.
Öğrencilerden bir kısmının bu seçeneği seçmelerinin nedenleri aşağıdaki gibidir:
Ö15: *Bu değer için limit değeri yani fonksiyonun değeri bulunabilir. Belirsizlik kaldırılabilir.* Öğrenci burada limit değeri ile fonksiyonun değerinin aynı olduğunu belirtmiştir.

Ö25: *Süreksizliği kaldırılırsa limit oluşuyor.* Öğrenci bunu demekle limit ve süreklilik kavramlarını birbirine bağlı olarak düşündüğü görülmektedir. Öğrenciye göre süreklilik olmazsa fonksiyonun limiti de olmamaktadır. Öğrencinin sürekliliği limit için ön koşul olarak görmesi bir kavram yanılgısıdır.

Ö30: *Sağdan ve soldan yaklaşınca limit değerinin* $-\infty$ *olduğunu görürüz.* Öğrenci limit değerini yanlış bulmuş; ayrıca bulduğu yanlış sonuç açısından değerlendirilecek olursa limitin $-\infty$ çıkması fonksiyonun limitinin olmadığını gösterir. Burada öğrencinin hem $-\infty$ kavramıyla hem de limit bulma konusunda kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir.

Ö31, Ö32: *Çünkü f(x) sadeleşebilir bir fonksiyondur.* Öğrenciler fonksiyonu tanımsız yapan değer için limitinin bulunamayacağını düşünmektedir. Bunun için tanımsızlık durumunun kaldırıldıktan sonra limitin hesaplanabileceğini belirtmektedirler. Fonksiyonu tanımsız yapan noktanın limitinin bulunamayacağını düşünmeleri bir kavram yanılgısıdır.

Ö36, Ö73: *Limit vardır, çünkü süreklidir.* Öğrencilerin ifadesi doğru olmasına rağmen sorudaki fonksiyonun süreksiz bir fonksiyon olması açısından değerlendirildiğinde böyle bir gerekçe sunulması hatalıdır.

Ö38, Ö48: *Tanımlıdır f(1)=1'dir.* Öğrencilerin fonksiyonun limitinin olduğuna açıklama olarak fonksiyonun o noktada tanımlı olduğunu neden olarak göstermesi, öğrencilerin fonksiyonun bir noktadaki limiti kavramı ile fonksiyonun o noktada tanımlı olması arasında yanlış bir ilişki kurduklarını gösteir ve bu ilişki bir kavram yanılgısıdır.

Ö42: *L-Hospital gereği ($\frac{0}{0}$ belirsizliği var) limit değeri var.* Öğrenci limit değerinin bulunabilmesini L-Hospital yöntemine bağlamıştır. Halbuki L-Hospital sadece belirsizliğin bulunduğu durumlarda belirsizliği ortadan kaldırarak limit değerini hesaplamanın bir yöntemidir.

Ö51: *Çünkü oluşan belirsizliği ortadan kaldırdığınızda x=1 noktasında sağ limit ve sol limit birbirine eşit ve x=1 noktasında da eşit olduğundan.* Öğrenci bir fonksiyonun bir noktada sürekli olması koşulu ile o noktada limiti olması koşulunu karıştırdığı görülmektedir. Fonksiyonun limiti olması için o noktada tanımlı olması gerektiğini de söylemiştir. Bu bir kavram yanılgısıdır.

(b4) Öğrencilerin %7'si yanlış olan b4 seçeneğini işaretlemiştir. Bu seçeneği işaretleyen bazı öğrencilerin seçimlerine gerekçe olarak yaptıkları açıklamalar şu şekildedir:

Ö2, Ö11, Ö86, Ö90: *f(x) fonksiyonu x=1'de tanımsız olduğundan limiti yoktur.* Öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktada limitinin olabilmesi için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerektiği şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları görülmektedir.

Ö39: *Çünkü sürekli değil.* Öğrencinin bir fonksiyonun bir noktada limitinin olmasını fonksiyonun o noktada sürekli olup olmamasına bağladığı görülmektedir. Öğrenci süreklilik ve limit kavramları arasında yanlış bir ilişki kurmuştur. Bu bir kavram yanılgısıdır.

Ö29, yanlış bulmuş olmasına rağmen hem fonksiyonun x=1 noktasındaki değerini 1 bulmuş hem de limit değerini 1 bulmasına rağmen fonksiyonun süreksiz olduğunu söylemiştir. Bu öğrenci süreklilik kavramıyla ilgili kavram yanılgısına sahiptir.

Limit diagnostik testin on ikinci sorusu, $f(x)=\frac{1}{x}$ *fonksiyonunun grafiğini çiziniz.*

a) $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ *mıdır? Neden?*

b) $f(\infty)=0$ *diyebilir miyiz? Neden?*

c) $\lim_{x\to 0} f(x)=\infty$ *mudur? Neden?*

şeklinde olup sorunun amacı, $\propto$ ifadesinin öğrenciler tarafından nasıl anlaşıldığını ve işlemsel olarak bu belirsizliğin nasıl kullanıldığıdır.

Tablo 4.25
Öğrencilerin on ikinci soru için çizdikleri grafiklerin doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri

12.soru	**Doğru**	**Yanlış**	**Yanıt Yok**
Mat Öğrt. 1. (34)	17 (%50)	10 (%29)	7 (%21)
Mat Öğrt. 5. (30)	16 (%53)	4 (%13)	10 (%34)
Fen Bil. Öğrt. 1. (12)	4 (%33)	1 (%8)	7 (%59)
Bilg Öğrt. 1. (30)	11 (%37)	-	19 (%63)
Toplam (106)	48 (%45)	15 (%14)	43 (%41)

Tablo 4.25'ten de görüldüğü gibi matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %50'si $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonun grafiğini doğru çizerken, %10'u yanlış çizmiş, %7'si ise grafik çizememiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf

öğrencilerinden yanlış çizen 10 öğencinin 5'i, grafiğin sadece "x > 0" için olan kısmını çizdiği belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %53'ü grafiği doğru çizerken, %13 yanlış çizmiş, %10'u ise grafik çizmemiştir. Matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinden yanlış çizen öğrencilerin birinin, grafiğin "x > 0" için olan kısmını çizdiği belirlenmiştir. Fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %4'ü grafiği doğru çizerken, %8'i yanlış çizmiş, %59 ise grafik çizmemiştir. Bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %48'i grafiği doğru çizerken, %14'ü grafiği yanlış çizmiş, %41'i ise grafik çizememiştir. Bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin de yanlış çizen öğrencilerinden 6'sı grafiğin sadece"x > 0" için olan kısmını çizdiği belirlenmiştir.

Tablo 4.26
On ikinci soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 12		Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
		f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
a.	**Tam Doğru Yanıt**	18	52	11	37	1	8	4	13	34	32
	Kısmen Doğru Yanıt	1	3	-	-	2	17	2	7	5	5
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	1	3	-	-	1	8	-	-	2	2
	Kavram Yanılgısı Var	7	21	9	30	1	8	3	10	20	19
	Yanıt Yok	7	21	10	33	7	59	21	70	45	42
b.	**Tam Doğru Yanıt**	7	21	8	27	-	-	-	-	15	14
	Kısmen Doğru Yanıt	1	3	-	-	-	-	-	-	1	1
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	1	3	1	1
	Kavram Yanılgısı Var	17	50	15	50	8	67	14	47	54	51
	Yanıt Yok	9	26	7	23	4	33	15	50	35	33
c.	**Tam Doğru Yanıt**	2	6	1	3	-	-	1	3	4	4
	Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kavram Yanılgısı Var	22	65	18	60	5	42	10	33	55	52
	Yanıt Yok	10	29	11	37	7	58	19	64	47	44

Tablo 4.26'dan da görüldüğü gibi matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %52'sinin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %37'sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %8'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1.

sınıf öğrencilerinin %13'ünün (a) şıkkına tam doğru yanıt verdiği bulunmuştur. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %30'unun, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %8'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %10'unun (a) şıkkına verdikleri cevaplarda kavram yanılgısı bulunmuştur. Fen bilgisi 1. sınıf öğrencilerinin %59'u ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %70'inin (a) şıkkını boş bıraktıkları göz önüne alındığında, bu durum, öğrencilerin, ∞ ifadesi ile ilgili bilgilerinin yetersiz olduğunun bir göstergesidir.

Öğrencilerin (b) şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %27'sinin tam doğru yanıt verdikleri; fakat fen bilgisi öğretmenliği ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden hiçbirinin bu soruya tam doğru yanıt veremedikleri belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %50'sinin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %50'sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %67'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %47'sinin bu şıkka ilişkin cevaplarında $\propto$ ifadesiyle ilgili kavram yanılgısına sahip oldukları bulunmuştur.

Öğrencilerin (c) şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde ise, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrenclerin sadece %6'sının, matematik öğretmenliği 5. sınıf ve bilgisayar öğretmenliği 1. öğrencilerin sadece %3'ünün (c) şıkkına tam doğru yanıt verdikleri, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden bu soruya tam doğru yanıt veren öğrenciye rastlanmadığı belirlenmiştir. Öğrencilerin büyük bir kısmının, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %65'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerin %60'ının, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %42'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %33'ünün bu şıkta kavram yanılgısına sahip oldukları bulunmuştur. Fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %58'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %64'ünün bu şıkkı boş bırakması da öğrencilerin belirsizlik kavramlarıyla ilgili bilgi eksikliklerinin olduğunu göstermektedir.

Tablo 4.27 On ikinci soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	**Öğrenci Cevaplarından Örnekler**	**Betimsel Nitelendirme**	**Öğrenci Sayısı (frekans)**
12.a.1.	$\frac{1}{\infty}$ *=0'dır. Sayının* ∞ *'a bölümü sıfırdır.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	22
12.a.2.	*Doğruluğundan emin değilim.*	∞ ifadesini bilmeme.	1
12.a.3.	*Fonksiyonun değeri x=*∞ *için 0 oluyor. Dolayısıyla limit 0'dır.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	4
12.a.4.	*Kuraldır. Sorgulanmaz.*	Ezbere bilgi olarak görme.	3
12.b.1.	*Evet deriz, grafikten anlaşılıyor.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme. Grafiği yanlış yorumlama.	2
12.b.2.	*Evet. Çünkü noktayı fonksiyonda yerine koyduğumuzda f(*∞*)=*$\frac{1}{\infty}$*=0 elde ederiz.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	34
12.b.3.	*Hayır. f(*∞*)'un değeri sıfıra çok yakın ama sıfır değil.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	3
12.b.4.	*Deriz çünkü tanımlı.*	∞ ifadesini bilmeme.	1
12.b.5.	*Payda sonsuza artarken değer 0'a azalır.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	1
12.c.1.	*Evet grafikten anlaşılıyor.*	Grafiğin tam çizilmemesinden kaynaklanan hata.	3
12.c.2.	$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = \infty$ *olduğundan*	Grafiği yanlış yorumlama (Öğrenci grafiği doğru çizmiş).	1
12.c.3.	*x 0'a yaklaştıkça çok çok küçülür. Limit, en son gideceği nokta* ∞ *olur.*	∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	1
12.c.4.	*Çünkü x sıfıra yaklaşırken y değeri sonsuza gidiyor.*	Sağ ve sol limit değerlerini bulmama.	13

Tablo 4.27'nin devamı

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
12.c.5.	*f(0)=* $\frac{1}{0}=\infty$ *'dur.*	Ezbere bilgi olarak görme. ∞ ifadesini reel sayı gibi düşünme.	30
12.c.6.	*x=0 sağdan ve soldan yaklaşıldığında* $+\infty$ *'a gittiği görülür.*	Grafiği yanlış yorumlama.	1
12.c.7.	$\frac{1}{0}=\infty$ *Çünkü 0'da f(x)'in* ∞ *tane değeri vardır.*	Grafiği yanlış yorumlama. ∞ kavramını yanlış anlama.	1
12.c.8	*Çünkü x – 0 <0 = x < 0 olduğundan f(x) ile bütün değerler arası pozitif.*	∞ kavramını yanlış anlama.	1

Tablo 4.27 incelendiğinde, öğrencilerin tamamına yakınının (a) şıkkındaki $\lim_{x\to\infty} f(x)$ ifadesinin sonucunun "0" olduğu ifadesini doğru bulmuş; fakat bunun neden "0" olduğuna yönelik doğru bir açıklama getirememişlerdir. Öğrenciler basmakalıp ifadelerle "sayının sıfıra bölümü sonsuzdur" şeklinde ezbere açıklamalar yapmışlardır. Bu da onların APOS Teorisine göre "$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$" olması bilgisini içselleştiremediklerini, eylem aşamasında kaldıklarını göstermektedir (Hata 12.a.4). Ayrıca öğrencilerin ∞ ifadesini reel sayı gibi düşündükleri ve "$x=\infty$ *için"* şeklinde bir noktada fonksiyonun değerini bulur gibi işlem yaptıkları belirlenmiştir (Hata 12.a.1 ve Hata 12.a.3).

Öğrencilerin (b) şıkkı için (a) şıkkında olduğu gibi ∞ ifadesini reel sayı gibi düşündükleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin *"f(*∞*)=*$\frac{1}{\infty}$*=0"* demekle grafiği de yanlış yorumladıkları anlaşılmaktadır (Hata 12.b.4). Öğrencilerin "0'a yaklaşmakla" "0 olmak" kavramları arasında bir karmaşa yaşadıkları görülmektedir. Öğrenciler fonksiyonun "0"daki değeri ile fonksiyonun "0"daki limitini aynı düşünmektedirler. Bu bir kavram yanılgısıdır. Hata 12.b.4'te ise öğrencilerin grafiği yanlış yorumladıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin büyük bir çoğunluğu $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ ifadesini doğru kabul ederek yanılgıya düşmüşlerdir. Sadece matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden 2, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinden 1 ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden 1 öğrenci soruyu doğru yanıtlamıştır. Öğrencilerin hataları grafiği eksik çizmekten (Hata 12.c.1) ya da ezbere "$\frac{1}{0} = \infty$" şeklindeki bilgilerinden kaynaklanmaktadır. Grafiği yanlış çizen öğrenciler ya grafiğin sadece bir bölümü olan x > 0 için olan kısmını çizdiklerinden ya da tamamen alakasız ezbere bir şekilde grafik çizdiklerinden, soruyu yanlış cevaplamışlardır. Ayrıca öğrencilerin bu şıkta da ∞'u reel sayı gibi düşündükleri belirlenmiştir (Hata 12.c.3, Hata 12.c.5). Hata 12.c.4'te öğrenciler, sağ ve sol limit değerlerini bulmadan ezbere limit değerini söylemişlerdir. Öğrencilerin $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ ifadesini doğru bulmaları daha önceden öğrenmiş oldukları, limit durumlarındaki "$\frac{1}{0} = \infty$" ifadesinden kaynaklanması, öğrencilerin APOS Teorisinin eylem düzeyinde olduklarının göstergesidir. Öğrencilerin kavram imajlarının, ezbere bilinen kavram tanımlarından oluştuğu görülmektedir.

Limit diagnostik testin on üçüncü sorusu,

a) *$\lim_{x\to 3} g(x) = 5$ ifadesi için g(x) fonksiyonunun x = 3 noktasında limiti olması için bu noktada tanımlı olmalı mıdır? Neden?*

b) *g(3) = 5 diyebilir miyiz?*

Sorunun amacı, öğrencilerin, bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktadaki değeri arasında nasıl bir ilişki kurduklarının belirlenmesidir

şeklinde olup sorunun amacı, öğrencilerin bir fonksiyonun bir noktadaki limit değeri ile bu fonksiyonun bu noktada tanımlı olması arasında nasıl bir ilişki kurduklarının belirlenmesidir.

Tablo 4.28
On üçüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 13		Mat Öğrt. 1. (34)		Mat Öğrt. 5. (30)		Fen Bilg. Öğrt.1. (12)		Bilg. Öğrt. 1. (30)		Toplam (106)	
		f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
a.	**Tam Doğru Yanıt**	22	64	16	53	2	17	9	30	49	46
	Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kavram Yanılgısı Var	6	18	8	27	6	50	7	23	27	26
	Yanıt Yok	6	18	6	20	4	34	14	47	30	28
b.	**Tam Doğru Yanıt**	18	53	13	43	1	8	6	20	38	36
	Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kısmen Doğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
	Kavram Yanılgısı Var	9	26	11	37	9	75	10	33	39	37
	Yanıt Yok	7	21	6	20	2	17	14	47	29	27

(a) Tablo 4.28 incelendiğinde 106 öğrencinin %46'sının, fonksiyonun limitinin olduğu noktada, tanımlı olması gerekip gerekmediğinin sorulduğu (a) şıkkına tam doğru yanıt verdiği belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %27'sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %50'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %23'ünün bu şıkta kavram yanılgısına sahip olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

(b) Aslında öğrencilere (a) şıkkında istenenin aynısı değişik bir şekilde ifade edilerek sorulmuştur. 106 öğrencinin (a) şıkkına göre daha az tam doğru cevap verdikleri belirlenmiştir (%36). Buradan öğrencilerin (a)'yı doğru bulup (b) şıkkını yanlış yaptıkları ya da boş bıraktıkları sonucuna ulaşılmıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %26'sının, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %37'sinin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %75'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %33'ünün (b) şıkkına verdikleri cevaplarda kavram yanılgısına sahip oldukları bulunmuştur.

Tablo 4.29 On üçüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
13.a.1.	*Limitin olması için sürekli ve tanımlı olmalıdır.*	Limit tanımını yanlış bilme	1
13.a.2.	*Evet, çünkü limitin olması için tanımlı olması gerekir.*	Fonksiyonun tanımlı olmasını limitin olabilmesi için şart koşma	19
13.a.3	*Evet, çünkü limitin belli bir değeri var.*	Fonksiyonun tanımlı olmasını limitin olabilmesi için şart koşma	1
13.a.4	*Tanımlı olmalıdır. Süreksizlik noktasında limit olmaz.*	Fonksiyonun bir noktada limiti olmasını fonksiyonun o noktada sürekli olmasına bağlama.	1
13.a.5	*Olmalıdır. Çünkü 3 noktası ile belirlenen uzaklık pozitif olmaya da bilir.*	Limit kavramını yanlış anlama	1
13.a.6	*Olmalıdır. Çünkü kökü olmaz.*	Limitin olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olmasını şart koşma	3
13.b.1.	*Limit gereği deriz.*	Limit tanımını yanlış bilme.	26
13.b.2.	*Evet, diyebiliriz. Çünkü fonksiyonun ne olduğunu bilmiyoruz.*	Limiti bulunan noktanın fonksiyonda yerine konması sonucunu tüm durumlara genelleme.	1

Tablo 4.29 incelendiğinde on üçüncü sorunun a şıkkında öğrencilerin limitin olması için fonksiyonun verilen noktada tanımlı ve sürekli olması gerektiği şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir (Hata 13.a.1, Hata 13.a.4). Hata 13.a.2'de öğrenciler fonksiyonun limiti olması için o noktada fonksiyonun tanımlı olmasını şart koştukları bulunmuştur. Öğrencilerin fonksiyonun bir noktadaki limiti ile o noktadaki fonksiyonun değeri arasında yanlış bir ilişki kurdukları ve kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Hata 13.a.3'te öğrencilerin soru 6'da da olduğu gibi limit değeri varsa bu değer fonksiyonda o noktanın yerine konulmasıyla bulunduğunu belirterek benzer bir kavram yanılgısına sahip oldukları bulunmuştur. Hata 13.b.2'de ise öğrenci fonksiyonun kuralı verilmediğinden o noktada tanımlı

olduğu sonucunu çıkarması öğrencinin fonksiyonlar konusunda eksiklikleri olabileceğinin göstergesidir.

On üçüncü sorunun b şıkkında da Tablo 4.29 Hata 13.b.1'de de görüldüğü gibi on üçüncü sorunun a şıkkına benzer şekilde öğrencilerin limitin olmasının fonksiyonun o noktada tanımlılığını gerektirdiği şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir.

Limit diagnostik testin on dördüncü sorusu ise, $f(x)=\begin{cases} 2x+1, x \leq 1 \\ 4x-1, x > 1 \end{cases}$ *fonksiyonu verilsin.* **a)** $f(1)=?$ **b)** $\lim_{x\to 1^-} f(x)=?$ **c)** $\lim_{x\to 1^+} f(x)=?$ **d)** $\lim_{x\to 1} f(x)=?$ şeklindedir ve sorunun amacı öğrencilerin işlemsel olarak limit işlemlerini nasıl yaptıklarının belirlenmesidir.

Tablo 4.30 On dördüncü soruya verilen cevapların doğru-yanlış frekans ve yüzdeleri

14.soru	Doğru	Yanlış	Yanıt Yok
a	85 (%80)	7 (%7)	14 (%13)
b	78 (%74)	11 (%10)	17 (%16)
c	78 (%74)	11 (%10)	17 (%16)
d	79 (%75)	11 (%10)	16 (%15)

Tablo 4.30'dan da görüldüğü gibi öğrencilerin %80'i (a) şıkkını, %74'ü (b) şıkkını, %74'ü (c) şıkkını ve %75'i de (d) şıkkını doğru yapmıştır. Öğrencilerin işlemsel olarak sağ ve sol limit bulmada 4. sorudaki sağ ve sol limitin ne anlama geldiğini açıklamalarından daha başarılı oldukları görülmektedir (Tablo 4.7).

Tablo 4.31
On dördüncü soruya verilen cevapların 5'li anlama ölçeğine göre frekans ve yüzdeleri

Soru 14	**Mat Öğrt. 1. (34)**		**Mat Öğrt. 5. (30)**		**Fen Bilg. Öğrt.1. (12)**		**Bilg. Öğrt. 1. (30)**		**Toplam (106)**	
	f	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**	**f**	**%**
Tam Doğru Yanıt	29	85	24	80	8	67	16	53	77	73
Kısmen Doğru Yanıt	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
KısmenDoğru Kavram Yanılgısı Var	-	-	-	-	-	-	-	-	2	2
Kavram Yanılgısı Var	2	6	4	13	1	8	5	17	10	9
Yanıt Yok	3	9	2	7	3	25	9	30	17	16

Tablo 4.31 incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %85'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %80'inin, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %67'sinin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin % 53'ünün, toplam 106 kişinin de %77'sinin bu soruya tam doğru yanıt verdikleri belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %6'sının, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %13'ünün, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %8'inin ve bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %17'sinin kavram yanılgısına sahip olduğu gözlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %9'u, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %7'si, fen bilgisi öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %25'i, bilgisayar öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %30'u soruyu boş bırakmışlardır.

Öğrencilerin 14. soruya verdikleri hatalı yanıtların bir kısmı aşağıda Tablo 4.32'de verildiği gibidir.

Tablo 4.32 On dördüncü soruya verilen hatalı cevap örnekleri

Hatalar	Öğrenci Cevaplarından Örnekler	Betimsel Nitelendirme	Öğrenci Sayısı (frekans)
14.1	*f(1)=4* $\lim_{x\to 1^-} f(x)=4$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ $\lim_{x\to 1} f(x)=4$	Sağ ve sol limitleri farklı bulmasına rağmen limit değerini bulma. İşlem hatası.	3
14.2.	*f(1)=5* $\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=3$ $\lim_{x\to 1} f(x)=5$	Sağ ve sol limit almada hata.	4
14.3	f(1)=3 $\lim_{x\to 1^-} f(x)=2x+1$ $\lim_{x\to 1^+} f(x)=4x-1$ $\lim_{x\to 1} f(x)=2x+1$	Değer bulmada hata	2

Tablo 4.31'de öğrencilerin 14. soruda yaptıkları hatalar incelendiğinde, Hata 14.1'de öğrencilerin sağ limitle sol limit değerlerini farklı bulmalarına rağmen limit olarak sol limit değerini yazdıkları bulunmuştur. Öğrencilerin sağ ve sol limit ile limitin varlığı kavramları arasında bir kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. Hata 14.2 incelendiğinde öğrencilerin sağ ve sol limiti hatalı aldıkları, fonksiyonun değerini de yanlış buldukları görülmektedir. Hata 14.3'te ise öğrencilerin limit değerini hesaplamadan aynen ifadeyi yazdıkları belirlenmiştir.

4.3 Üçüncü Alt Probleme Ait Bulgular: Matematik Öğretmenliği 1. ve 5. Sınıf Öğrencilerinin Sahip Oldukları Kavram Yanılgıları Açısından Karşılaştırılması

Matematik öğretmenliği 1. sınıf ($N_{MÖ1}$=34) ve matematik öğretmenliği 5. sınıf ($N_{MÖ5}$=30) öğrencilerinin sahip oldukları kavram yanılgılarını karşılaştırmaya geçmeden önce bu iki öğrenci grubunun Limit Diagnostik Testteki (EK B) başarı durumları karşılaştırılmıştır. Bunun için SPSS 12.0 paket programı kullanılarak ilişkisiz örneklemler t-testi ile analiz edilmiştir. Yapılan t testi sonuçlarına göre 0,05 anlamlılık düzeyinde p=0,078 olup p<0,05 olduğundan matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri ile matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin Limit Diagnostik Testteki başarıları arasında anlamlı bir fark olmadığı görülmüştür (Tablo 4.33).

Tablo 4.33
Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin limit diagnostik testteki puanlarının karşılaştırması

Sınıf	**N**	**Ort. ($\bar{x}$)**	**s.s.**	**s.d.**	**t**	**p**
Mat.Öğrt.1	34	60,62	16,61	62	1,791	0,078
Mat.Öğrt.5	30	52,50	19,653			

İki öğrenci grubunun limit diagnostik testteki başarıları karşılaştırıldığında anlamlı bir fark çıkmamıştır.

Öğrencilerin limit diagnostik testteki sorulara verdikleri yanıtlar tek tek incelenerek karşılaştırılacak olursak:

Birinci soruda matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin %15'inin, matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin ise %30'unun kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür (Tablo 4.1). Her iki grubun da kavram yanılgıları incelendiğinde öğrencilerin hemen hemen aynı kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Öğrencilerin bu tanıma yönelik ifadelerinde, fonksiyonun limit tanımı olduğunu ve fonksiyonun verilen noktada tanımlı olduğu hatta verilen noktadaki değerin limit olduğu anlamına geldiğini söyledikleri, ortak kavram yanılgılarına rastlanmıştır. Matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin %12'sinin matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin ise %10'unun bu soruyu tam doğru yanıtladıkları görülmüştür.

Öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematik öğretmenliği birinci sınıf öğrencilerinin %15'inin matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin ise %27'sinin kavram yanılgılarına sahip olduğu tespit edilmiştir (Tablo 4.3). Matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencileri, birinci sınıf öğrencilerine göre daha çok limitin informal tanımlarını yapmışlar ve özellikle limitin bir sınır olduğunu ifade ettikleri kavram yanılgıları yapmışlardır. Yine birinci sınıf öğrencilerinin %15'inin, matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin ise %10'unun bu soruya tam doğru yanıt verdikleri görülmüştür.

İki grubun üçüncü soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, birinci sınıf öğrencilerinin %12'sinin, beşinci sınıf öğrencilerinin ise neredeyse yarısına yakın bir kısmının (%47) kavram yanılgısına sahip oldukları görülmüştür (Tablo 4.5). Matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinin ε ve δ komşuluklarının ne anlama geldiğini ifade etme konusunda daha çok hata yaptıkları ve kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Bu duruma birinci sınıf öğrencilerinin o sene içinde analiz dersi alıyor olmalarının etkisi olduğu söylenebilir. Birinci sınıf öğrencilerinin daha doğru ispatlar yaptıkları görülmüştür. Birinci sınıf öğrencilerinin %32'sinin, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %13'ünün bu soruya tam doğru yanıt verdikleri tespit edilmiştir.

Öğrencilere sağ ve sol limit kavramlarının ne anlama geldiğinin sorulduğu dördüncü soruda iki grubun da sezgisel olarak bu kavramları hemen hemen doğru ifade ettikleri görülmüştür. Birinci sınıf öğrencilerinin %18'i, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %13'ünün bu soruda kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür (Tablo 4.7). Birinci sınıf öğrencilerinin %23'ünün, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %33'ünün bu soruya tam doğru yanıt verdiği görülmüştür.

Beşinci soruya verilen yanıtlar incelendiğinde her iki grubun da aynı kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Kavram yanılgısına sahip öğrencilerin büyük bir kısmının soruda verilen limiti alınan değer, fonksiyonda yerine konulduğunda limit değerine eşit çıkmalıdır şeklinde ifadeleri olduğu gözlenmiştir. Birinci sınıf öğrencilerinin %29'unun, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %13'ünün kavram yanılgılarına sahip olduğu bulunmuştur (Tablo 4.9). Birinci sınıf öğrencilerinin %29'u bu soruya tam doğru yanıt verirken, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %20'si bu soruya tam doğru yanıt vermiştir.

Altıncı sorunun (a) şıkkına verilen yanıtlar incelendiğinde birinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık %55'inin yanlış olan bu şıkkı seçtikleri ve açıklama olarak limitin tanımı gereği limit varsa limitin olduğu noktada fonksiyon tanımlıdır ya da limit varsa süreklidir şeklinde kavram yanılgılarına sahip oldukları, beşinci sınıf öğrencilerinin de %43'ünün bu soruda benzer yanılgılara sahip oldukları tespit edilmiştir. (b) şıkkına verilen yanıtlar incelendiğinde birinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık %61'inin, beşinci sınıf öğrencilerinin ise yaklaşık %46'ının yanlış olan bu şıkkı seçtikleri görülmüştür. İki grubun da bu şıkka verdikleri açıklamalarda limitin olması için o noktada süreklilik olmalıdır şeklinde kavram yanılgısına sahip oldukları tespit edilmiştir. (c) şıkkına verilen yanıtlar incelendiğinde birinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık %61'inin beşinci sınıf öğrencilerinin ise %40'ının yanlış olan bu şıkkı işaretledikleri görülmüştür. Her iki grubunda (a) şıkkındakine benzer şekilde limitin olması için o noktada fonksiyon tanımlı olmalıdır şeklinde kavram yanılgılarına sahip oldukları görülmüştür. Bir birinci sınıf öğrencisinin, fonksiyonun tanımlı olmadığı noktada sağdan ve soldan limitlere ayrı ayrı bakıldığı şeklindeki ifadesiyle limitin varlığı ile sağ ve sol limit arasında yanlış bir ilişki kurduğu ve bir kavram yanılgısına sahip olduğuna rastlanmıştır. Yanlış olan (d) şıkkını doğru olarak işaretleyen öğrencilerin, birinci sınıf öğrencilerinin yaklaşık %17'si, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %10'u olduğu görülmüştür. Her iki grubun da bunu dayandırdıkları temel nokta limit tanımı gereği böyle olduğunu söylemeleridir. (e) şıkkına verilen yanıtlar incelendiğinde iki grubun da boş bırakan öğrenciler haricinde hepsinin doğru olan (e) şıkkını işaretlediği tespit edilmiştir (Tablo 4.11).

İki grubun yedinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde birinci sınıf öğrencilerinin %18'inin, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %7'sinin bu soruda kavram yanılgılarına sahip oldukları tespit edilmiştir. Her iki grubun da genelde doğru grafik çizdikleri ancak istenen koşullara uygun bir fonksiyon yazamadıkları görülmüştür. Farklı olarak iki birinci sınıf öğrencisinin, 1 noktasında tanımlı olup da limitin olamayacağı koşullarını sağlayan bir fonksiyon olamayacağı şeklinde açıklama yapmışlar; fakat böyle bir yanılgıya beşinci sınıf öğrencilerinde rastlanmamıştır. Birinci sınıf öğrencilerinin %32'si, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %23'ü bu soruya tam doğru yanıt vermişlerdir (Tablo 4.13).

İki grubun sekizinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde her iki gruptaki öğrencilerin de yedinci soruya göre daha az yanlış yaptıkları ve daha az kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Birinci sınıf öğrencilerinin %9'u, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %7'si kavram yanılgısına sahiptir (Tablo 4.16).

İki grubun dokuzuncu soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde birinci sınıf öğrencilerinin %26'sının, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %l7'sinin kavram yanılgısına sahip oldukları görülmüştür. Bu soru sadece beşinci sınıf öğrencilerinden bir öğrenci tarafından tam doğru olarak yanıtlanmıştır (Tablo 4.18).

İki grubun onuncu soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, birinci sınıf öğrencilerinin %15'inin, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %23'ünün (a) şıkkına, birinci sınıf öğrencilerinin %9'unun, beşinci sınıf öğrencilerinin ise %10'unun (b) şıkkına, birinci sınıf öğrencilerin %9'unun, beşinci sınıf öğrencilerin ise %7'sinin (c) şıkkına, birinci sınıf öğrencilerin %9'unun beşinci sınıf öğrencilerin ise %3'ünün (d) şıkkına, birinci sınıf öğrencilerin %6'sının beşinci sınıf öğrencilerin ise %3'ünün (e) şıkkına yanlış yanıt verdiği belirlenmiştir. (f) şıkkına ise birinci sınıf öğrencilerinin %6'sı yanlış yanıt verirken matematik öğretmenliği beşinci sınıf öğrencilerinden hiçbirinin onuncu sorunun (f) şıkkına yanlış yanıt vermediği belirlenmiştir. Her iki öğrenci grubunun da bu soruda benzer işlem hataları yaptıkları görülmüştür (Tablo 4.20).

Grupların 11. sorunun (a) şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %56'sının, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %30'unun bu şıkkı tam doğru yanıtladıkları belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %29'unun, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %43'ünün bu şıkta kavram yanılgıları olduğu tespit edilmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %6'sı bu şıkkı boş bırakırken matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %23'ü bu şıkkı boş bırakmıştır. Bu durumda 11. sorunun (a) şıkkında matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin daha başarılı olduğu sonucuna ulaşılır (Tablo 4.22).

Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden 11. sorunun yanlış olan b1 şıkkını 5 öğrenci işaretlerken, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin 8 tanesi yanlış olan b1 şıkkını işaretlemiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin 26 tanesi doğru şık olan b2'yi işaretlerken, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin 9'u doğru olan bu şıkkı işaretlemiştir. Yine matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden 28'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinden ise 14'ü doğru olan b3 şıkkını işaretlerken yanlış olan b4 şıkkını matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin 3'ü matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerin ise 2'si işaretlemiştir. Frekanslara bakıldığında b4 hariç, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin daha başarılı olduğu sonucuna ulaşılır (Tablo 4.24).

Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin on birinci sorunun (c) şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerin %61'inin, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %53'ünün bu şıkka tam doğru yanıt verdiği belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %15'inin kavram yanılgısına sahip olduğu (c) şıkkında, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %4'ünün kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur. Her iki grubun da fonksiyonun x=1 noktasında limitini doğru bulduğu, yaptıkları hataların benzer olduğu görülmüştür (Tablo 4.22).

Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin 12. soru için çizdikleri grafikler incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %50'si, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %53'ü $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini doğru çizmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %29'u, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %13'ü grafiği yanlış çizmiştir. Her iki grupta da grafiği yanlış çizen öğrencilerin hatası, grafiğin sadece $x > 0$ için olan kısmını çizmelerinden ya da ezbere yanlış çizimlerinden kaynaklanmıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin ise %34'ü hiç grafik çizmemişlerdir. $f(x)=\frac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çizme açısından, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencileri daha başarılıdır (Tablo 4.25).

Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %52'si, 5. sınıf öğrencilerinin ise %37'si on ikinci sorunun a şıkkına tam doğru yanıt verirken, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'inin, 5. sınıf öğrencilerinin ise %30'unun bu şıkta kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Her iki gruptaki öğrencilerin de hataları "$f(\infty) = \frac{1}{\infty} = 0$" şeklinde ezbere ve yanlış olan ifadeleridir. Öğrencilerin geneli ifadenin doğruluğunu kabul etmişlerdir; ancak hepsi nedenini tam olarak açıklayamamıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'i, 5. sınıf öğrencilerinin %33'ü bu şıkkı boş bırakmıştır (Tablo 4.26).

İki grubun da b şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %21'i, 5. sınıf öğrencilerinin ise %27'si bu şıkkı tam doğru olarak yanıtlamıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin %50'sinin bu şıkka verdikleri cevaplardan ∞ kavramıyla ilgili kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Her iki grubun öğrencileri de "$f(\infty) = 0$" ifadesini doğru kabul etmiş ve grafikten anladıkları ya da ezber bir bilgi olarak (a) şıkkında olduğu gibi $f(\infty) = \frac{1}{\infty}$=0 açıklamalarını yapmışlardır. Gruplar ∞ kavramıyla ilgili APOS Teorisinin eylem düzeyindedirler. Ayrıca öğrencilerin ∞ kavramını bir reel sayı gibi düşünmeleri bir kavram yanılgısıdır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %26'sı, 5. sınıf öğrencilerinin ise %23'ü bu şıkkı boş bırakmıştır (Tablo 4.26).

Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin on ikinci sorunun c şıkkına %6'sı, 5. sınıf öğrencilerinin ise %3'ü tam doğru yanıt vermiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %65'i, 5. sınıf öğrencilerinin ise %60'ının kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. Her iki grubun da "$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$" ifadesini doğru kabul ettikleri ve açıklama olarak da grafikten anlaşılıyor ya da bu böyledir şeklinde ezbere açıklamalar yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin hataları grafiği yanlış çizmekten ya da ezber bilgiden kaynaklanmıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %29'u, 5. sınıf öğrencilerinin ise %37'si bu şıkkı boş bırakmıştır (Tablo 4.26).

On üçüncü sorunun a şıkkı incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %64'ü, 5. sınıf öğrencilerinin %53'ü soruya tam doğru yanıt verirken, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'inin, 5. sınıf öğrencilerinin ise %27'sinin kavram yanılgısına sahip olduğu bulunmuştur. Her iki grup da "fonksiyonun limiti olması için tanımlı olmasının gerekli olduğu" şeklinde kavram yanılgısına sahiptirler. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinden bir öğrenci "limit için süreklilik olması gerektiği" şeklinde kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiş, bu yanılgıya matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinde rastlanmamıştır. Aslında "fonksiyonun limiti olması için tanımlı olmasının gerekli olduğu" kavram yanılgısına sahip öğrenciler farkında olmadan limitin olması için süreklilik şartını getirmişlerdir. Ancak öğrencilerin ya süreklilik kavramıyla ilgili kavram yanılgıları olduğundan ya da süreklilik ve limit arasında yanlış bir ilişki kurduklarından "limit için süreklilik olması gerektiği" şeklindeki kavram yanılgısına sadece bir öğrencide rastlanmıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %18'i, matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin %20'si bu şıkkı boş bırakmıştır (Tablo 4.28).

İki grubun on üçüncü sorunun b şıkkına verdikleri cevaplar incelendiğinde, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %53'ü, 5. sınıf öğrencilerinin %43'ü soruya tam doğru yanıt verirken, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %26'sı, 5. sınıf öğrencilerinin ise %37'sinin kavram yanılgısına sahip olduğu belirlenmiştir. İki grup da "fonksiyonun bir noktada limiti varsa, fonksiyonun o noktadaki değeri limit değerine eşittir" şeklinde kavram yanılgısına sahiptir ve buna açıklama olarak da "limit varsa böyle olmak zorundadır" şeklinde açıklamalar getirmişlerdir. Matematik öğretmenliği 1, sınıf öğrencilerinin %21'i, 5. sınıf öğrencilerinin ise %20'si soruyu boş bırakmıştır (Tablo 4.28).

On dördüncü soru için iki grubun cevapları karşılaştırıldığında, matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %85'i, 5. sınıf öğrencilerinin %80'i soruyu tam doğru cevaplamıştır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %6'sı, 5. sınıf öğrencilerinin ise %13'ü kavram yanılgısına sahiptir. İki grupta da öğrencilerin sağ ve sol limitleri farklı bulmalarına rağmen, limit değerini sağ veya sol limitten birini yazdıkları belirlenmiştir. İşlem hatası yaptığı için sağ ve sol limitleri yanlış hesaplayan öğrenciler de her iki grupda vardır. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin %9'u, 5. sınıf öğrencilerinin %7'si soruyu boş bırakmıştır. Her iki grup da bu soru da başarılı olmuşlardır (Tablo 4.31).

4.4 Dördüncü Alt Probleme Ait Bulgular: Limit İşlemsel Testten Elde Edilen Bulgular

Öğrencilerin limit işlemsel testteki sorulara verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin diagnostik testteki açık uçlu sorulara göre daha başarılı oldukları tespit edilmiştir.

Tablo 4.34
Öğrencilerin limit işlemsel teste verdikleri cevapların doğru-yanlış freknas ve yüzdeleri

Soru	Doğru	Yanlış	Boş
1	83 (%78)	17 (%16)	6 (%6)
2	79 (%75)	22 (%21)	5 (%4)
3	91 (%86)	9 (%8)	6 (%6)
4	76 (%72)	26 (%25)	4 (%3)
5	75 (%70)	8 (%8)	23 (%22)
6	99 (%93)	5 (%5)	2 (%2)
7	86 (%83)	5 (%7)	15 (%10)
8	101 (%96)	2 (%2)	3 (%2)
9	95 (%90)	9 (%8)	2 (%2)
10	96 (%91)	3 (%3)	7 (%6)

106 üniversite öğrencisinin limit işlemsel testin birinci sorusuna verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin %78'inin bu soruya doğru cevap verdikleri tespit edilmiştir. Öğrencilerin %16'sı birinci soruya yanlış cevap vermiş, %6'sı ise birinci soruyu boş bırakmıştır (Tablo 4.34). Öğrencilerin birinci soruya verdikleri yanlış cevaplar incelendiğinde, öğrencilerin grafikten, fonksiyonun bazı noktalar için var olan limit değerlerini toplamak yerine, limitin olduğu noktaları topladıkları görülmüştür. Öğrencilerin yaptıkları bu hata bir kavram yanılgısı olabileceği gibi dikkatsizlik nedeniyle de olmuş olabilir. Öğrencilerden biri x=2 noktasında 3 olan limit değerini fonksiyonun x=2 noktasındaki değeri olan 4 demiş ($\lim_{x \to 2} f(x) = 4$) ve

x=3 noktasında sağdan limitin 0, soldan limitin 2 olmasına rağmen x=3 noktasında fonksiyonun limit değerine 2 demiş ve 4 ile 2'yi toplayarak sonucu 6 bulmuştur. Bu öğrencinin grafiği verilen bir fonksiyonun limitini bulamadığı, limit kavramını anlamadığı belirlenmiştir.

Tablo 4.34'te görüldüğü gibi öğrencilerin, 2. soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin %75'inin soruya doğru cevap verdiği, %21'inin yanlış cevap verdiği, %4'ünün ise soruyu boş bıraktığı belirlenmiştir. Soruya yanlış cevap veren öğrencilerin, belirsizlik olmamasına rağmen, kesir şeklindeki ifadeye L-Hospital kuralını uyguladıkları belirlenmiştir. Burada öğrenciler, belirsizliğin bulunduğu $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklindeki bir ifadede uyguladıkları L-Hospital kuralını, ezbere bir şekilde uygulamışlardır.

Öğrencilerin 3. soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin %86'sının soruyu doğru cevapladığı, %8'inin soruyu yanlış cevapladığı, %6'sının ise boş bıraktığı belirlenmiştir (Tablo 4.34). Öğrencilerin yanlış cevapları incelendiğinde, soru 2'dekine bezer şekilde, öğrencilerin belirsizlik bulmadıkları halde soruda verilen ifadeye L-Hospital kuralını uyguladıkları görülmüştür. Öğrenciler daha önce çözdükleri $\frac{P(x)}{Q(x)}$ şeklinde olup belirsizliğin olduğu rutin durumlarda yaptıkları şekilde soruyu çözmüşlerdir.

Tablo 4.34'ten de görüldüğü gibi öğrencilerin 4. soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin %72'si dördüncüyü soruyu doğru, %25'i yanlış yapmış, %3'ü ise soruyu boş bırakmıştır. Öğrencilerin vermiş oldukları yanlış cevaplar incelendiğinde öğrencilerin limit içerisindeki $5^{-\infty}$ ifadesini 1 buldukları veya $7^{\frac{1}{-\infty}}$ ifadesini 0 bulduklarından yanlış cevaba ulaştıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin ∞ ifadesiyle ilgili işlemlerde hata yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerden bir tanesi $7^{\frac{1}{-\infty}}$ ifadesini $-\infty$, $5^{-\infty}$ ifadesini ise ∞ bulmuş, cevap olarak da "$-\infty+\infty+1=1$" sonucuna ulaşmıştır. Öğrencinin ∞ ifadesiyle ilgili kavram yanılgılarına sahip olduğu belirlenmiştir.

Öğrencilerin beşinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin %70'nin soruyu doğru cevapladıkları, %8'inin yanlış cevapladığı, %22'sinin ise soruyu boş bıraktığı belirlenmiştir (Tablo 4.33). Soruyu yanlış yapan öğrencilerin cevapları inclendiğinde öğrencilerin hatalarının trigonometrik fonksiyonların değerlerini yanlış bilmelerinden ($\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}$, $\sin\pi=$ -1), trigonometrik eşitlikleri yanlış ifade etmelerinden ($\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}=\frac{(\sin^2 x-\frac{1}{2}).2}{2.\sin 4x}=\frac{2\sin^2 x-1}{2.\sin 4x}=\frac{\cos 2x}{2.\sin 2x.\cos 2x}=\frac{1}{2\sin 2x}=\frac{1}{2}$) ya da $\frac{0}{0}$ belirsizliğine ulaştıktan sonra L-Hospital kuralını uygularken trigonometrik fonksiyonların türevlerini yanlış almalarından ($\frac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}=\frac{0}{0}$, $\frac{2\cos x}{4\cos 4x}$) kaynaklanmaktadır.

Tablo 4.34'ten görüldüğü gibi öğrencilerin %93'ü altıncı soruyu doğru yaparken, öğrencilerin %5'i yanlış yapmış, %2'si ise soruyu boş bırakmıştır. Öğrenci hataları yanlış çarpanlara ayırmadan ($y^3-x^3=(y-x).(x^2+2xy+y^2)$) kaynaklanmıştır.

Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin %83'ünün soruyu doğru yaptıkları, %7'sinin yanlış yaptığı ve %10'unun ise soruyu boş bıraktığı belirlenmiştir. Bu soruyu yanlış cevaplayan öğrencilerin bağımlı değişkenle bağımsız değişkeni karıştırdıkları ($\lim_{c\to x}\frac{16x^2-16c^2}{4\sin(x-c)}=\frac{4x^2-4c^2}{\sin(x-c)}=\frac{-32c}{-1.4}$) ve L-Hospital kuralını uygulamada hata yaptıkları bulunmuştur.

Tablo 4.34'ten de görüldüğü gibi öğrencilerin %96'sı sekizinci soruyu doğru, %2'si yanlış cevaplamış, %2'si boş bırakmıştır (Tablo 4.33). Soruyu yanlış yapan öğrencilerden ikisinin de işlem hatasından dolayı soruyu yanlış yaptığı görülmüştür.

Öğrencilerin dokuzuncu soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, öğrencilerin %90'ının dokuzuncu soruyu doğru, %8'inin yanlış cevapladığı ve

%2’sinin ise soruyu boş bıraktığı belirlenmiştir (Tablo 4.34). Öğrencilerin yaptıkları yanlışların, 2. ve 3. sorudakinebenzer şekilde, belirsizlik olmadığı halde L-Hospital kuralını uygulamalarından, trigonometrik fonksiyonların değerleirini yanlış bulmaktan (Cos0=0) kaynaklanmıştır.

Öğrencilerin, onuncu soruda ise %91’i soruyu doğru cevaplamış, %3’ü yanlış cevaplamış, %6’sı ise soruyu boş bırakmıştır (Tablo 4.34). Soruyu yanlış yapan öğrencilerin hatalarının işlem hatasından ($\frac{e^0 - 1}{\frac{1}{e^0} - 1} = \frac{0}{0-1} = 0$) kaynaklandığı bulunmuştur.

5. TARTIŞMA VE SONUÇLAR

Bu bölümde çalışmanın birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü alt problemlerine ilişkin tartışma ve sonuçlar sırasıyla verilecektir.

5.1 Birinci Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar

Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konularını tam olarak öğrenebilmeleri için gerekli ön kavramlarla (fonksiyonlar, fonksiyonların tanım kümeleri, trigonometri) ilgili sahip oldukları kavram yanılgıları ya da bilgi eksiklikleri olup olmadığının araştırıldığı birinci alt problemde, uygulanan limit ön test sonucunda öğrencilerin fonksiyon kavramıyla ilgili çok eksikliklerinin olmadığı bulunmuştur (EK A). Öğrencilerin grafik çizimlerinde ve ∞ kavramıyla ilgili bilgi eksiklikleri olduğu belirlenmiştir. Öğrencilerin bağımlı değişken ile bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi de tam olarak kuramadıkları sonucuna ulaşılmıştır.

5.2 İkinci Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar

Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konusuyla ilgili kavram yanılgıları var olup olmadığı araştırıldığından çalışmada, üniversite öğrencilerinin limit ve limitle ilgili temel kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin kavram yanılgılarını belirlemek amacıyla uygulanan limit diagnostik teste (EK B) verilen cevapların analizinden elde edilen bulgulara göre sonuçlar:

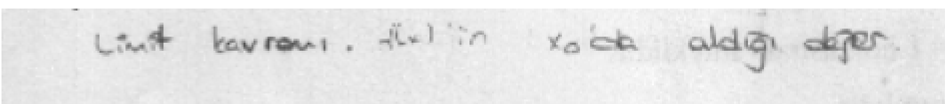
- *limitin $\varepsilon-\delta$ tanımı ile ilgili kavram yanılgıları,*
- *limit kavramı tanımı ile ilgili kavram yanılgıları ,*
- *fonksiyonun bir noktadaki limitinin varlığı ile ilgili kavram yanılgıları,*
- *sağ ve sol limit kavramları ile ilgili kavram yanılgıları ,*

- *limit ve süreklilik kavramları arasındaki ilişki ile ilgili kavram yanılgıları,*
- *bir fonksiyonun bir noktada tanımlı olması ile ilgili kavram yanılgıları*,
- *fonksiyon grafiklerinin çizimi* ve
- ∞ *kavramının anlaşılması ve işlemlerde kullanılması*

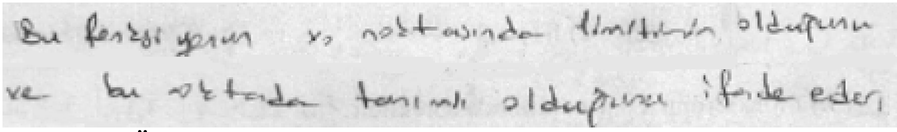
olmak üzere 8 başlık altında incelenmiştir. Ayrıca öğrencilerin birbirleriyle bağlantılı kavramlar arasında kurdukları yanlış ilişkiler "Çelişkili İfadeler" başlığı altında ele alınmıştır. Bu kategorilere ait açıklamalar aşağıda sırasıyla verilmiştir. Belirlenen kavram yanılgılarıyla ilgili açıklamalar ve literatürle ilişkileri, her bahsedilen konu ile ilgili oluşturulan kategoride ayrıntılı bir şekilde açıklanmıştır.

5.2.1 Limitin $\varepsilon-\delta$ Tanımı ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin limit diagnostik testin birinci ve üçüncü sorusuna verdikleri yanıtların analizi sonucunda, öğrencilerin limitin formal $\varepsilon-\delta$ tanımını tam olarak anlayamadıkları, bu ifadenin sadece limitin tanımı olduklarını bildikleri ve ε *ve* δ sembolleriyle ne anlatılmak istendiğine yönelik bir açıklama yapamadıkları belirlenmiştir. Özellikle bilgisayar öğretmenliği öğrencilerinin %73'ü ve fen bilgisi öğretmenliği öğrencilerinin tamamı limit diagnostik testin birinci sorusunu boş bırakmış ve limitin formal $\varepsilon-\delta$ tanımını görmelerine rağmen bu ifadeden bir şey anlamadıklarını belirtmişlerdir. Öğrencilerin limitin $\varepsilon-\delta$ tanımından, limitin olabilmesi için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerektiği sonucunu çıkardıkları ya da limitin $\varepsilon-\delta$ tanımının düzgün süreklilik anlamına geldiğini belirttikleri görülmüştür. Öğrencilerin $\varepsilon-\delta$ tanımıyla ilgili yaptıkları açıklamalardan bazıları şöyledir:



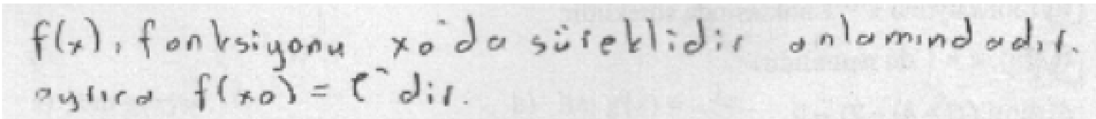
Şekil 5.1 Ö7'nin limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt



Bu fonksiyonun x_0 noktasında limitinin olduğunu ve bu noktada tanımlı olduğunu ifade eder,

Şekil 5.2 Ö28'in limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt

Şekil 5.1 ve Şekil 5.2'den de görüldüğü gibi Ö7'nin cevabına benzer bir şekilde Ö28'in de limit ile fonksiyonun o noktada tanımlı olmasını aynı algılamaktadır. Burada öğrenciler, fonksiyonun bir noktadaki limiti ile fonksiyonun o noktadaki değerini aynı şeyler olarak düşünmektedir. Bu kavram yanılgısı Davis ve Vinner (1986), Bezuidenhout, (2001) ve Jordaan (2005)'in çalışmalarıyla uyuşmaktadır [45, 52, 53].

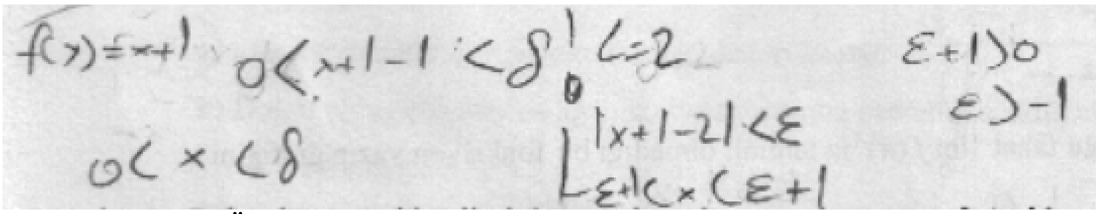


f(x), fonksiyonu x_0'da süreklidir anlamındadır. ayrıca $f(x_0) = \ell$ dir.

Şekil 5.3 Ö57'nin limit diagnostik testin birinci sorusuna verdiği yanıt

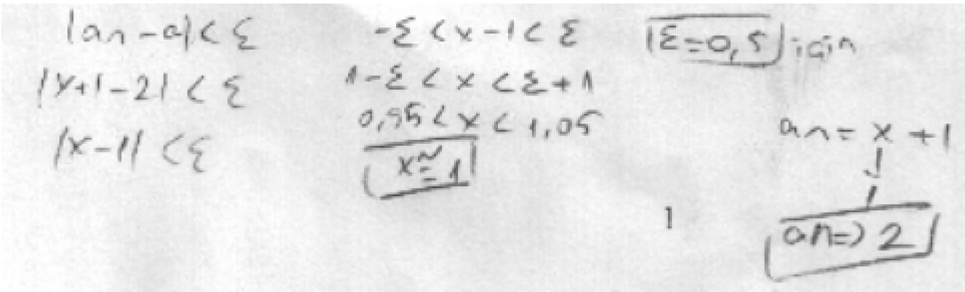
Şekil 5.3'teki öğrenci açıklamasında ise öğrencinin süreklilik tanımı ile $\varepsilon-\delta$ tanımını karıştırdığı görülmektedir. Benzer kavram yanılgısına Jordaan (2002)'nin çalışmasında da rastlanmıştır [52].

Öğrencilere $\varepsilon-\delta$ tanımının bir uygulamasının sorulduğu 3. soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde ise öğrencilerin $\varepsilon-\delta$ tanımını anlamamalarının yanı sıra uygulamada mutlak değer ve eşitsizlik konularında da hatalar yaptıkları görülmüştür. Öğrencilerin ε ile kurdukları bağıntıda fonksiyondan verilen noktadaki ispat edilmek istenen limit değeri yerine verilen noktayı çıkardıkları ya da tersine δ ile ilgili kurdukları ilişki de değişkenden (x'den) verilen noktayı çıkarmak yerine, limit değerini çıkardıkları görülmüştür. Bu kavram yanılgılarına örnek, birkaç öğrencinin açıklamaları aşağıdaki gibidir:



Şekil 5.4 Ö15’in limit diagnostik testin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Öğrencinin hem mutlak değer konusunda hata yaptığı hem de δ ile fonksiyon arasında ilişki kurarak $\varepsilon - \delta$ tanımını anlayamadığı görülmektedir (Şekil 5.4).



Şekil 5.5 Ö68’in limit diagnostik testin üçüncü sorusuna verdiği yanıt

Ö68’in Şekil 5.5’de verilen yanıtında ise öğrenci fonksiyonu bir dizi gibi algılamıştır.

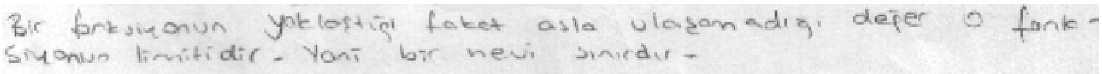
Bulunan bu sonuçlar Akbulut ve Işık’ın (2005) çalışmalarındaki sonuçlarla örtüşmektedir. Akbulut ve Işık (2005), çalışmasında öğrencilerin limitin $\varepsilon - \delta$ tekniğini anlamadıkları sonucuna ulaşmışlardır [55].

5.2.2 Limit Kavramı Tanımı ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin ikinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde, limit kavramını daha çok Williams (1989)’ın da belirttiği gibi, x x_0 ’a giderken *f(x)* $f(x_0)$ ’a gider şeklinde dinamik teorik olarak tanımladıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin limit kavramını tanımlamada, Williams (1989)’ın anketinde belirttiği diğer modelleri de (“sınır”, “formal”, “ulaşılmaz”, “yaklaşım” ve “dinamik pratik”) kullandıkları belirlenmiştir [42]. Limitin tanımını yaparken öğrenciler limiti, fonksiyonun alabileceği maksimum veya minimum değer olarak açıklarken, öğrencilerin bir kısmı limiti, fonksiyonun yaklaştığı fakat asla ulaşamadığı değer olarak (ulaşılmaz) olarak tanımlamıştır. Limiti günlük hayattaki anlamıyla “belli bir miktar” şeklinde tanımlayan, fonksiyonun o noktadaki değerinin bulunması olarak ya da bir şeyin bitmesi, sıfır olması diye konuyla alakası olmayan şekilde tanımlayan öğrencilere de rastlanmıştır. Sonuç olarak öğrencilerin limiti, “bir sınır olarak”, “fonksiyonun asla ulaşamayacağı bir değer olarak”, “fonksiyonun alabileceği maksimum ya da minimum değerler olarak”, “fonksiyonun o noktadaki değeri olarak” tanımlamaları birer kavram yanılgısıdır. Limitin informal olarak sınır ya da ulaşılmazlık gibi modellerle tanımlanması belki öğrencilerin konuyu ilk öğrenmelerinde edindikleri bir izlenim olarak kavram yanılgısı sayılmayabilir; ancak Tall ve Vinner’ın (1981) da belirttiği gibi bu informal yaklaşımlar ileride öğrencilerin kavram yanılgılarına sahip olmalarına yol açabilmektedir [26]. Öğrencilerin bahsedilen kavram yanılgılarından bazıları aşağıda verilmiştir:

Şekil 5.6 Ö2’nin ikinci soruya verdiği yanıt

Şekil 5.6’da Ö2’nin verdiği yanıtta, öğrencinin limiti, fonksiyon değeri olarak gördüğü anlaşılmaktadır. Bu da öğrencinin Tall ve Gray (1991)’in bahsettiği hem kavram hem işlem anlamı olan “procept” kavramından kaynaklanan bir kavram yanılgısına sahip olduğunu göstermektedir. Tall ve Gray (1991)’in belirttiği gibi öğrenciler limite yaklaşma işlemi ve limit değeri kavramı ifadelerinin ikisi de $\lim_{x \to a} f(x)$ sembolüyle gösterildiğinden, limitin sadece işlem anlamı olduğunu düşünebilrler [28]. Ö2 de limiti sadece işlemsel olarak fonksiyon değeri olduğunu belirterek limitle ilgili yanlış bir tanım vermiştir.


Bir fonksiyonun yaklaştığı fakat asla ulaşamadığı değer o fonk-
siyonun limitidir. Yani bir nevi sınırdır.

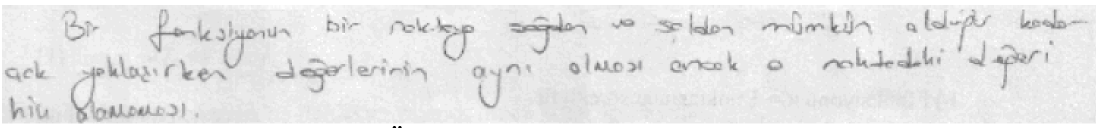
Şekil 5.7 Ö68’in ikinci soruya verdiği yanıt

Şekil 5.7’de verilen, Ö68’in cevabı incelendiğinde öğrencinin Williamson (1989)’un limit için “sınır” ve “ulaşılmaz” modellerine sahip olduğu görülmektedir [42]. Bu bir kavram yanılgısıdır. Aynı kavram yanılgısına Jordaan (2005)’in çalışmasında da rastlanmıştır [53].


limit, belli bir miktardır

Şekil 5.8 Ö8’in ikinci soruya verdiği yanıt

Şekil 5.8’de görüldüğü gibi öğrenci limiti, Tall (1992) ve Davis ve Vinner (1986)’nın da çalışmalarında belirttiği gibi günlük hayattaki anlamıyla tanımlamıştır. Öğrenci limitin informal veya formal bir tanımını yapmamıştır [34, 45].


Bir fonksiyonun bir noktaya sağdan ve soldan mümkün olduğu kada-
rak yaklaşırken değerlerinin aynı olması ancak o noktadaki değeri
hiç olmaması.

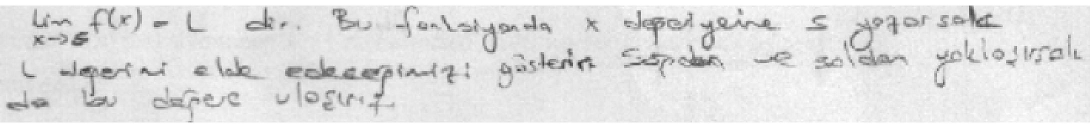
Şekil 5.9 Ö46’nın ikinci soruya verdiği yanıt

Ö46’nın Şekil 5.9’da verilen yanıtında limiti, Williamson (1989)’un “yaklaşım” ve “ulaşılmaz” modelleriyle açıkladığı görülmektedir [42].

Genel olarak bulunan bu sonuçlar Tall ve Vinner (1981), Cornu (1991), Williams (1991), Davis ve Vinner (1986), (Jordaan, 2005), Akbulut ve Işık’ın (2005), çalışmasındaki sonuçlarla uymaktadır [26, 40, 43, 45, 53, 55].

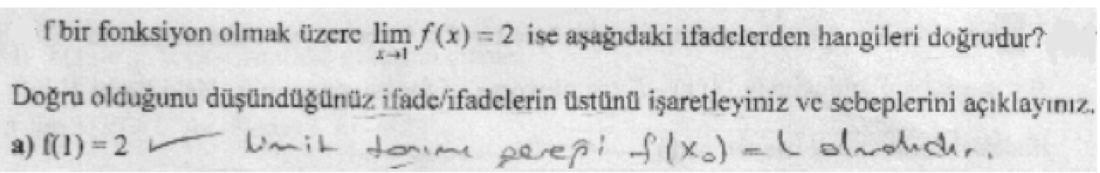
5.2.3 Fonksiyonun Bir Noktadaki Limitinin Varlığı ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin beşinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin yaklaşık % 16'sının "bir fonksiyonun bir noktada limitinin olması durumunu fonksiyonun o noktadaki değerinin o noktadaki limit değerine eşit olduğu" başka bir deyişle "$\lim_{x \to s} f(x)$ varken $f(s) = L$" olduğu şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları belirlenmiştir. Öğrencilerin bir noktadaki limit ile fonksiyonun bu noktadaki limiti arasında kurdukları bu yanlış ilişki, genelde limitle ilgili işlemsel soruları çözerken öğrencilerin sıklıkla kullandıkları, limiti aranan sayının fonksiyonda yerine konmasıyla limit değerini bulma işleminden kaynaklanmış olabilir. Hata 5.4'te ise bir öğrencinin bu soruya cevap olarak f fonksiyonunun s noktasına giderken s noktasının sağında, solunda ve s noktasında fonksiyonun aldığı değerlerin eşit ve bunların L olduğu şeklinde bir kavram yanılgısına sahip olduğu sonucuna ulaşılır (Tablo 4.10). Bu kavram yanılgısına örnek olabilecek bir öğrencinin açıklaması Şekil 5.10'da verildiği gibi şöyledir:


$\lim_{x \to s} f(x) = L$ dir. Bu fonksiyonda x değeri yerine s yazarsak L değerini elde edeceğimizi gösterir. Sağdan ve soldan yaklaşırsak da bu değere ulaşırız.

Şekil 5.10 Ö2'nin beşinci soruya verdiği yanıt

Aynı kavram yanılgısına öğrencilerin 6. ve 15. soruların (a) şıkları için bir noktadaki limiti verilen bir fonksiyon için yaptıkları açıklamalarda "fonksiyonun o noktada tanımlı olmasını limit tanımının gereği olarak görmeleri" şeklinde sahip oldukları görülmüştür. Buna örnek Şekil 5.11, Şekil 5.12 ve Şekil 5.13'te verilmiştir.


f bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{x \to 1} f(x) = 2$ ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur?
Doğru olduğunu düşündüğünüz ifade/ifadelerin üstünü işaretleyiniz ve sebeplerini açıklayınız.
a) $f(1) = 2$ ✓ Limit tanımı gereği $f(x_0) = L$ olmalıdır.

Şekil 5.11 Ö2'nin altıncı sorunun (a) şıkkına yaptığı açıklama

$\lim_{x \to 3} g(x) = 5$ ifadesi için g(x) fonksiyonunun x = 3 noktasında limiti olması için bu noktadaki tanımlı olmalı mıdır? Neden? Limitin olması için tanımlı olması gerekir

Şekil 5.12 Ö70'in on üçüncü sorunun (a) şıkkına yaptığı açıklama

b) g(3) = 5 diyebilir miyiz?

Diyebiliriz. $\lim_{x \to 3} g(x) = 5$ ifadesinde 3 değerini yerine koyarsak limit ifadesini kullanıyoruz.
yani g(3)=5 olur.

Şekil 5.13 Ö70'in on üçüncü sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama

Öğrencilerden ikisi f(1)'in tanımlı olduğu fakat $\lim_{x \to 1} f(x)$'in tanımlı olmadığı bir fonksiyon yazmaları istendiği 7. soruya verdikleri yanıtta 6. ve 15. soruların (a) şıklarında bahsedilen "verilen bir noktada fonksiyonun limiti varsa o noktada fonksiyon tanımlıdır" kavram yanılgısındaki ifadenin tersi bir ilişki kurdukları belirlenmiştir. Bu iki öğrenci "fonksiyon bir noktada tanımlıysa o noktada fonksiyonun limiti vardır" şeklinde bir kavram yanılgısına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır. Bu kavram yanılgısına örnek Şekil 5.14'te verildiği gibidir.

f(1)'in tanımlı olduğu fakat $\lim_{x \to 1} f(x)$'in tanımlı olmadığı bir fonksiyon yazıp grafiğini çiziniz. Böyle bir fonksiyon tanımlayamayız.

Şekil 5.14 Ö4'ün yedinci soruya verdiği yanıt

Öğrencilerin 6. sorunun (b) şıkkında da bir fonksiyonun bir noktadaki limitinin bulunmasını fonksiyonun o noktada sürekli olmasına bağladıkları belirlenmiştir. Hatta öğrencilerin limit tanımı gereği fonksiyon süreklidir şeklinde kavram yanılgılarına sahip oldukları bulunmuştur. Şekil 5.15 bu yanılgıya örnek bir öğrenci cevabı verilmiştir.

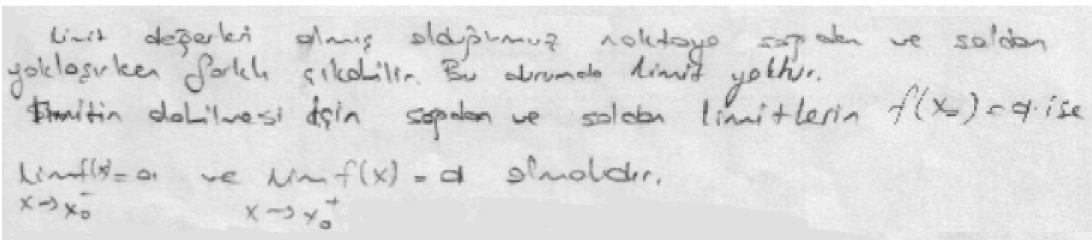
f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir. Limitin olması için o noktada sürekli olmalı.

Şekil 5.15 Ö2'nin yedinci sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama

Bulunan bu sonuçlar Bezuidenhout (2001) ve Jordaan (2005)'ın çalışmalarının sonuçlarına uymaktadır [52, 53].

5.2.4 Sağ ve Sol Limit Kavramları ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin dördüncü soruya verdikleri cevaplar incelendiğinde öğrencilerin sağ ve sol limit kavramlarının sezgisel olarak ne anlama geldiğini anlayabildikleri; ancak bazı öğrencilerin bu kavramlar hakkında kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir. Bazı öğrencilerin de sadece sembolik olarak $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \lim_{x \to x_0} f(x)$ olursa limit vardır dediği ve sağ ve sol limit kavramlarına açıklama getiremedikleri görülmüştür. Öğrencilerin sağ ve sol limitlerin eşit olması durumunda limitin olduğunu bildikleri; fakat bazı öğrencilerin fonksiyonun aynı zamanda verilen noktadaki limitinin de sağ ve sol limite eşit olması gerektiği şeklinde limitle sürekliliği karıştırdıkları kavram yanılgılarına sahip oldukları belirlenmiştir.

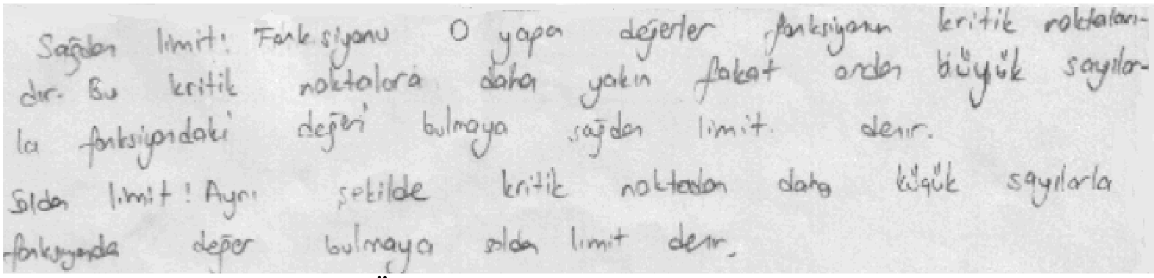


Limit değerleri olmuş olduğumuz noktaya sağdan ve soldan yaklaşırken farklı çıkabilir. Bu durumda limit yoktur. Limitin delilmesi için sağdan ve soldan limitlerin $f(x_0)=a$ ise $\lim_{x \to x_0^-} f(x)=a$ ve $\lim_{x \to x_0^+} f(x)=a$ olmalıdır.

Şekil 5.16 Ö2'nin dördüncü soruya verdiği yanıt

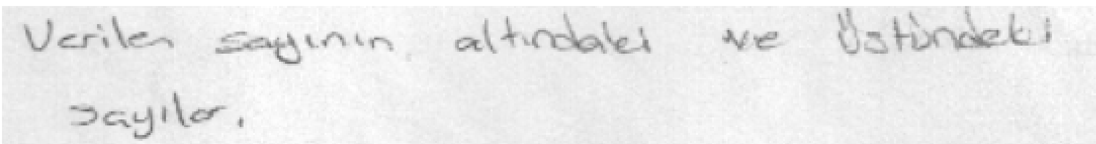
Şekil 5.16'da verilen cevapta öğrenci, limitin olması için sağ ve sol limitlerin var ve eşit olması ifade etmiş ancak fonksiyonun değerinin de limit dğeriyle aynı olmasını söylemiştir. Öğrencinin sağ ve sol limit değerlerini fonksiyon değerine eşit olmasını söylemesi bir kavram yanılgısıdır.

Sağ ve sol limit kavramlarını, sırasıyla sayının solundan çok küçük bir sayının limiti ve sağından çok küçük bir sayının limiti olarak tanımlayan öğrenciler bu kavramları sağ ve sol türev ifadeleriyle karıştırmış olabilirler; belki de yanlış ifade ettiklerinin farkında da olmayabilirler. Bu duruma bir örnek Şekil 5.17'de verildiği gibidir.


Sağdan limit: Fonksiyonu 0 yapan değerler fonksiyonun kritik noktalarıdır. Bu kritik noktalara daha yakın fakat ordan büyük sayılarla fonksiyondaki değeri bulmaya sağdan limit denir.
Soldan limit: Aynı şekilde kritik noktadan daha küçük sayılarla fonksiyonda değer bulmaya soldan limit denir.

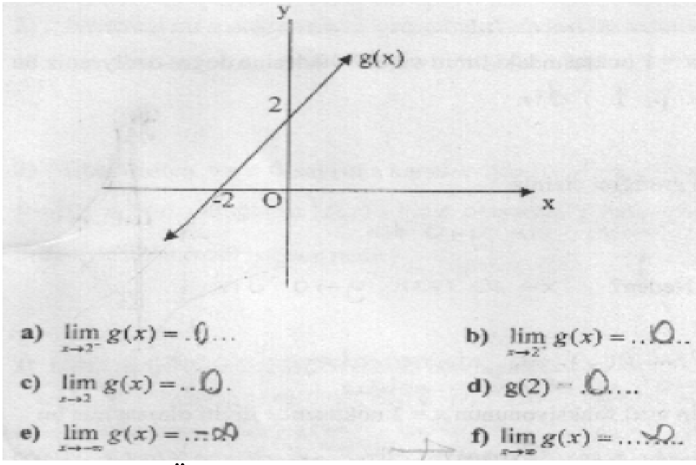
Şekil 5.17 Ö17'nin dördüncü soruya verdiği yanıt

Bazı öğrenciler de sağ ve sol limiti Şekil 5.18'de görüldüğü gibi yanlış bilmektedir. Öğrencinin limit kavramını tam olarak anlamadığı görülmektedir.


Verilen sayının altındaki ve üstündeki sayılar.

Şekil 5.18 Ö102'nin dördüncü soruya verdiği yanıt

Öğrenciler 11. soruda 2'ye sağdan ve soldan yaklaşırken hata yapmışlardır. Öğrenciler burada x=2'ye yaklaşmak yerine, y=2'ye yaklaşmış olabilirler ya da grafiği yanlış yorumlamışlardır. Öğrencilerin sağ ve sol limit kavramını anlayamadıkları belirlenmiştir. Şekil 5.19'da böyle bir yanılgıya örnek verilmektedir.



a) $\lim_{x\to 2^-} g(x) = .0...$

b) $\lim_{x\to 2^+} g(x) = ..0..$

c) $\lim_{x\to 2} g(x) = ..0.$

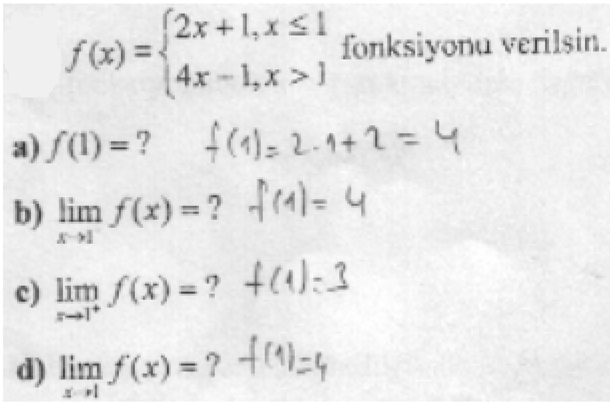
d) $g(2) = .0....$

e) $\lim_{x\to -\infty} g(x) = .-\infty$

f) $\lim_{x\to \infty} g(x) = ...\infty..$

Şekil 5.19 Ö20’nin on birinci soruya verdiği yanıt

Bir başka kavram yanılgısı da Şekil 5.20’de verilmiştir.



$f(x) = \begin{cases} 2x+1, x \le 1 \\ 4x-1, x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

a) $f(1) = ?$ $f(1) = 2 \cdot 1 + 2 = 4$

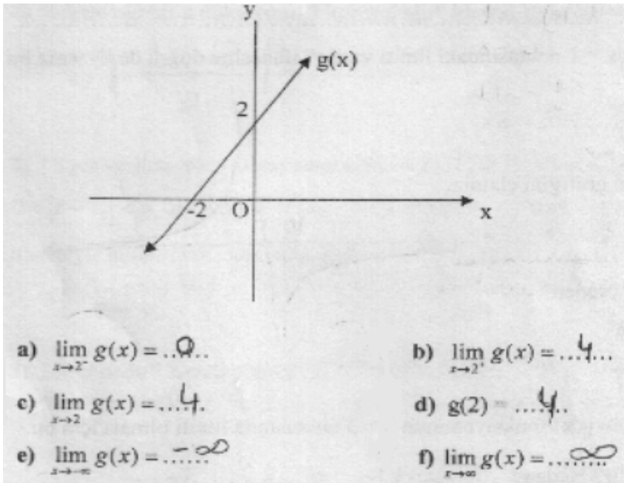
b) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = ?$ $f(1) = 4$

c) $\lim_{x\to 1^+} f(x) = ?$ $f(1) = 3$

d) $\lim_{x\to 1} f(x) = ?$ $f(1) = 4$

Şekil 5.20 Ö106’nın on dördüncü soruya verdiği yanıt

Öğrencilerden üçü, (birinin cevabı Şekil 5.20’de verilen) on dördüncü soruya soldan limiti 4, sağdan limiti 3 bulmalarına rağmen 1’deki limitin 4 olduğunu ifade etmişlerdir. Bu bir kavram yanılgısıdır. Yine buna benzer başka bir örnek de Şekil 5.21’de verilmiştir.

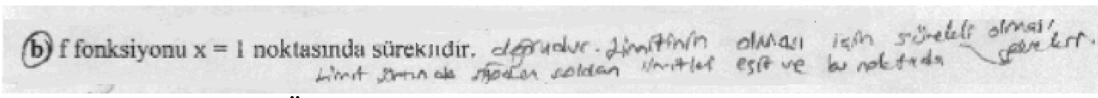


Şekil 5.21 Ö2'nin on birinci soruya verdiği yanıt

Şekil 5.21'de görüldüğü gibi Ö2, sol limiti "0", sağ limiti "4" bulmasına rağmen rağmen limitin varlığından söz etmiştir.

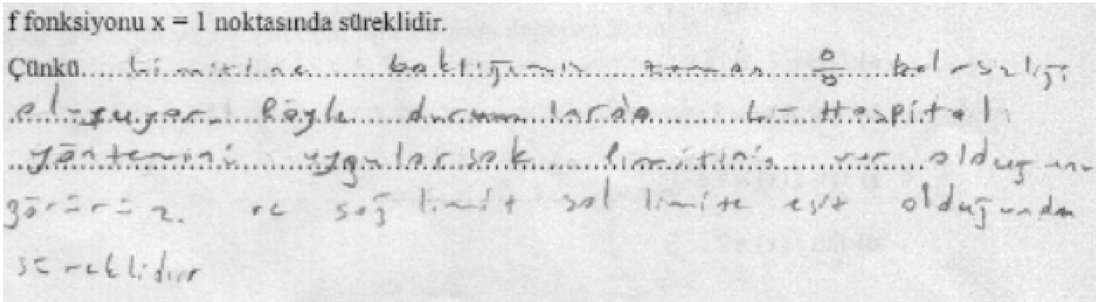
5.2.5 Limit ve Süreklilik Kavramları Arasındaki İlişki ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin %14'ü bir fonksiyonun bir noktada limiti tanımlı olduğunda süreklilik koşulunun da sağlandığını söylemişlerdir. Bu öğrencilerin limit kavramıyla süreklilik kavramı arasında yanlış bir ilişki kurduklarını göstermektedir. Bu bir kavram yanılgısıdır. Buna örnek Şekil 5.22'deki gibidir.


(b) f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir. doğrudur. Limitinin olması için sürekli olması gerekir. Limit olması için sağdan soldan limitler eşit ve bu noktada

Şekil 5.22 Ö47'nin altıncı sorunun (b) şıkkına yaptığı açıklama

Öğrencilerin 11. sorunun (b1) şıkkına yaptıkları açıklamalar incelendiğinde öğrencilerin sağdan ve soldan limit olmasının süreklilik için yeterli olduğunu belirttikleri bulunmuştur. Şekil 5.23 inclenecek olursa:


f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir.

Çünkü

Şekil 5.23 Ö78’in on birinci sorunun (b1) şıkkına yaptığı açıklama

Ö78’in sadece limiti bularak fonksiyonun sürekli olduğunu söylediği görülmektedir. Öğreni hem süreklilik kavramını bilmemekte hem de limitle süreklilik arasında yanlış bir ilişki kurmaktadır.

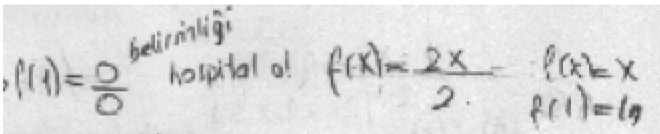
Bu sonuçlar Bezuidenhout (2001), Jordaan (2005)’in çalışmalarına uymaktadır [52, 53].

5.2.6 Bir Fonksiyonun Bir Noktada Tanımlı Olması ile İlgili Kavram Yanılgıları

Öğrencilerin yedinci soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin fonksiyonun bir noktada tanımlı olup o noktada limitinin olamayacağı gibi bir düşünceyi yanlış buldukları görülmüştür. Bir öğrenci ise fonksiyonun sağ ve sol limitleri birbirinden farklıysa fonksiyonun o noktada tanımsız olacağını söyleyerek benzer şekilde limitin olabilmesi fonksiyonun o noktada tanımlı olmasına bağladığı bulunmuştur.

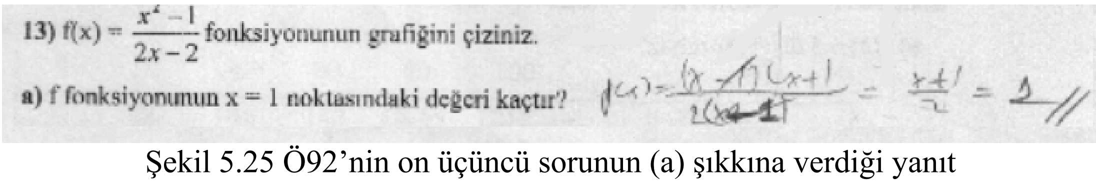
Öğrencilerin bir kısmı 11. sorunun a şıkkında fonksiyonu tanımsız yapan bir değer için L-Hospital uygulayarak fonksiyonun değerini buldukları bir kısmının ise tanımsızlığı sağlaya değeri çarpanlara ayırma yoluyla sadeleştirerek fonksiyonun değerini bulma yoluna gittiği görülmüştür.

Öğrencilerin yedinci soruya benzer şekilde on üçüncü soruya verdikleri yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin a şıkkına ilişkin yaptıkları açıklamalarda bir noktada bir fonksiyonun limiti olması için fonksiyonun o noktada tanımlı olması gerektiğini ve bunun da limitin tanımı gereği olduğunu söylemeleri bir kavram yanılgısıdır. Öğrenciler limiti verilen bir ifade için tanımlı ki limiti var diye düşündüklerinden fonksiyonun bir noktada tanımlı olması ile o noktada limitin olması kavramları arasında yanlış ilişkiler kurmuşlardır. Benzer şekilde bazı öğrenciler de fonksiyonun bir noktada tanımlı olması kavramını fonksiyonun sürekli olmasına bağlamışlardır. Bir öğrencide yine limitle ilgili işlemsel bilgisinden kaynaklanmış olabilecek şekilde soruda fonksiyonun ne olduğu verilmediği için fonksiyonun o noktada limit değerine eşit olacağını belirtmiştir. Öğrencilerin kavram yanılgılarına örnekler aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.24 Ö66'nın on birinci sorunun (a) şıkkına vermiş olduğu yanıt

Şekil 5.24'ten da görüldüğü gibi Ö66, tanımsız olan bir fonksiyonun değerini bulmak için, limit almada belirsizliklerle karşılaşıldığında kullanılan L-Hospital Kuralını kullanmıştır. Öğrencinin hem fonksiyonun bir noktadaki değerini bulma hem de L-Hospital Kuralanın uygulanabilme koşullarını yanlış bilgi sahibi olduğu görülmektedir.



Şekil 5.25 Ö92'nin on üçüncü sorunun (a) şıkkına verdiği yanıt

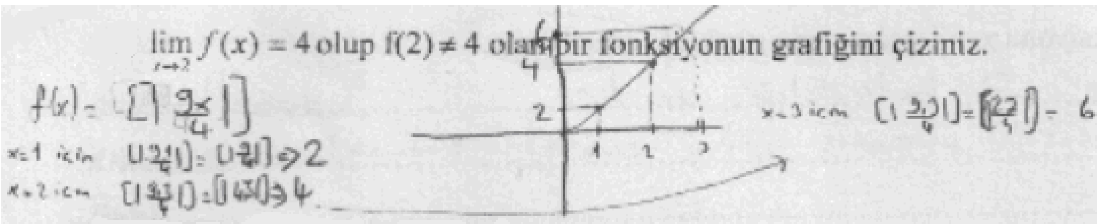
Şekil 5.25'te ise Ö92'nin fonksiyonu tanımsız yapan bir noktada fonkasiyonun değerini bulmak için fonksiyonda sadeleştirme yaptığı görülmektedir.

Şekil 5.24'te Ö66'nın hatasına benzer bir şekilde bu öğrencinin de fonksiyon değerini bulmada kavram yanılgısına sahip olduğu görülmektedir.

Elde edilen bu sonuçlar Bezuidenhout (2001), Jordaan (2005)'in çalışmalarıyla uyuşmaktadır [52, 53].

5.2.7 Fonksiyon Grafiklerinin Çizimi ile İlgili Hata ve Kavram Yanılgıları

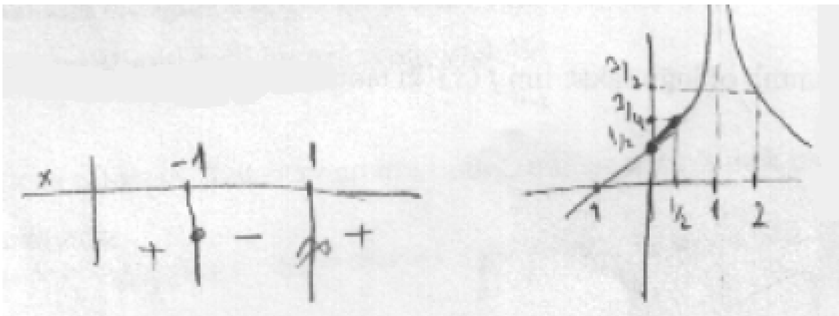
Öğrencilerin 8. 11. ve 12. sorularda çizdikleri grafiklerde bazı hatalar yaptıkları tespit edilmiştir. Öğrencilerin özellikle signum fonksiyonunun çiziminde hatalar yaptıklarına rastlanmıştır. Ö25'in çizdiği signum fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.



Şekil 5.26 Ö25'in sekizinci soruya verdiği yanıt

Şekil 5.26'dan de görüldüğü gibi Ö25, signum fonksiyonun grafiğini bir doğru grafiği gibi çizmiştir. Öğrencinin grafik çizimi konusunda eksik olduğu görülmektedir.

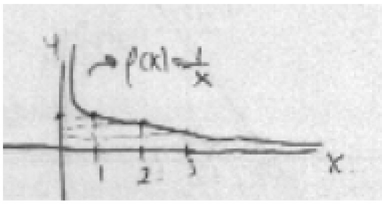
Öğrencilerin on birinci soru için çizdikleri f(x) = $\frac{x^2-1}{2x-2}$ fonksiyonu için çizdikleri yanlış grafiklerden biri Şekil 5.27'de verilmiştir.



Şekil 5.27 Ö71'in on birinci soru için çizdiği f(x) = $\frac{x^2-1}{2x-2}$'in grafiği

Ö71'in, Şekil 5.27'de gösterilen çiziminde, işaret incelemesini doğru yaptığı görülmektedir. Ama grafik çizimini neye göre yaptığı açık değildir. Öğrenci ezbere bir şekilde grafiği çizmiş olabilir.

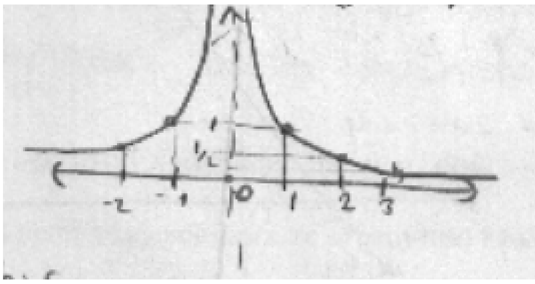
12. soruda öğrenciler f(x)=$\frac{1}{x}$'in grafiğinin sadece x > 0 için olan kısmını çizmişlerdir. Bu çizimden dolayı da öğrencilerin bazıları 12. sorunun (c) şıkkına yanlış cevap vermişlerdir ($\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$). Bu yanlış çizime örnek Şekil 5.28'de verilmiştir.



Şekil 5.28 Ö4'ün 12. soru için çizdiği f(x)=$\frac{1}{x}$'in grafiği

Öğrencinin bu yanlış çizmi ezber bilgiden kaynaklanmış olabileceği gibi dikkatsizlikten de kaynaklanmış olabilir.

Yine öğrencilerin f(x)=$\frac{1}{x}$ fonksiyonun yanlış çizdikleri grafiklerden biri de Şekil 5.29'da verilmiştir.

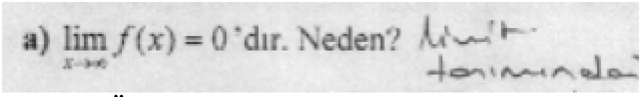


Şekil 5.29 Ö27'nin 12. soru için çizdiği f(x)=$\frac{1}{x}$'in grafiği

Ö27'nin herhangi bir değer bulmaksızın çizdiği bu grafikten, ezbere bir şekilde fonksiyonun grafiğini çizdiği anlaşılıyor. Öğrenci fonksiyonun "0" noktasında tanımsız olduğunu bilmesine rağmen, x < 0 kısmı için grafiği yanlış çizmiştir.

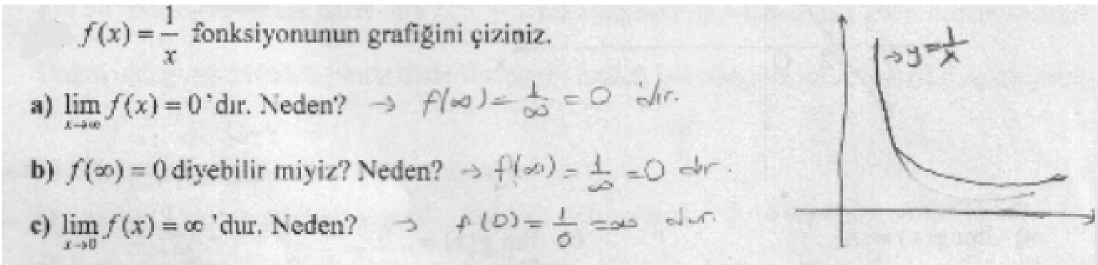
5.2.8 ∞ Kavramının Algılanması ve İşlemlerde Kullanılması ile İlgili Kavram Yanılgıları

On ikinci sorunun (a) ve (b) şıklarına verile yanıtlar incelendiğinde öğrencilerin ∞'u bir reel sayı gibi düşündükleri $f(x)=\frac{1}{x}$ ifadesini x$\to\infty$ durumunda limit sorulduğunda x yerine ∞ verdikleri ($\frac{1}{\infty}$) gözlenmiştir. Ayrıca $\frac{1}{\infty}$ ifadesinin sonucunun 0 olduğunu söyleyerek limit durumunda böyle ifade edilebilecek bir durumu normal fonksiyonlar için de ifade ederek kavram yanılgısına düşmüşlerdir. Yine öğrencilerin x sıfıra yaklaştıkça çok çok küçülür ve limitin gideceği en son nokta ∞ olur demekle ∞'u reel sayı gibi gördükleri anlaşılmaktadır. Bazı öğrencilerin de $\frac{1}{\infty}$=0'dır bu bir kuraldır ve sorgulanmaz diyerek ezbere bilgiye sahip olduklarını ve ∞ kavramını anlamadıkları görülmektedir. Öğrencilerin on ikinci sorunun (a) şıkkı için yaptıkları hatalı açıklamalrdan biri Şekil 5.30'da verilmiştir.



Şekil 5.30 Ö2'nin 12. sorunun (a) şıkkına verdiği yanıt

Öğrencilerin (c) şıkkına verdikleri yanıtlar incelendiğinde ise öğrencilerin büyük bir çoğunluğu yanlış olan $\lim_{x\to 0} f(x) = \infty$ ifadesini doğru buldukları görülmüştür. Öğrencilerin bu hatayı yapmalarının nedenleri grafiği yanlış çizmeleri (Şekil 5.31) ya da ezbere bu ifadenin doğruluğunu kabul etmeleridir. Şekil 5.31'de (a), (b) ve (c) şıklarına verilen hatalı cevaplardanbiri verilmektedir



Şekil 5.31 Ö66'nın 12. sorunun (a), (b) ve (c) şıklarına verdiği yanıt

Bu sonuçlar Çolak (2002)'nin ve Jordaan (2005)'in sonuçlarıyla örtüşmektedir [51, 53].

5.2.9 Çelişkili İfadeler

Öğrencilerin altıncı soruda birbiriyle bağlantılı kavramları çelişkili şekilde ifade ettikleri görülmüştür. Öğrencilerin %13'ü f(1)=2 ifadesinin doğru olduğunu belirtmelerine rağmen f fonksiyonu x=1 noktasında tanımlı olduğunu ifade etmemişlerdir. Öğrencilerin % 13'ü f fonksiyonunun x=1 noktasında sürekli olduğunu belirtirken, f(1)=2 olduğunu belirtmemişlerdir. Öğrencilerin %12'si f fonksiyonu x=1 noktasında süreklidir derken, f fonksiyonunun x=1 noktasında tanımlıdır ifadesini işaretlemedikleri görülmüştür. Öğrencilerin %21'i ise f fonksiyonu x=1 noktasında süreklidir derken, limitin $\varepsilon - \delta$ tanımını işaretlemedikleri görülmüştür. Buradan öğrencilerin fonksiyonun bir noktada tanımlı olması, fonksiyonun bir noktada sürekli olması ve limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı kavramlarıyla ilgili bazı kavram yanılgılarına sahip olabilecekleri sonucuna ulaşılır. Ulaşılan sonuçlar Bezuidenhout (2001)'in çalışmasının sonuçlarıyla örtüşmektedir [52].

5.3 Üçüncü Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar

Matematik öğretmenliği 1. ve 5. sınıf öğrencileri arasında limit konusundaki hata ve kavram yanılgıları açısından benzerlik ve farklılıkların olup olmadığının araştırıldığı üçüncü alt problemde, bu iki grubun hata ve kavram yanılgıları açısından birbirlerinden farklı olmadıkları sonucuna ulaşılmıştır. Öğrencilerin limit diagnostik testteki başarıları t-testi ile karşılaştırıldığında başarı açısından iki grup arasında anlamlı bir fark bulunamamıştır ($p > .05$). Ancak kavram yanılgısına sahip öğrenci yüzdeleri karşılaştırıldığında genelde matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin daha az kavram yanılgısına sahip olduğu görülmüştür.

Hem matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencilerinin hem de matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin limitin $\varepsilon - \delta$ tanımı tam olarak anlamadıkları (soru1), $\varepsilon - \delta$ tanımını kullanarak yaptıkları uygulamada (soru3) başarısız oldukları belirlenmiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri ve matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencileri, "limit sınırdır", "limit fonksiyonun alabileceği maksimum değerdir", "limit fonksiyonun yaklaştığı ancak asla ulaşamadığı değerdir" şeklinde limitin informal tanımını yapmışlardır (soru2). Her iki grupta da az sayıda öğrenci limitin tam doğru bir şekilde tanımı vermiştir. Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin yaptıkları limitin formal tanımları incelenecek olursa, her iki grup da APOS Teorisine göre eylem düzeyinde kalmıştır. Yani ezbere olarak limit tanımı vermişlerdir.

Matematik öğretmenliği 1. sınıf ve 5. sınıf öğrencilerinin sağ ve sol limit kavramlarıyla ilgili açıklamalarında da benzer kavram yanılgılarına rastlanmıştır. Her iki öğrenci grubu da sezgisel olarak sağ ve soldan yaklaşmanın ne demek olduğunu doğru bir şekilde belirtirken, yaptıkları ortak hatalar incelendiğinde "sayının kendisinden çok küçük değer önceki sayının limiti sol limit, sayının kendisinden çok küçük değer büyük değerindeki limiti sağ limit" olarak belirttikleri belirlenmiştir.

Matematik öğretmenliği 1. ve 5. sınıf öğrencilerinin limitin dinamik tanımı için "Bir f fonksiyonu için $x \to s$ iken fonksiyonun limitinin L olması" ifadesine yönelik açıklamalarında iki grubun da benzer şekilde "f fonksiyonunun $x = s$ noktasında fonksiyonun değerinin L olduğu" sonucuna ulaştıkları belirlenmiştir. Benzer şekilde 6. ve 15. sorularda da her iki grubun fonksiyonun limiti olması durumundan o noktada tanımlı olduğu sonucunu çıkardıkları görülmüştür.

Hem matematik öğretmenliği 1. sınıf hem de matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin "Bir fonksiyonun bir noktada limiti varsa fonksiyon o noktada tanımlıdır", "Fonksiyon bir noktada tanımlı değilse o noktada fonksiyonun limiti yoktur", "Fonksiyonun bir noktada limiti varsa fonksiyonun o noktada süreklidir", "$f(x) = \frac{1}{x}$ iken $f(\infty) = 0$ 'dır", "$f(x) = \frac{1}{x}$ iken $\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$ 'dur" şeklinde ortak kavram yanılgılarına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

Sonuç olarak matematik öğretmenliği 1. sınıf öğrencileri ve matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin limit diagnostik teste verdikleri cevaplar incelendiğinde, gerek istatistiksel anlamda gerekse betimsel olarak yapılan karşılaştırmada, benzer kavram yanılgılarına sahip oldukları sonucuna ulaşılmıştır.

5.4 Dördüncü Alt Probleme Ait Tartışma ve Sonuçlar

Matematik, fen bilgisi, bilgisayar öğretmen adaylarının limit konusuyla ilgili işlemsel hatalarının olup olmadığının araştırıldığı dördüncü problemde, öğrencilerin işlemsel olarak, limit diagnostik teste göre daha başarılı oldukları bulunmuştur. Öğrencilerin "∞" kavramıyla ilgili işlemlerde sorunlar yaşadıkları, belirsizliğin olmadığı durumlarda da L-Hospital kuralını uygulamalarına ve trigonometrik fonksiyonların değerlerini bulmada hatalar yaptıkları belirlenmiştir.

Öğrencilerin çoktan seçmeli sorulardan oluşan limit işlemsel testte, açık uçlu sorulardan oluşan limit diagnostik testte göre daha başarılı olmalarının nedeni, öğrencilerin lise öğrenimleri boyunca, sınava yönelik genelde işlemsel sorularla daha çok uğraşmaları neden olmuş olabilir. ÖSS sistemi gereği öğrenciler, öğrendikleri konularla ilgili test soruları çözmekte fakat yaptıkları işlemlerin nedeni üzerinde pek fazla durmamaktadırlar.

6. ÖNERİLER

Çalışma sonucunda üniversite öğrencilerinin limitle ilgili temel kavramlarda kavram yanılgılarına sahip olduklarını belirlemek; ülkemizde limit konusunun lise düzeyinde öğretilmeye başlandığı göz önünde bulundurulduğunda oldukça düşündürücüdür. Özellikle matematik öğretmenliği 5. sınıf öğrencilerinin bu konularda kavram yanılgılarına sahip olmaları, bir sene sonra öğretmenlik mesleğine atıldıklarında kendi kavram yanılgılarına rağmen öğrencilerine limit konusunu nasıl anlatacakları uzun uzadıya tartışılması gereken bir konudur. Matematiğin sıkı aşamalılık içerisinde olan bir ders olduğu da düşünülürse öğretmen adaylarının limit konusunu temel alan analizin (calculus) türev, diferansiyel ve integral gibi konularda da kavram yanılgılarına sahip olabilecekleri düşünülebilir. Lise düzeyindeki öğrencilerin limit konusunda kavram yanılgılarına sahip oldukları bilinen bir durumdur [51, 56]. Bunun önüne geçmenin en etkili ve geniş kapsamlı yolu matematik öğretmen adaylarının limit konusundaki kavram yanılgılarının önüne geçmek, onları limit konusunda kavram yanılgılarının olabileceğini göz önünde bulundurarak eğitim vermek ve bunları ortaya çıkararak bu yanılgıların ortadan kaldırılmasını sağlamaktır.

Kavram yanılgılarını ortadan kaldırmak için aşağıdakiler yapılabilir:

- Öğretmen konuyu aktarırken matematik dersinin sıkı bir aşamalılık ilişkisine sahip olduğunu göz önünde bulundurmalı ve derslerini sürekli aşamalılığı gözden kaçırmayacak şekilde kontrollü bir biçimde yürütmelidir. Öğretim yılı başında öğrencilerin ön koşul bilgilerindeki eksiklikleri tespit etmek için izleme testleri uygulanmalıdır. Öğrenim süreci boyunca gerekirse öğrencilerden sözlü ya da yazılı olarak sürekli dönüt alması iyi olur.

- Kendal'ın (2001) da belirttiği gibi öğrencilere konu ile ilgili çalışma yaprakları ve materyaller sunulmalıdır [67]. Çalışma sonunda, tartışmayı gerektiren ve kavramsal değişimi destekleyen, aktif olmayı sağlayan öğretim yaklaşımları önerilebilir.

- Öğrencilere uygulanan sınavlarda sadece işlem becerisini ölçen değil, aynı zamanda düşündürüp yorum ve açıklama gerektirecek türde sorular sorularak, konuyla ilgili ne tür kavramsallaştırmalara sahip oldukları öğrenilebilir.

- Ders kitapları hazırlanırken veya öğrencilere önerilen ya da kullanılan kaynak ve yardımcı kitapların seçiminde kitapların içerdikleri tanımlamalar dikkate alınmalı, öğrencilerde istenmeyen kazanımlara neden olup olmayacakları özenle araştırıldıktan sonra öğretmen ve öğrencilere önerilmelidir.

- Matematiğin her alanındaki konularda konuya yeni bakış açısı kazandıran ve bilimsel bilgiyi kullanabilen ve hayatın içinde kılan anlamlı öğrenme araçlarından yararlanılmalı ve öğrencilerin bilimsel bilgiye ulaşmalarını sağlayacak sorular ile dersler işlenmelidir. Anlamlı öğrenme araçlarından birisi olan kavram haritaları kullanılabilir, böylece öğrenciler kavramları zihinlerinde daha iyi örüntüleyebilirler.

- Öğrencinin sahip olduğu bir kavram yanılgısını ortadan kaldırarak doğru kavramı kavratma, öğrencinin önceden edindiği yanlış fikirleri ve anlayışı bilinçaltından silmeyi ve doğru kavramı öğretmeyi içeren bir süreci gerektirir. Öğretmen oluşabilecek kavram yanılgılarından önceden haberdar olup buna göre dersi işlemelidir. Özellikle öğrencinin zihninde ezber bilgilerin ve kalıp soru ve cevapların oluşmaması için dersi etkinliklerle, mümkün olduğunca öğrencinin zihninde soru işaretleri oluşturarak, konunun öğrencide ihtiyaç haline getirilmesini sağlayarak, daha kalıcı bir öğrenme ortamı sunmaya çalışmalıdır.

Limit konusundaki kavram yanılgılarıyla ilgili çok az çalışma bulunması ve örneklemin sınırlılığı nedeniyle bu çalışmanın başka çalışmalarla desteklenmesi gereklidir. Öğrencilerin büyük ölçüde nerede hata yaptıkları ve kavram yanılgısına sahip olabilecekleri biraz daha somut bir hale getirilmelidir.

Limit konusundaki hata ve kavram yanılgılarının belirlenmesi öğrencilerin bu konuyu temele alan analizin (calculus) diğer konularında (türev, diferansiyel ve integral) daha başarılı olmalarını sağlayabilir.

7. EKLER

7.1 EK A Limit Ön Test

ADI-SOYADI
SINIF:
1) a) Fonksiyon nedir? Tanımlayınız.
b) Bağımlı değişken ve bağımsız değişken nedir? Açıklayınız.
c) Bildiğiniz fonksiyon çeşitlerini yazınız.
d) Parçalı fonksiyon nedir? Tanımlayınız ve bir örnek veriniz.
e) Artan ve azalan fonksiyon nedir? Tanımlayınız.

2) a) f(x) = x^2 + 3x + 5 fonksiyonu için f($\sqrt{3}$) nedir?
b) h(x) = $\frac{|x|}{x}$ fonksiyonu için h(-99) nedir?
c) G(t) = $\sqrt{4-3t}$ fonksiyonu için G(4) nedir?
d) f(x) = x^2 fonksiyonu için $\frac{f(1+a)-f(1)}{a}$ ($a \neq 0$) nedir?

3) a) y = $\sqrt{4-x}$ **b)** y = $\sqrt{1-x^2}$ **c)** y = $\sqrt{\frac{x+1}{2-x}}$ **d)** y = sgn($\frac{x-5}{x^2-9}$)
fonksiyonlarının tanım kümeleri nedir?

4) a) y = 3x – 5 **b)** y = x^2 + 1 **c)** y = sin2x **d)** y = cotx fonksiyonlarının grafiklerini çiziniz.

5) a) sin (90 – x) = ? **b)** cos (225) = ? **c)** tan (360 – x) = ? **d)** cot (480) = ?

6)

x	0	20	---	60	80	100
y	32	68	104	140	---	212

yukarıdaki grafikte x değerlerine karşılık y değerlerini alan x'e bağlı olan fonksiyonu yazınız. Boşluklara gelecek sayılarını ve x = - 40 için fonksiyonun değerini bulunuz.

7) "Herhangi bir a noktasının 3 komşuluğu" ifadesi ile anlatılmak istenen nedir?

7.2 EK B Limit Diagnostik Test

Bölüm Adı:
Sınıf:

Testin amacı sizin limit kavramını nasıl anladığınızı belirlemektir. Bu çalışmadan elde edilecek sonuçlar araştırma amaçlı kullanılacaktır. Cevap kağıtlarına isim yazmanıza gerek yoktur. Katılımınız için çok teşekkür ederiz.

1) "Eğer verilen $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ reel sayısı bulunabilirse ki $0 < |x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - l| < \varepsilon$ oluyorsa, f fonksiyonunun x_0'daki limiti l'dir" ifadesiyle anlatılmak istenen nedir?

2) Limit nedir? Kendi cümlelerinizle açıklayınız.

3) $\lim_{x\to 1} x + 1 = 2$ olduğunu $\varepsilon - \delta$ tanımını kullanarak gösteriniz.

4) Sağdan ve soldan limit kavramlarından ne anlıyorsunuz? Açıklayınız.

5) Bir f fonksiyonu için x $\to$ s iken bu fonksiyonun limitinin L olmasının ne demek olduğunu kendi cümlelerinizle açıklayınız.

6) f bir fonksiyon olmak üzere $\lim_{x\to 1} f(x) = 2$ ise aşağıdaki ifadelerden hangileri doğrudur? Doğru olduğunu düşündüğünüz ifade/ifadelerin üstünü işaretleyiniz ve sebeplerini açıklayınız.

a) f(1) = 2
b) f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir.
c) f(x), x = 1'de tanımlıdır.
d) $\lim_{h\to 1}\{f(1+h) - 2\} = 0$
e) Yukarıdaki ifadelerin hiçbiri doğru değildir.

f) $\forall\varepsilon > 0$ sayısına karşılık öyle bir $\delta > 0$ reel sayısı bulunabilir öyle ki $0 < |x - 1| < \delta$ iken $|f(x) - 2| < \varepsilon$ olur.

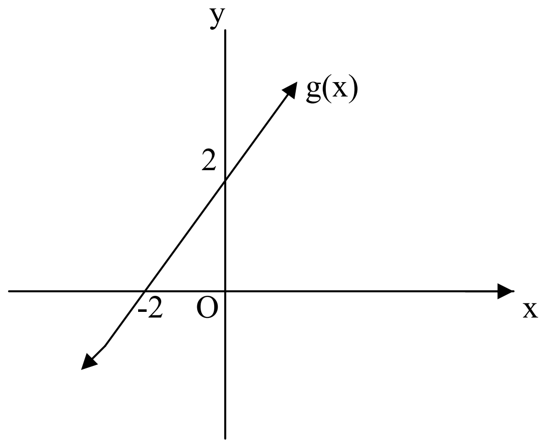
7) f(1)'in tanımlı olduğu fakat $\lim_{x\to 1} f(x)$'in tanımlı olmadığı bir fonksiyon yazıp grafiğini çiziniz.

8) $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$ olup f(2)$\neq$4 olan bir fonksiyonun grafiğini çiziniz.

9) $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ve $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Bu iki limitin benzerlik ve farklarını yazınız, örnek verip açıklayınız.

10) Aşağıda g fonksiyonunun grafiği verilmiştir. Buna göre aşağıdaki limit değerlerini bulunuz.



a) $\lim\limits_{x \to 2^-} g(x) = \ldots\ldots$ **b)** $\lim\limits_{x \to 2^+} g(x) = \ldots\ldots.$

c) $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \ldots\ldots$ **d)** g(2) = …….

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \ldots\ldots$ **f)** $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = \ldots\ldots.$

11) f(x) = $\dfrac{x^2 - 1}{2x - 2}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

a) f fonksiyonunun x = 1 noktasındaki değeri kaçtır?

b) Doğru olduğunu düşündüğünüz ifadenin altına nedenini açıklayınız.

b1) f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir. Çünkü……………………………………………………………………………..

b2) f fonksiyonu x = 1 noktasında süreklidir süreksizdir. Çünkü…………………………………………………………………………

b3) f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti vardır.
Çünkü………………………………………………………………………………

b4) f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasında limiti yoktur. Çünkü………………………………………………………………………………

c) Eğer “f(x) fonksiyonunun x = 1 noktasındaki limiti vardır” ifadesine doğru dediyseniz bu limit nedir?

12) $f(x) = \dfrac{1}{x}$ fonksiyonunun grafiğini çiziniz.

a) $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$ ’dır. Neden?

b) $f(\infty) = 0$ diyebilir miyiz? Neden?

c) $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \infty$ mudur? Neden?

13) a) $\lim\limits_{x \to 3} g(x) = 5$ ifadesi için g(x) fonksiyonunun x = 3 noktasında limiti olması için bu noktadaki tanımlı olmalı mıdır? Neden?

b) g(3) = 5 diyebilir miyiz?

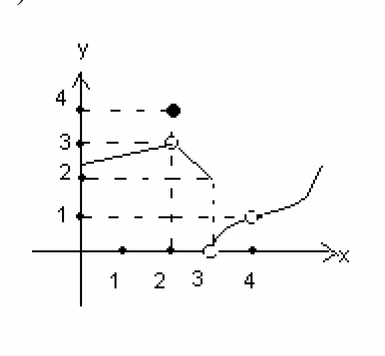
14) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1, x \le 1 \\ 4x - 1, x > 1 \end{cases}$ fonksiyonu verilsin.

a) $f(1) = ?$ **b)** $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = ?$ **c)** $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = ?$ **d)** $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = ?$

7.3 EK C Limit Son Test

AD/SOYAD: **NO:** **SINIF:**

1)



f, grafiği yukarıda verilen bir fonksiyondur. Bu fonksiyonun x'in 2, 3, 4 değerlerinden bazıları için var olan limitleri toplamı kaçtır?

A)4 B)5 C)6 D)7 E)8

2) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8x+8}{x^4-4x}$ aşağıdakilerden hangisine eşittir?

A) -1 B) $-\dfrac{1}{7}$ C) 0 D) $\dfrac{1}{7}$ E) 1

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\cos a}{\cos x-\sin a}$ ifadesinin (limitinin) değeri nedir?

A) -1 B) –cota C) –tana D) tana E) 1

4) $\lim\limits_{x\to -\infty}(7^{\frac{1}{x}}+5^x+1)$ limiti kaçtır?

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

5) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}}\dfrac{\sin^2 x-\frac{1}{2}}{\sin 4x}$ değeri kaçtır?

A) $-\dfrac{1}{4}$ B) $-\dfrac{1}{8}$ C) $-\dfrac{1}{16}$ D) $\dfrac{1}{2}$ E) $\dfrac{1}{8}$

6) $\lim\limits_{y\to x}\dfrac{y^3-x^3}{y^2-x^2}$ değeri nedir?

A) 0 B) $\dfrac{3}{2}x$ C) 2x D) $\dfrac{2}{3}x$ E) ∞

7) $\lim\limits_{c\to x}\dfrac{16x^2-16c^2}{4\sin(x-c)}$ değeri aşağıdakilerden hangisidir?

A) 4 B) 16 C) 8x D) 16x E) 32x

8) $f(x)=\begin{cases} mx+n, & 1<x \text{ ise} \\ 5, & x=1 \text{ ise} \\ x^2+m, & x<1 \text{ ise}\end{cases}$

fonksiyonu R'de sürekli olduğuna göre, n kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 1 D) 6 E) 7

9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 2x}{\sin x+\cos x}$ ifadesinin değeri kaçtır?

A) -2 B) -1 C) 0 D) 1 E) 2

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{e^{-x}-1}$ değeri nedir?

A) –e B) -1 C) 0 D) e E) $\dfrac{1}{e}$

8. KAYNAKÇA

[1] <www.yok.gov.tr/egitim/raporlar/giris_sinavi/3.1.htm>, (2005).

[2] Durmuş, S., “Matematikte öğrenme güçlüklerinin saptanması üzerine bir çalışma”, *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 12(1), (2004) 125-128.

[3] Baki, A., “Cebirle ilgili işlem yanılgılarının değerlendirilmesi”, 3. Ulusal Fen Bilimleri Eğitimi Sempozyumu, (1998).

[4] Altun, M., İlköğretim İkinci Kademede (6, 7 ve 8. Sınıflarda) Matematik Öğretimi, Alfa Yayınları, Bursa, (2002), 9.

[5] Akkuş, O., “Principles and Standarts for School Mathematics” NCTM, <mategt.web.ibu.edu.tr/makaleler/OKUL_MATEMATiGi.htm>, (2000).

[6] Benk, A., Büyük Larousse, 13, Interpress Basın ve Yayıncılık, İstanbul, (1986), 6532.

[7] Senemoğlu, N., Gelişim, Öğrenme ve Öğretim; Kuramdan Uygulamaya, Gazi Kitabevi, Ankara, (2004).

[8] Driver, R. and Easley, Y. “Pupils and paradigms: A review of literarure related to concept development in adolescent science students”, *Studies in Science Education*, 5, (1978) 61-84.

[9] Mayer, R. E., Educational psychology: A cognitive approach, Brown and Company, Toronto: Little, (1987).

[10] Baki, A. ve Şahin, M. S., “Bilgisayar destekli kavram haritası yöntemiyle öğretmen adaylarının matematiksel öğrenmelerinin değerlendirilmesi”, *The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 3(2), 14, (2004).

[11] Ubuz, B., First year engineering students’ learning of point of tangency, numerical calculation of gradients, and the approximate value of a function at a point through computers, *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 20 (1), Chesapeake, VA: AACE, (2001) 113-137.

[12] Eryılmaz, A. ve Sürmeli, E.,“Üç-aşamalı sorularla öğrencilerin ısı ve sıcaklık konularındaki kavram yanılgılarının ölçülmesi”, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ankara, (2002).

[13] Güneş, B., Konu Alanı Ders Kitabı İnceleme Klavuzu: IV. Bölüm, Bilimsel Hatalar ve Kavram Yanılgıları, Gazi Kitabevi, Ankara, (2005).

[14] Skelly, K. M., Hall, D., "The development and validation of a categorization of sources of misconceptions in chemistry", paper presented at the Third International Seminar on Misconceptions and Educational Strategies in Science and Matematics (Ithaca, August), (1993) 1496-1535.

[15] Nakiboğlu, C., Fen ve Teknoloji Öğretimi: 8. Bölüm, Fen ve Teknoloji Öğretiminde Yanlış Kavramalar, Pegema Yayıncılık, Ankara, (2006).

[16] Alkan M. & Azizoğlu N., "Kimya öğretmenliği lisans öğrencilerinin faz dengeleri konusundaki kavram yanılgıları", V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ankara, (2002).

[17] Osborne, R. ve Freyberg, P., Learning in science: The implication of children's science, Auckland: Heinemann (1985).

[18] Jose, M., "Hispanic Anglo Students' misconceptions in mathematics", <http://ericae.net/ED313192.HTM>, (1989).

[19] Gür, H. ve Seyhan S., "İlköğretim 7. ve 8. sınıf öğrencilerinin ondalık konusundaki hataları ve kavram yanılgıları", <http://matder.org.tr>, (2004).

[20] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks J. and Nichols D. "Development of the process conception of function", *Educational Studies in Mathematics*, 23, 247-285, (1992).

[21] http://www.cs.gsu.edu/~rumec/Papers/glossary.html, (2001)

[22] Hiebert, J. & Carpenter, T., Learning and Teaching with Understanding. In Grouws, D. (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* New York: Macmillan, (1992) 65-97.

[23] Hiebert, J., & Lefevre, P., Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis, ed. Hiebert, J., "Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics", Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum, (1986), 1-27.

[24] Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E. And Schwingerndorf, K. E., "The development of student's graphical understanding of the derivative", *Journal of Mathematical Behaviour*, 16(4), (1997) 399-431.

[25] Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. and Vidakovic, D., "Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process schema", *Journal of Mathematical Behavior*, 15, (1996) 167-192.

[26] Tall, D. & Vinner, S., "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity", *Educational Studies in Mathematics*, 12, (1981) 151-169.

[27] Tall, D., "Mathematical intuition, with special reference to limiting processes", Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education, Berkeley, (1980) 170-181.

[28] Gray, E. and Tall, D. O., " Duality, Ambiguity and Flexibility in Successful Mathematical Thinking", *Proceedings of PME XIII, Assisi*, Vol. II, (1991) 72-79.

[29] Hacısalihoğlu, H. H., Hacıyev, A., Sabuncuoğlu, A., Brown, L. M., İbikli, E. ve Brown, S., Türk Dil Kurumu Matematik Terimleri Sözlüğü, Bizim Büro Basımevi Yayın Dağıtım, Ankara, (2000).

[30] Ubuz, B., "Genel matematikte (Calculus) öğrenci hataları", *Matematik Dünyası*, 8, (1999) 9-11.

[31] Tall, D., Gray, E. Maselan Bin Ali, Crowley, L., Marois, P., McGowen, M., Pitta, D., Pinto, M., Thomas, M. and Yusof, Y., "Symbols and the bifurcation between procedural and conceptual thinking", http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2001a-symbol-bifurcation.pdf, (1998).

[32] Balcı, M., Genel Matematik, Balcı Yayınları, Ankara (2003).

[33] < http://matematik.balikesir.edu.tr/lisans.htm>, (2007).

[34] Tall, D., "Students'difficulties in Calculus, ICME, plenary presentation in working group 3, Quebec, (1992).

[35] Romberg, T. A., and Tufte, F. W., "Mathematics curriculum engineering: Some suggestions from cognitive science, *The Monitoring of School Mathematics: Background Papers*, 2, (1987).

[36] Kabaca, T., Limit kavramının öğretiminde bilgisayar cebiri sistemlerinin etkisi, Doktora Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik ABD, (2006).

[37] Confrey, J., "Conceptual change, number concepts and the introduction to Calculus", Unpublished doctoral dissertation, (1980).

[38] White, P. and Mitchelmore, M., "Conceptual knowledge in introductory Calculus", *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (1), (1996) 79-95.

[39] Demirtaş, A., Ansiklopedik Matematik Sözlüğü, Bilim Teknik Kültür Yayınları, Ankara, (1986), 187.

[40] Cornu, B., “Limits”, ed. Tall, D., *Advanced mathematical Thinking*, Boston: Kluwer, (1991) 153-166.

[41] Karadeniz, A. A., Yüksek Matematik, Cilt 1, Çağlayan Kitabevi, İstanbul, (2003) 21-22.

[42] Williams, S., “Understanding of the limit concept in college calculus students” Doctoral Dissertation, The University of Wisconsin, Madison, WI, Dissertation Abstracts International, 3174, (1989) 50-10.

[43] Williams, S., “Models of limit held by college calculus students”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, (1991) 219-236.

[44] Orton, A., “Students’ understanding of differentiation”, *Educational Studies in Mathematics,* 14, (1983) 235-250.

[45] Davis, R. and Vinner, S., “The notion of limit: Some seemingly unavoidable misconception stages”, *Journal of Mathematical Behavior*, 5, (1986) 281-303.

[46] Tall, D. O., and Schwarzenberger, R. L., “Conflicts in the learning of real numbers and limits, *Mathematics Teaching*, 83, **(**1978) 44-49.

[47] Graham, K. G., and Ferrini-Mundy J., “An exploration of student understanding of central concepts in Calculus”, paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Francisco, CA., (1989).

[48] Ferrini-Mundy, J. and Graham, K. G., “An overview of the calculus curriculum reform effort: Issues for learning, teaching, and curriculum development”, *American Mathematical Monthly*, 98 (7), (1991) 627-635.

[49] Heid, M., “Resequencing skills and concepts in applied calculus using the computer as a tool”, *Journal for Research in Mathematics Education*, 19 (1), (1988) 3-25.

[50] Oehrtman, M. C., Collapsing dimensions, physical limitation, and other student metaphors for limit concepts: An instrumentalist investigation into Calculus students’ spontaneous reasoning, Doctoral Dissertation, The University of Texas, The Faculty of the Graduate School, Austin (2002).

[51] Çolak, H., Limit öğretiminde iki farklı eğitim durumunun karşılaştırılması, Yüksek Lisans Tezi, Gazi Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik ABD/Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı, Ankara, (2002).

[52] Bezuidenhout, J., “Limits and continuity: Some conceptions of first-year students”, *Mathematical Education in Science and Technology*, 32(4), (2001) 487-500.

[53] Jordaan, T., Misconceptions of the limit concept in a mathematics course for engineering students, M. Sc. Thesis, Mathematics Education, University of South of Africa, White River, (2005).

[54] Doğan, A., Sulak, H. ve Cihangir, A., “İlköğretim matematik eğitimi anabilim dalı öğrencilerinin özel fonsiyonlar ile fonksiyonlarda limit, türev ve türev uygulamaları konularındaki yeterlikleri üzerine bir araştırma”, V. Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi, Ankara, (2002).

[55] Akbulut, K. ve Işık, A., “Limit kavramının anlaşılmasında etkileşimli öğretim stratejisinin etkinliğinin incelenmesi ve bu süreçte karşılaşılan kavram yanılgıları”, *Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi*, 13(2), (2005) 497-512 .

[56] Bukova, E., Ögrencilerin limit kavramını algılamasında ve diğer kavramların ilişkilendirilmesinde karşılaştıkları güçlükleri ortadan kaldıracak yeni bir program geliştirme, Yüksek Lisans Tezi, Dokuz Eylül Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Ortaöğretim Fen ve Matematik ABD/Matematik Öğretmenliği Bilim Dalı, İzmir, (2006).

[57] Demircioğlu H., Demircioğlu, G. Ve Ayas, A., “Kavram yanılgılarının çalışma yapraklarıyla giderilmesine yönelik bir çalışma”, Milli Eğitim Dergisi, 163, (2004).

[58] Yıldırım, A., Şimşek, H., Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri, Seçkin Yayıncılık, Ankara, (2005), 110 ve 291.

[59] Ekiz, D. Eğitimde Araştırma Yöntem ve Metotlarına Giriş, Anı Yayıncılık, Ankara, (2003), 27.

[60] Thomas G. B. and Finney R. L., Calculus and Analytic Geometry, Addison-Wesley Publishing Company, New York, (1988).

[61] Cooley, L., “Writing in Calculus and reflective abstraction”, *Journal of Mathematical Behaviour*, 21(3), (2002) 255-282.

[62] Karahasan, B. The effect of journal writing of first year university students’ performance on function and limit-continuity, M. Sc. Thesis, The Department of Secondary Science and Mathematics Education, Ankara, (2002).

[63] Abraham, M. R., Williamson, V. M. ve Westbrook, S. L., “A crossage study of the understanding of five understanding of concepts”, *Journal of Research in Science Teaching*, 31, (1994) 147-165.

[64] Nakiboğlu, C., “Instructional misconceptions of Turkish Perspective Chemistry Teachers about atomic orbitals and hybridization”, Chemistry Education: Research and Practice, 4, (2003) 171-188.

[65] Ayas, A. ve Çalık, M., “A comparison of level of understanding eight-grade students and science student teachers related to selected chemistry concepts”, *Journal of Research in Science Teaching*, 42, (2005) 638-667.

[66] Poyraz, H. E., Üniversite kimya öğrencilerinin melezleşme konusundaki kavram yanılgılarının belirlenmesi, Yüksek Lisans Tezi, Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Kimya Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir, (2006).

[67] Kendal, M., Teaching and learning introductory differential calculus with a computer algebra system, PhD. Thesis, Deparment of Science and Mathematics Education, The University of Melbourne, Melbourne, (2001).