T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİNİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİRAY AKKAYA

BALIKESİR, MAYIS-2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİNİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MİRAY AKKAYA

BALIKESİR, MAYIS-2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Miray AKKAYA tarafından hazırlanan " **GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİNİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ** " adlı tez çalışmasının savunma sınavı 15.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Ali GÜVEN	....
Üye Doç. Dr. Ramazan AKGÜN	....
Üye Doç. Dr. Özer TALO	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER UZAYLARINDA FOURIER SERİLERİNİN BAZI YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MİRAY AKKAYA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, MAYIS – 2015

Bu çalışma, trigonometrik Fourier serilerinin kısmi toplamlar dizisi, Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının Lorentz uzaylarındaki bazı yaklaşım özelliklerinden oluşmaktadır.

Bu çalışma birinci bölüm giriş olmak üzere 6 ana bölümden oluşmaktadır.

İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan fonksiyon uzaylarının tanımları ve temel özellikleri verilmiştir.

Üçüncü bölümde, trigonometrik yaklaşımın temel taşı olan Fourier serilerinin tanımı ve temel özellikleri verilmiştir. Bu bölümün ikinci kısmı ise Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının tanımı ile ana teoremlerde kullanılacak bazı tanımlardan oluşmaktadır.

Dördüncü bölümde, Fourier serilerinin kısmi toplamlarının Lebesgue ve Lorentz uzayları üzerinde tanımlı Genelleştirilmiş Hölder uzaylarındaki yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Beşinci bölümde ise, Fourier serilerinin Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının Genelleştirilmiş Hölder uzaylarındaki yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Son bölüm bu tezde elde edilen tüm sonuçların özetini içerir.

ANAHTAR KELİMELER: Lorentz uzayı, Genelleştirilmiş Hölder uzayı, Fourier serisi, Cesàro ortalaması, Nörlund ortalaması , Riesz ortalaması.

ABSTRACT

APPROXIMATION PROPERTIES OF FOURIER SERIES IN GENERALIZED HÖLDER SPACES
MSC THESIS
MİRAY AKKAYA
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ALİ GÜVEN)

BALIKESİR, MAY 2015

This study consists of some approximation properties of partial sums and Cesàro, Nörlund and Riesz means of trigonometric Fourier series in Lorentz spaces.

This study consists of six main chapters including the introduction part of as the first chapter.

In the second chapter, definition and main properties of function spaces used in this study are given.

In the third chapter, the definition of Fourier series, which is the crucial point of trigonometric approximation is given. The second part of this chapter consists of the definitions of Cesàro, Nörlund and Riesz means with some definitions that are going to be used in the main theorems.

In the fourth chapter, approximation properties of partial sums of trigonometric Fourier series in generalized Hölder space on Lebesgue spaces and Lorentz spaces are given.

In the fifth chapter, some approximation properties of Cesàro, Nörlund and Riesz means of trigonometric Fourier series in generalized Hölder space on Lorentz space are studied.

Last chapter includes the summary of all results obtained in this thesis.

KEYWORDS: Lorentz space , Generalized Hölder space , Fourier series , Cesàro mean , Norlund mean , Riesz mean.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\mathbb{T}$	: Birim çember $([0,2\pi])$
$L_p(\mathbb{T})$	: Lebesgue Uzayı
$L_{(p,q)}(\mathbb{T})$	: Lorentz Uzayı
$H_p^{\alpha}(\mathbb{T})$	: $L_p(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlı Hölder Uzayı
$H_p^{\omega}(\mathbb{T})$	: $L_p(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlı Genelleştirilmiş Hölder Uzayı
$H_{(p,q)}^{\alpha}(\mathbb{T})$	: $L_{(p,q)}(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlı Hölder Uzayı
$H_{(p,q)}^{\omega}(\mathbb{T})$	: $L_{(p,q)}(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlı Genelleştirilmiş Hölder Uzayı
σ_n	: Cesàro ortalaması
R_n	: Riesz ortalaması
N_n	: Nörlund ortalaması

ÖNSÖZ

Yüksek lisans çalışmam süresince bana değerli zamanını ayıran, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve desteğini benden esirgemeyen değerli danışman hocam Prof. Dr. Ali GÜVEN 'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca yüksek lisans çalışmam süresince bana destek olan sevgili arkadaşlarım Elife YIRTICI ve Yağmur KAYA ' ya teşekkür ediyorum.

Son olarak her zaman yanımda olan ve desteklerini hissettiren sevgili anneme, babama ve ablama çok teşekkür ediyorum.

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinde bir takım özelliklere sahip fonksiyonlara daha iyi özelliklere sahip basit fonksiyonlarla yaklaşım problemleri araştırılmaktadır. Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri de yaklaşım hızının değerlendirilmesidir.

Trigonometrik Fourier serilerinin kısmi toplamlar dizisinin Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamaları ile yaklaşım özellikleri bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Hölder normunda Fourier serilerinin yaklaşım özellikleri ilk olarak 1975 yılında Prössdorf tarafından çalışılmıştır [1]. Daha sonra Leindler 1979 yılında Prössdorf ' un tanımladığı Hölder sınıflarını genelleştirerek genelleştirilmiş Hölder sınıflarını tanımlamıştır [2].

G. Das, T. Ghosh and B. K. Ray Hölder sınıflarının benzerlerini Lebesgue uzayları için tanımlamış ve bu uzay üzerinde Fourier serilerinin yaklaşım özelliklerini incelemişlerdir [3]. Daha sonra G. Das, A. Nath, B. K. Ray Leindler 'in tanımladığı genelleştirilmiş Hölder sınıflarının benzerlerini Lebesgue uzayı için tanımlamış ve bu sınıflara ait fonksiyonların Fourier serilerinin kısmi toplamlarının yaklaşım hızı ile ilgili bir sonuç elde etmişlerdir [4].

Cesàro ortalamasının Lebesgue uzaylarında yaklaşım özellikleri ilk olarak Quade tarafından çalışılmıştır [5].

Cesàro ortalamalarının genelleştirmeleri olan Nörlund ve Riesz ortalamalarının Lebesgue uzaylarında yaklaşım özellikleri Leindler [6] ve Chandra [7] tarafından çalışılmıştır.

Leindler 2009 yılında [4] çalışmasında elde edilen sonucu ek bir koşul altında iyileştirmiş ve Lebesgue uzayları üzerinde tanımlı genelleştirilmiş Hölder sınıflarına ait fonksiyonların Fourier serilerinin Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının yaklaşım hızlarını değerlendirmiştir.

Bu çalışmada Lebesgue uzaylarının genelleşmesi olan Lorentz uzayları üzerinde tanımlanmış genelleştirilmiş Hölder uzaylarına ait fonksiyonların trigonometrik Fourier serilerinin kısmi toplamları, Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının yaklaşım özellikleri çalışılmış ve [4] ile [6] çalışmalarından elde edilen sonuçların benzerleri Lorentz uzaylarında ispatlanmıştır.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Lebesgue Uzayları

2.1.1 Tanım : $\mathbb{T} = [0, 2\pi]$ ve $1 \le p < \infty$ olmak üzere

$$\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx < \infty$$

koşulunu sağlayan Lebesgue ölçülebilir $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının hemen her yerde eşit olma bağıntısına göre denklik sınıflarının kümesi $L^p(\mathbb{T}) = L^p$ ile gösterilir.

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x) \quad ve \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \; \alpha \in \mathbb{R}$$

işlemleri altında L^p bir vektör uzayıdır ve

$$\| f \|_p := \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

fonksiyonu L^p üzerinde bir normdur ve L^p bu norma göre bir Banach uzayıdır [8].

2.1.2 Tanım: $f \in L^p(\mathbb{T})$, $1 \le p < \infty$ olsun. $\delta > 0$ için

$$\omega(f, \delta)_p := \sup_{0 \le h \le \delta} \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \|_p$$

biçiminde tanımlı $\omega(f, \delta)_p$ fonksiyonuna f fonksiyonunun süreklilik modülü denir [4].

2.1.3 Tanım: $0 < \alpha \le 1$ olsun.

$$H_p^\alpha(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}), \, 0 < p \le \infty : \| f(x+h) - f(x) \|_p \le c.|h|^\alpha \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya L^p üzerinde tanımlı Hölder uzayı denir.

$f \in L^p(\mathbb{T})$ olsun.

$$f \in H_p^\alpha(\mathbb{T}) \Leftrightarrow \omega(f,\delta)_p \leq c.\delta^\alpha, \ \forall\delta > 0$$

$$\Leftrightarrow \sup_{h\neq 0} \frac{\|f(.+h) - f(.)\|_p}{|h|^\alpha} < \infty$$

olduğu açıktır.

$H_p^\alpha(\mathbb{T})$,

$$A(\alpha, f)_p := \sup \frac{\|f(.+h) - f(.)\|_p}{|h|^\alpha}$$

olmak üzere

$$\|f\|_p^\alpha := \|f\|_p + A(\alpha, f)_p \tag{2.1}$$

normu ile bir Banach uzayı olur [3].

2.1.4 Tanım: $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$ sürekli, artan $\omega(0) = 0$,

$\omega(\delta_1 + \delta_2) \leq \omega(\delta_1) + \omega(\delta_2)$ ve $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1).\omega(\delta)$, $\lambda \geq 0$ koşullarını sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu tür fonksiyonlara süreklilik modülü denir [4].

2.1.5 Tanım: $1 \leq p < \infty$ ve ω bir süreklilik modülü olsun.

$$H_p^\omega(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}) : \omega(f,\delta)_p \leq c.\omega(\delta) \right\}$$

şeklinde tanımlanan uzaya L^p üzerinde tanımlı Genelleştirilmiş Hölder uzayı denir.

$H_p^\omega(\mathbb{T})$,

$$A(f,\omega)_p := \sup_{h\neq 0} \frac{\|f(.+h) - f(.)\|_p}{\omega(|h|)}$$

olmak üzere

$$\|f\|_p^{\omega} := \|f\|_p + A(f,\omega)_p \tag{2.2}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

$0<\alpha\le 1$ olmak üzere $\omega(\delta)=\delta^{\alpha}$ durumunda $H_p^{\omega}(\mathbb{T})=H_p^{\alpha}(\mathbb{T})$ ve $\|f\|_p^{\omega}=\|f\|_p^{\alpha}$ yazılır [4].

2.2 Lorentz Uzayları

2.2.1 Tanım: $(\mathfrak{R},\mu)$ bir ölçüm uzayı olsun. $\mathfrak{R}$ üzerindeki μ -ölçülebilir fonksiyonların ailesini $M(\mathfrak{R},\mu)$ ile gösterilsin. $M_0(\mathfrak{R},\mu)$ ise $M(\mathfrak{R},\mu)$ ailesinde ki ölçümü hemen hemen her yerde sonlu olan fonksiyonların sınıfı olsun [8].

2.2.2 Tanım: $f:(\mathfrak{R},\mu)\to\mathbb{R}$ ölçülebilir bir fonksiyon olsun. $\lambda>0$ için tanımlanan

$$\mu_f(\lambda) := \mu\left(\left\{x\in\mathbb{R}: \left|f(x)\right|>\lambda\right\}\right)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun dağılım fonksiyonu denir [8].

2.2.3 Tanım: (Azalan Rearrangement Fonksiyon)

$f\in M_0(\mathfrak{R},\mu)$ olsun.

$$f^*(t) := \inf\left\{\lambda : \mu_f(\lambda)\le t\right\},\ t\in[0,\infty)$$

biçiminde tanımlı $f^*:[0,\infty)\to[0,\infty)$ fonksiyonuna f fonksiyonunun azalan rearrangement fonksiyonu denir.

$f\in M_0(\mathfrak{R},\mu)$ olsun.

$$f^{**}(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f^*(s)\,ds,\ t\in(0,\mu(\mathfrak{R})) \tag{2.3}$$

olarak tanımlanır [8].

2.2.4 Tanım: $(\Re,\mu)$ bir ölçüm uzayı ve $0<p,q\le\infty$ olsun.

$$\|f\|_{p,q}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p}}.f^*(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q\le\infty\\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{\frac{1}{p}}.f^*(t), & q=\infty\end{cases}\tag{2.4}$$

olmak üzere $\|f\|_{p,q}<\infty$ koşulunu sağlayan bütün $f\in M(\Re,\mu)$ fonksiyonlarının kümesini $L^{p,q}(\Re,\mu)$ ile gösterilir. $L^{p,q}(\Re,\mu)$ uzayına Lorentz uzayı adı verilir.

Ayrıca $f\in M(\Re,\mu)$ için

$$\|f\|_{(p,q)}=\begin{cases}\left(\int\limits_0^\infty\left[t^{\frac{1}{p}}.f^{**}(t)\right]^q\frac{dt}{t}\right)^{\frac{1}{q}}, & 0<q\le\infty\\ \sup\limits_{0<t<\infty} t^{\frac{1}{p}}.f^{**}(t), & q=\infty\end{cases}\tag{2.5}$$

olmak üzere $\|f\|_{(p,q)}<\infty$ koşulunu sağlayan bütün $f\in M(\Re,\mu)$ fonksiyonlarının kümesi $L^{(p,q)}(\Re,\mu)$ ile gösterilir ve $L^{(p,q)}(\Re,\mu)$ uzayı da bir Lorentz uzayıdır.

$0<p\le\infty$ alınırsa $L^{(p,p)}(\Re,\mu)=L^p(\Re,\mu)$ olur [8].

2.2.5 Uyarı: $(\Re,\mu)$ ölçüm uzayından alınan her $f\in M(\Re,\mu)$ için

$$f^*\le f^{**}\tag{2.6}$$

ve her $p,q\in(0,\infty]$ seçimi için $L^{(p,q)}\mapsto L^{p,q}$ olur [8].

2.2.6 Teorem: $f,g\in M_0(\Re,\mu)$ olsun.

$$\int\limits_{\Re}|f.g|\,d\mu\le\int\limits_0^\infty f^*(t)\,g^*(t)\,dt\le\|f\|_{p,q}.\|g\|_{p',q'}\tag{2.7}$$

olur [9].

2.2.7 Lemma: $1 < p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$ ise o zaman bütün $f \in M_0(\Re, \mu)$ için

$$\| f \|_{p,q} \leq \| f \|_{(p,q)} \leq p^{'} \| f \|_{p,q} \tag{2.8}$$

olur [9].

2.2.8 Tanım: $0 < p, q \leq \infty$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olsun.

$$H^{\alpha}_{(p,q)}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^{(p,q)}(\mathbb{T}) : \omega(f, \delta)_{(p,q)} \leq c\,\delta^{\alpha},\ \forall \delta > 0 \right\}$$

uzayına $L^{(p,q)}(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlanan Hölder uzayı denir.

$H^{\alpha}_{(p,q)}(\mathbb{T})$,

$$A(\alpha, f)_{(p,q)} := \sup_{x \neq y} \frac{\| f(x) - f(y) \|_{(p,q)}}{|x - y|^{\alpha}}$$

olmak üzere

$$\| f \|^{\alpha}_{(p,q)} := \| f \|_{(p,q)} + A(\alpha, f)_{(p,q)} \tag{2.9}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

2.2.9 Tanım: $f \in L^{(p,q)}(\mathbb{T})$, $0 < p, q \leq \infty$, $\omega : [0, \infty) \to [0, \infty)$ bir süreklilik modülü olsun.

$$H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T}) := \left\{ f \in L^{(p,q)}(\mathbb{T}) : \omega(f, \delta)_{(p,q)} \leq c\,\omega(\delta),\ \forall \delta > 0 \right\}$$

uzayına $L^{(p,q)}(\mathbb{T})$ uzayı üzerinde tanımlanan Genelleştirilmiş Hölder uzayı denir.

$H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T})$,

$$A(\omega, f)_{(p,q)} := \sup_{t\neq 0} \frac{\left\| f(.+t) - f(.) \right\|_{(p,q)}}{\omega(|t|)}$$

olmak üzere

$$\|f\|_{(p,q)}^{\omega} := \|f\|_{(p,q)} + A(\omega, f)_{(p,q)} \tag{2.10}$$

normu ile bir Banach uzayı olur.

3. FOURIER SERİLERİ

3.1 Fourier Serileri

3.1.1 Tanım: a_k , b_k (k=0,1,2,…) sabit sayılar olmak üzere

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

serisine bir trigonometrik seri denir.

3.1.2 Tanım: a_k , b_k (k=0,1,2,…) sabit sayılar ve $|a_k|+|b_k|\neq 0$ olmak üzere

$$t_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right),\ n=0,1,2,...$$

ifadesine n. dereceden bir trigonometrik polinom denir.

3.1.3 Tanım: $n=0,1,2,...$ için derecesi n 'yi aşmayan trigonometrik polinomların kümesi $\prod_n$ ile gösterilir.

3.1.4 Tanım: $\mathbb{T}=[0,2\pi]$ olmak üzere $f\in L^1(\mathbb{T})$ olsun.

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos kt,\ k=0,1,2,...$$

ve

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin kt,\ k=1,2,...$$

olmak üzere (3.1) serisine f fonksiyonunun *Fourier serisi* denir ve

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{3.1}$$

yazılır.

3.1.5 Tanım: $A_0(f)(x) := \frac{a_0}{2}$

$$A_k(f)(x) := a_k \cos kx + b_k \sin kx,\ k = 1,2,...$$

olmak üzere

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(f)(x),\ n = 0,1,2,... \tag{3.2}$$

biçiminde tanımlı $(S_n(f))$ dizisine f fonksiyonun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi denir.

3.1.6 Tanım:

$$E_n^*(f)_{(p,q)} := \inf\left\{ \|f - t_n\|_{(p,q)}, t_n \in \Pi_n \right\}$$

değerine $f \in L_{(p,q)}(\mathbb{T})$ fonksiyonunun Π_n kümesinin elemanları ile en iyi yaklaşımı denir.

Her $f \in L_{(p,q)}(\mathbb{T})$ için

$$E_n^*(f)_{(p,q)} := \|f - t_n^*\|_{(p,q)}$$

olacak şekilde $t_n^* \in \Pi_n$ vardır [11, s. 59].

Trigonometrik seriler ve Fourier serileri ile ilgili daha geniş bilgiye [10] numaralı kaynaktan ulaşılabilir.

3.2 Fourier Serilerinin Cesàro, Nörlund ve Riesz Ortalamaları

3.2.1 Tanım: $S_n(f)(x)$, f fonksiyonunun Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere

$$\sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} S_k(f)(x) = \sum_{k=0}^{n}\left(1 - \frac{k}{n+1}\right)A_k(f)(x),\ n = 1,2,... \tag{3.3}$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin n. dereceden Cesàro (Fejer) ortalaması denir [10].

3.2.2 Tanım: $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun.

$$P_n = \sum_{m=0}^{n} p_m \ , \quad p_{-1} = P_{-1} = 0$$

olmak üzere

$$N_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} S_m(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre *Nörlund* ortalaması,

$$R_n(f)(x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m S_m(f)(x)$$

ifadesine f fonksiyonunun Fourier serisinin $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine göre *Riesz* ortalaması denir.

$$p_n = 1, \ n = 0,1,2,...$$

durumunda

$$N_n(f)(x) = R_n(f)(x) = \sigma_n(f)(x)$$

olur [10].

3.2.3 Tanım: $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ pozitif reel sayıların bir dizisi olsun. $n \geq m$ şeklindeki her $n, m \in \mathbb{N}$ için

$$p_n \leq c\, p_m \quad \left(p_n \geq c\, p_m\right)$$

olacak şekilde sadece $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine bağlı bir c pozitif sabiti varsa $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisine hemen hemen monoton azalan (artan) dizi denir ve $\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMDS$ $\left(\{p_n\}_{n=0}^{\infty} \in AMIS\right)$ şeklinde gösterilir [6].

3.2.4 Tanım: Ana teoremlerde kullanılacak olan Δp_n gösterimi

$$\Delta p_n := p_n - p_{n+1}$$

şeklinde tanımlıdır [6].

4. FOURIER SERİLERİNİN KISMİ TOPLAMLARI İLE YAKLAŞIM

4.1 Fourier Serilerinin Kısmi Toplamlarının Lebesgue Uzaylarında Yaklaşım Özellikleri

4.1.1 Teorem: ω *ve* υ iki süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$ için

$$\left\| f - S_n(f) \right\|_p^{\upsilon} \leq c \left\{ \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)} \log n + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2 \upsilon(t)} dt \right\} \tag{4.1}$$

olur [4].

Bu teorem daha sonra Leindler tarafından aşağıdaki şekilde sadeleştirilmiştir.

4.1.2 Teorem: ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olacak şekilde iki süreklilik modülü olsunlar. Eğer $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde bir $0 < \varepsilon < 1$ sayısı varsa , her $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$ için

$$\left\| f - S_n(f) \right\|_p^{\upsilon} \leq c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \ n \geq 2 \tag{4.2}$$

olur [6].

4.2 Fourier Serilerinin Kısmi Toplamlarının Lorentz Uzaylarında Yaklaşım özellikleri

Bu ve bundan sonra ki bölümlerde aşağıdaki gösterimler kullanılacaktır:

$$\phi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}$$

$$S_n^*(x)=S_n(x)-\frac{1}{2}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

$$\alpha_n(x)=S_n(x)-f(x),\quad \beta_n(x)=S_n^*(x)-f(x)$$

$$\gamma_n(x)=S_n(x)-S_n^*(x),\quad \eta=\eta(n)=\frac{\pi}{n}$$

$$D_n^*(t)=\frac{\sin nt}{2\tan\frac{1}{2t}},\quad D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{1}{2t}}$$

4.2.1 Lemma : υ *ve* ω, $\frac{\omega}{\upsilon}$ azalmayan olacak şekilde iki süreklilik modülü olsunlar. Bu durumda $p,q\geq 1$, $f\in H_{(p,q)}^{\omega}(\mathbb{T})$ ve $0<t\leq\pi$ için aşağıdakiler sağlanır:

(i) $\|\phi.(t)\|_{(p,q)}\leq 2\omega(t)$

$$(ii)\ \|\phi_{.}(t)-\phi_{.+y}(t)\|_{(p,q)}=O(1)\begin{cases}\omega(t)\\ \omega(|y|)\end{cases}$$

$$(iii)\ \|\phi_{.}(t)-\phi_{.+y}(t)\|_{(p,q)}=O(1)\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$$

$$(iv)\ \|\phi_{.}(t)-\phi_{.+y}(t)-\phi_{.+y}(t+\eta)+\phi_{.+y}(y+\eta)\|_{(p,q)}=O(1)\upsilon(|y|)\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}$$

İspat i-) $\phi_x(t)=\frac{1}{2}\{f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\}$

$$=\frac{1}{2}\left(\{f(x+t)-f(x)\}+\{f(x-t)-f(x)\}\right)$$

olduğundan,

$$\|\phi_x(t)\|_{(p,q)}\leq\frac{1}{2}\left(\|f(.+t)-f(.)\|_{(p,q)}+\|f(.-t)-f(.)\|_{(p,q)}\right)$$

$$\leq c\,\omega(t) \tag{4.3}$$

elde edilir.

ii-)

$$\phi_{x+y}(t)-\phi_x(t)=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}\{f(x+y+t)-f(x+y)\}+\{f(x+y-t)-f(x+y)\}\\ -\{f(x+t)-f(x)\}-\{f(x-t)-f(x)\}\end{bmatrix}$$

olduğundan,

$0<t\leq\pi$ için Minkowski eşitsizliğinden, $f\in L^{(p,q)}(\mathbb{T})$ için,

$$\|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\|_{(p,q)}\leq\frac{1}{2}\|f(x+y+t)-f(x+y)\|_{(p,q)}+\frac{1}{2}\|f(x+y-t)-f(x+y)\|_{(p,q)}$$

$$+\frac{1}{2}\|f(x+t)-f(x)\|_{(p,q)}+\frac{1}{2}\|f(x-t)-f(x)\|_{(p,q)}$$

$$\leq c\,\omega(t) \tag{4.4}$$

bulunur.

$$\phi_{x+y}(t)-\phi_x(t)=\frac{1}{2}\left[\{f(x+y+t)-f(x+t)\}+\{f(x+y-t)-f(x-t)\}\right]$$

$$+\{f(x+y)-f(x)\}$$

olduğundan,

$$\left\|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right\|_{(p,q)} \le \frac{1}{2}\Big[\left\| f(x+y+t)-f(x+t)\right\|_{(p,q)} + \left\| f(x+y-t)-f(x-t)\right\|_{(p,q)}\Big] + \left\| f(x+y)-f(x)\right\|_{(p,q)}$$

$$\le c\,\omega(y) \tag{4.5}$$

elde edilir.

iii-) Şimdi (**ii**) den υ azalmayan bir fonksiyon olduğundan $t \le |y|$ için (4.4) denkleminden

$$\left\|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right\|_{(p,q)} = O\big(\omega(t)\big) = O\left(\upsilon(t)\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\right)$$

$$= O\left(\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\right) \tag{4.6}$$

elde edilir.

Eğer $|t| \ge y$ ise (4.5) denklemini ve

$$\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)} \ge \frac{\omega(|y|)}{\upsilon(|y|)} \quad \left(\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)} \ \textit{azalmayandır}\right)$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\left\|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right\|_{(p,q)} = O\big(\omega(|y|)\big) = O\left(\upsilon(|y|)\frac{\omega(|y|)}{\upsilon(|y|)}\right)$$

$$= O\left(\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\right). \tag{4.7}$$

elde edilir.

iv-) $\phi_x(t) = \frac{1}{2}\left\{ f(x+t)+f(x-t)-2f(x)\right\}$

$$\phi_x(t+\eta)=\frac{1}{2}\{f(x+t+\eta)+f(x-t-\eta)-2f(x)\}$$

$$\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)=\frac{1}{2}\left(\{f(x+t)-f(x+t+\eta)\}+\{f(x-t)-f(x-t-\eta)\}\right)$$

olduğundan,

$$\left\|\phi_x(t)-\phi_x(t+\eta)\right\|_{(p,q)}\leq\frac{1}{2}\left(\left\|f(x+t)-f(x+t+\eta)\right\|_{(p,q)}+\left\|f(x-t)-f(x-t-\eta)\right\|_{(p,q)}\right)$$

$$\leq c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{4.8}$$

elde edilir.

$$\phi_{x+y}(t)-\phi_{x+y}(t+\eta)=\frac{1}{2}\left(\{f(x+y+t)-f(x+y+t+\eta)\}+\{f(x+y-t)-f(x+y-t-\eta)\}\right)$$

$$\begin{aligned}\left\|\phi_{x+y}(t)-\phi_{x+y}(t+\eta)\right\|_{(p,q)}&\leq\frac{1}{2}\left(\left\|f(x+y+t)-f(x+y+t+\eta)\right\|_{(p,q)}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\left\|f(x+y-t)-f(x+y-t-\eta)\right\|_{(p,q)}\right)\\&\leq c\,\omega(\eta)\end{aligned} \tag{4.9}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\phi_x(t+\eta)-\phi_{x+y}(t+\eta)&=\frac{1}{2}\{f(x+t+\eta)-f(x+y+t+\eta)\}\\&+\frac{1}{2}\{f(x-t-\eta)-f(x+y-t-\eta)\}+\{f(x)-f(x+y)\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\left\|\phi_x(t+\eta)-\phi_{x+y}(t+\eta)\right\|_{(p,q)}&\leq\frac{1}{2}\left(\left\|f(x+t+\eta)-f(x+y+t+\eta)\right\|_{(p,q)}\right)\\&+\frac{1}{2}\left(\left\|f(x-t-\eta)-f(x+y-t-\eta)\right\|_{(p,q)}\right)\\&+\left\|f(x)-f(x+y)\right\|_{(p,q)}\end{aligned}$$

$$\leq c\,\omega(y) \tag{4.10}$$

bulunur.

(4.8) ve (4.9) yı kullanarak

$$\left\| \phi_x(t) - \phi_{x+y}(t) - \phi_x(t+\eta) + \phi_{x+y}(t+\eta) \right\|_{(p,q)} = O(\omega(\eta)) \tag{4.11}$$

elde edilir ve (4.5) ve (4.10) yi kullanarak

$$\left\| \phi_x(t) - \phi_{x+y}(t) - \phi_x(t+\eta) + \phi_{x+y}(t+\eta) \right\|_{(p,q)} = O(\omega(y)) \tag{4.12}$$

elde edilir.

$$\text{Eğer} \quad 0 \leq \eta \leq y \quad \text{ise} \quad \omega(\eta) = \frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}\,\upsilon(\eta) \leq \upsilon(y)\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}$$

bulunur ve

$$\text{Eğer} \quad |y| \leq \eta \quad \text{ise} \quad \omega(|y|) = \frac{\omega(|y|)}{\upsilon(|y|)}\,\upsilon(|y|) \leq \upsilon(|y|)\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}$$

bulunur.

(4.11) ve (4.12) denklemlerinden

$$\left\| \phi_x(t) - \phi_{x+y}(t) - \phi_x(t+\eta) + \phi_{x+y}(t+\eta) \right\|_{(p,q)} \leq c\left\{ \upsilon(|y|)\,\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \right\} \tag{4.13}$$

elde edilir.

4.2.2 Lemma : $1 < p < \infty$ *ve* $1 \leq q \leq \infty$ ve $\alpha > 0$ olmak üzere $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T})$ için

$$|a_n| \leq c\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{(p,q)} \quad \text{ve} \quad |b_n| \leq c\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{(p,q)} \quad \text{olur.}$$

İspat: $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T})$ için $E_n^{*}(f)_{(p,q)} = \left\| f - t_n^{*} \right\|_{(p,q)}$ olur.

$$t^{*}_{n-1} = \sum_{k=-n+1}^{n-1} d_k \cos kx$$

trigonometrik bir polinom olsun.

$$a_n(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left(f(x) - t^{*}_{n-1}(x) \right) \cos nx \, dx$$

yazılır. (2.7) denklemini kullanarak

$$\left| a_n(f) \right| \le \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - t^{*}_{n-1}(x) \right| dx \le \left\| f - t^{*}_{n-1} \right\|_{p,q} \left\| 1 \right\|_{p^{'}q^{'}}$$

elde edilir. (2.8) denklemini göz önüne alarak

$$\left| a_n(f) \right| \le \left\| f - t^{*}_{n-1} \right\|_{(p,q)} \left\| 1 \right\|_{(p^{'}q^{'})}$$

yazılır. Buradan da

$$\left| a_n(f) \right| \le \left\| f - t^{*}_{n-1} \right\|_{(p,q)} \le E^{*}_{n-1}(f)_{(p,q)} \le c \frac{1}{(n-1)^{\alpha}}$$

$$\le c \frac{1}{n^{\alpha}} \le c\, \omega\left(f, \frac{1}{n} \right)_{(p,q)} \tag{4.14}$$

elde edilir.

$b_n(f)$ katsayısı da benzer şekilde hesaplanır ve

$$\left| b_n(f) \right| \le c\ \omega\left(f, \frac{1}{n} \right)_{(p,q)} \tag{4.15}$$

bulunur.

4.2.3 Lemma : υ *ve* ω iki süreklilik modülleri ve $\frac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olsun. Eğer $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T}),\ p,q \ge 0$ ise

$$\left\|\gamma_n\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = O\left(\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \log n \right)$$

olur.

İspat: (2.10) denkleminden ,

$$\left\|\gamma_n\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = \left\|\gamma_n\right\|_{(p,q)} + \sup_{|y|\neq 0} \frac{\left\|\gamma_n(.) - \gamma_n(.+y)\right\|_{(p,q)}}{\upsilon(|y|)}$$

$$\left\|S_n - S_n^{*}\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = \left\|S_n - S_n^{*}\right\|_{(p,q)} + \sup_{|y|\neq 0} \frac{\left\|S_n - S_n^{*} - S_n(.+y) + S_n^{*}(.+y)\right\|_{(p,q)}}{\upsilon(|y|)}$$

olduğunu biliyoruz.

Eğer $f \in H_{(p,q)}^{\omega}$ ise (4.14) ve (4.15) den

$$\left|a_n(f)\right| \leq c\,\omega\left(f, \frac{1}{n}\right)_{(p,q)}$$

$$\leq c\,\omega(f, \eta)$$

$$\leq c\,\omega(\eta)$$

$$\left|b_n(f)\right| \leq c\;\omega(\eta)$$

yazılır.

$$S_n - S_n^{*} = \frac{1}{2}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

olduğu için (4.14) ve (4.15) denklemlerini kullanarak

$$\left\|S_n - S_n^{*}\right\|_{(p,q)} \leq c\,\omega(\eta) \tag{4.16}$$

elde edilir.

Benzer şekilde

$$\left\| S_n(x+y) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)} \le c\,\omega(\eta) \tag{4.17}$$

elde edilir.

(4.16) ve (4.17) den ve $\frac{\pi}{n} \le |y|$ için

$$\left\| S_n(x) - S_n^*(x) - S_n(x+y) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)} \le c\,\omega(\eta)$$

$$= O(\omega(\eta))$$

$$= O\left(\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}\, \upsilon(\eta) \right)$$

$$= O\left(\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}\, \upsilon(|y|) \right) \tag{4.18}$$

elde edilir.

$\frac{\pi}{n} \ge |y|$ için

$$\left[\int_0^{\pi} |D_n(t)|\,dt \sim \frac{4}{\pi}\log n \sim \int_0^{\pi} |D_n^*(t)|\,dt \right]$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\left\| S_n(x) - S_n^*(x) - S_n(x+y) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)}$$

$$\le \left\| S_n(x) - S_n(x+y) \right\|_{(p,q)} + \left\| S_n^*(x) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)}$$

$$\le \left\| S_n(x) - f(x) + f(x) - S_n(x+y) \right\|_{(p,q)}$$

$$+ \left\| S_n^*(x) - f(x) + f(x) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)}$$

$$\leq \left\| S_n(x) - f(x) \right\|_{(p,q)} + \left\| f(x) - S_n(x+y) \right\|_{(p,q)} + \left\| S_n^*(x) - f(x) \right\|_{(p,q)}$$

$$+ \left\| f(x) - S_n^*(x+y) \right\|_{(p,q)}$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n(t) \right| \left(\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left(x^{\frac{1}{p}} \phi_x^{**}(t) - \phi^{**}{}_{x+y}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n^*(t) \right| \left(\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} \left(x^{\frac{1}{p}} \phi_x^{**}(t) - \phi^{**}{}_{x+y}(t) \right)^q dt \right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n(t) \right| \left\| \phi_x(t) - \phi_{x+y}(t) \right\|_{(p,q)} dt$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left| D_n^*(t) \right| \left\| \phi_x(t) - \phi_{x+y}(t) \right\|_{(p,q)} dt$$

$$= O(1)\, \omega(|y|) \left\{ \int_0^{\pi} \left| D_n(t) \right| dt + \int_0^{\pi} \left| D_n^*(t) \right| dt \right\}$$

$$= O(1)\, \omega(|y|) \log n$$

$$= O(1) \frac{\omega(|y|)}{\upsilon(|y|)} \upsilon(|y|) \log n$$

$$\leq c \frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \upsilon(|y|) \log n \qquad (4.19)$$

elde edilir. Elde ettiğimiz denklemler yerine yazılırsa

$$\left\| \gamma_n \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = O(\omega(\eta)) + \frac{\upsilon(|y|) \dfrac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \log n}{\upsilon(|y|)}$$

$$\leq c\, \omega(\eta) + \frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \log n$$

$$\leq c\,\frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)}\log n \tag{4.20}$$

bulunur. Bu da Lemma 4.2.3 ün ispatını tamamlar.

4.2.4 Teorem : ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar. Eğer $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T})$, $p \geq 1$ ise

$$\left\| S_n(f)(x) - f(x) \right\|^{\omega}_{(p,q)} \leq c \left\{ \frac{1}{n} \int_{\eta}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2\,\upsilon(t)}\,dt + \frac{\omega(\eta)}{\upsilon(\eta)} \log n \right\}$$

olur.

İspat: (2.10) denkleminden

$$\left\| \beta_n \right\|^{\omega}_{(p,q)} = \left\| \beta_n \right\|_{(p,q)} + \sup_{|y| \neq 0} \frac{\left\| \beta_n(.) - \beta_n(.+y) \right\|_{(p,q)}}{\upsilon(|y|)}$$

olduğunu biliyoruz.

$$\beta_n(x) = S_n^*(x) - f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \phi_x(t)\,\frac{\sin(nt)}{2\tan\frac{1}{2}t}\,dt$$

$$g(t) = \frac{\phi_x(t)}{2\tan\left(\frac{1}{2}\right)t} \quad ve \quad \alpha = \frac{\pi}{n} \qquad \text{alınırsa}$$

$$\beta_n(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\sin(nt)\,dt$$

elde edilir.

$$\beta_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(t)\,\sin(nt)\,dt - \frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} g(t+\alpha)\,\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha} g(t)\,\sin(nt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} g(t)\,\sin(nt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} g(t)\,\sin(nt)\,dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\pi-\alpha} g(t+\alpha)\,\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha} g(t)\,\sin(nt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} g(t)\,\sin(nt)\,dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} g(t)\,\sin(nt)\,dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(t+\alpha)\,\sin(nt)\,dt-\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha} g(t+\alpha)\,\sin(nt)\,dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\big(g(t)-g(t+\alpha)\big)\sin(nt)dt+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi} g(t)\sin(nt)dt+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha} g(t)\sin(nt)dt$$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha} g(t+\alpha)\sin(nt)dt \qquad (4.21)$$

elde edilir.

$$\beta_n(x)-\beta_n(x+y)=S_n^*(x)-f(x)-S_n^*(x+y)+f(x+y)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\{\beta_n(x)-\beta_n(x+y)\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\{\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\}\left\{\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right\}\sin(nt)dt \qquad (I_1)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\{\phi_x(t)-\phi_x(t+\alpha)-\phi_{x+y}(t)+\phi_{x+y}(t+\alpha)\}\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\,dt \qquad (I_2)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\{\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\}\frac{\sin(nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt \qquad (I_3)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\alpha}\left\{\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right\}\frac{\sin(nt)}{2\tan\frac{t}{2}}dt \qquad (I_4)$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{-\alpha}^{\alpha}\left\{\phi_x(t+\alpha)-\phi_{x+y}(t+\alpha)\right\}\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}dt \qquad (I_5)$$

$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5$$

şeklinde yazılır.

$$|I_1|\le\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right|\left(\left|\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right|\right)\sin(nt)\,dt\ ,\ \alpha<t<\pi-\alpha$$

yazılır.

$$\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}=\frac{1}{2}\left\{\cot\frac{t}{2}-\cot\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\left\{\cos\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)-\cos\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin\frac{t}{2}\right\}}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}$$

$$\le\frac{1}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\frac{t}{2}\ \sin\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}=\frac{\frac{1}{2}\frac{\alpha}{2}}{\frac{2}{\pi}\frac{t}{2}\ \frac{2}{\pi}\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}=\frac{\pi^2\alpha}{4t^2}$$

elde edilir.

$$\|I_1\|_{(p,q)}\le c\,\alpha\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\left\|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right\|_{(p,q)}}{t^2}\ dt$$

$$\le c\frac{1}{n}\int_{\alpha}^{\pi}\upsilon(|y|)\ \frac{\omega(t)}{t^2\,\upsilon(t)}dt \qquad (4.22)$$

bulunur.

$$\left|I_2\right| \le \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left|\phi_x(t)-\phi_x(t+\alpha)-\phi_{x+y}(t)+\phi_{x+y}(t+\alpha)\right|\left|\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right|dt \quad ,\alpha < t < \pi-\alpha$$

yazılır.

$$\left|\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)\sin(nt)\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right| \le \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sin\frac{t}{2}} \le \frac{1}{2}\,\frac{\pi}{t} \le c\,\frac{1}{t}$$

elde edilir.

$$\left\|I_2\right\|_{(p,q)} \le \frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\left\|\phi_x(t)-\phi_x(t+\alpha)-\phi_{x+y}(t)+\phi_{x+y}(t+\alpha)\right\|_{(p,q)}}{t}\,dt$$

$$\le c\,\upsilon(|y|)\,\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\int_{\alpha}^{\pi}\frac{1}{t}\,dt$$

$$\le c\,\upsilon(|y|)\,\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\log n \tag{4.23}$$

bulunur.

$$\left|I_3\right| \le \int_{\pi-\alpha}^{\pi}\left|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right|\left|\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt \quad , \qquad \pi-\alpha < t < \pi$$

$$\left|\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right)\sin(nt)\right| \le \left|\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right)\right| \le \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sin\frac{t}{2}}\right|$$

elde edilir.

$$\frac{1}{n}\le\frac{1}{2}\quad ise\quad \frac{\pi}{n}\le\frac{\pi}{2}\quad ve\quad \pi-\alpha\ge\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{t}{2}>\frac{\pi}{4}\quad ise\ \sin\left(\frac{t}{2}\right)>\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

bulunur ve

$$\left|\frac{1}{2}\cot\left(\frac{t}{2}\right)\sin\left(nt\right)\right|\le\sqrt{2}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\left|I_3\right|\le\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\left|\phi_x\left(t\right)-\phi_{x+y}\left(t\right)\right|\sqrt{2}\,dt$$

$$\left\|I_3\right\|_{(p,q)}\le c\,\upsilon\left(\left|y\right|\right)\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\frac{\omega\left(t\right)}{\upsilon\left(t\right)}dt\le c\,\upsilon\left(\left|y\right|\right)\frac{\omega\left(\pi\right)}{\upsilon\left(\pi\right)}\alpha\le c\,\frac{1}{n} \tag{4.24}$$

elde edilir.

$$\left|I_4\right|\le\int_0^{\alpha}\left|\phi_x\left(t\right)-\phi_{x+y}\left(t\right)\right|\left|\frac{\sin\left(nt\right)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}\right|dt\ ,\quad 0<t<\frac{\pi}{n}$$

ise

$$\left|\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\sin\left(nt\right)\right|\le\left|\frac{1}{2}\sin\left(nt\right)\frac{\cos\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right|\le\frac{1}{2}\left|\frac{\sin\left(nt\right)}{\sin\frac{t}{2}}\right|\le n$$

elde edilir.

$$\left\|I_4\right\|_{(p,q)}\le c\,n\int_0^{\alpha}\left\|\phi_x\left(t\right)-\phi_{x+y}\left(t\right)\right\|_{(p,q)}dt$$

$$\le c\,n\ \upsilon\left(\left|y\right|\right)\int_0^{\alpha}\left(\frac{\omega\left(t\right)}{\upsilon\left(t\right)}\right)dt$$

$$\leq c\, n\, \upsilon\left(|y|\right)\frac{\pi}{n}\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

$$\leq c\ \ \upsilon\left(|y|\right)\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{4.25}$$

elde edilir.

$$|I_5| \leq \int_{-\alpha}^{\alpha}\left|\phi_x(t+\alpha)-\phi_{x+y}(t+\alpha)\right|\left|\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right|$$

$$\leq \int_{0}^{2\alpha}\left|\phi_x(u)-\phi_{x+y}(u)\right|\left|\sin(nu-\pi)\frac{1}{2}\cot\frac{u}{2}\right|du$$

$$\leq \int_{0}^{2\alpha}\left|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right|\left|\sin(nt)\frac{1}{2}\cot\frac{t}{2}\right|dt$$

$$\leq n\int_{0}^{2\alpha}\left|\phi_x(t)-\phi_{x+y}(t)\right|dt$$

elde edilir.

$$\left\|I_5\right\|_{(p,q)} \leq c\,n\int_{0}^{2\alpha}\upsilon\left(|y|\right)\frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\,dt \leq c\,\upsilon\left(|y|\right)n\frac{\omega(2\alpha)}{\upsilon(2\alpha)}\frac{\pi}{n}$$

$$\leq c\,\upsilon\left(|y|\right)\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{4.26}$$

elde edilir. Elde ettiğimiz denklemler yerine yazılırsa

$$\left\|\beta_n(x)-\beta_n(x+y)\right\|_{(p,q)} \le c\left\{\begin{array}{l} \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}dt+\upsilon(|y|)\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\log n+\dfrac{1}{n} \\ +\upsilon(|y|)\dfrac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}+\upsilon(|y|)\dfrac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)} \end{array}\right\}$$

$$\le c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}dt+\upsilon(|y|)\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\log n\right\}$$

elde edilir.

$$g(x)=\frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}} \quad , \quad \alpha=\frac{\pi}{n} \qquad \text{alınırsa}$$

$$\beta_n(x)=S_n^{*}-f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\phi_x(t)\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t}{2}\right)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{\begin{array}{l} \displaystyle\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left(g(t)-g(t+\alpha)\right)\sin(nt)dt+\int_{\pi-\alpha}^{\pi}g(t)\sin(nt)dt+\int_0^{\alpha}g(t)\sin(nt)dt \\ \displaystyle -\int_{-\alpha}^{\alpha}g(t+\alpha)\sin(nt)dt \end{array}\right\}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left\{I_1+I_2+I_3+I_4\right\}$$

şeklinde yazılır.

$$I_1=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left(g(t)-g(t+\alpha)\right)\sin(nt)dt=\frac{1}{\pi}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\left(\frac{\phi_x(t)}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{\phi_x(t+\alpha)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right)\sin(nt)dt$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\phi_x(t)\left\{\frac{1}{2\tan\frac{t}{2}}-\frac{1}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right\}+\left\{\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\phi_x(t)-\phi_x(t+\alpha)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}\right\}\right]\sin(nt)\,dt$$

elde edilir. Buradan da

$$\|I_1\|_{(p,q)}\leq\frac{\pi^2\alpha}{4}\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\|\phi_x(t)\|_{(p,q)}}{t^2}dt+\int_{\alpha}^{\pi-\alpha}\frac{\|\phi_x(t)-\phi_x(t+\alpha)\|_{(p,q)}}{t}dt$$

$$\leq\frac{\pi^2\alpha}{4}\int_{\alpha}^{\pi}\left(\frac{\omega(t)}{t^2}dt\right)+\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n$$

$$\leq\frac{\pi^2}{4}\frac{\pi}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n$$

$$\leq c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt+\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n\right\}\qquad(4.27)$$

bulunur.

$$|I_2|\leq\int_{\pi-\alpha}^{\pi}|g(t)\sin(nt)|\,dt=\int_{\pi-\alpha}^{\pi}|\phi_x(t)|\left|\frac{\sin(nt)}{2\tan\frac{t}{2}}\right|dt$$

$$\|I_2\|_{(p,q)}\leq\int_{\pi-\alpha}^{\pi}\|\phi_x(t)\|_{(p,q)}\sqrt{2}\,dt$$

$$\leq c\,\omega(t)\frac{1}{n}\qquad(4.28)$$

elde edilir.

$$\left|I_3\right| \le \int_0^{\alpha} \left|g(t)\sin(nt)\,dt\right| = \int_0^{\alpha} \left|\phi_x(t)\right| \left|\frac{\sin(nt)}{2\tan\frac{t}{2}}\right| dt \le \int_0^{\alpha} \left|\phi_x(t)\right| n\,dt$$

$$\left\|I_3\right\|_{(p,q)} \le \int_0^{\alpha} \left\|\phi_x(t)\right\|_{(p,q)} n\,dt \le c\;\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) n\frac{\pi}{n}$$

$$\le c\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{4.29}$$

elde edilir.

$$I_4 = \int_{-\alpha}^{\alpha} g(t+\alpha)\sin(nt)\,dt = \int_{-\alpha}^{\alpha} \phi_x(t+\alpha)\frac{\sin(nt)}{2\tan\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)}dt$$

$$\left|I_4\right| \le \frac{1}{2}\int_0^{2\alpha} \left|\phi_x(t+\alpha)\right| \left|\sin nt \cot\left(\frac{t+\alpha}{2}\right)\right| dt$$

$$\left\|I_4\right\|_{(p,q)} \le c \int_0^{2\alpha} n\,\omega(t)\,dt = c\,n\,\omega(2\alpha)\frac{\pi}{n}$$

$$\le c\;\omega\left(\frac{\pi}{n}\right) \tag{4.30}$$

bulunur. Elde edilen denklemleri kullanarak

$$\left\|\beta_n(x)\right\|_{(p,q)} \le c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt + \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n + \omega\left(\frac{\pi}{n}\right) + \omega(t)\frac{1}{n} + \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\right\}$$

$$\le c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}dt + \omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n\right\} \tag{4.31}$$

bulunur.

$$\left(\omega(t) \le \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\upsilon(t) \le \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}\;\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)\right)$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\left\|\beta_n\right\|_{(p,q)}^{\omega} \leq c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2}\,dt+\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)\log n\right\}$$

$$+c\frac{\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\upsilon(|y|)\frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}dt+\upsilon(|y|)\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\log n\right\}}{\upsilon(|y|)}$$

$$\left\|\beta_n\right\|_{(p,q)}^{\omega} \leq c\left\{\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}\,dt+\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\log n\right\} \tag{4.32}$$

elde edilir.

$\alpha_n(x)=\beta_n(x)+\gamma_n(x)$ olduğu göz önüne alınarak (4.20) ve (4.32) denklemlerini kullanarak

$$\left\|\alpha_n\right\| \leq \left\|\beta_n\right\|+\left\|\gamma_n\right\|$$

elde edilir.

4.2.5 Teorem: ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar. Eğer $\gamma(t):=t^{-\varepsilon}\dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde bir $0<\varepsilon\leq 1$ sayısı varsa $\forall f\in H_{(p,q)}^{\omega}(\mathbb{T})$ *ve* $p\geq 1$ için

$$\left\|f-S_n(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n \quad ,n\geq 2$$

olur.

İspat: $$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}dt=\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\gamma(t)t^{\varepsilon-2}\,dt\le\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}\gamma\left(\frac{\pi}{n}\right)t^{\varepsilon-2}\,dt$$

$$=\frac{\gamma\left(\frac{\pi}{n}\right)}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi}t^{\varepsilon-2}\,dt$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{-\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{cases}\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\varepsilon-1}-(\pi)^{\varepsilon-1}\right]\frac{1}{1-\varepsilon} & ,\ \varepsilon<1\\ \log n & ,\ \varepsilon=1\end{cases}$$

$$=\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{n}\right)^{-\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{cases}\left[\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\varepsilon-1}\right] & ,\ \varepsilon<1\\ \log n & ,\ \varepsilon=1\end{cases}$$

$$=\frac{1}{n}\,n^{\varepsilon}\,\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{cases}n^{1-\varepsilon} & ,\ \varepsilon<1\\ \log n & ,\ \varepsilon=1\end{cases}$$

$$=\frac{1}{n}\;\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{cases}n & ,\ \varepsilon<1\\ n\,\log n & ,\ \varepsilon=1\end{cases}$$

$$=\frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}\begin{cases}1 & ,\ \varepsilon<1\\ \log n & ,\ \varepsilon=1\end{cases}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\frac{1}{n}\int_{\frac{\pi}{n}}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2\upsilon(t)}dt \le \log n \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

olur ve

$$\left\| f - S_n(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le c \log n \frac{\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{\pi}{n}\right)} \tag{4.33}$$

yazılır.

5. FOURIER SERİLERİNİN CESÀRO, NÖRLUND VE RIESZ ORTALAMALARININ GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER UZAYLARINDA YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

5.1 Lebesgue Uzaylarında Sonuçlar

5.1.1 Lemma: ω *ve* υ, $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar. Eğer $\gamma(t) := t^{-\varepsilon}\dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde bir $0<\varepsilon<1$ sayısı varsa her $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$ için

$$\left\| f-\sigma_n(f)\right\|_p^{\upsilon} \leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n \quad , n \geq 2$$

olur [6].

5.1.2 Lemma: ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0<\varepsilon<1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon}\dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar ve

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\left|\Delta p_k\right| = O\left(P_n\right)$$

koşulu sağlanıyorsa her $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$ için

$$\left\|N_n - S_n\right\|_p^{\upsilon} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \quad n \ge 2$$

eşitsizliği sağlanır [6].

5.1.3 Teorem: ω *ve* υ , $\frac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0 < \varepsilon < 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsun ve $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ ($p \ge 1$) olsun.

i) $\{p_n\} \in AMDS$

ii) $\{p_n\} \in AMIS$ *ve* $np_n \le c P_n$

iii) $\sum_{m=1}^{n-1} m\left|\Delta p_m\right| \le c P_n$

koşullarından herhangi bir tanesi sağlanıyorsa

$$\left\|N_n - f\right\|_p^{\upsilon} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \quad n \ge 2$$

olur [6].

5.1.4 Teorem: ω *ve* υ , $\frac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0 < \varepsilon < 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar . Her $f \in H_p^{\omega}(\mathbb{T})$ $p \ge 1$ için

i) $np_n \le c P_n$

ii) $\sum_{m=0}^{n-1} m^{1-\varepsilon}\left|\Delta p_m\right| \le c P_n n^{-\varepsilon}$

koşulları sağlanıyorsa

$$\left\| R_n - f \right\|_p^{\upsilon} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \quad n \ge 2$$

olur [6].

5.2 Lorentz Uzayında Sonuçlar

5.2.1 Lemma: ω *ve* υ , $\frac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan bir fonksiyon olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar. Eğer $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan bir fonksiyon olacak şekilde bir $0 < \varepsilon < 1$ sayısı varsa, $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T}) (\, p \ge 1)$ için

$$\left\| f - \sigma_n(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \quad , n \ge 2 \tag{5.1}$$

olur.

5.2.2 Teorem: ω *ve* υ , $\frac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0 < \varepsilon < 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar ve aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa

$$i) \ np_n \le c\, P_n \ \ ve \ \sum_{m=0}^{n-1} m^{1-\varepsilon} \left| \Delta p_m \right| \le c\, P_n \ n^{-\varepsilon}$$

Her $f \in H^{\omega}_{(p,q)}(\mathbb{T})$ $(p \geq 1)$ için

$$\left\| R_n - f \right\|^{\upsilon}_{(p,q)} \leq c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \quad n \geq 2 \tag{5.2}$$

olur.

5.2.3 Lemma: ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0 < \varepsilon < 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar ve

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \left| \Delta p_k \right| = O\left(P_n\right)$$

koşulu sağlanıyorsa

$$\left\| N_n - S_n \right\|^{\upsilon}_{(p,q)} \leq c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \ , \quad n \geq 2 \tag{5.3}$$

olur.

5.2.4 Teorem: ω *ve* υ , $\dfrac{\omega}{\upsilon}$ fonksiyonu azalmayan ve $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ fonksiyonu artmayan olacak şekilde birer süreklilik modülü olsunlar ve aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa

i) $\{p_n\} \in AMDS$

ii) $\{p_n\} \in AMIS$ *ve* $np_n \leq c P_n$

iii) $\sum_{m=1}^{n-1} m \left| p_m - p_{m+1} \right| \leq c P_n$

ise

$$\left\| N_n - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \;, \quad n \ge 2 \tag{5.4}$$

olur.

Bu teorem ve lemmaların ispatlarında aşağıdaki lemmalardan yararlanılacaktır:

5.2.5 Lemma:

$$A_n := \sum_{m=1}^{n} \left| \Delta_m \left(m^{-1} \left(P_n - P_{n-m} \right) \right) \right|$$

olsun. Bu durumda ,

$$A_n \le c \sum_{m=0}^{n-1} \left| \Delta p_m \right|$$

ve ayrıca

$$\sum_{m=1}^{n-1} m \left| \Delta p_m \right| \le c\, P_n ,$$

sağlanıyorsa

$$A_n \le c \frac{P_n}{n} \tag{5.5}$$

olur [6],[7] ,[12] .

5.2.6 Lemma (Abel Dönüşümü):

$u_1, u_2, ..., u_n$ *ve* $m_1, m_2, ..., m_n$, $n \in \mathbb{N}$, reel sayıları verilmiş olsun.

$U_k = u_1 + u_2 + ... + u_k$, $k = 1, 2, ..., n$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} u_k m_k = \sum_{k=1}^{n-1} U_k \left(m_k - m_{k+1}\right) + U_n\, m_n$$

eşitliği sağlanır [10,s . 3].

5.2.1 Lemma'nın İspatı: $\gamma(t) := t^{-\varepsilon}\dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ artmayan,

$$\sum_{k=2}^{n} k^{-\varepsilon} \le c\, n^{1-\varepsilon}, \quad \gamma\left(\frac{1}{n}\right) = n^{\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$$

ve

$$f(x) - \sigma_n(f)(x) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}\left(f(x) - S_k(f)(x)\right)$$

olduğundan

$$\left\| f(x) - \sigma_n(f)(x) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \left\|\left(f(x) - S_k(f)(x)\right)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left[\left\| f - S_0(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} + \left\| f - S_1(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} + \sum_{k=2}^{n}\left\| f - S_k(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\right]$$

$$\le c\frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{\omega\left(\frac{1}{k}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{k}\right)}\log k\right]$$

$$\le c\frac{1}{n+1}\left[1 + \sum_{k=2}^{n}\frac{\omega\left(\frac{1}{k}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{k}\right)}\log k\,\frac{k^{-\varepsilon}}{k^{-\varepsilon}}\right]$$

$$\le c\frac{1}{n+1}\left[1 + \gamma\left(\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n} k^{-\varepsilon}\log k\right]$$

$$\le c\,\frac{1}{n+1}\left[1 + \gamma\left(\frac{1}{n}\right)\log n\sum_{k=2}^{n} k^{-\varepsilon}\right]$$

$$\leq c\ \frac{1}{n+1}\left[1+n^{\varepsilon}\ \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\, n^{1-\varepsilon}\right]$$

$$\leq c\ \frac{n}{n+1}\left[1+\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\right]$$

$$\leq c\ \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n \tag{5.6}$$

elde edilir.

5.2.2 Teoremin ispatı: $R_n(x)-f(x)=\dfrac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n}p_m\left(S_m(f)(x)-f(x)\right)$

$R_n(f)(x)=\dfrac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n}p_m\,S_m(f)(x)$ ve Abel dönüşümünden

$$R_n(x)-f(x)=\frac{1}{P_n}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}\Delta p_m\sum_{k=0}^{m}\left(S_k(x)-f(x)\right)+p_n\sum_{k=0}^{n}\left(S_k(x)-f(x)\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{P_n}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\Delta p_m\left(\sigma_m(x)-f(x)\right)+(n+1)\,p_n\left(\sigma_n(x)-f(x)\right)\right\}$$

yazılır ve

$$\left\|R_n-f\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\leq\frac{1}{P_n}\left\{\sum_{m=0}^{n-1}(m+1)\ \Delta p_m\ \left\|\sigma_m-f\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}+(n+1)\,p_n\ \left\|\sigma_n-f\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\right\}$$

elde edilir.

(5.1) denkleminden , i koşulundan ve γ fonksiyonunun monotonluğundan

$$\left\| R_n - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le \frac{1}{P_n} \left\{ \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \Delta p_m \frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)} \log m + (n+1)\, p_n \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \right\}$$

$$\le \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \Delta p_m \frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)} \frac{m^{-\varepsilon}}{m^{-\varepsilon}} \log m + \frac{1}{P_n}\, (n+1)\, p_n \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n-1} (m+1) \Delta p_m\, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) m^{-\varepsilon} \log m + \frac{1}{P_n}\, c\, P_n \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le \frac{1}{P_n} \log n\, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) 2 \sum_{m=0}^{n-1} m^{1-\varepsilon}\, \Delta p_m + c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le c \frac{1}{P_n} \log n\, \gamma\left(\frac{1}{n}\right) P_n\, n^{-\varepsilon} + c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le c\, \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n\, n^{-\varepsilon} n^{\varepsilon} + \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le c\, \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \tag{5.7}$$

bulunur.

5.2.3 Lemma'nın ispatı: $N_n(f)(x)=\dfrac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}\, S_m(f)(x)$

$S_n(f)(x)=\sum_{m=0}^{n} A_m(f)(x)$ olduğundan Abel dönüşümünden

$$N_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} P_{n-m}\, A_m(f)(x)$$

elde edilir. Böylece, yine Abel dönüşümünü kullanarak

$$S_n(f)(x)-N_n(f)(x)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}(P_n-P_{n-m})A_m(f)(x)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\frac{(P_n-P_{n-m})}{m}\, m\, A_m(f)(x)$$

$$=\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}k\,A_k(f)(x)+\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\,A_k(f)(x)$$

bulunur.

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\le\frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m}k\,A_k(f)(x)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$+\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{n}k\,A_k(f)(x)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

olur.

$$S_n(f)(x)-\sigma_n(f)(x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}k\,A_k(f)(x)$$

olduğundan

$$\sum_{k=1}^{n}k\,A_k(f)(x)=(n+1)\left[S_n(f)(x)-\sigma_n(f)(x)\right]$$

ve böylece

$$\left\|\sum_{k=1}^{n} k\, A_k(f)(x)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = (n+1)\left\|S_n(f)-\sigma_n(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$\leq c(n+1)\,\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

$$\leq c\,2n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

$$\leq c\,n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{n} k\, A_k(f)(x)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \leq c\,\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

bulunur.

Böylece

$$\left\|S_n(f)-N_n(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \leq \frac{1}{P_n}\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{P_n-P_{n-m}}{m}\right)\right| O\left(n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\right)$$

$$+O\left(\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\right)$$

olur ve (5.5) denklemi göz önüne alınarak

$$\left\| S_n(f) - N_n(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le c \frac{1}{P_n} \frac{P_n}{n} n \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n + \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

$$\le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n \tag{5.8}$$

elde edilir.

5.2.4 Teorem ispat: $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \dfrac{\omega(t)}{\upsilon(t)}$ artmayan fonksiyon olduğu için

$\gamma_n := n^{\varepsilon} \dfrac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$ azalmayandır ve $0 < \varepsilon \le 1$ için

$$\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^{\varepsilon}} \le c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{5.9}$$

olur. $\tilde{n} = [\![\frac{n}{2}]\!]$ alınırsa

$$\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)} \le \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \tag{5.10}$$

yazılır.

Belirtilen eşitsizlikler ve $\{\gamma_n\}$ dizisinin monotonluğu ispat boyunca kullanılacaktır.

i) $$N_n(f)(x) - f(x) = \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \left(S_m(f)(x) - f(x) \right)$$

$p_n \in AMDS$ ve $m \le \tilde{n}$ olduğunda $p_{n-m} \le c\, p_{n-\tilde{n}}$ elde edilir.

$$\frac{P_{n-\tilde{n}}}{P_n} \le c\frac{1}{n} \tag{5.11}$$

ve

$$\sum_{m=2}^{\tilde{n}} \frac{1}{m^{\varepsilon}} \le \int_1^{\tilde{n}} x^{-\varepsilon} dx \tag{5.12}$$

olduğu göz önüne alınarak

$$\left\| N_n(f) - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{n} p_{n-m} \left\| S_m(f) - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{\tilde{n}} p_{n-m} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} + \frac{1}{P_n} \sum_{\tilde{n}+1}^{n} p_{n-m} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \tag{5.13}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{P_n} \sum_{m=0}^{\tilde{n}} p_{n-m} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \le c\frac{1}{P_n} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\tilde{n}} p_{n-m} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \right\}$$

$$\le c\frac{1}{P_n} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\tilde{n}} p_{n-\tilde{n}} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \right\}$$

$$\le c\frac{p_{n-\tilde{n}}}{P_n} \left\{ 1 + \sum_{m=2}^{\tilde{n}} \left\| f - S_m(f) \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} \right\}$$

$$\le c\frac{p_{n-\tilde{n}}}{P_n} \left\{ 1 + \tilde{n}^{\varepsilon} \frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)} \log \tilde{n} \sum_{m=2}^{\tilde{n}} \frac{1}{m^{\varepsilon}} \right\}$$

$$\le c\frac{1}{n} \left\{ 1 + \tilde{n}^{\varepsilon} \frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)} \log \tilde{n} \sum_{m=2}^{\tilde{n}} \frac{1}{m^{\varepsilon}} \right\}$$

$$\leq c\frac{1}{n}\left\{1+\tilde{n}^{\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\left(\int_{1}^{\tilde{n}}x^{-\varepsilon}dx\right)\right\}$$

elde edilir. Buradan da

$$\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{\tilde{n}}p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\leq c\frac{1}{n}\left\{1+\tilde{n}^{\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}(\tilde{n})^{1-\varepsilon}\right)\right\}$$

$$\leq c\frac{1}{n}\left\{1+\tilde{n}\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right)\right\}$$

$$\leq c\left\{\frac{1}{n}+\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\right\}$$

elde edilir.

(5.9) ve (5.10) denklemleri kullanılarak

$$\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{\tilde{n}}p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}+\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

$$\leq c\,\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n \tag{5.14}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{P_n}\sum_{\tilde{n}+1}^{n}p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\leq c\frac{1}{P_n}\sum_{\tilde{n}+1}^{n}p_{n-m}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}\log m$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\sum_{\tilde{n}}^{n} p_{n-m}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}\log m$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\log n\sum_{m=\tilde{n}}^{n} p_{n-m}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\sum_{m=\tilde{n}}^{n} p_{n-m}$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}P_n$$

$$\leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n \tag{5.15}$$

elde edilir.

Böylece (5.14) ve (5.15) denklemlerinden

$$\left\|N_n(f)-f\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

elde edilir.

ii) $\{p_n\}\in AMIS$ ve $np_n\leq c\,P_n$ koşulları ve $\sum_{m=2}^{\tilde{n}}\frac{1}{m^{\varepsilon}}\leq\int_1^{\tilde{n}}x^{-\varepsilon}dx$ olduğu göz önüne alınarak

$$\left\|N_n(f)-f\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{\tilde{n}}p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}+\frac{1}{P_n}\sum_{\tilde{n}+1}^{n}p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\left\{1+\sum_{m=2}^{\tilde{n}} p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}\right\}+\frac{1}{P_n}\sum_{\tilde{n}}^{n} p_{n-m}\left\|f-S_m(f)\right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$\leq c\frac{1}{P_n}\left\{1+\sum_{m=2}^{\tilde{n}} p_{n-m}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}\log m\right\}+\frac{1}{P_n}\left\{\sum_{\tilde{n}}^{n} p_{n-m}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}\log m\right\}$$

$$\leq c\frac{p_n}{P_n}\left\{1+\sum_{m=2}^{\tilde{n}}\frac{\omega\left(\frac{1}{m}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{m}\right)}\log m\frac{m^{-\varepsilon}}{m^{-\varepsilon}}\right\}+\frac{1}{P_n}\left\{\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\sum_{\tilde{n}}^{n} p_{n-m}\right\}$$

$$\leq c\frac{1}{n}\left\{1+\tilde{n}^{\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\sum_{m=2}^{\tilde{n}} m^{-\varepsilon}\right\}+\frac{1}{P_n}\left\{\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n\, P_n\right\}$$

$$\leq c\frac{1}{n}\left\{1+\tilde{n}^{\varepsilon}\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}\int_{1}^{\tilde{n}} x^{-\varepsilon}dx\right\}+\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\leq c\frac{1}{n}+\frac{\omega\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{\tilde{n}}\right)}\log\tilde{n}+\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}+\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}+\log n\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}$$

$$\leq c\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)}\log n$$

elde edilir.

iii) $\sum_{m=1}^{n-1} m\left|p_m-p_{m+1}\right|\leq c\,P_n$ koşulu göz önüne alınarak ve 4.2.5 Teorem ve 5.2.3 Lemma dan

$$\left\| N_n - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} = \left\| N_n - S_n + S_n - f \right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$\leq \left\| N_n - S_n \right\|_{(p,q)}^{\upsilon} + \left\| f - S_n \right\|_{(p,q)}^{\upsilon}$$

$$\leq c \frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\upsilon\left(\frac{1}{n}\right)} \log n$$

elde edilir.

6. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında trigonometrik Fourier serilerinin kısmi toplamlar dizisi, Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının Lorentz uzaylarındaki bazı yaklaşım özelliklerinden oluşmaktadır.Elde edilen sonuçlar dördüncü ve beşinci bölümde yer almaktadır.

Dördüncü bölümde Fourier serilerinin kısmi toplamlarının Lorentz uzayları üzerinde tanımlı Genelleştirilmiş Hölder uzaylarındaki yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

Beşinci bölümde ise Fourier serilerinin Cesàro, Nörlund ve Riesz ortalamalarının Genelleştirilmiş Hölder uzaylarındaki yaklaşım özellikleri çalışılmıştır.

7. KAYNAKLAR

[1] Prössdorf, S. “Zur Konvergenz der Fourier reihen hölderstetiger Funktionen”, *Math. Nachr*., 69, 7-14, (1975).

[2] Leindler, L. “Generalization of Prössdorf 's theorems” , *Studia Scientiarum Mathematicarum.*, 14, 431-439, (1979).

[3] Das, G., Ghosh, T. and Ray, B. K., “Degree of approximation of functions by their Fourier series in the generalized Hölder metric”, *Proc. Indian Acad. Sci (Math.Sci.)*, 106, 139-153, (1996).

[4] Das, G., Nath, A. and Ray, B. K., “An estimate of the rate of convergence of Fourier series in the generalized Hölder metric”, *Analysis and applications* , 43-60, (2002).

[5] Quade, E. S., “Trigonometric approximation in the mean”, *Duke Math. J.* , 3, 529-542, (1937).

[6] Leindler, L. “A relaxed estimate of the degree of approximation by Fourier series in generalized Hölder metric“ , *Anal. Math*., 35, 51-60, (2009).

[7] Chandra, E. “ Trigonometric approximation of functions in L_p -norm” , *J. Math. Anal. Appl.* , 275, 13-26, (2002).

[8] Pick, L., Kufner, A ., John, O. and Fučík, S., *Function Spaces*, vol 1, Berlin: Walter de Gruyter, (2013).

[9] Safont, F. L., “ Introduction to Lorentz Spaces”, Grau de Matematiques, Facultat de Mathématiques, *Universitat de Barcelona*, Barcelona, (2012).

[10] Zygmund, A., *Trigonometric Series*, Vol I, London : Cambridge Univ. press, (1959).

[11] Devore, R. A. and Lorentz, G. G., *Constructive approximation* , USA: Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, (1993).

[12] Leindler, L., " Trigonometric approximation of functions in L_p -norm ", *J. Math. Anal. Appl*., 302, 129-13, (2005).