T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATİH ÇELİK

BALIKESİR, MAYIS - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

FATİH ÇELİK

BALIKESİR, MAYIS - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fatih ÇELİK tarafından hazırlanan "**KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA YAKLAŞIM**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Daniyal İSRAFİLZADE	....
Üye Prof. Dr. Fatma AYAZ	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

KOMPLEKS DÜZLEMDE POLİNOMLARLA YAKLAŞIM
YÜKSEK LİSANS TEZİ
FATİH ÇELİK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF.DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, 2015

1. Bölümde, kompleks düzlemde yaklaşım problemlerinin incelendiği bazı bölge ve eğri sınıflarının tanımları ve yanısıra bazı temel teoremler verildi. Daha sonra gereken analitik fonksiyon uzayları ve bu uzayların önemli özellikleri incelendi. Bölümün sonunda ise kvazikonform dönüşümler ve eğriler hakkında gereken bilgiler verilmiştir.

2. Bölümde, Lebesgue uzaylarının özel bir hali olan Bergman uzayları ve bu uzayın önemli fonksiyonlarından olan Bergman Çekirdek Fonksiyonu tanımlanmıştır. Ayrıca, Bergman çekirdek fonksiyonunun seri açılımı, Bergman uzaylarında integral gösterimi ve Bergman çekirdek fonksiyonu ile konform dönüşümler arasındaki formüller incelenmiştir.

3. Bölümde uygulamalı matematiğin birçok problemlerinde kullanılan Bieberbach polinomları tanımlanmış, bu polinomların Kvazikonform sınırlı bölgelerde yaklaşım özellikleri ve Riemann konform dönüşümlere yaklaşım hızları araştırılmıştır.

4. Bölümün birinci kısmında Dini-düzgün bölgelerin $B(\alpha,\beta)$ alt sınıflarında Bieberbach polinomları ile konform dönüşüme yaklaşım problemleri ve yaklaşım hızı incelenmiştir.

Bu bölümün ikinci kısmında ise $B(\alpha,\beta)$, $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ bölgeler sınıfında (π_n) dizisinin genelleşmesi olan $(\pi_{n,p})$ ekstremal polinomlar dizisi ile $\varphi_p(z):=\int_{z_0}^{z}\left[\varphi_0'(\zeta)\right]^{2/p}d\zeta$, $z\in G$, $p>0$, fonksiyonuna yaklaşım problemleri incelenmiş ve yaklaşım hızları ile ilgili sonuçların bir özeti verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kvazikonform dönüşüm, Lebesque uzayları, Bergman uzayları, Bergman çekirdek fonksiyonu,Bieberbach polinomları, Riemann konform dönüşümü, Genelleşmiş Bieberbach polinomları, Dini-düzgün bölge

ABSTRACT

APPROXIMATION BY POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE
MSC THESIS
FATİH ÇELİK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR:PROF.DR. DANİYAL İSRAFİLZADE)

BALIKESİR, 2015

In the first chapter, the definitions of some domains and the classes of curves where the approximation problems in the Complex plane have been examined and also some basic theorems have been introduced.
Then, the required analytic function spaces and the important properties of these spaces have been investigated. At the end of the chapter, the necessary information about the quasiconformal mappings and curves has been given.

In the second chapter, Bergman space which is the important subspace of Lebesgue spaces have been investigated. An important function of this space so called the Bergman kernel function have been defined. Moreover the series representation of Bergman kernel function, the integral representation in the Bergman spaces, and the connections between the Bergman kernel function and conformal mappings have been investigated.

In the third chapter, the Bieberbach polynomials which are often used in the most areas of applied Mathmatics have been defined, and also their's approximation properties in the domains with a quasiconformal boundary and specially the approximation speeds of these polynomials to the Riemann conform mapping have been investigated.

The fourth chapter consists of two parts. In the first part , the approximation properties of the Bieberbach polynomials and the approximation speeds have been examined in the $B(\alpha,\beta)$ subspaces of Dini-Smooth domains.
In the second part of this chapter, in the case of subspaces $L \in B(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ to the aproximation problems for the function $\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} [\varphi_0'(\zeta)]^{2/p} d\zeta$, $z \in G$, $p > 0$, by the extremal polynomials sequence $(\pi_{n,p})$, which is a generalization of the sequence (π_n) is investigated and the detailed abstract of the results, relating to the approximation speed are given.

KEYWORDS: Quasiconfom mapping, Lebesque spaces, Bergman spaces, Bergman Kernel Function, Bieberbach Polynomials, Riemann conformal mapping Generalized Bieberbach Polynomials, Dini-smooth domain

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Tanım**
C	Kompleks Düzlem
$\overline{C}$	Genişletilmiş kompleks sayılar kümesi
D	Birim Disk
$D(z_0,r)$	$\{z \in C : \|z - z_0\| < r\}$ kümesi
$\overline{A}$	A kümesinin kapanışı
G^-	Bölge kapanışının tümleyeni
D^-	Disk kapanışının tümleyeni
∂A	A kümesinin sınırı
CA	A kümesinin tümleyeni
$d\sigma_z$	$dxdy,\ z = x + iy$ $(Alan\ diferansiyeli)$
$\\|f\\|$	f fonksiyonunun normu
$K(z,\zeta)$	Bergman çekirdek fonksiyonu
$\pi_n(z)$	Bieberbach polinomları
$\pi_{n,p}(z)$	Genelleşmiş Bieberbach polinomları
$P_j(z)$	Bölgenin ortogonal polinomları
$\omega(\delta)$	Süreklilik modülü
$L^p(L)$	Lebesque Uzayı
$E^p(G)$	Smirnov Uzayı
$E^p(G,\omega)$	ω ağırlıklı Smirnov Uzayı
$\varepsilon_n(f)_p$	$E^p(G)$ uzaylarında en iyi yaklaşım sayısı

ÖNSÖZ

Yüksek Lisans eğitim programım süresince gerek ders aşamasında gerek tez hazırlama aşamasında bana büyük emeği olan, her ihtiyacım olduğunda kıymetli zamanını ayıran değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Daniyal M. İsrafilzade'ye teşekkürlerimi sunarım.

Emeklerinden dolayı değerli hocam Prof. Dr. Ali Güven'e, öğrencisi olmakla insanın kendisini değerli ve ayrıcalıklı sayabileceği Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ortamı ve değerli hocaları ile tanışmama vesile olan hocam Doç. Dr. Burçin Oktay'a teşekkür ederim.

Bu süreçte bana katlanan manevi desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim aile üyelerime ve arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

1. ÖN BİLGİLER

1.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

1.1.1 Tanım X ve Y topolojik uzaylar olmak üzere, X'den Y'ye birebir, örten, sürekli ve tersi de sürekli bir dönüşüme *Homeomorfizm* denir.

1.1.2 Tanım Kompleks düzlemde birim çemberin bir homeomorfik dönüşüm altındaki görüntüsüne *Jordan eğrisi* denir$[1]$.

1.1.3 Tanım $\gamma := z\,(t)\;\;(a \le t \le b)$ kompleks düzlemde bir eğri ve $P := \{(t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n) : a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b\}$, $[a,b]$ kapalı aralığının bir bölüntüsü olsun. Eğer

$$\sup \sum_{\nu=1}^{n} \left| z(t_\nu) - z(t_{\nu-1}) \right| < \infty$$

ise γ eğrisine *sonlu uzunluklu eğri* denir. Burada supremum P kümesi üzerinden alınır $[2, s.246]$.

1.1.4 Tanım $a \le t \le b$ olduğunda $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ türevi var ve sürekli ise γ eğrisi sürekli diferansiyellenebilirdir $\left(C^1 \textit{sınıfındandır}\right)$ denir. Bununla birlikte $a \le t \le b$ için $z'(t) \ne 0$ oluyorsa γ eğrisine *düzgün eğri* denir.

Her düzgün eğri sonlu uzunlukludur $[3, s.154]$.

1.1.5 Tanım $[a,b]$ kapalı aralığının sonlu sayıda noktası dışında, $z'(t)$ türevi var, sürekli ve $z'(t) \ne 0$ ise eğriye *parçalı düzgün eğri*denir.

Her parçalı düzgün eğri sonlu uzunlukludur $[3, s.155]$.

1.1.6 Tanım $z = z(s)$, L eğrisinin parametrik bir denklemi olsun. Eğer $z''(s)$ fonksiyonu sınırlı ise $z = z(s)$ denkleminin ifade ettiği eğriye *sınırlı eğrilikli eğri* denir $[4]$.

1.1.7 Tanım γ, sonlu uzunluklu kapalı bir Jordan eğrisi olsun. $z \in \gamma$ için z merkezli r yarıçaplı daireyi $D(z,r)$ ile gösterelim. Eğer

$$\sup_{z\in\gamma} \left| D(z,r) \cap \gamma \right| \leq cr$$

eşitsizliği z noktası ve r yarıçapından bağımsız belirli bir c sabiti için sağlanıyorsa γ eğrisine *regüler eğri* veya *Carleson eğrisi* denir $[1, s.2]$.

Bütün düzgün eğriler Carleson eğrisidir.

$f(x) = x^{\alpha} \sin(1/x)$, $x > 0$, $f(0) = 0$ ve $\gamma := \{ z \in C : z = x + if(x), 0 \leq x \leq 1 \}$ ise γ eğrisi

$\alpha \geq 2$ olduğunda Carleson eğrisidir,

$1 < \alpha < 2$ olduğunda Carleson eğrisi değildir fakat sonlu uzunlukludur,

$0 < \alpha \leq 1$ olduğunda sonlu uzunluklu değildir $[1, s.5]$.

1.1.8 Tanım γ, $z = z(t)$, $t \in [a,b]$ parametrik gösterimine sahip sonlu uzunluklu bir eğri olsun. $0 < \alpha \leq 1$ olduğunda $\left| z(t_1) - z(t_2) \right| \leq c \left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha}$ olacak şekilde bir c sabiti bulunuyorsa γ eğrisine α dereceden *Lipschitz eğrisi* denir ve $\gamma \in Lip\alpha$ olarak gösterilir $[5, s.35]$.

1.1.9 Tanım Karmaşık düzlemde bağlantılı ve açık kümeye *bölge* denir$[6]$.

1.1.10 Tanım B, C de bir bölge olmak üzere $f : B \rightarrow C$ sürekli dönüşümü verilsin. γ_1 ve γ_2 eğrileri $z_0 \in B$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan düzgün iki eğri olmak üzere; Bu eğrilerin resim eğrileri olan $f(\gamma_1)$ *ve* $f(\gamma_2)$

eğrileride $w_0 = f(z_0)$ da aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorlarsa f dönüşümü z_0 da bir *konform dönüşümdür* denir.

Her $z_0 \in B$ noktası için f konform ise *f*, B de konformdur denir. Ölçülebilir bir A kümesinin konform dönüşüm altındaki görüntüsünün alanı

$$|f(A)| = \iint_A |f'(z)|^2 dz$$

olarak bulunur. $f : D \to C$ konform dönüşümü için $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$ ise

$$|f(D)| = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n |a_n|^2$$

olur$[6, s.4]$.

1.1.11 Tanım C Jordan eğrisi bir $[1/p < |z| < p]$, $p > 1$ halkasının analitik ve bire-bir $\varphi(z)$ $(|z| = 1)$ dönüşümü altındaki görüntüsü ise C eğrisine *analitik eğri* denir$[6, s.41]$.

1.1.12 Tanım Eğer G bölgesinin sınırı analitik bir eğri ise, $D := \{w : |w| < 1\}$ olmak üzere G bölgesinin Dye her konform dönüşümü, $\overline{G}$' yi kapsayan belirli bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir. Aynı şekilde G 'nin sınırı analitik eğri ise, $C\overline{G}$ bölgesinin $C\overline{D}$' ye her konform dönüşümü CG' yi kapsayan bir bölgeye bire-bir ve analitik olarak genişletilebilir $[6, s.41]$.

1.1.13 Tanım Eğer G bölgesinin sınırı bir Jordan eğrisi ise, G nin D' ye her konform dönüşümü $\overline{G}$'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir. Aynı şekilde, G nin sınırı bir Jordan eğrisi ise, $C\overline{G}$'nin $C\overline{D}$'ye olan her konform dönüşümü CG'ye bire-bir ve sürekli olarak genişletilebilir $[6, s.24]$.

1.1.14 Tanım Sınırlı bir bölgenin sınırı bağlantılı ise bölgeye *basit bağlantılı*, sınırı bağlantısız ise *katlı bağlantılı bölge* denir $[2, s.67]$.

1.1.15 Teorem (Riemann Konform Dönüşüm Teoremi) $G \subset C$ sınırı en az iki noktadan oluşan basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Bu durumda, G bölgesini D'ye

$$f(z_0) = 0 \text{ ve } f'(z_0) > 0$$

koşulları altında resmeden bir tek f konform dönüşümü vardır $[2, s.8]$.

1.1.16 Tanım G, basit bağlantılı bir bölge, G_∞ ise $C\overline{G}$'nin sonsuz noktasını içeren bileşeni olsun. Eğer G ve G_∞ aynı sınıra sahipseler, G bölgesine *Carathedory bölgesi* denir $[2, s.38]$.

Her Jordan bölgesi bir Carathedory bölgesidir, fakat yarıçapı çıkarılmış bir disk Carathedory bölgesi olamaz. Ayrıca Carathedory bölgeleri polinom yaklaşımı (PA) özelliğine sahiptirler $[5, s.17]$.

1.1.17 Teorem (Sınırsız Bölgeler İçin Cauchy İntegral Formülü) G, sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi ile sınırlanmış sınırlı bir bölge ve γ bunun pozitif yönlendirilmiş sınırı olsun. f, CG kapalı bölgesinde analitik bir fonksiyon ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \begin{cases} f(\infty) - f(z); & z \in C\overline{G} \\ f(\infty); & z \in G \end{cases}$$

olur $[3, s.486]$.

1.1.18 Teorem (Green Formülü) G, parçalı düzgün ve pozitif yönlendirilmiş, sınırlı, basit veya katlı bağlantılı bir bölge olsun. f ve g, G'de analitik, $\overline{G}$ de sürekli türevlenebilen fonksiyonlar olmak üzere

$$\iint_G \overline{fg'}dm = \frac{1}{2i}\int_{\partial G} f\overline{g}dz$$

olur$[5, s.10]$.

1.1.19 Teorem (Cauchy-Green Formülü) G , sınırı sonlu uzunluklu bir Jordan eğrisi olan sınırlı bir bölge, f ise G bölgesinde sürekli kısmi türevlere sahip ve $\overline{G}$ 'de sürekli bir fonksiyon olsun. $f_{\bar{z}}$ fonksiyonu G üzerinde integrallenebilir ise, her $z \in G$ için

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{\pi}\iint_G \frac{f_{\bar{\zeta}}}{\zeta - z}d\sigma_z$$

olur$[7, s.10]$.

1.1.20 Teorem (Lebesgue Monoton Yakınsaklık Teoremi) $\{f_n\}$ sınırlı bir G bölgesinde integrallenebilen fonksiyonların integrallenebilen bir g fonksiyonu için $|f_n| \leq g$ koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. Bu durumda hemen her yerde $f_n \to f$ ise f integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty}\iint_G f_n d\sigma_z = \iint_G f d\sigma_z$$

olur [8, s. 172].

1.1.21 Teorem (Weierstrass Teoremi) G ,basit bağlantılı bir bölge ve (g_k) G bölgesinde analitik fonksiyonların bir dizisi olsun. (g_k) dizisi G bölgesinin kompakt alt kümelerinde bir g fonksiyonuna düzgün yakınsak ise $z_0 \in G$ ve $\overset{\frown}{z_0 z} \subset G$, z_0 ve $z \in G$ noktalarını birleştiren bir yay olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\overset{\frown}{zz_0}} g_k(z)dz = \int_{\overset{\frown}{zz_0}} g(z)dz$$

olur.

1.2 Bazı Fonksiyonel Uzaylar

1.2.1 Tanım G, sonlu uzunluklu bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $1 < p < \infty$ olsun. $|f|^p$ nin Lebesgue integrallenebilir olduğu f ölçülebilir, kompleks değerli fonksiyonların kümesine *Lebesgue uzayı* denir ve $L^p(L)$ olarak gösterilir $[9, s.169]$.

1.2.2 Tanım G, sonlu uzunluklu bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve f, G 'de analitik bir fonksiyon olsun. Eğer

$$\int_{L_n} |f(z)|^p |dz| \leq M$$

olacak şekilde G bölgesinde, G' nin kompakt altkümelerini sınırlayan ve G'nin sınırına yaklaşan bir $L_1, L_2, ..., L_n, ...$ sonlu uzunluklu Jordan eğrileri dizisi varsa f fonksiyonu $E^p(G)$ *Smirnov uzayındandır* denir $[9, s.169]$.

Özel halde $G := D$ seçilirse $E^p(G)$ uzayları, bilinen $H^p(D)$ Hardy uzaylarına eşit olur.

$L^p(L)$ ve $E^p(G)$ uzayları $p \geq 1$ olduğunda

$$\|f\|_{E^p(G)} := \|f\|_{L^p(L)} := \left(\int_L |f(z)|^p |dz| \right)^{1/p}$$

normuna göre birer Banach uzaylarıdır.

1.2.3 Tanım L sonlu uzunluklu bir eğri bir olsun. $\omega : L \to [0, \infty]$ ölçülebilir fonksiyonu için $\omega^{-1}(\{0, \infty\})$ kümesi sıfır ölçüme sahip ise ω fonksiyonuna *ağırlık* denir$[10]$.

1.2.4 Tanım ω, L'de bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$L^p(L,\omega) := \left\{ f \in L^1(L) : |f|^p \omega \in L^1(L) \right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya ω*-ağırlıklı* L^p *uzayı* denir[11].

1.2.5 Tanım: ω, L'de bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$E^p(G,\omega) := \left\{ f \in E^1(G) : f \in L^p(L,\omega) \right\}$$

biçiminde tanımlanan uzaya G'de analitik fonksiyonların p. mertebeden ω-ağırlıklı *Smirnov uzayı* denir[11].

1.2.6 Tanım (Hölder Eşitsizliği) $1 < p,q < \infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. L sonlu uzunluklu bir eğri olmak üzere; $f \in L^p(L)$ ve $g \in L^q(L)$ ise $fg \in L^1(L)$ dir ve

$$\int_L |fg||dz| \le \left(\int_L |f|^p |dz| \right)^{1/p} \left(\int_L |g|^q |dz| \right)^{1/q} = \|f\|_p \|g\|_q$$

olur[8, s.256].

1.2.7 Tanım ω fonksiyonu L eğrisi üzerinde bir ağırlık fonksiyonu olsun.

$$\sup_{z\in L,\ r>0} \sup \left(\frac{1}{r} \int_{L\cap D(z,r)} \omega(\zeta)|d\zeta| \right) \left(\frac{1}{r} \int_{L\cap D(z,r)} [\omega(\zeta)]^{-1/(p-1)} |d\zeta| \right)^{p-1} < \infty$$

oluyorsa ω fonksiyonu A_p*-Muckehoupt* koşulunu sağlıyor denir.

L üzerinde A_p-Muckehoupt koşulunu sağlayan bütün ağırlık fonksiyonlarının kümesi $A_p(L)$ ile gösterilir [1, s.28].

1.2.8 Tanım T birim çember, $g \in L^p(T,\omega)$ ve $\omega \in A_p(T)$ olsun. g fonksiyonu için $w \in T$ olduğunda aşağıdaki şekilde bir öteleme tanımlayalım:

$$g_h(w) := \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} g\left(we^{it}\right)dt,\ 0 < h < \pi,$$

olsun.

$[11, s.110]$ gereği

$$\left\|g_h\right\|_{L^p(T,\omega)} \leq c_p \left\|g\right\|_{L^p(T,\omega)}\ 1 < p < \infty$$

yazılabilir.

$$g \in L^p(T,\omega) \text{ ve } \omega \in A_p(T)$$

ise

$$\Omega_{p,\omega}(g,.) : [0,\infty) \to [0,\infty)$$

$$\Omega_{p,\omega}(g,\delta) := \sup\left\{\left\|g - g_h\right\|_{L^p(T,\omega)}, h \leq \delta\right\},\quad 1 < p < \infty$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona p. mertebeden ω*-ağırlıklı integral süreklilik modülü* denir$[12]$.

$\Omega_{p,\omega}(g,.)$ sürekli, negatif olmayan, azalmayan ve

$$\lim_{\delta \to 0} \Omega_{p,\omega}(g,\delta) = 0$$

$$\Omega_{p,\omega}(g_1 + g_2,.) \leq \Omega_{p,\omega}(g_1,.) + \Omega_{p,\omega}(g_2,.)$$

koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

1.2.9 Tanım G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ de sürekli olan f fonksiyonlarının oluşturduğu uzayı $A\left(\overline{G}\right)$ ile göstereceğiz. Bu uzayda norm

$$\|f\|_{\overline{G}} := \max_{z \in G}|f(z)| < \infty$$

şeklinde tanımlanır.

$h \in L^p(C)$, $1 < p < \infty$ ve $Th(\zeta) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} -\frac{1}{\pi} \iint\limits_{|z-\zeta|>\varepsilon} \frac{h(z)}{(z-\zeta)^2} dz$ olsun. Bu operatörle ilgili aşağıdaki teorem geçerlidir.

1.2.10 Teorem (Calderon-Zygmund eşitsizliği) $h \in L^p(C)$ ve $1 < p < \infty$ ise

$$\|Th\|_p \le c_p \|h\|_p$$

olur. Burada c_p sadece p 'ye bağlı olan bir sabittir$[6, s.106]$.

1.2.11 Teorem H bir Hilbert uzay ve $S \subset H$ olsun. $u, v \in S$ olduğunda

$$(u,v) = \begin{cases} 1, & u = v \\ 0, & u \neq v \end{cases}$$

oluyorsa S altkümesine H 'de bir ON sistem (orthonormal system) denir$[5, s.25]$.

$\{v_j\}$, H Hilbert uzayında bir ON sistem olsun. $\{v_j\}$ nin lineer bileşimleri H 'de yoğun ise yani; $x \in H$ 'ye istenen kadar yakınsa $\{v_j\}$ sistemine *CON sistem* (Tam orthonormal sistem) denir$[5, s.25]$.

1.3 En İyi Yaklaşım Sayıları

1.3.1 Tanım $G \subset C$, L sınırlı bir bölge, $\omega \in A_p(L)$, $f \in E^p(G,\omega)$ ve $1 \le p < \infty$ olsun. $P_n\,(n = 1,2,...)$ derecesi n'yi aşmayan polinomlar olmak üzere, f fonksiyonuna $E^p(G,\omega)$ uzayındaki en iyi yaklaşım sayısı

$$E_n^{\circ}(f,\omega)_p := \inf_{p_n} \|f - p_n\|_{L^p(L,\omega)}$$

formülü ile, $L^p(G)$ uzaylarındaki en iyi yaklaşımsayısı ise $f \in L^p(G)$ için

$$\varepsilon_n(f)_p := \inf_{p_n} \|f - p_n\|_{L^p(G)}$$

formülü ile tanımlanır $[10]$.

1.3.2 Teorem G, düzgün sınırlı bir bölge, $1 < p < \infty$, $\omega \in A^p(L)$ ve $f \in E^1(G)$ olsun. Bu durumda $\forall n = 1, 2, \ldots$ için

$$\varepsilon_n(f, \omega)_p \leq c n^{-1/p} E_n^{\circ}(f, \omega)_p$$

olur.

Özel halde $\omega = |\varphi'|^{-1/p}$ ise

$$\varepsilon_n(f)_p \leq c n^{-1/p} E_n^{\circ}\left(f, 1/|\varphi'|^{1/p}\right)_p$$

elde edilir$[10]$.

1.4 Kvazikonform Dönüşümler ve Eğriler

1.4.1 Tanım $I \subset R$ ve $f : I \to R$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için ikişer ikişer arakesitleri boş olan ve uç noktaları I 'ya ait olan $(a_i, b_i) \subset I$ aralıkları için $\sum_i |b_i - a_i| < \delta$ olmak üzere $\sum_i |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta = \delta(\varepsilon, f)$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu I 'da *mutlak süreklidir* denir $[13, s.20]$.

Her mutlak sürekli fonksiyon süreklidir.

1.4.2 Tanım $G \subset C$ bir bölge ve u, G 'de tanımlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer, kapanışı G 'de bulunan ve kenarları x ve y eksenlerine paralel olan her R dikdörtgeni için, u fonksiyonu R 'de çizilen yatay ve düşey doğru parçalarının hemen hepsi üzerinde mutlak sürekli ise, u fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde *mutlak süreklidir* denir.

Bir $h:G \to C$ fonksiyonunun reel ve sanal bileşenleri G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli iseler, h fonksiyonu G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir denir ve $h \in ACL(G)$ ile gösterilir$[13, s.127]$.

$G \subset C$ bir bölge ve $z = x + iy$ olmak üzere $h(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda u ve v fonksiyonları $x = c$ ve $y = c$ doğruları üzerinde sırasıyla y ve x 'e bağlı fonksiyonlardır ve bu doğruların hemen hepsi üzerinde mutlak süreklidirler. Bu nedenle, G 'de hemen her yerde u_x ve v_x kısmi türevleri vardır. Aynı şekilde G 'de hemen her yerde u_y ve v_y kısmi türevleri vardır. Bundan dolayı G 'de hemen her yerde

$$h_z = \frac{1}{2}(h_x - ih_y) \text{ ve } h_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(h_x + ih_y)$$

kısmi türevleri mevcuttur.

1.4.3 Tanım $G \subset C$ bir bölge, $h:G \to C$ bir homeomorfizm ve $K \geq 1$ olsun. Aşağıdaki iki koşul sağlanıyorsa h dönüşümüne G üzerinde bir K-kvazikonform dönüşüm denir$[14, s.24]$.

1–) h, G bölgesinde doğrular üzerinde mutlak süreklidir.

2–) $k = \dfrac{K-1}{K+1}$ olmak üzere, G 'de hemen her yerde $|h_{\bar{z}}| \leq k|h_z|$ olur.

Bir kvazikonform dönüşümün bir yansıma ile bileşkesine *yön değiştiren kvazikonform dönüşüm* veya *antikvazikonform dönüşüm* denir$[14, s.16]$.

1.4.4 Teorem Kvazikonform dönüşümlerin aşağıdaki özellikleri vardır:

a–) Konform dönüşümler $1-$*kvazikonform* dönüşümlerdir. Tersine, $1-$*kvazikonform* dönüşümler de konformdurlar.

b–) $K-$*kvazikonform* bir dönüşümün tersi de $K-$*kvazikonformdur*.

$c-)$ K_1-*kvazikonform* bir dönüşüm ile K_2-*kvazikonform* bir dönüşümün bileşkesi K_1K_2-*kvazikonformdur* $[14,s.22]$.

1.4.5 Teorem w birim diskin kendine $K-$*kvazikonform* dönüşümü ve $w(0)=0$ olsun. z_1 ve z_2 keyfi iki nokta olmak üzere

$$|w(z_1)-w(z_2)|\le c|z_1-z_2|^{1/K}\ ,\ |z_1|\le 1,\ |z_2|\le 1,\ K\ge 1$$

olur.

1.4.6 Teorem G bölgesinin $K-$*kvazikonform* w dönüşümü verilsin. Bu dönüşüm G 'nin her kompakt M altkümesinde $1/K$. mertebeden Hölder sınıfındandır:

$$|w(z_1)-w(z_2)|\le c|z_1-z_2|^{1/K},\ \forall z_1,z_2\in M$$

$[14,s.51]$.

1.4.7 Sonuç Birim diskin birim diske her kvazikonform dönüşümü kapalı disklerin homeomorfizmine genişletilebilir$[14,s.47]$.

1.4.8 Teorem G ve G' kvazikonform sınırlı iki bölge ise G bölgesinden G' bölgesine her konform dönüşüm düzlemin düzleme kvazikonform dönüşümü olarak genişletilebilir$[13,s.98]$.

G bölgesinin sınırı $K-$*kvazikonform* ise genişletilmiş fonksiyon K^2-*kvazikonform* olur.

1.4.9 Teorem (Goldstein teoremi) G basit bağlantılı, sınırlı bir bölge ve w, G bölgesinin $K-$*kvazikonform* bir dönüşümü olsun. Bu durumda ölçülebilen her $M\subset G$ kümesi ve her $\delta\in(0,1/K)$ için

$$mes(w(m))\le c(mesm)^{\delta}$$

olacak şekilde $c=c(K)$ sabiti mevcuttur$[15]$.

1.4.10 Tanım $\overline{C}$ nin kendi üzerine $K-$*kvazikonform* bir dönüşümü altında bir çemberin görüntüsüne $K-$*kvazikonform* eğri denir.

Her kvazikonform eğri bir Jordan eğrisidir. Ayrıca her analitik eğri bir kvazikonform eğridir. Bir kvazikonform eğrinin 2 boyutlu Lebesgue ölçümü sıfırdır. 1 Boyutlu Lebesgue ölçümü ise sonlu olmayabilir. Bir başka deyişle kvazikonform bir eğri sonlu uzunluklu olmayabilir. Sivri açısı olan eğriler kesinlikle kvazikonform değildir$[13, s.104]$.

1.4.11 Tanım L kvazikonform eğrisiyle sınırlı bir G bölgesi verilmiş olsun. G bölgesini G bölgesinin dışına $\left(G \rightarrow C\overline{G}\right)$, G bölgesinin dışını G bölgesine $\left(C\overline{G} \rightarrow G\right)$ resmeden ve L'de idantik olan $y: C \rightarrow C$ antikvazikonform dönüşüme L eğrisine *kvazikonform yansıma* denir$[13, s.98]$.

Bir bölgenin sınırı kvazikonform bir eğri ise mutlaka kvazikonform bir yansıma vardır. Ayrıca bir Jordan eğrisinin kvazikonform bir yansımaya sahip olabilmesi için gerek ve yeter koşul kvazikonform bir eğri olmasıdır.

2. BERGMAN UZAYLARI

2.1 Bergman Uzayları ve Özellikleri

$G \subset C$ bir bölge , f , G bölgesinde analitik bir fonksiyon ve

$$I[f] := \iint_{G} |f(z)|^2 d\sigma_z \tag{2.1}$$

olsun. Yukarıdaki integral bölge üzerinden bir Lebesgue integralidir. Bu integral Riemann integrallerinin bir limiti olarak da düşünülebilir.

$\{G_n\}$, G ye yaklaşan ve aşağıdaki özelliklere sahip olan altkümelerin bir dizisi olsun.

$i-)$ Her G_n kümesi sınırı sonlu sayıda Jordan eğrilerinden oluşan bir bölgedir.

$ii-)$ Her n için $G_n \subset G_{n+1} \subset G$ dir.

$iii-)$ Her $P \in G$ için $n > n_0$ olduğunda $P \in G_n$ olacak şekilde bir $n_0 = n_0(P)$ vardır.

$$\phi_n(z) := \begin{cases} |f(z)|^2, & z \in \overline{G_n} \\ 0, & z \in G / \overline{G_n} \end{cases}$$

olsun. G içinde $\phi_n \uparrow |f|^2$ olduğu gösterilebilir. Lebesgue monoton yakınsaklık teoremi gereğince

$$\iint_{G} \phi_n d\sigma_z \to \iint_{G} |f|^2 d\sigma_z \; (n \to \infty)$$

olur. Buradan

$$\iint_{\overline{G_n}} |f|^2 d\sigma_z \to I[f] = \iint_{G} |f|^2 d\sigma_z \; (n \to \infty)$$

yazılabilir. Bu son ifade (2.1) integralinin Riemann integrallerinin bir limiti olarak yazılabileceğini gösterir.

Özel halde

$$G=\{z:r<|z|<R\}\ (0\leq r<R<\infty)$$

ve $f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n z^n\ (z\in G)$

ise $I[f]=\int_r^R\int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\rho^n e^{in\phi}\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\overline{a_m}\rho^m e^{-im\phi}\right)\rho d\phi d\rho$

$$=\int_r^R\int_0^{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}d\phi d\rho$$

$$=2\pi\int_r^R\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\rho^{2n+1}d\rho$$

$$=2\pi\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|^2\int_r^R\rho^{2n+1}d\rho$$

olur .

Yukarıdaki 2. eşitlik serilerin $\rho\in(r,R)$ olduğunda ϕ ye göre mutlak ve düzgün yakınsaklığından, sonuncu eşitlik ise terimleri negatif olmayan seriler için toplam ve integral işlemlerinin yerdeğişiminin mümkünlüğünden elde edilir.

$r=0$ için f, $0<|z|<R$ çıkarılmış komşuluğunda analitik ve $I[f]<\infty$ ise $n<0$ için $a_n=0$ dır. Bilindiği gibi

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\ n=0,\pm1,\pm2,...$$

dir. Burada $\gamma=\{z:|z|=\rho\ \rho\in(r,R)\}$ ve f , γ üzerinde sınırlı olduğundan

$$|a_n|=\left|\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{f(z)}{z^{n+1}}dz\right|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma}\frac{|f(z)|}{|z|^{n+1}}|dz|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}\int_{\gamma}|dz|$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{M}{\rho^{n+1}}2\pi\rho=\frac{M}{\rho^{n}}$$

olur.

Sonuncu eşitlikte $n<0$ olduğunda ρ sıfıra giderken $\rho^{n}\to\infty$ ve dolayısıyla $a_n\to 0$ olur. Böylece $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z_n$ yazılabilir. Bu ise $z=0$ noktasının kaldırılabilir ayrık singüler nokta olduğunu gösterir. Böylece

$$I[f]=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|an|^2\int_{r}^{R}\rho^{2n+1}d\rho$$

$$=2\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\frac{1}{2n+2}\left(R^{2n+2}-r^{2n+2}\right)$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|^2\frac{1}{n+1}\left(R^{2n+2}-r^{2n+2}\right)$$

ve burada $r=0$ olduğunu dikkate alırsak

$$I[f]=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|a_n|^2}{n+1}R^{2n+2} \tag{2.2}$$

olur.

2.1.1 Tanım G 'de analitik ve $I[f]<\infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının kümesi $L^2(G)$ ile gösterilir. Bir başka ifadeyle

$$L^2(G)=\{f : f, G\ de\ analitik\ ve\ I[f]<\infty\}$$

olur $[5]$.

Buradan $A(\overline{G}) \subset L^2(G)$ olduğu görülür.

f, G bölgesinde analitik ve $p \geq 1$ olduğunda

$$\|f\|_p := \left\{ \iint_G |f(z)|^p d\sigma_z \right\}^{1/p}$$

normunu tanımlayalım. Eğer $\|f\|_p < \infty$ ise $f \in L^p(G)$ olur.

2.1.2 Lemma $f \in L^p(G)$ ise $z_0 \in G$ ve $d_{z_0} := dist(z_0, \partial G)$ olduğunda

$$|f(z)|^p \leq \frac{1}{\pi d_{z_0}^{\;2}} \|f\|_p^{\;p}$$

olur.

İspat Sadelik için $z_0 = 0$ olduğunu varsayalım. Bu durumda f fonksiyonu $D(0, d_0)$ diskinde analitiktir. Bundan dolayı $0 < r < d_0$ olduğunda

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|^p d\theta$$

eşitsizliği sağlanır $[16, s.432]$.

Bu eşitsizliğin her iki tarafını rdr ile çarptıktan sonra $[0, d_0]$ aralığı üzerinden integrallersek

$$\frac{|f(0)|^p d_0^{\;2}}{2} \leq \frac{1}{2\pi} \iint_{D(0,d_0)} |f(z)|^p d\sigma_z$$

buradan ise

$$|f(0)|^p \leq \frac{1}{\pi d_0^{\;2}} \|f\|_p^{\;p}$$

elde edilir. 2.1.2 lemmasında $p = 2$ alınırsa $f \in L^2(G)$, $z \in G$ ve $d_z := dist(z, \partial G)$ olduğunda

$$|f(z)|^2 \le \frac{I[f]}{\pi d_z^{\,2}} \tag{2.3}$$

elde edilir.

$f,g \in L^2(G)$ $f,g \in L^2(G)$ keyfi iki fonksiyon olsun.

$|a+b|^2 \le 2\left(|a|^2+|b|^2\right)$ eşitsizliğinden

$$|af(z)+bg(z)|^2 \le 2\left(|a|^2|f(z)|^2+|b|^2|g(z)|^2\right) \tag{2.4}$$

olduğu görülür.

2.1.3 Tanım: $f,g \in L^2(G)$ olmak üzere

$$(f,g):=\iint_G f(z)\overline{g(z)}d\sigma_z$$

kompleks sayısına f ve g nin *iç çarpımı* denir$[5]$.

2.1.4 Teorem: $L^2(G)$ bir Hilbert uzayıdır.

İspat: İspat için $L^2(G)$' nin bir tam iç çarpım uzayı olduğunun gösterilmesi gerekir.

a) $L^2(G)$ bir lineer uzaydır. $\alpha,\beta \in C$ ve $f,g \in L^2(G)$ olduğunda (2.4) eşitsizliğinden $\alpha f+\beta g \in L^2(G)$ dir. Dolayısıyla $L^2(G)$ bir lineer uzaydır.

b) $L^2(G)$ aşağıdaki özellikleri sağladığından bir iç çarpım uzayıdır.

$(f,f) \ge 0$ ve $(f,f)=0 \Leftrightarrow f=0$

$(f+g,h)=(f,h)+(g,h)$

$(f,g)=\left(\overline{g,f}\right)$

$(\alpha f,g)=\alpha(f,g)$

c) $L^2(G)$ bir normlu uzaydır ve bu uzayda norm

$$\|f\| := (f,f)^{1/2} = \sqrt{\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z}$$

şeklinde tanımlanır.

d) $L^2(G)$ bu norma göre tamdır

İspat: $L^2(G)$ de alınan bir Cauchy dizisinin yine $L^2(G)$ de yakınsaklığını göstererek $L^2(G)$ nin tam olduğunu gösterebiliriz. $\{f_n\}$, $L^2(G)$ de bir Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall\varepsilon > 0$ için $n,m > N$ olduğunda

$$\|f_n - f_m\|^2 = (f_n - f_m, f_n - f_m)$$

$$= \iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı vardır. (2.3) ifadesine göre G 'nin her kompakt B altkümesi için $d = dist(B, \partial G)$ olduğunda

$$|f_n(z) - f_m(z)|^2 \leq \frac{\iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z}{\pi d_z^2} < \frac{\varepsilon}{\pi d^2} \quad (z \in B)$$

Bu ise, $\{f_n\}$ fonksiyonel dizisinin G 'nin her B kompakt altkümesinde belirli bir F analitik fonksiyonuna düzgün yakınsaklığını gerektirir.

$$f_n(z) \Rightarrow F(z) \; (n \to \infty, \quad z \in B \subset G)$$

$$\iint_G |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon \Rightarrow \iint_B |f_n - f_m|^2 d\sigma_z < \varepsilon \; (n,m > N)$$

Sonuncu eşitsizlikte $m \to \infty$ için limit alınırsa $\iint_B |f_n - F|^2 d\sigma_z \leq \varepsilon (n > N)$ olur. Bu bağıntı her B kompakt altkümesi için yazılabildiğinden $\iint_G |f_n - F|^2 d\sigma_z < \varepsilon$ olur. Bu eşitsizlik $F \in L^2(G)$ ve $\|f_n - F\| \to 0 \; (n \to \infty)$ olduğunu gösterir. Böylece $L^2(G)$ de her Cauchy dizisi yakınsaktır.

2.2 Bergman Çekirdek Fonksiyonu

Bu bölümde kompleks analizin önemli fonksiyonlarından biri olan Bergman çekirdek fonksiyonu tanımlanarak, bu fonksiyonun bazı özellikleri incelenecektir.

H bir Hilbert uzayı, L bu uzayda sınırlı lineer fonksiyonel olsun. Bilindiği gibi bu fonksiyonel H uzayında

$$L(x) = (x, u) \; (x \in H)$$

olacak şekilde bir tek $u \in H$ fonksiyonu yardımıyla tanımlanır.

G keyfi bir bölge olmak üzere $H = L^2(G)$ ve $\zeta \in G$ olsun. (2.3) ifadesine göre

$$|f(\zeta)| \leq \frac{\|f\|}{\sqrt{\pi} d_\zeta}, \; d_\zeta = dist(\zeta, \partial G)$$

olduğundan

$$L(f) := f(\zeta) \; (f \in L^2(G))$$

fonksiyoneli sabit her $\zeta \in G$ için $L^2(G)$ de sınırlıdır. Böylece

$$f(\zeta) = (f, u_\zeta) \; (f \in L^2(G))$$

olacak şekilde bir tek $u_\zeta \in L^2(G)$ fonksiyonu vardır.

2.2.1 Tanım $K(z, \zeta) := u_\zeta(z)$ olarak tanımlanan fonksiyona G 'nin *Bergman çekirdek fonksiyonu* denir.

Bu tanım gereği $\zeta \in G$ olduğunda $f(\zeta)$ fonksiyoneli

$$f(\zeta)=(f,K(.,\zeta))=\iint_G f(z)\overline{K(z,\zeta)}d\sigma_z \quad (f\in L^2(G)) \tag{2.5}$$

şeklinde yazılabilir.

K çekirdek fonksiyonunun tanımından aşağıdaki özellikler elde edilir.

1–) $\|K(.,\zeta)\|^2 = K(\zeta,\zeta)\ (\zeta\in G)$

2–) $z_1,z_2\in G$ için $K(z_1,z_2)=\overline{K(z_2,z_1)}$

Burada 1. özellik (2.5) eşitliğinde $f:=K(.,\zeta)$ yazılarak görülür. (2.5) eşitliğinde $f=K(.,z_2)$ ve $\zeta=z_1$ yazılırsa

$$\begin{aligned}
K(z_1,z_2)&=(f,K(.,\zeta))=(K(.,z_2),K(.,z_1))\\
&=\iint_G K(z,z_2)\overline{K(z,z_1)}d\sigma_z\\
&=\overline{\iint_G \overline{K(z,z_2)}K(z,z_2)d\sigma_z}\\
&=\overline{\iint_G K(z,z_1)\overline{K(z,z_2)}d\sigma_z}\\
&=\overline{K(z_2,z_1)}
\end{aligned}$$

olduğu görülür ve böylece 2. özellik de ispatlanmış olur.

$\zeta\in G$ için $M_\zeta=\{f\in L^2(G): f(\zeta)=1\}$ olsun.

Çekirdek fonksiyonu ile M kümesinde tanımlı bir minimizasyon problemi arasındaki ilişki aşağıdaki teorem ile verilir.

2.2.2 Teorem $\min_{f\in M}\|f\|=\|f_0\|$ olacak şekilde bir tek $f_0\in M_\zeta$ vardır ve

$$f_0(z)=K(z,\zeta)/K(\zeta,\zeta), \qquad K(z,\zeta)=f_0(z)/\|f_0\|^2$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat $\forall f \in M \subset L^2(G)$ için (2.5) özelliğine göre $f(\zeta)=(f,K(.,\zeta))$ olur. $f(\zeta)=1$ olduğundan Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılarak $f \in M$ olduğunda

$$1=f(\zeta)=(f,K(.,\zeta))\leq\|f\|.\|K(.,\zeta)\|=\|f\|\sqrt{K(\zeta,\zeta)}$$

olduğu görülür. Sonuncu eşitsizlikte eşitlik sadece

$$f=f_0=CK(.,\zeta)$$

olduğunda sağlanır. Bu durumda

$$1=f_0(\zeta)=CK(\zeta,\zeta)$$

bağıntısından $C=1/K(\zeta,\zeta)$ ve sonuç olarak

$$f_0(z)=K(z,\zeta)/K(\zeta,\zeta)$$

olduğu görülür. Aynı zamanda sonuncu eşitlikten

$$K(z,\zeta)=f_0(z)K(\zeta,\zeta)=f_0(z)/\|f_0\|^2$$

elde edilir.

2.3 Bergman Çekirdek Fonksiyonunun Seri Açılımı

Bazı özel durumlarda çekirdek fonksiyonunun açık biçimde ifadesi elde edilebilir. Bununla birlikte çekirdek fonksionunun $\{\phi_j\}$ *CON* sisteme göre bir seri açılımını da bulmak mümkündür.

$$\gamma_j=(K(.,\zeta),\phi_j)=\overline{\phi_j(\zeta)}\;(j=1,2,.....)$$

Fourier katsayıları olmak üzere $K(z,\zeta)$ fonksiyonuna $[5, Teorem 3]$ uygulandığında aşağıdaki teorem ifade edilir.

2.3.1 Teorem $\{\phi_j\}$ keyfi bir *CON* sistem ise $\forall \zeta \in G$ için Bergman çekirdek fonksiyonu

$$K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\phi_j(\zeta)}\phi_j(z) \quad (z,\zeta \in G) \tag{2.6}$$

seri açılımına sahiptir. Bu seri G 'nin her B kompakt altkümesinde düzgün yakınsaktır.

Özel halde $G=D=\{z:|z|<1\}$ ise

$$P_n(z)=\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n \; (n=0,1,2,...)$$

olacağından , D nin çekirdek fonksiyonu

$$K(z,\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}z^n\sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\overline{\zeta}^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{\pi}\left(z\overline{\zeta}\right)^n$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{1}{\left(1-z\overline{\zeta}\right)^n} \tag{2.7}$$

olur.

Yukarıdaki seri $\zeta \in D$ olduğunda z 'ye göre $\overline{D}$ de yakınsar. Fakat $\zeta, \partial D$ ye yaklaştıkça yaklaşım hızı gittikçe kötüleşir. (2.5) ve (2.7) eşitliklerinden

$$f(\zeta)=\frac{1}{\pi}\iint_D \frac{f(z)}{\left(1-\bar{z}\zeta\right)^2}dm_z \; (\zeta \in D)$$

elde edilir ve bu ifade $\forall f \in L^2(G)$ için yazılabilir.

2.4 Bergman Uzaylarında integral Gösterimi

Aşağıdaki teorem $f \in A(\overline{G})$ durumunda ilk defa $V.I.$ Belyi tarafından ispatlanmış, daha sonra $I.M.$ Batchaev bu teoremi Bergman uzaylarına genişletmiş ve aynı zamanda integral gösteriminin sağlanması için gerekli ve yeterli koşulu elde etmiştir.

2.4.1 Teorem G, sınırlı, basit bağlantılı bir kvazidisk olsun.

$$f(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_{C\overline{G}} \frac{(foy)(\zeta)}{(\zeta - z)^2} y_{\overline{\zeta}}(\zeta)\, d\sigma_\zeta,$$

integral gösteriminin sağlanması için gerek ve yeter koşul f fonksiyonunun G bölgesinde analitik ve $\iint_G |f(z)| d\sigma_z$ integralinin sonlu olmasıdır $[17, s.110]$.

2.5 Bergman Çekirdek Fonksiyonu ile Konform Dönüşümler Arasındaki Bağıntılar

Bu kısımda Bergman çekirdek fonksiyonu ile Konform dönüşümler arasındaki bağıntılar incelenecektir. $G \subset C\,(G \neq C)$ basit bağlantılı bir bölge, ζ, G de sabit bir nokta ve F, G'den D'ye

$$F(\zeta) = 0, \qquad F'(\zeta) > 0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm olsun. Bilindiği gibi (Riemann konform dönüşüm teoremine göre) bu koşulları sağlayan bir tek F konform dönüşümü vardır.

2.5.1 Teorem F konform dönüşümü ile K çekirdek fonksiyonu arasında

$$F'(z) = \sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}} K(z,\zeta), \qquad K(z,\zeta) = \frac{1}{\pi} F'(z) F'(\zeta) \; (z \in G)$$

bağıntıları vardır.

İspat $F'(z)F'(\zeta)/\pi$ nin $K(z,\zeta)$ ya eşit olduğunu görebilmek için $F'(z)F'(\zeta)/\pi$ nin (2.5) eşitliğini sağladığını göstermek gerekir.

$f \in L^2(G)$ ve $G_\rho := \{z : |F(z) < \rho|\}$ $(0 < \rho < 1)$ olsun. $z \in \partial G_\rho$ için $\overline{F(z)}F(z) = \rho^2$ olduğundan Green formülü gereğince

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}d\sigma_z = \frac{1}{2i}\int_{\partial G_\rho} f\overline{F}dz$$

$$= \frac{1}{2i}\int_{\partial G_\rho} f\frac{\rho^2}{F}dz$$

$$= \frac{\rho^2}{2i}\int_{\partial G_\rho} \frac{f}{F}dz$$

olur. $F(\zeta) = 0$ olduğundan ζ noktası $\frac{f}{F}$ fonksiyonu için bir aykırı noktadır. Buna göre sonuncu integral, Rezidü teoremi kullanılarak yazıldığında

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}d\sigma_z = \frac{\rho^2}{2i}2\pi i \operatorname{Res}\left(\frac{f}{F},\zeta\right)$$

olur. f ve F, ζ da analitik $f(\zeta) \neq 0$, $F(\zeta) = 0$ ve $F'(\zeta) \neq 0$ olduğundan $\frac{f}{F}$ fonksiyonu ζ 'da basit kutba sahiptir. Bu durumda $\operatorname{Res}\left(\frac{f}{F},\zeta\right) = \frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$ olur. Böylece

$$\iint_{G_\rho} f\overline{F'}d\sigma_z = \frac{\rho^2}{2i}2\pi i\frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$$

$$= \rho^2\pi\frac{f(\zeta)}{F'(\zeta)}$$

elde edilir.

Buradan

$$f(\zeta)=\frac{1}{\rho^2}\iint_{G_\rho} f(z)\frac{\overline{F'(z)}F'(\zeta)}{\pi}d\sigma_z$$

ve $\rho \to 1$ için limit alınırsa

$$f(\zeta)=\iint_{G} f(z)\frac{\overline{F'(z)}F'(z)}{\pi}d\sigma_z$$

olur. Bunu (2.5) eşitliği ile karşılaştırdığımızda

$$K(z,\zeta)=\frac{F'(z)F'(\zeta)}{\pi} \tag{2.8}$$

olduğu görülür.

Sonuncu eşitlikte z yerine ζ yazılırsa

$$K(\zeta,\zeta)=\frac{\left(F'(\zeta)\right)^2}{\pi}$$

ve buradan

$$F'(\zeta)=\sqrt{\pi}\sqrt{K(\zeta,\zeta)}$$

olur. $F'(\zeta)$ nin bu ifadesi (2.8) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$F'(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}K(z,\zeta)$$

elde edilir. Böylece teoremin ispatı tamamlanır.

Özet olarak, G bölgesinden D'ye

$$F(\zeta)=0,\ F'(\zeta)>0$$

koşullarını sağlayan F konform dönüşümü, K çekirdek fonksiyonunun (2.6) seri açılımı kullanılarak;

$$F(z)=\sqrt{\frac{\pi}{K(\zeta,\zeta)}}\int_{v=\zeta}^{z}K(v,\zeta)dv\ (z\in G)$$

biçiminde ifade edilir.

Eğer f,G den $\{w:|w|<r\}$ diskine

$$f(\zeta)=0\,,\qquad f'(\zeta)=1$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm ise $r=\left(\pi K(\zeta,\zeta)\right)^{-1/2}$ olur ve f konform dönüşümü

$$f(z)=\frac{F(z)}{F'(\zeta)}=\frac{1}{K(\zeta,\zeta)}\int_{v=\zeta}^{z}K(v,\zeta)\ (z\in G) \tag{2.9}$$

olarak bulunur.

3. BİEBERBACH POLİNOMLARI

Bu bölümde matematik ve mekaniğin birçok alanlarında sık kullanılan Riemann konform dönüşüm fonksiyonunun yaklaşık olarak bulunabilmesi için kullanılan bir polinomlar sınıfı tanımlanacak ve yaklaşım özellikleri incelenecektir.

3.1 Bieberbach Polinomları ve özellikleri

Bergman çekirdek fonksiyonunun (2.6)'daki ifadesinde serinin $n-1$. kısmi toplamı

$$K_{n-1}(z,\zeta)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{P_j(\zeta)}P_j(z)\ (n=1,2,...)$$

şeklinde olur. Burada $P_j(z)$'ler j=0,1,2..., G bölgesine göre belirlenen ortonormal polinomlardır. G bölgesinden $\{w:|w|<r\}$ diskine $f(\zeta)=0, f'(\zeta)=1$ koşullarını sağlayan f konform dönüşümünün (2.9)'daki ifadesinde Bergman çekirdek fonksiyonunun seri açılımındaki $n-1$. kısmi toplamı yazıldığında n dereceli $(n=0,1,2,...)$ polinomlar dizisi elde edilir. Bu polinomlar dizisi f'ye G bölgesinin kompakt altkümelerinde düzgün olarak yakınsar.

3.1.1 Tanım G, Jordan bölgesi, $P_j(z)$, j=0,1,2,..., G nin ortonormal polinomları ve

$$K_{n-1}(z,\zeta)=\sum_{j=0}^{n-1}\overline{P_j(\zeta)}P_j(z)\ (n=1,2,...)$$

olsun.

$$\pi_n(z):=\frac{1}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}\int_{v=\zeta}^{z}K_{n-1}(v,\zeta)\,dv,\qquad (n=1,2,...)$$

polinomlarına (G,ζ) çifti için *Bieberbach polinomları* denir.

Sonuncu eşitlikte $z=\zeta$ yazıldığında kolayca görülür ki $\pi_n(\zeta)=0$ dır. $\pi_n(z)$ 'in türevi alınırsa

$$\pi_n'(z)=\frac{1}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}K_{n-1}(z,\zeta)$$

olur. Buradan da $z=\zeta$ yazıldığında $\pi_n'(\zeta)=1$ olduğu görülür.

Bu polinomların $P_n(\zeta)=0$, $P_n'(\zeta)=1$ koşullarını sağlayan n. dereceden P_n polinomlarının sınıfında $\|P_n'\|$ integralini minimize ettiklerini göstermek mümkündür. Bir başka ifadeyle,

$$\|\pi_n'\|=\min\|P_n'\|=\min\left(\iint_G |P_n'|^2 d\sigma_z\right)^{1/2}$$

dir. Diğer yandan $n\to\infty$ için $\pi_n(z)$ polinomlarının $f(z)$ fonksiyonuna G 'nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsadığı görülür. Gerçekten , 2.3.1 teorem gereği

$$K(z,\zeta)=\sum_{j=1}^{\infty}\overline{\phi_j(\zeta)}\phi_j(z)$$

açılımı G 'nin kompakt altkümelerinde düzgün yakınsak olduğundan

$$\pi_n'(z)=\frac{K_{n-1}(z,\zeta)}{K_{n-1}(\zeta,\zeta)}$$

ve

$$f'(z)=\frac{K(z,\zeta)}{K(\zeta,\zeta)}$$

eşitlikleri kullanılarak $\pi_n'(z)$ polinomlarının $f'(z)$ fonksiyonuna kompakt altkümelerde düzgün yakınsak olduğu görülür. Buradan ise Weierstrass teoremine göre $\pi_n(z)$ polinomlarının $f(z)$ fonksiyonuna kompakt altkümelerde düzgün yakınsaklığı elde edilir.

Bieberbach polinomlarının konform dönüşüm fonksiyonuna yaklaşım problemleri ve bölgenin geometrik özelliklerine göre yaklaşım hızının değerlendirilmesi ile ilgili çeşitli bilimsel araştırmalar yapılmıştır. Bu konuda ilk çalışan M.V. Keldych dir (1939). Keldych G bölgesinin sınırı, sınırlı eğrilikli düzgün Jordan eğrisi olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ için n 'den bağımsız belirli bir $c = c(\varepsilon) > 0$ sabiti için

$$\|\varphi - \pi_n\|_{\bar{G}} \leq \frac{c}{n^{1-\varepsilon}} \tag{3.1}$$

olduğunu ispatlamıştır. Burada φ, G bölgesinden $\{w : |w| < r_0\}$ diskine $\varphi(z_0) = 0$, $\varphi'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşümdür. Keldych, bu çalışmasında sınırının yoğun bir alt noktaları kümesinde Bieberbach polinomlarının ıraksadığı, sonlu uzunluklu sınıra sahip bir bölge örneği verir. Keldych'den sonra S.N.Mergelyan (1951) Bieberbach polinomlarının yaklaşımı üzerine çalışmış, Keldych'in koyduğu sınırın sınırlı eğrilikli olma koşulunu kaldırarak, L (bölgenin sınırı) sadece düzgün Jordan eğrisi olduğunda $\forall\varepsilon > 0$ için n 'den bağımsız belirli bir $c = c(\varepsilon)$ sabiti için

$$\|\varphi - \pi_n\|_{\bar{G}} \leq \frac{c}{n^{1/2-\varepsilon}} \tag{3.2}$$

olduğunu göstermiştir[18]. (Mergelyan (3.2) bağıntısındaki $\frac{1}{2} - \varepsilon$ sayısı yerine $1 - \varepsilon$ sayısının da alınabileceğini ifade etmiştir.)

Bieberbach polinomlarının yaklaşımı ile ilgili çalışmalar Keldych ve Mergelyan'dan sonra Wu Xue-Mou [19] ile devam etmiştir. Onun bu konuda elde ettiği sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilebilir.

L, $z = z(s)$ $(0 \leq s \leq l)$ gösterimine sahip düzgün bir eğri olsun. Burada s, L 'nin yay uzunluğu ve l, L 'nin uzunluğudur. L eğrisine $z(s)$ noktasındaki teğet doğru ile pozitif reel eksen arasındaki açı $\theta(s)$ olsun. L, düzgün eğri olduğundan, $\theta(s)$, $0 < s < l$, üzerinde süreklidir.

3.1.2 Teorem L düzgün Jordan eğrisi ve $\theta^{(p)}(s) \in Lip(\alpha)$, $p \in N$, ise n'den bağımsız bir c sabiti için $0 < \alpha < 1$ olduğunda

$$\left\|\varphi(z) - \pi_n(z)\right\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\frac{1}{2}+\alpha} \log n \tag{3.3}$$

ve $\alpha = 1$ olduğunda ise

$$\left\|\varphi(z) - \pi_n(z)\right\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{1}{n}\right)^{p+\frac{3}{2}} (\log n)^2 \tag{3.4}$$

olur.

L sınırlı eğrilikli bir eğri ise $\theta'(s)$ sınırlıdır. Böylece $\theta(s)$ $0 \leq s \leq l$ üzerinde 1. dereceden Lipschitz koşulunu sağlar. Sonuç olarak teoremin ikinci eşitsizliğinde $p = 0$ yazılırsa

$$\left\|\varphi(z) - \pi_n(z)\right\|_{\overline{G}} \leq c\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{3}{2}} (\log n)^2 \tag{3.5}$$

olur $[19]$. Buradan görülür ki (3.5) eşitsizliğinin sağlamış olduğu hız (3.1) eşitsizliğinin sağlamış olduğu hızdan daha yüksektir. Böylece Wu Xue-Mou tarafından elde edilen sonucun Keldych'in elde ettiği sonuçtan daha iyi olduğu görülür.

L, G bölgesinin sınırı olsun. Eğer L, sonlu uzunluklu, $z = z(s)$ gösterimine sahip ve p. türevi $Lip\alpha$ $(p = 1, 2, \ldots\ 0 < \alpha \leq 1)$ sınıfından ise bunu $L \in C(p, \alpha)$ şeklinde yazacağız. Bu tip değişik geometrik özelliklere sahip eğrilerle sınırlı bölgelerde, Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızlarının değerlendirilmeleri, Siuetin (1974) tarafından araştırılmış ve bulunan sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilmiştir.

3.1.3 Teorem π_n Bieberbach polinomları ,

$a-)$ $L \in C(p, \alpha)$ ve $p + \alpha \geq \frac{7}{4}$ ise

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \le c\frac{\log n}{n^{p+\alpha}} \tag{3.6}$$

b–) $L \in C(1,\alpha)$ ve $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{3}{4}$ ise

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \le \frac{c}{n^{3\alpha-1/2}} \tag{3.7}$$

c–) $L \in C(1,\alpha)$ ve $\alpha > 0$ ise

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \le \frac{c(\log n)^{1/2}}{n^{\alpha+1/2}} \tag{3.8}$$

d–) L sınırı düzgün ve sınırlı eğrilikli ise

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \le \frac{c(\log n)^2}{n^2} \tag{3.9}$$

bağıntılarını sağlarlar.

$L \in C(p,\alpha)$ olduğunda $\varphi(z)$ fonksiyonu $\overline{G}$ de p. kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi^{(p)}(z) \in Lip\alpha$ olur. Buna göre $p+\alpha \ge \frac{7}{4}$ olduğunda (3.6) eşitsizliğinin sağladığı hız (3.3) dekinden daha yüksektir. Gerçekten $\theta^{(p)}(s) \in Lip\alpha$ ise $\varphi(z)$ fonksiyonu $\overline{G}$ de $p+1$. kez sürekli diferansiyellenebilir ve $\varphi^{(p+1)}(z) \in Lip\alpha$ olur. G bölgesinin parçalı düzgün sınırlı olması durumunda Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızının değerlendirildiği ilk çalışmanın Simonenko tarafından yapıldığı bilinir. Simonenko çalışmasında G bölgesini Lipschitz bölgesi olarak alır (bölge bir poligon da olabilir) ve bu özellikteki bir bölgede bütün n doğal sayıları için

$$\|\varphi(z)-\pi_n(z)\|_{\overline{G}} \le cn^{-\gamma} \tag{3.10}$$

eşitsizliğini sağlayan $c > 0$ ve $\gamma > 0$ sabitlerinin olduğunu gösterir.

Birinci bölümde kvazikonform eğrilerden bahsedilmişti. Şüphesiz kvazikonform eğriler sınıfı Lipschitz eğrilerini de içine alan oldukça geniş bir eğri sınıfıdır. G

bölgesinin kvazikonform sınırlı bir bölge olması durumunda V.V. Andrievski, Bieberbach polinomlarının yaklaşım hızını değerlendirmiş, böylece Simonenko'nun yukarıda verilen çalışmasını kvazikonform eğrilere genişletmiştir. Andrievski'nin bu önemli çalışması aşağıdaki teorem ile ifade edilmektedir.

3.1.4 Teorem G bölgesi kvazikonform sınırlı bir bölge olsun. Bu durumda n'den bağımsız $\gamma > 0$ ve $c > 0$ sabitleri için

$$\|\varphi(z) - \pi_n(z)\|_{\bar{G}} \le cn^{-\gamma} \tag{3.11}$$

olur[20]. Burada γ, G bölgesinin kvazikonformluk katsayısına bağlı bir sabittir.

Simonenko ve Andrievski'nin yukarıda verilen çalışmaları Gaier (1988) tarafından sırasıyla 3.1.5 teorem ve 3.1.6 teoremde verilen sonuçlarla geliştirilmiştir.

3.1.5 Teorem G bölgesi, L sınırı parçalı düzgün Jordan eğrisi olan bir bölge ve $\lambda\pi(0 < \lambda < 2)$, L'nin keyfi iki düzgün yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda $0 \in G$ ye göre π_n Bieberbach polinomları

$$\gamma < \min\left(\frac{\lambda}{2-\lambda}, \frac{1}{2}\right)$$

özelliğindeki γ sayısı için

$$\|\varphi(z) - \pi_n(z)\|_{\bar{G}} \le cn^{-\gamma}\,(n = 1,2,...) \tag{3.12}$$

bağıntısını sağlarlar[21].

Özel halde dış açılar $\ge \frac{2\pi}{3}$ ise $\frac{\lambda}{2-\lambda} \ge \frac{1}{2}$ olduğundan (3.12) eşitsizliği $\gamma < \frac{1}{2}$ için sağlanır. Bu ise Mergelyan'ın, düzgün sınırlı eğriler için (3.2) bağıntısı ile verilen sonucunu genişletir.

ψ, $\{w : |w| > 1\}$ bölgesini L eğrisinin dışına konform olarak resmeden ve

$$\psi(\infty) = \infty, \quad \psi'(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir dönüşüm olsun. Bilindiği gibi $1 \le |w_1|, |w_2| \le 2$ ve belirli bir c sabiti için

$$|\psi(w_1) - \psi(w_2)| \le c|w_1 - w_2|^{\beta}$$

ise $\psi \in Lip\beta \ (0 < \beta \le 1)$ dir. Aynı şekilde $z_1, z_2 \in \overline{G}$ ve belirli bir c sabiti için

$$|\varphi(z_1) - \varphi(z_2)| \le c|z_1 - z_2|^{\alpha}$$

ise $\varphi \in Lip\alpha \ (0 < \alpha \le 1)$ dir.

L eğrisi kvazikonform bir eğri olmak üzere, $\varphi \in Lip\alpha$ ve $\psi \in Lip\beta$ ise bunu $L \in K(\alpha, \beta)$ olarak göstereceğiz.

3.1.6 Teorem G , L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $L \in K(\alpha, \beta)$ $(0 < \alpha, \beta \le 1)$ ise, $(G, 0)$ çiftine göre π_n Bieberbach polinomları, $\gamma < \frac{\alpha\beta}{2}$ biçiminde bir γ sayısı için (3.12) bağıntısını sağlarlar $[21]$.

L , düzgün eğri ise $0 < \alpha, \beta < 1$ şeklinde her α, β için $L \in K(\alpha, \beta)$ olduğundan (3.12) bağıntısı bir $\gamma < \frac{1}{2}$ için sağlanır ki bu Margelyan'ın (3.2) ile gösterilen sonucunu verir.

Şimdi Gaier'in, bölge sınırının parçalı analitik Jordan eğrisi olması durumunda elde ettiği sonuçları inceleyelim.

3.1.7 Teorem G , dış sivri açıları olmayan, parçalı analitik bir L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $\lambda\pi\,(0 < \lambda < 2)$ L 'nin iki analitik yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda $\gamma = \frac{\lambda}{2 - \lambda}$ olduğunda $(G, 0)$ çiftine göre π_n Bieberbach polinomları için

$$\|\varphi - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(\log n)\frac{1}{n^{\gamma}} \qquad (3.13)$$

olur.

$\gamma > \dfrac{\lambda}{2-\lambda}$ olduğunda (3.13) bağıntısının sağlanmadığı $[21]$'gösterilmiştir.

Şimdi V.V. Andrievski ve D. Gaier'in birlikte yaptıkları bir çalışmayı incelemeden önce bazı tanımlar vereceğiz.

3.1.8 Tanım Bir L Jordan yayı, birim diskin, belirli bir kvazidiske φ konform dönüşümü altında, $[-1,+1]$ aralığının görüntüsü ise L Jordan yayına *kvazianalitik yay* denir. Kvazianalitik bir yay kvazidüzgündür. Yani $\forall z_1, z_2 \in L$ için $\gamma(z_1,z_2)$, z_1 ve z_2 arasındaki yay olduğunda belirli bir c sabiti için

$$|\gamma(z_1,z_2)| \leq c|z_1 - z_2|$$

koşulunu sağlar.

3.1.9 Tanım Bir L Jordan eğrisi verildiğinde

1–) L, bir kvazikonform eğri

2–) L, sonlu sayıda kvazianalitik yaydan oluşur

koşulları sağlayanıyorsa L eğrisine *parçalı kvazianalitik eğri* denir.

L 'nin iki kvazianalitik yaylarının kesiştiği noktalar $z_j = (j = 1,2,...m)$ ile gösterilsin. z_j'de φ fonksiyonunun sürekliliği

$$\omega_j(\delta) := \sup\left\{|\varphi(z) - \varphi(z_j)| : |z - z_j| \leq \delta, z \in \overline{G}\right\}$$

fonksiyonuyla ölçülür.

ϕ, L'nin dışının $\Delta = [\tau : |\tau| > 1]$ bölgesine

$$\phi(\infty) = \infty \ , \quad \phi'(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm ve ψ, ϕ'nin tersi olsun.

$\phi(z_j)=\tau_j$'de ψ dönüşümünün sürekliliği

$$\eta_j(\delta):=\sup\left\{\left|\psi(\tau)-\psi(\tau_j)\right|:\ \left|\tau-\tau_j\right|\le\delta,\tau\in\overline{\Delta}\right\}$$

fonksiyonu ile ölçülür.

G bölgesinin parçalı kvazianalitik Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge olması durumunda Bieberbach polinomlarının yakınsaklığının incelendiği aşağıdaki teoremler, V.V. Andrievski ve Gaier'in $[22]$'deki çalışmasından alınmıştır.

3.1.10 Teorem G bölgesi parçalı kvazianalitik Jordan eğrisiyle sınırlı ise Bieberbach polinomları için

$$\left\|\varphi-\pi_n\right\|_{C(\overline{G})}\le const.\max_j\omega_j\left[\mu_j\left(\frac{1}{n}\right)\right].\sqrt{\log n}\ (n=2,3,\ldots)\qquad(3.14)$$

olur.

Yukarıda bulunan sonuç ile Gaier'in $[23]$'de bulduğu sonuç arasındaki bağlantıyı görebilmek için;

L, parçalı analitik ve $z_j\left(0<\lambda_j<2\right)$ köşelerinde $\lambda_j\pi$ dış açısına sahip olan bir eğri olsun. Bu durumda pozitif c_1 ve c_2 sabitleri için,

$$\omega_j(\delta)\le c_1\delta^{1/(2-\lambda_j)}\ \text{ve}\ \mu_j(\delta)\le c_2\delta^{\lambda_j}$$

olur ve (3.14) bağıntısından

$$\left\|\varphi-\pi_n\right\|_{C(\overline{G})}\le const.n^{-\gamma}.\sqrt{\log n},\qquad \gamma=\min\frac{\lambda_j}{2-\lambda_j}$$

bulunur. Burada eşitsizliğin sağındaki $\sqrt{\log n}$ yerine Gaier'in $[23]$ deki çalışmasında $\log n$ çarpanı gelmiştir.

Gaier'in, G bölgesi sivri açısı olmayan, parçalı analitik sınırlı bir bölge ve $\lambda\pi(0<\lambda<2)$ sınırın analitik yaylarının oluşturduğu en küçük dış açı olduğunda bulduğu sonuçlar daha önce verilmişti. Şimdi Gaier'in sınırın köşelerinde

$\pi / N(N=1,2,\ldots)$ biçiminde iç açılar olması durumunda, Bieberbach polinomlarının G bölgesini birim diske dönüştüren φ_0 konform dönüşümüne yaklaşımlarıyla ilgili sonuçlarını inceleyelim. Burada G bölgesinin sınırı yine parçalı analitik olduğu ve dış sivri açısının olmadığı kabul edilir. Sınırın ζ_j ile gösterilen köşelerinde iç açılar $\alpha_j\pi\left(0<\alpha_j<2\right)$, dış açılar ise $\lambda_j\pi$ ile gösterilsin. Buradan $\alpha_j+\lambda_j=2$ olduğu görülür.

Gaier daha önceki çalışmalarında bölgenin sınırı $\pi / N(N=1,2,\ldots)$ biçiminde $\alpha_j\pi$ iç açılarına sahip olmadıkça $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ üssünün artırılamayacağını göstermişti.

Gaier'in aşağıda verilen çalışmasında ise özel halde, $\frac{\lambda}{2-\lambda}$ üssünün artırılabileceği gösterilmiştir. Belirli N_j doğal sayıları için $\alpha_j=\frac{1}{N_j}$ olduğunda, ζ_j köşelerine sınırın özel köşeleri, diğer durumlarda ise normal köşeleri diyelim.

$$\gamma_j=\begin{cases}\dfrac{\lambda_j}{2-\lambda_j}, & \zeta_j \text{ } \textit{normal köşe ise} \\ \dfrac{2\lambda_j}{2-\lambda_j}, & \zeta_j \text{ } \textit{özel köşe ise}\end{cases}$$

olsun. Burada $\lambda_j=2-\alpha_j$ dir.

Bulunan sonuçlar aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

3.1.11 Teorem G bölgesi parçalı analitik sınırlı, sivri açısı olmayan ve köşelerinde $\alpha_j\pi$ dış açılarına sahip olan bir bölge olsun. Bu durumda $\gamma=\min\gamma_j$ için

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{C(\bar{G})}=O\left(n^{-\gamma}\right)\left(n\rightarrow\infty\right) \tag{3.15}$$

eşitliği vardır.

Örneğin; G bölgesinin sınırı, dik açılarda kesişen dört analitik yaydan oluşsun. Burada $\alpha_j = \frac{1}{2}$, $\lambda_j = \frac{3}{2}$ ve bütün köşeler özel köşelerdir. $\gamma_j = 6$ olduğundan yukarıdaki teorem gereği

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O\left(n^{-6}\right)\left(n \to \infty\right)$$

olur.

Bazı bölgeler için yakınsaklık derecesi daha da iyileştirilebilir. Örneğin ∂G sınırı regüler bir eğri ise $f, \overline{G}$ de analitik olacaktır ve $q < 1$ için $[5, s.35]$ gereği

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O\left(q^n\right)\left(n \to \infty\right) \text{ olur.}$$

Bununla birlikte yukarıdaki teoremde verilen γ üssü artırılamaz.

3.1.12 Teorem Bölgenin sınırı 3.1.11 teoreminde ifade edilen biçimdeyse $\gamma = \min \gamma_j$ olduğunda

$$\|\varphi_0 - \pi_n\|_{C(\overline{G})} = O(\log n).\left(n^{-\gamma}\right) \qquad \left(n \to \infty\right) \tag{3.16}$$

bağıntısı sağlanır.

Burada da γ üssü genelde artırılamaz.

Köşelerin $\pi / N(N = 1, 2, ...)$ biçiminde iç açılara sahip olması durumunda (3.15) (3.16) bağıntılarındaki yakınsama hızı (3.12) ve (3.13) bağıntılarındaki yakınsama hızından daha yüksektir.

Kvazikonform eğrilerde sıfır açı bulunmaz. Andrievski'nin, kvazikonform eğrilerde Bieberbach polinomlarının yaklaşımı ile ilgili çalışması daha önce verilmişti. Andrievski sıfır açısı olan bölgeler üzerinde de çalışmış ve bu özellikteki bölgelerde Bieberbach polinomlarının yaklaşımı üzerine ilk sonuçları vermiştir[24]. Pritsker ise onun yöntemini kullanarak, benzeri sonuçları iç sıfır açılı bölgeler için ispatlamıştır[25]. Daha sonra Andrievski ve Pritsker birlikte [26]'da yaptıkları çalışmada, iç sıfır açılı belirli bölgelerde bazı sonuçlar elde etmişler ve bir iç sıfır açıda Bieberbach polinomlarının ıraksadığı Keldysh-tipi bölge örneği vermişlerdir. Bu çalışmada iç sıfır açıyı oluşturan yayların dokunma dereceleri incelenir ve bu dereceye göre Bieberbach polinomlarının yakınsak veya ıraksaklığı araştırılır.

G , parçalı kvazianalitik L eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun ve eğrinin kvazianalitik yayları $z_j \in L, \quad j = 1, \ldots, m$ noktalarında birleşsin. Eğer, z_j noktasının yerel koordinat sistemindeki bir komşuluğu için,

$$(x, y) \in L_j \Rightarrow c_1 x^p \le y \le c_2 x^P$$

ve

$$(x, y) \in L_{j+1} \Rightarrow -c_2 x^P \le y \le -c_1 x^p$$

oluyorsa $L_j \subset L$ ve $L_{j+1} \subset L$ kvazianlitik yayları x^p -tipi iç sıfır açı oluştururlar. Burada $P \ge p > 1$ ve $c_1, c_2 > 0$ dır. Verilen notasyonlar dikkate alındığında Bieberbach polinomlarının yakınsaması üzerine sonuçlar aşağıdaki teoremlerde ifade edilir.

3.1.13 Teorem G bölgesinin sınırı, $\{z_j\}$ noktalarında x^p -tipi iç sıfır açılara sahip olan parçalı kvazianalitik bir eğri ise

$$\|\varphi - \pi_n\|_{C(\overline{G})} \le C q^{n^r}, \qquad n \in N$$

olacak şekilde $q = q(G), \quad r = r(G), \quad 0 < q, r < 1$ ve $C = C(G)$ sayıları vardır.

Yukarıdaki teoremde $r = 1$ olamaz. Çünkü $r = 1$ olursa $q < 1$ olacağından $[5, s.27]$ gereği φ, $\overline{G}$ de analitik olacaktır.

3.1.14 Teorem Parçalı düzgün eğri ile sınırlı ve sınırdaki sivri açıda Bieberbach polinomlarının ıraksadığı bir bölge vardır ve bu bölgenin sınırı sivri noktanın belirli bir komşuluğu dışında analitiktir.

3.2 Kvazikonform Sınırlı Bölgelerde Genelleşmiş Bieberbach Polinomlarının Yaklaşım Özellikleri

$G \subset C, L$ Jordan eğrisiyle sınırlı basit bağlantılı bir bölge olsun. Riemann konform dönüşüm teoremine göre G bölgesinin $\{w : |w| < r_0\}$ diskine $\varphi(z_0) = 0,\ \varphi'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır. Diskin r_0 yarıçapına, G 'nin z_0 'a göre konform yarıçapı denir.

$z \in \psi(w)$, $\varphi(z)$ dönüşümünün tersi olsun ve G 'de verilen bir f fonksiyonu ve $p > 0$ için,

$$\|f\|_{\overline{G}} := \sup\left\{|f(z)|,\ z \in \overline{G}\right\},$$

$$\|f\|_{L_p(G)}^p := \iint_G |f(z)|^p d\sigma_z \quad , \tag{3.17}$$

$$\|f\|_{L_p^1(G)}^p := \iint_G |f'(z)|^p d\sigma_z ,$$

olsun.

Bilindiği üzere $\varphi_p(z) := \int_{z_0}^{z} \left[\varphi'(\zeta)\right]^{2/p} d\zeta \quad (z \in G)$ fonksiyonu $f(z_0) = 0,\ f'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan ve G 'de analitik fonksiyonların sınıfında $\|f\|_{L_p^1(G)}^p \quad (p > 0)$ integralini minimize eder[16].

π_n, $p_n(z_0) = 0, p_n'(z_0) = 1$ koşullarını sağlayan ve derecesi $\leq n$ olan p_n polinomlarının sınıfı olsun. π_n 'de $\left\|\varphi_p - p_n\right\|_{L_p^1(G)}^p$ integralini minimum yapan bir $\pi_{n,p}(z)$ polinomu vardır $[27]$. Bu $\pi_{n,p}(z)$ extremal polinomlarına (G, z_0) çifti için genelleştirilmiş Bieberbach polinomları denir. Özel halde $p = 2$ için bu polinomlar bilinen Bieberbach polinomlarıdır. Eğer G Carathedory bölgesi ise G , polinom yaklaşımı özelliğine sahiptir. Diğer bir deyişle $n \to \infty$ olduğunda $\left\|\varphi_p - P_n\right\|_{L_p^1(G)} \to 0$

olacak şekilde en az bir $\{P_n\}$ polinom dizisi vardır. Buradan Bieberbach polinomlarının extremal özelliği gereği $\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \to 0$ yazmak mümkündür.

2.1.2 lemma kullanılarak $\forall B \subset G$ için

$$\left|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right| \le \frac{\left\|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right\|_{L_p(G)}}{\left(\pi d^2\right)^{1/p}} \qquad d = dist\left(B, \partial G\right) \qquad (3.18)$$

yazılabileceğinden G 'nin kompakt altkümelerinde düzgün olarak $\pi_{n,p}'(z) \to \varphi_p'(z)$ olur. Buradan da Weierstrass teoremi sonucu B 'nin kompakt altkümelerinde

$$\lim_{n\to\infty} \pi_{n,p}(z) = \varphi_p(z)$$

eşitliği sağlanır.

$G \subset C, K-$ kvazikonform sınırlı bir bölge, $D := \{w : |w| < 1\}$ ve $\varphi_1(z), C\overline{G} := \overline{C} \setminus \overline{G}$ den $C\overline{D} := \overline{C} \setminus \overline{G}$ ye

$$\varphi_1(\infty) = \infty, \qquad \varphi_1'(\infty) > 0$$

koşullarını sağlayan bir konform dönüşüm olsun. φ ve φ_1 dönüşümleri, G 'den sırasıyla $C\overline{G}$ ye ve $\overline{C}$ ye K^2 kvazikonform genişlemeye sahiptirler. ψ ve ψ_1, sırasıyla φ ve φ_1 dönüşümlerinin tersleri olsun.

G bölgesinde analitik olan bir fonksiyon aynı zamanda G 'de sürekli olduğundan onun kompakt altkümelerinde düzgün süreklidir. Böylece yukarıda tanımlamış olduğuımuz $\varphi_p(z)$ fonksiyonu da G 'de sürekli, G 'nin kompakt altkümelerinde ise düzgün sürekli olur. φ_p nin $\overline{G}$ ye sürekli genişletilebilenliğini söyleyebilmemiz için onun G 'de düzgün sürekli olduğunun gösterilmesi gerekir.

3.2.1 Lemma G, $K-$ kvazikonform sınırlı bir bölge ve $p > 1$ ise φ_p, G 'de düzgün süreklidir.

İspat z ve ζ G 'de keyfi iki nokta, $w := \varphi(z)$, $\tau := \varphi(\zeta)$

$\left(|z-\zeta|,\ dist(z,L)\ \textit{yeterince küçük ve}\ |w| \le |\tau|, \arg w \le \arg \tau\right)$ olsun.

Bu taktirde

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| = \left|\int_{z_0}^{z}[\varphi'(\zeta)]^{2/p}\,d\zeta - \int_{z_0}^{\zeta}[\varphi'(\zeta)]^{2/p}\,d\zeta\right|$$

$$= \left|\int_{s(z,\zeta)}[\varphi'(\xi)]^{2/p}\,d\xi\right|$$

$$= \left|\int_{s(w,\tau)}[\psi'(t)]^{1-2/p}\,dt\right|$$

olur. Burada $s(z,\zeta)$, G'de z ve ζ yı birleştiren herhangi bir sonlu uzunluklu Jordan yayı olmak üzere $s(w,\tau) := \varphi(s(z,\zeta))$ dir. Analitik fonksiyonun integrali yoldan bağımsız olduğundan sonuncu integralin değerlendirilmesi için

$$s_1 := \{t : \arg t = \arg w; |w| \ge |t| \ge |w| - |w-\tau|\},$$

$$s_2 := \{t : \arg w \le \arg t \le \arg \tau; |t| = |w| - |w-\tau|\},$$

$$s_3 := \{t : \arg t = \arg \tau; |w| - |w-\tau| \le |t| \le |\tau|\}$$

$$s(w,\tau) := s_1 \cup s_2 \cup s_3, \quad s(z,\zeta) := \psi(s(w,\tau))$$

olsun.

$$c_1\frac{dist(\xi,L)}{r_0-|t|} \le |\psi'(t)| \le c_2\frac{dist(\xi,L)}{r_0-|t|}$$

$[6, s.22]$ bağıntısı kullanılarak $t \in s(w,t)$ için

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_3 \int_{s(w,\tau)}\left[\frac{dist(\xi,L)}{r_0-|t|}\right]^{1-2/p}|dt| \tag{3.19}$$

elde edilir.

Diğer yandan $\varphi(z), \overline{G}$ de düzgün olarak $1/K^2$ dereceli Hölder koşulunu sağladığından $\xi_L := \psi\left[r_0\varphi(\xi)/|\varphi(\xi)|\right]$ için

$$\left|\psi(t)-\psi\left(\frac{r_0(t)}{|t|}\right)\right| = |\xi-\xi_L| \le c_4\left|t-\frac{r_0 t}{|t|}\right|^{1/K^2} = c_4\left(r_0-|t|\right)^{1/K^2}$$

bulunur.

Eğer $p \ge 2$ ise $1-\dfrac{2}{p} \ge 0$ dır ve $dist(\xi, L) \le |\xi-\xi_L|$ olduğu dikkate alınırsa sonuncu eşitlik ve (3.19) eşitliğinden

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_5 \int_{s(w,\tau)} \left[\frac{\left(r_0-|t|\right)^{1/K^2}}{r_0-|t|}\right]^{1-2/p} |dt|$$

$$= c_5 \int_{s(w,\tau)} \frac{|dt|}{\left(r_0-|t|\right)^{\alpha_1}}$$

$$\le c_6 |w-\tau|^{1-\alpha_1}$$

$$= c_6 |\varphi(z)-\varphi(\zeta)|^{1-\alpha_1}$$

elde edilir. Burada $\alpha_1 = \left(1-K^{-2}\right)\left(1-\dfrac{2}{p}\right) < 1$ dir. $\varphi(z)$ fonksiyonu $1/K^2$ dereceden Hölder koşulunu sağladığından sonuç olarak

$$|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)| \le c_7 |z-\zeta|^{1-\alpha_1/K^2}$$

bulunur.

Eğer $1 < p < 2$ ise $1-\dfrac{2}{p} > 0$ dır.

$$dist(\xi, L) \ge c\left(r_0-|t|\right)^2$$

olduğundan ve (3.19) eşitsizliğinden

$$\left|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)\right| \le c_8 \int_{s(w,\tau)} \left(r_0-|t|\right)^{1-\frac{2}{p}} |dt| \le c_6 |w-\tau|^{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}$$

bulunur. Buradan da Hölder eşitsizliği gereği

$$\left|\varphi_p(z)-\varphi_p(\zeta)\right| \le c_7 |z-\zeta|^{\frac{2\left(1-\frac{1}{p}\right)}{K^2}} \tag{3.20}$$

elde edilir. Böylece φ_p fonksiyonunun G 'de düzgün sürekli olduğu görülür.

3.2.2 Sonuç G, K -kvazikonform sınırlı sonlu bir bölge ve $p>1$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \begin{cases} \dfrac{2K^2+p-2}{pK^4}, & p \ge 2 \\ \dfrac{2(p-1)}{pK^2}, & 1<p<2 \end{cases}$$

için $\overline{G}$ de $\varphi_p \in Lip\alpha$ olur[28].

y, L eğrisine göre kvazikonform bir yansıma olsun. Bu yansıma, L 'nin bir komşuluğunda, L 'deki noktalar hariç hemen her yerde

$$\left|J_y(z)\right| := \left|y_{\bar{z}}(z)\right|^2 - \left|y_z(z)\right|^2 \le c \tag{3.21}$$

koşulunu sağlayan sürekli kısmi türevlere sahiptir.

$$\tilde{\varphi}_p(z) := \begin{cases} \varphi_p(z), & z \in \overline{G} \\ \varphi_p(y(z)), & z \in C\overline{G} \end{cases}$$

$\varphi_p(z)$ 'nin tüm düzleme genişlemesi olsun. Bu durumda

$$\tilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z) := \frac{\partial \tilde{\varphi}_p(z)}{\partial \bar{z}} = \begin{cases} 0, & z \in \overline{G} \\ \left(\varphi'_{p,y} o y\right)(z) \cdot \left(y_{\bar{z}}(z)\right), & z \in C\overline{G} \end{cases} \tag{3.22}$$

olur.

$u \in (0,1)$ için

$$L_u := \{z : |\varphi_1(z)| = 1+u\}, \qquad \Omega_u := (\operatorname{int} L_u)\setminus\overline{G}$$

olsun.

3.2.3 Lemma L, K – kvazikonform bir eğri ve $u \in (0,1)$ olsun. Bu durumda

$\forall p > 1$ ve $\forall \gamma \in \left(0, 1/pK^2\right)$ için

$$\left\|\widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z)\right\|_{L_p(\Omega_u)} \leq cu^{\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat (3.22) bağıntısından

$$\left\|\widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z)\right\|_{L_p(\Omega_u)} = \left(\iint_{\Omega_u} \left|(\varphi'_{p,y} o y)(z) \cdot y_{\bar{z}}(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p}$$

olduğu görülür ve $\varphi'_p(z) = [\varphi'(z)]^{2/p}$ eşitliği gereği

$$\left\|\widetilde{\varphi}_{p,\bar{z}}(z)\right\|_{L_p(\Omega_u)} = \left(\iint_{\Omega_u} \left|(\varphi' o y)(z)\right|^2 \left|y_{\bar{z}}(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\leq c_8 \left(\iint_{\Omega_u} \left|\varphi' o y(z)\right|^2 d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\leq c_9 \left[mes\left(\varphi\left(y(\Omega_u)\right)\right)\right]^{1/p}$$

$$\leq c_9 \left[mes\left(\varphi o y o \psi_1\right) o \varphi_1(\Omega_u)\right]^{1/p}$$

$$= c_9 \left(\iint_{\varphi_1(\Omega_u)} \left|J_{\varphi o y o \psi_1}(w)\right| d\sigma_w\right)^{1/p}$$

$$\leq c_{10} \left(\iint_{\varphi_1(\Omega_u)} J_{\varphi o \psi_1}(w) d\sigma_w\right)^{1/p}$$

$$\leq c_{10}\left[mes\left(\left(\varphi o \psi_1\right) o \varphi_1\left(\Omega_u\right)\right)\right]^{1/p}$$

bulunur. $\varphi o \psi_1, L$ 'nin belirli bir komşuluğunda K^2- kvazikonform dönüşüm olduğundan Goldstein teoremi gereği $\forall \gamma_0 \in \left(0, 1/K^2\right)$ için

$$mes\left(\left(\varphi o \psi_1\right) o \varphi_1\left(\Omega_u\right)\right) \leq c_{11}\left[mes\left(\varphi_1\left(\Omega_u\right)\right)\right]^{\gamma_0} \leq c_{12} u^{\gamma_0}$$

elde edilir. $\gamma := \gamma_0 \backslash p$ alınırsa ispat tamamlanmış olur.

3.2.4 Lemma $G, K-$kvazikonform sınırlı, sonlu bir bölge ve $p>1$ ise

$$\forall \gamma_0 \in \left(0, 1/pK^2\right) \text{ için } \left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\| \leq cn^{-\gamma}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat φ fonksiyonu G 'de konform olduğundan bu bölgede her mertebeden türevleri analitiktir. Özel halde $\varphi_p'(z)$ türevi de G 'de analitiktir. Ayrıca $\varphi_p'(z)$ G'de Lebesgue toplanabilirdir. Bu durumda

$$\varphi_p'(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{CG} \frac{\tilde{\varphi}_{p,\bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta, \quad z \in G \tag{3.23}$$

integral gösterimi yazılabilir.

Keyfi bir $n \in N$ ve 1'e yeterince yakın $0<\gamma<1$ için

$$u := n^{-\gamma}, \quad B_u := \left\{z : z \in C\overline{G}, \left|\varphi_1(z)\right| > 1+u\right\},$$

$$J_1(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{\Omega_u} \frac{\tilde{\varphi}_{p,\bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta, \quad J_2(z) := -\frac{1}{\pi}\iint_{B_u} \frac{\tilde{\varphi}_{p,\bar{\zeta}}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\sigma_\zeta \tag{3.24}$$

olsun. Bu durumda

$$\varphi_p'(z) = J_1(z) + J_2(z), \quad z \in G \tag{3.25}$$

olur. $J_2(z)$ toplananı $C \backslash \overline{B_u}$ bölgesinde analitik olduğundan $z \in \overline{G}$ için

$$\left|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right|\le\frac{c_{13}}{n} \tag{3.26}$$

eşitsizliğini sağlayan $n-1$. dereceden bir $q_{n-1}(z)$ polinomu vardır.

$$p_n(z):=\int_{z_0}^{z} q_{n-1}(\zeta)d\zeta \tag{3.27}$$

olsun. (3.25) ve (3.27) bağıntılarından

$$\left\|\varphi_p'-p_n'\right\|_{L_p(G)}=\left\|J_1(z)+J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}$$

$$\le\left\|J_1(z)\right\|_{L_p(G)}+\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}$$

elde edilir.

$$\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}=\left(\iint_G\left|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/p}$$

olduğuna göre (3.26) eşitsizliğinden

$$\left\|J_2(z)-q_{n-1}(z)\right\|_{L_p(G)}\le\frac{c_{14}}{n}$$

bulunur.

$$\left\|\varphi_p-p_n\right\|_{L_p^1(G)}:=\left\|\varphi_p'-p_n'\right\|_{L_p(G)}$$

olduğu dikkate alındığında

$$\left\|\varphi_p-p_n\right\|_{L_p^1(G)}\le\left\|J_1(z)\right\|_{L_p(G)}+\frac{c_{14}}{n} \tag{3.28}$$

eşitsizliği elde edilir.

Diğer yandan $L_p,(p>1)$ uzaylarında Hilbert dönüşümünün sınırlılığı ile ilgili Calderon-Zygmund eşitsizliği ve 3.2.3 Lemma'dan $\forall\gamma\in\left(0,1/pK^2\right)$ için

$$\left\|J_1\right\|_{L_p(G)}\le c_{15}\left\|\tilde{\varphi}_{p,\bar{\zeta}}\right\|_{L_p(\Omega_u)}\le c_{16}u^{\gamma} \tag{3.29}$$

sonucuna varılır.

$$\widehat{p}_n(z) := p_n(z) + \left[1 - p'_n(z_0)\right](z - z_0). \tag{3.30}$$

olsun. Görüldüğü gibi $\widehat{p}_n(z_0) = 0$, $\widehat{p}'(z_0) = 1$ olur. (3.28), (3.29) ve (3.30) bağıntılarından

$$\begin{aligned}\left\|\varphi_p - \widehat{p}_n\right\|_{L^1_p(G)} &= \left\|\varphi_p - p_n - \left[1 - p'_n(z_0)\right](z - z_0)\right\|_{L^1_p(G)} \\ &\leq \left\|\varphi_p - p_n\right\|_{L^1_p(G)} + \left\|\left[1 - p'_n(z_0)\right](z - z_0)\right\|_{L^1_p(G)} \\ &\leq \frac{c_{14}}{n} + c_{16}u^{\gamma} + \left\|\left[1 - p'_n(z_0)\right](z - z_0)\right\|_{L^1_p(G)}\end{aligned} \tag{3.31}$$

elde edilir. (3.25), (3.26) ve (3.29)'dan ise

$$\begin{aligned}\left\|\left[1 - p'_n(z_0)\right](z - z_0)\right\|_{L^1_p(G)} &= \left\|1 - p'_n(z_0)\right\|_{L_p(G)} \\ &\leq \left\|J_1(z_0)\right\|_{L_p(G)} + \left\|J_2(z_0) - p'_n(z_0)\right\|_{L_p(G)} \\ &\leq c_{17}u^{\gamma} + \frac{c_{18}}{n}\end{aligned} \tag{3.32}$$

olduğu görülür. Bu durumda (3.31) ve (3.32) eşitsizlikleri gereği

$$\left\|\varphi_p - \widehat{p}_n\right\|_{L^1_p} \leq \frac{c_{14}}{n} + c_{16}u^{\gamma} + c_{17}u^{\gamma} + \frac{c_{18}}{n}$$

olur. Sonuç olarak $u := n^{\gamma}$ ve γ, 1'e yeterince yakın alınırsa $\forall \gamma \in \left(0, 1/pK^2\right)$ için

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{L^1_p(G)} \leq \left\|\varphi_p - \widehat{p}_n\right\|_{L^1_p(G)} \leq c_{19}u^{-\gamma}$$

olduğu görülür.

U, $\overline{G} \subset U$ olacak şekilde yeterince büyük yarıçaplı bir disk, $W^1_p(U)\,(p > 1)$ ise U 'da tanımlı, U 'da genelleşmiş birinci mertebeden türevleri p integrallenebilir fonksiyonların sınıfı ve $f \in W^1_p(U)$ için

$$\|f\|_{W_p^1(U)}=\left[\iint_U\left(\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|^2+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|^2\right)^{\frac{p}{2}}d\sigma\right]^{\frac{1}{p}},\quad \zeta=x+iy \tag{3.33}$$

olsun.

Derecesi en fazla n olan her p_n polinomunun U 'ya genişlemesi,

$$\hat{p}_n(z):=\begin{cases} p_n(z), & z\in\overline{G} \\ p_n(y(z)), & z\in U/\overline{G}\end{cases} \tag{3.34}$$

şeklinde tanımlansın. $\hat{p}_n(z)$ genişlemesinin yukarıdaki tanımı gereği

$$\|\tilde{p}_n\|_{\overline{U}}=\|\tilde{p}_n\|_{\overline{G}}$$

ve y 'nin diferansiyellenebilirlik özelliği ile (3.21) eşitsizliği gereği

$$\|p_n\|_{W_p^1(G)}\leq\|\tilde{p}_n\|_{W_p^1(U)}\leq c\|p_n\|_{W_p^1(G)} \tag{3.35}$$

bağıntıları yazılabilir.

Diğer yandan da $\tilde{p}_n(z_0)=0$ koşulu altında $\tilde{p}_n\in W_p^1(U)$ için

$$\tilde{p}_n(z)=\frac{1}{\chi}\iint_U\frac{u(\zeta,z)}{|\zeta-z|^2}\left[\frac{\partial\tilde{p}_n(\zeta)}{\partial x}(x-x_0)+\frac{\partial\tilde{p}_n(\zeta)}{\partial y}(y-y_0)\right]d\sigma_\zeta,\quad z\in U \tag{3.36}$$

integral gösterimi yazılabilir. Burada

$$\zeta=x+iy,\ z=x_0+iy_0,\ u(\zeta,z)=-\int_{|\zeta-z|}^{\infty}v\left(r\frac{\zeta-z}{|\zeta-z|}+z\right)dr,\quad \chi=\iint_C v(\zeta)\partial\sigma_\zeta,$$

ve

$$v(\zeta)=\begin{cases}\exp\dfrac{|\zeta-z|^2}{|\zeta-z|^2-h^2}, & |\zeta-z_0|<h \\ 0, & |\zeta-z_0|\geq h\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. $h > 0$, $\{\zeta : |\zeta - z_0| < h\} \subset G$ koşulunu sağlayan bir sayıdır.

3.2.5 Lemma G, $K-$kvazikonform sınırlı bir bölge ve $p_n(z)$ derecesi en fazla n olan ve $p_n(z_0) = 0$ koşulunu sağlayan bir polinom olsun. Bu durumda

$$\|p_n\|_{\overline{G}} \le \begin{cases} c\sqrt{\log n}\,\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & p = 2 \\ c\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & p > 2 \\ cn^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2K^2}{1+K^2}}\|p_n\|_{L_p^1(G)}, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

olur[30].

İspat $p = 2$ ve $p > 2$ olduğunda teoremin ispatı sırasıyla [20] ve [29]'de verilmiştir. Burada $1 < p < 2$ durumu incelenecektir.

$$\alpha := 2K^2/1 + K^2$$

olsun. [30]'de verilen

$$\|p_n'\|_{\overline{G}} \le c_{20} n^{\alpha} \|p_n\|_{\overline{G}}$$

eşitsizliğine ve (3.35), (3.36) bağıntılarına göre $z \in \overline{G}$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$|p_n(z)| \le c_{21}\left[\iint\limits_{|\zeta - z| < \varepsilon n^{-\alpha}} \left(\left|\frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial y}\right|\right)\frac{\partial \alpha_\zeta}{|\zeta - z|}\right] + \left[\iint\limits_{U - \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon n^{-\alpha}\}} \left(\left|\frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial x}\right| + \left|\frac{\partial \tilde{p}_n}{\partial y}\right|\right)\frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|}\right]$$

$$\le c_{22}\frac{\varepsilon n^{\alpha}}{n^{\alpha}}\|\tilde{p}_n\|_{\overline{G}} + c_{23}\|\tilde{p}_n\|_{W_p^1(U)}\left(\iint\limits_{U - \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon n^{-\alpha}\}} \frac{d\sigma_\zeta}{|\zeta - z|^q}\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\le c_{23}\varepsilon\|\tilde{p}_n\|_{\overline{G}} + c_{24} n^{\alpha\left(\frac{2}{p}-1\right)}\|\tilde{p}_n\|_{W_p^1(U)}$$

bulunur. Burada ε yeterince küçük seçilerek

$$\|P_n\|_{\overline{G}} \le c n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\alpha} \|P_n\|_{L_p^1(G)}$$

elde edilir.

3.2.6 Teorem G, $K-$kvazikonform sınırlı bir bölge ve

$2-\frac{1}{2K^2}\left(1+\frac{1}{K^2}\right) < p < \infty$ ise $\forall n \ge 2$ doğal sayıları ve her

$$\gamma \in \begin{cases} \left(0, \frac{1}{pK^2}\right), & p \ge 2 \\ \left(0, \frac{1}{pK^2} - \frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\frac{1}{2K^2}\left(1+\frac{1}{K^2}\right) < p < 2 \end{cases}$$

için

$$\|\varphi_p - \pi_{n,p}\|_{\overline{G}} \le \frac{c}{n^\gamma}$$

olacak şekilde bir $c = c(p, G) > 0$ sayısı vardır.

$p = 2$ durumunda teoremin ispatı $[31]$'de verilmiştir.

İspat: $2^j \le n \le 2^{j+1}$ koşulunusağlayan $n \ge 2$ doğal sayıları ve $\forall \gamma \in \left(0, 1/pK^2\right)$ için 3.2.4 lemma gereği

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{L_p^1(G)} \le c_{25} n^{-\gamma}$$

ve 3.2.5 Lemma gereği

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p} - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le \begin{cases} c_{26} n^{-\gamma}, & p > 2 \\ c_{27} n^{-\gamma + \frac{2K^2}{1+K^2}\left(\frac{2}{p}-1\right)}, & 1 < p < 2 \end{cases}$$

eşitsizlikleri yazılabilir.

$$\left\|\pi_{2^{j+1},p}-\pi_{2^{j},p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases}c_{28}2^{-j\gamma}, & p>2\\ c_{29}2^{-j\left[\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}, & 1<p<2\end{cases}$$

ve

$$\varphi_{p}(z)-\pi_{n,p}(z)=\left[\pi_{2^{j+1},p}(z)-\pi_{n,p}(z)\right]+\sum_{m>j}\left[\pi_{2^{m+1},p}(z)+\pi_{2^{m},p}(z)\right]\quad z\in G$$

olduğundan

$$\left\|\varphi_{p}-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\begin{cases}c_{26}n^{-\gamma}+c_{28}\sum\limits_{m>j}2^{-m\gamma}, & p>2\\ c_{27}n^{-\left[\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}+c_{29}\sum\limits_{m>j}2^{-m\left[\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}, & 1<p<2\end{cases}\tag{3.37}$$

eşitsizliği elde edilir.

γ, $\left(0,1/pK^{2}\right)$ aralığında değişebileceğinden $2-\frac{1}{2K^{2}}\left(1+1/K^{2}\right)<p<2$ için

$$\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)>0$$

bulunur ve (3.37) deki sonuncu toplam

$$c_{29}2^{-j\left[\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}\leq c_{30}n^{-\left[\gamma-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right]}$$

olarak değerlendirilir.

Böylece (3.37)'den $\forall n\geq 2$ ve her

$$\gamma\in\begin{cases}\left(0,1/pK^{2}\right), & p\geq 2\\ \left(0,\frac{1}{pK^{2}}-\frac{2K^{2}}{1+K^{2}}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\frac{1}{2K^{2}}\left(1+\frac{1}{K^{2}}\right)<p<2\end{cases}$$

için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\frac{c}{n^{\gamma}}$$

sonucuna varılır.

3.2.7 Teorem $G,L\in K(\alpha,\beta)$ $(0<\alpha,\ \beta\leq 1)$, Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ise $\forall n\geq 2$ doğal sayıları ve

$$\forall\gamma\in\begin{cases}\left(0,\dfrac{\alpha\beta}{p}\right), & p\geq 2\\[2ex] \left(0,\dfrac{\alpha\beta}{p}-\dfrac{2K^2}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1+K^2}{2K^2}\alpha\beta<p<2\end{cases}$$

için $n=1,2,\ldots$ olduğunda

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\frac{c}{n^{\gamma}}$$

olacak şekilde bir $c=c(p,G)$ sabiti vardır.

3.2.8 Teorem G, parçalı düzgün L Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $\lambda\pi(0<\lambda<2)$ L'nin iki düzgün yayının oluşturduğu en küçük dış açı olsun. Bu durumda her

$$\gamma\in\begin{cases}\left(0,\dfrac{1}{p}\min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right)\right), & p\geq 2\\[2ex] \left(0,\min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right)-\dfrac{2K}{1+K^2}\left(\dfrac{2}{p}-1\right)\right), & 2-\dfrac{1+K^2}{2K^2}\min\left(\dfrac{2\lambda}{2-\lambda},1\right)<p<2\end{cases}$$

için

$$\left\|\varphi_p-\pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}}\leq\frac{c}{n^{\gamma}}$$

olur. Burada K,L'nin kvazikonformluk katsayısıdır.

Yukarıdaki teoremlerin ispatları 3.2.6 teoremin ispatına benzer şekilde ve $[21]$'de verilen

$L \in K(\alpha, \beta)$ olduğunda;

$$mes\varphi\left(y\left(\Omega_u\right)\right) \leq cu^{\alpha\beta},$$

L, parçalı düzgün eğri olduğunda ise,

$$mes\varphi\left(y\left(\Omega_u\right)\right) \leq cu^{\mu}, \qquad \mu < \min\left(\frac{2\lambda}{2-\lambda}, 1\right)$$

değerlendirmeleri kullanılarak yapılır.

4. BIEBERBACH VE GENELLEŞMİŞ BIEBERBACH POLİNOMLARININ DINI-DÜZGÜN BÖLGELERDE YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde Lyapunov bölgelerinde Wu [19] ve Suetin [4] tarafından elde edilen sonuçlar verilmiş ve daha sonra D.M. İsrafilov ve B. Oktay tarafından [32,33] çalışmalarında dahil edilen $B(\alpha,\beta)$ bölge sınıflarında Bieberbach polinomlarının yaklaşım özellikleri ile ilgili sonuçlar özetlenmiştir.

4.1 Bieberbach Polinomlarının Dini-Düzgün Bölgelerde Yaklaşım Özellikleri

4.1.1 Tanım f , bir $A \subset C$ bağlantılı kümesinde düzgün sürekli bir fonksiyon olsun. f 'nin *süreklilik modülü*

$$\omega(\delta) \equiv \omega(\delta, f, A) := \sup_{|h| \leq \delta} \left\| f(\cdot) - f(\cdot + h) \right\|_A$$

$$= \sup\left\{ \left| f(t_1) - f(t_2) \right| : t_1, t_2 \in A, \left| t_1 - t_2 \right| \leq \delta \right\}, \quad \delta \in (0, \pi]$$

biçiminde tanımlanır.

4.1.2 Tanım $\omega(h,t)$, bir h fonksiyonunun süreklilik modülü olmak üzere

$$\int_0^\pi \frac{\omega(h,t)}{t} dt < \infty$$

koşulu sağlanıyorsa h fonksiyonuna *Dini-Sürekli fonksiyon* denir.

4.1.3 Tanım Eğer bir L eğrisi, $\gamma'(\tau)$ Dini sürekli ve sıfırdan farklı olacak şekilde

$$L : \gamma(\tau), \quad 0 \leq \tau \leq 2\pi$$

parametrazisyonuna sahip ise L eğrisine *Dini-düzgün eğri* denir.

ψ_0, birim diskin L düzgün eğrisiyle sınırlı bölgeye konform dönüşümü olsun. Bu durumda L eğrisinin $z(t)=\psi_0(e^{it}), 0\le t\le 2\pi$, konform parametrizasyonu yazılabilir. $\theta(t)$ ile L düzgün eğrisine $z(t)=\psi_0(e^{it})$ noktasında çizilen teğetin x ekseni ile oluşturduğu pozitif yönlü açıyı göstermek üzere aşağıda yeni bir eğriler sınıfı tanımlayalım.

4.1.4 Tanım $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ sayıları verildiğinde δ dan bağımsız bir c sabiti için

$$\omega(\theta,\delta)\le c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta},\quad \delta\in(0,\pi]$$

koşulu sağlanıyorsa L eğrisi $B(\alpha,\beta)$ *sınıfındandır* denir.

Bu tanıma göre, $0<\alpha_1<\alpha_2\le 1$ olduğunda

$$B(\alpha_1,\beta)\supset B(\alpha_2,\beta),\quad \beta\in[0,\infty)$$

ve $0\le\beta_1<\beta_2<\infty$ olduğunda

$$B(\alpha,\beta_1)\subset B(\alpha,\beta_2),\quad \alpha\in(0,1]$$

bağıntıları geçerlidir.

4.1.5 Tanım $\forall t_1,t_2\in[0,2\pi]$ için

$$|\theta(t_1)-\theta(t_2)|\le c|t_1-t_2|^{\alpha},\quad \alpha\in(0,1)$$

olacak şekilde bir c sabiti bulunabilirse L eğrisine *Lyapunov eğrisi* denir.

$B(\alpha,\beta)$ sınıfının tanımından görülebilir ki $B(\alpha,0)$ $(0<\alpha<1)$ sınıfı Lyapunov eğrileri sınıfı ile çakışır. Üstelik $B(\alpha,\beta)$, $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ sınıfı, Dini-düzgün eğrilerin bir alt sınıfıdır.

Yapılan araştırmalar göstermiştir ki bir G bölgesi verildiğinde bölge sınırının geometrik özelliklerine göre

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{\bar{G}}:=\max_{z\in\bar{G}}\left|\varphi_0(z)-\pi_n(z)\right|$$

yaklaşım hatasının bölge sınırının düzgünlük derecesi ile orantılı olarak sıfıra yaklaştığıdır.

Dini-düzgün bölgelerin bilinen bir alt sınıfını oluşturan Lyapunov bölgelerinde Bieberbach polinomlarının konform dönüşüme yaklaşımı ve yaklaşım hatasının değerlendirilmesi problemi ilk olarak Wu $[19]$ tarafından incelenmiştir.

G, Lyapunov bölgesi olduğunda Wu n den bağımsız $c=c(L)>0$ için

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{\bar{G}}\leq\frac{c\ln n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}},\quad 0<\alpha<1$$

eşitsizliğini ispatlamıştır. Farklı yöntemler kullanılarak Wu'nun elde etmiş olduğu yukarıdaki değerlendirme Suetin $[4]$ ve D.M. İsrafilov-B. Oktay $[33]$ tarafından iyileştirilerek

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{\bar{G}}\leq\frac{c\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}},\quad 0<\alpha<1$$

değerlendirilmesi ispatlanmıştır. Burada c,n den bağımsız bir sabittir.

Bu kısımda Lyapunov bölgeleri sınıfından daha geniş olan $B(\alpha,\beta)$ bölgeler sınıfı için

$$\left\|\varphi_0-\pi_n\right\|_{\bar{G}}\leq\frac{c\ln n}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}},\quad 0<\alpha<1 \tag{4.1}$$

ifadesinin bir genellemesi incelenecektir. Özel halde G bölgesi Lyapunov bölgesi olduğunda bulunan değerlendirmenin yukarıdaki eşitsizlik ile çakıştığı görülmüştür.

$c_1, c_2 > 0$ sabitler olduğunda $a > 0,\ b > 0$ sayıları için $c_1 b \le a \le c_2 b$ eşitsizliği $a \approx b$ ile gösterilecektir.

G , kompleks düzlemde sonlu uzunluklu Jordan eğrisiyle sınırlı, basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. Riemann konform dönüşüm teoremine göre G 'yi $D_r = D(0,r)$ diskine dönüştüren ve

$$\varphi_0(z_0) = 0, \quad \varphi'(z_0) = 1$$

koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi_0(z)$ konform dönüşümü vardır.

$$G^- := C / \overline{G}, \quad D := D(0,1), \quad T := \partial D, \quad D^- := C / \overline{D}$$

ve $\varphi_0(z)$ fonksiyonunun tersini $\psi_0(w)$ ile gösterelim.

G^- nin D^- ye $\varphi(\infty) = \infty$ $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\varphi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform dönüşümü φ ve $\psi = \varphi^{-1}$ olsun.

4.1.1 Yardımcı Sonuçlar

Aşağıdaki Lemma, $L \in B(\alpha,\beta)$ olduğunda ψ' fonksiyonunun süreklilik modülü ile ilgili değerlendirmeyi içermektedir.

4.1.6 Lemma $L \in B(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ ise

$$\omega(\psi_0', \delta) := \sup_{|h|\le\delta} \left\| \psi_0'\left(we^{ih}\right) - \psi_0'(w) \right\|_T \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ \delta \ln^{\beta+1} \dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirmesi geçerlidir.

İspat L Dini-düzgün eğri olduğundan $[6, s.44, teorem 3.2]$ den

$$\arg \psi_0'\left(e^{it}\right)=\theta(t)-t-\frac{\pi}{2} \tag{4.2}$$

ve

$$\log \psi_0'(w)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{e^{it}+w}{e^{it}-w}\left(\theta(t)-t-\frac{\pi}{2}\right)dt \tag{4.3}$$

eşitlikleri yazılabilir.

$g(t):=\arg \psi_0'\left(e^{it}\right)$ olsun. (4.2) den

$$\omega(g,\delta):=\sup_{\|h\|\le\delta}\left\|g(t+h)-g(t)\right\|_{[0,2\pi]}\le \omega(\theta,\delta)+\omega(t,\delta)\le c_2\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta} \tag{4.4}$$

olur. Bunu dikkate alırsak

$$\omega^*(g,\delta):=\int_0^{\delta}\frac{\omega(g,t)}{t}dt+\delta\int_{\delta}^{\pi}\frac{\omega(g,t)}{t^2}dt$$

modülü için

$$\omega^*(g,\delta)\le\begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1) \\ c\delta\ln^{\beta+1}\frac{4}{\delta}, & \alpha=1\end{cases} \tag{4.5}$$

değerlendirilmesi elde edilir.

Gerçekten, eğer $\alpha\in(0,1)$ ise yeterince küçük $\varepsilon>0$ ve δ dan bağımsız bir c_3 sabiti için

$$t^{\alpha-\varepsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{t}\le c_3\delta^{\alpha-\varepsilon}\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}, \qquad t\in(0,\delta]$$

olur. Diğer yandan $\forall\beta\in[0,\infty)$ için

$$\ln^{\beta}\frac{4}{t}\le\ln^{\beta}\frac{4}{\delta}, \qquad t\in[\delta,\pi).$$

eşitsizliği yazılabilir. Böylece (4.4) bağıntısından

$$\omega^*(g,\delta) \le c_2 \int_0^{\delta} \frac{t^{\alpha-\varepsilon} \ln^{\beta} \frac{4}{t}}{t^{1-\varepsilon}} dt + c_2 \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{t^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{t}}{t^2} dt$$

$$\le c_4 \delta^{\alpha-\varepsilon} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \int_0^{\delta} t^{\varepsilon-1} dt + c_5 \delta \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \int_{\delta}^{\pi} t^{\alpha-2} dt \le c \delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}$$

bulunur. Eğer $\alpha = 1$ ise benzer yöntemle

$$\omega^*(g,\delta) \le c_6 \int_0^{\delta} \frac{t^{\varepsilon} \ln^{\beta} \frac{4}{t}}{t^{\varepsilon}} dt + c_7 \delta \int_{\delta}^{\pi} \frac{\ln^{\beta} \frac{4}{t}}{t} dt$$

$$\le c_8 \delta^{\varepsilon} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \int_0^{\delta} t^{-\varepsilon} dt - c_7 \delta \int_{\delta}^{\pi} \ln^{\beta} \frac{4}{t} d \ln \frac{4}{t}$$

$$\le c_9 \delta \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} + c_{10} \delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta} \le c \delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}$$

olduğu görülür.

L eğrisi Dini-düzgün olduğundan, 2π periyotlu

$$g(t) := \arg \psi_0'(e^{it}) = \theta(t) - t - \frac{\pi}{2}$$

fonksiyonu reel eksende Dini süreklidir. Bu durumda (4.2) (4.3) ve $[6, s.47]$deki önerme 3.4 den, $\log \psi_0'(w)$ fonksiyonunun $\overline{D}$de sürekli genişlemeye sahip olduğu ve $|w_1 - w_2| \le \delta < 1$ özelliğindeki $w_1, w_2 \in \overline{D}$ noktaları için

$$|\log \psi_0'(w_1) - \log \psi_0'(w_2)| \le c \omega^*(g,\delta)$$

olduğu görülür. Bu son eşitsizlikten

$$|\psi_0'(w_1) - \psi_0'(w_2)| \le c_{11} \omega^*(g,\delta), \qquad |w_1 - w_2| \le \delta < 1 \tag{4.6}$$

eşitsizliği ve sonunda (4.5) ile (4.6) birleştirilerek

$$\omega(\psi_0',\delta)\leq\begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1) \\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha=1 \end{cases}$$

değerlendirmesi elde edilir.

G , düzgün sınırlı bir bölge ve $\Phi_p(w):=(\varphi_0')^{2/p}\circ(\psi(w))$ olsun. $\Phi_p(w)$ fonksiyonu $L^p(T)$ dendir. Gerçekten;

$$\left\|\Phi_p(w)\right\|_{L^p(T)}^p=\int_T\left|\left((\varphi_0')^{2/p}\circ\psi\right)\left(we^{ih}\right)\right|^p|dw|$$

$$=\int_T\left|\left((\varphi_0')^{2/p}\circ\psi\right)(w)\right|^p|dw|=\int_L\left|\varphi_0'(z)\right|^2\left|\varphi'(z)\right||dz|$$

sonuncu ifadeye $\dfrac{1}{p_0}+\dfrac{1}{q_0}=1$ için Hölder eşitsizliğini uygularsak

$$\left\|\Phi_p(w)\right\|_{L^p(T)}^p\leq c\left(\int_L\left|\varphi_0'(z)\right|^{2p_0}|dz|\right)^{1/p_0}\left(\int_L\left|\varphi'(z)\right|^{q_0}|dz|\right)^{1/q_0}$$

olur. φ_0', $\varphi'\in L^p(L)$ olduğundan yukarıdaki çarpım sonludur ve $\left\|\Phi_p(w)\right\|_{L^p(T)}^p<\infty$ bulunur.

$L\in B(\alpha,\beta)$, $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ olsun.

$$\omega(\Phi_p,\delta)=\sup_{|h|\leq\delta}\left\|\Phi_p\left(we^{ih}\right)-\Phi_p(w)\right\|_T$$

Fonksiyonuna $(\varphi_0')^{2/p}\in E^p(G)$ nin genelleşmiş süreklilik modülü diyeceğiz. $p=2$ durumunda $\Phi(w):=(\varphi_0'\circ\psi)(w)$ fonksiyonunun genelleştirilmiş süreklilik modülü $\omega(\Phi,\delta)$ elde edilir.

4.1.7 Lemma $L \in B(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ ise

$$\omega(\Phi,\delta) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirilmesi geçerlidir.

İspat L Dini-düzgün eğri olduğundan ψ_0' ve φ_0' fonksiyonları sırasıyla $\overline{D}$ ve $\overline{G}$ de, ψ' ve φ' fonksiyonları ise sırasıyla $\overline{D^-}$ ve $\overline{G^-}$ de süreklidir. Ayrıca $|w|=1$ üzerinde $|\psi_0'| \approx |\psi'| \approx 1$ bağıntıları, L üzerinde de $|\psi_0'| \approx |\psi'| \approx 1$ bağıntıları sağlanır. Böylece

$$\left\|\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]-\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right\|_T \approx \left\|\psi\left(we^{ih}\right)-\psi(w)\right\|_T \approx \left\|we^{ih}-w\right\|_T = \left|e^{ih}-1\right| \approx |h|$$

ve 4.1.6 lemma uygulandığında

$$\omega(\Phi,\delta) := \sup_{|h|\le\delta}\left\|\Phi\left(we^{ih}\right)-\Phi(w)\right\|_T = \sup_{|h|\le\delta}\left\|\varphi_0'\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]-\varphi_0'\left[\psi(w)\right]\right\|_T$$

$$= \sup_{|h|\le\delta}\left\|\frac{1}{\psi'\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]}-\frac{1}{\psi_0'\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]}\right\|_T$$

$$\le c\sup_{|h|\le\delta}\left\|\psi'\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]-\psi_0'\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]\right\|_T$$

$$\le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

bulunur.

$E^p(G)$ de polinomlarla yaklaşımı ifade eden ve $[35]$ de ispatlanan aşağıdaki teorem, teorem 4.1.9 ün ispatında kullanılmıştır.

4.1.8 Teorem $f \in E^p(G), 1 < p < \infty$ ve L bir Dini-düzgün eğri olsun. Her n doğal sayısı için

$$\left\| f - P_n(z, f) \right\|_{L_p(L)} \leq c\widetilde{\omega}\left(f, \frac{1}{n} \right) = c\omega\left((f \circ \psi), \frac{1}{n} \right)$$

olacak derecesi $\leq n$ olan $P_n(z, f)$ polinomu vardır. Burada c, n' den bağımsız bir sabittir.

4.1.2 Ana Sonuçlar

4.1.9 Teorem $L \in B(\alpha, \beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0, \infty)$ ise n 'den bağımsız bir $c > 0$ için

$$\left\| \varphi_0 - \pi_n \right\|_{\overline{G}} \leq \begin{cases} \dfrac{c \ln^{\beta+1/2} n}{n^{\alpha+1/2}}, & \alpha \in (0,1) \\ \dfrac{c \ln^{\beta+3/2} n}{n^{3/2}}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirmesi geçerlidir $[34]$.

İspat $q_n(z)$, φ_0' fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^2(G)}$ normunda en iyi yaklaşan ve derecesi $\leq n$ olan bir polinom, yani,

$$\left\| \varphi_0' - q_n \right\|_{L^2(G)} = \inf_{P_n} \left\| \varphi' - P_n \right\|_{L^2(G)}$$

olsun. Burada infimum derecesi $\leq n$ olan tüm P_n polinomları üzerinden alınır.

$$Q_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(t) dt, \qquad t_n(z) := Q_n(z) + \left[1 - q_n(z_0) \right](z - z_0)$$

olsun. Burada $t_n(z_0) = 0$, ve $t_n'(z_0) = 1$ olduğu kolaylıkla görülür. $1 < p < \infty$, $\omega \in A_p(L)$ ve $f \in E^1(G)$ olmak üzere $\forall n = 1, 2, ...$ için yazılabilen $[10]$ de verilen

$\varepsilon_n(f)_p \le cn^{-1/p} E_n^{\circ}(f,\omega)_p$ eşitsizliğinde özel halde $\omega := |\varphi'|^{\frac{-1}{p}}$ ve $f = \varphi_0'$ alınırsa $p = 2$ için

$$\varepsilon_n(\varphi_0')_2 \le cn^{-\frac{1}{2}} E_n^0\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

ve buradan

$$\|\varphi_0' - t_n'\|_{L^2(G)} = \|\varphi_0' - q_n - 1 + q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

$$\le \varepsilon_n(\varphi_0')_2 + \|1 - q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

$$\le cn^{-\frac{1}{2}} E_n^{\circ}\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 + \|\varphi_0'(z_0) - q_n(z_0)\|_{L^2(G)}$$

bulunur. Şimdi $f \in L^p(G)$ $(p \ge 1)$, $z_0 \in G$ ve $d_{z_0} := \min\limits_{z \in \partial G} |z_0 - z|$ olmak üzere yazılabilen

$$|f(z_0)| \le \frac{\|f\|_{L^p(G)}}{(\pi d_z^2)^{\frac{1}{p}}}$$ bağıntısı $p = 2$ için kullanılırsa

$$\|\varphi_0' - t_n'\|_{L^2(G)} \le cn^{-\frac{1}{2}} E_n^0\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2 + \frac{\varepsilon_n(\varphi_0')_2}{d_{z_0}}$$

$$\le c_{14} n^{-\frac{1}{2}} E_n^0\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

ve buradan da π_n'nin ekstremal özelliğine göre

$$\|\varphi_0' - \pi_n'\|_{L^2(G)} \le c_{14} n^{-\frac{1}{2}} E_n^0\left(\varphi_0', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

elde edilir.

3.2.5 lemma $p = 2$ durumunda uygulanır ve Simonenko ve Andrievskii'nin yöntemi kullanılırsa, sonuncu eşitsizlikten

$$\|\varphi_0-\pi_n\|_{\overline{G}}\le c_{15}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}E_n^0\left(\varphi_0',\frac{1}{|\varphi'|}\right)_2$$

eşitsizliğine ulaşılır.

L Dini-düzgün olduğundan $z\in L$ için $|\varphi'(z)|\approx 1$ bağıntısı geçerlidir ve böylece

$$\|\varphi_0-\pi_n\|_{\overline{G}}\le c_{15}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\inf_{P_n}\|\varphi_0'-P_n'\|_{L^2(L,1/|\varphi'|)}$$

$$\le c_{16}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\inf_{P_n}\|\varphi_0'-P_n\|_{L^2(L)}$$

bulunur. Şimdi 4.1.7 lemma ve 4.1.8 teorem uygulandığında

$$\|\varphi_0-\pi_n\|_{\overline{G}}\le c_{15}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^{\frac{1}{2}}\omega\left(\Phi,\frac{1}{n}\right)\le\begin{cases}\dfrac{c\ln^{\beta+1/2}n}{n^{\alpha+1/2}}, & \alpha\in(0,1)\\[2mm] \dfrac{c\ln^{\beta+3/2}n}{n^{3/2}}, & \alpha=1\end{cases}$$

eşitsizliği ispatlanmış olur.

4.1.10 Sonuç Eğer $L\in B(\alpha,0)$ ise

$$\|\varphi_0-\pi_n\|_{\overline{G}}\le\frac{c\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{1}{2}+\alpha}},\qquad \alpha\in(0,1)$$

olur $[33]$.

4.2 Genelleştirilmiş Bieberbach Polinomlarının Dini-Düzgün Bölgelerde Yaklaşım Özellikleri

Bu bölümde $L\in B(\alpha,\beta)$, $\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,\infty)$ olduğunda 4.1.9 Teoremde elde edilen değerlendirme π_n polinomunun genelleşmesi olan $\pi_{n,p}$ polinomu ile

$\varphi_p(z) := \int\limits_{z_0}^{z} \left[\varphi_0'(\zeta)\right]^{2/p} d\zeta,\ z \in G,\ p > 0,$ fonksiyonuna yaklaşım durumuna genelleştirilir.

4.2.1 Yardımcı Sonuçlar

Önce 4.1.6 Lemmasının aşağıdaki genelleşmesini verelim.

4.2.1 Lemma $L \in B(\alpha,\beta),\ \alpha \in (0,1],\ \beta \in [0,\infty)$ ise

$$\omega\left((\psi_0')^{2/p},\delta\right) := \sup_{|h|\le\delta} \left\|(\psi_0')^{2/p}\left(we^{ih}\right) - (\psi_0')^{2/p}(w)\right\|_T \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

olur.

İspat 4.4 bağıntısına göre

$$\omega(g,\delta) \le c_2 \delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta} \tag{4.7}$$

dır.

Diğer yandan

$$\omega^*(g,\delta) := \int\limits_0^{\delta} \frac{\omega(g,t)}{t} dt + \delta \int\limits_{\delta}^{\pi} \frac{\omega(g,t)}{t^2} dt$$

için

$$\omega^*(g,\delta) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha} \ln^{\beta} \frac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta \ln^{\beta+1} \frac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases} \tag{4.8}$$

olduğu (4.5) den bilinmektedir.

$\log\psi_0'(w)$ fonksiyonunun $\overline{D}$ de sürekli genişlemeye sahip olduğunu ve buna göre de $|w_1 - w_2| \le \delta < 1$ özelliğindeki $w_1, w_2 \in \overline{D}$ ler için,

$$\left|\log\psi_0'(w_1) - \log\psi_0'(w_2)\right| \le c\omega^*(g,\delta)$$

bağıntısı yazılabilir.

Diğer yandan $|\zeta_1| \le M$, $|\zeta_2| \le M$ için,

$$\left|e^{\zeta_1} - e^{\zeta_2}\right| \le |\zeta_2 - \zeta_1| \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nM^{n-1}}{n!} \le c(M)|\zeta_2 - \zeta_1|$$

sağlanır, burada $\zeta_k = \dfrac{2}{p}\log\psi_0'(w_k)$, $\quad k = 1,2$ dir.

Son iki eşitsizlikten

$$\left|(\psi_0')^{2/p}(w_1) - (\psi_0')^{2/p}(w_2)\right| \le c_{11}\omega^*(g,\delta), \qquad |w_1 - w_2| \le \delta < 1 \quad (4.9)$$

olduğu görülür. (4.8) ile (4.9) birleştirilerek

$$\omega^*\left((\psi_0')^{2/p},\delta\right) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

değerlendirmesi elde edilir.

4.2.2 Lemma $L \in B(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ ise

$$\omega(\Phi_p,\delta) \le \begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha \in (0,1) \\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

bağıntısı geçerlidir.

İspat 4.1.7 Lemma'sının ispatında gösterildiği gibi

$$\left\|\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]-\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right\|_T \approx \left\|\psi\left(we^{ih}\right)-\psi(w)\right\|_T \approx \left\|we^{ih}-w\right\|_T = \left|e^{ih}-1\right| \approx |h|$$

dırve 4.1.7 Lemma'dan

$$\omega(\Phi_p,\delta):=\sup_{|h|\le\delta}\left\|\Phi_p\left(we^{ih}\right)-\Phi_p(w)\right\|_T = \sup_{|h|\le\delta}\left\|(\varphi_0')^{2/p}\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]-(\varphi_0')^{2/p}\left[\psi(w)\right]\right\|_T$$

$$=\sup_{|h|\le\delta}\left\|\frac{1}{(\psi_0')^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]}-\frac{1}{(\psi_0')^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]}\right\|_T$$

$$\le c\sup_{|h|\le\delta}\left\|(\psi_0')^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi\left(we^{ih}\right)\right]\right]-(\psi_0')^{2/p}\left[\varphi_0\left[\psi(w)\right]\right]\right\|_T$$

$$\le\begin{cases} c\delta^{\alpha}\ln^{\beta}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha\in(0,1) \\ c\delta\ln^{\beta+1}\dfrac{4}{\delta}, & \alpha=1 \end{cases}$$

elde edilir.

4.1.8 Teorem f fonksiyonu özel halde φ_p' olarak seçildiğinde buna Faber serisinin n. kısmi toplamları yardımıyla yaklaşım teoremi aşağıdaki şekilde olup ana teoremin ispatında kullanılacaktır.

4.2.3 Teorem G, Dini-düzgünsınırlı bir bölge, $p>1$ ve

$$S_n\left(\varphi_p',z\right):=\sum_{k=0}^{n}a_k\left(\varphi_p'\right)F_k(z), \qquad n=0,1,2,\ldots$$

φ_p' nün Faber serisinin n. kısmi toplamı olsun. Bu durumda $c>0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p'-S_n\left(\varphi_p',\cdot\right)\right\|_{L^p(L)}\le c\,\omega\left(\Phi_p,\frac{1}{n}\right)$$

bağıntısı vardır.

4.2.2 Ana Sonuçlar

4.2.4 Teorem $L \in B(\alpha,\beta)$, $\alpha \in (0,1]$, $\beta \in [0,\infty)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki bağıntılar sağlanır.

1–) $p > 2$ olduğunda, bir $c_1 > 0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le c_1 \begin{cases} n^{-\alpha-1/p} \ln n^{\beta} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-1-1/p} \ln n^{\beta+1} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

2–) $p = 2$ olduğunda, bir $c_2 > 0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_0 - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \le c_2 \begin{cases} n^{-\alpha-1/2} \ln n^{\beta+\frac{1}{2}} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-3/2} \ln n^{\beta+\frac{3}{2}}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

3–) $1 < p < 2$ olduğunda, $\forall \varepsilon > 0$ ve bir $c_3 = c_3(\varepsilon) > 0$ sabiti için,

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le c_3 \begin{cases} n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha = 1. \end{cases}$$

İspat $L \in B(\alpha,\beta)$ olsun. L Dini-düzgün olduğundan, $|\varphi_0'|$ ve $1/|\varphi'|$ fonksiyonları her $p \ge 1$ için $L^p(L)$ 'ye, φ_p' fonksiyonu ise $L^p(L, 1/|\varphi'|)$ 'ye aittir. Ayrıca $\varphi_p' \in E^1(G)$ olduğundan $\varphi_p' \in E^p(G, 1/|\varphi'|)$ olur. Bu durumda teorem 1.3.2 eşitsizliği $f = \varphi_p'$ durumunda da yazılabilir.

$q_n(z)$'in φ_p' fonksiyonuna $\|\cdot\|_{L^p(G)}$ normunda en iyi yaklaşan ve derecesi $\le n$ olan bir polinom olduğunu varsayalım. $\widehat{p}_n(z_0) = 0$, $\widehat{p}'_n(z_0) = 1$ olacak şekilde

$$p_n(z) := \int_{z_0}^{z} q_n(\zeta) d\zeta, \quad \widehat{p'}_n(z) := p_n(z) + [1 - q_n(z_0)](z - z_0)$$

polinomlarının tanımlayalım.

$p_n(z)$ ve $\widehat{p}_n(z)$nin tanımlarından

$$\left\|\varphi_p' - \widehat{p}'_n\right\|_{L^p(G)} = \left\|\varphi_p' - q_n - 1 + q_n(z_0)\right\|_{L^p(G)}$$

$$\leq \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L^p(G)} + \left\|1 - q_n(z_0)\right\|_{L^p(G)}$$

$$\leq \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L^p(G)} + c_4\left|\varphi_p'(z_0) - q_n(z_0)\right| \text{ olur.}$$

Diğer yandan Lemma 2.1.2 ve Teorem 1.3.2 eşitsizliklerinden

$$\left\|\varphi_p' - \widehat{p}'_n\right\|_{L^p(G)} = \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L^p(G)} + c_4 \frac{\left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L^p(G)}}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{1/p}}$$

$$\leq \left\|\varphi_p' - q_n\right\|_{L^p(G)} \left(1 + \frac{c_4}{\left(\pi d_{z_0}^2\right)^{1/p}}\right) = c_5 \varepsilon_n\left(\varphi_p'\right)_p$$

$$\leq c n^{-\frac{1}{p}} E_n^0\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p$$

ve $\pi_{n,p}$ polinomlarının ekstremal özelliği dikkate alındığında

$$\left\|\varphi_p' - \pi'_{n,p}\right\|_{L^p(G)} \leq c n^{-\frac{1}{p}} E_n^0\left(\varphi_p', \frac{1}{|\varphi'|}\right)_p$$

$$= c n^{-1/p} \inf_{p_n} \left\|\varphi_p' - p_n\right\|_{L^p(L, 1/|\varphi'|)}$$

$$\leq c n^{-1/p} \left\|\varphi_p' - S_n(\varphi_p', .)\right\|_{L^p(L, 1/|\varphi'|)}$$

$$= c n^{-1/p} \left(\int_L \left|\varphi_p' - S_n\right|^p \frac{|dz|}{|\varphi'|}\right)^{1/p}$$

$$\leq c n^{-1/p} \left(\int_L \left|\varphi_p' - S_n\right|^p |dz|\right)^{1/p}$$

olur. Böylece

$$\left\|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right\|_{L^p(G)} \le cn^{-\frac{1}{p}} \left\|\varphi_p' - S_n\right\|_{L^p(L)}$$

bulunur. 4.2.3 Teorem ve 4.2.2 Lemma kullanılarak

$$\left\|\varphi_p' - \pi_{n,p}'\right\|_{L^p(G)} \le cn^{-\frac{1}{p}} \omega\left(\Phi_p, \frac{1}{n}\right)$$

$$\le c_1 \begin{cases} n^{-\alpha-1/p} \ln n^{\beta} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-1-1/p} \ln n^{\beta+1} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

elde edilir.

Şimdi 3.2.5 Lemma'ya göre eğer $p > 2$ ise bir $c_1 > 0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le c_1 \begin{cases} n^{-\alpha-1/p} \ln n^{\beta} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-1-1/p} \ln n^{\beta+1} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$p = 2$ ise bir $c_2 > 0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p - \pi_n\right\|_{\overline{G}} \le c_2 \begin{cases} n^{-\alpha-1/2} \ln n^{\beta+\frac{1}{2}} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-3/2} \ln n^{\beta+\frac{3}{2}} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

olduğu görülür. $1 < p < 2$ durumunda ise, düzgün bir eğrinin $\forall \varepsilon > 0$ için $1+\varepsilon$ quasikonform katsayılı quasikonform eğri olduğu gözönüne alınarak $[34]$ bir $c_3 > 0$ sabiti için

$$\left\|\varphi_p - \pi_{n,p}\right\|_{\overline{G}} \le cn^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\frac{2(1+\varepsilon)^2}{1+(1+\varepsilon)^2}} \begin{cases} n^{-\alpha-1/p} \ln n^{\beta} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-1-1/p} \ln n^{\beta+1} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\le c_3 \begin{cases} n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon} \ln^{\beta} n, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon} \ln^{\beta+1} n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\le c_3 \begin{cases} n^{-\alpha-1+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha \in (0,1) \\ n^{-2+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sonucuna ulaşılır.

5. SONUÇ

Matematik ve mekanik problemlerinde uygulama alanlarına sahip olan Riemann konform dönüşüm yaklaşık ifadelerinin bulunabilmesi için kullanılan Bieberbach polinomları ve genelleşmiş Bieberbach polinomları tanımlanmış bu polinomların Riemann dönüşüm fonksiyonuna yakınsaklığı ve yaklaşım hızı ile ilgili elde edilen sonuçların geniş bir özeti ve derlemesi yapılmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Karlovich, Y. I. and Böttcher, A., *Carleson curves, Muckenhoupt weights and Toeplitz operators,* Barcelona: D'estvdıs Catalans Barcelona Inst., (1997).

[2] Markushevich, A. I., *Theory of functions of complex variable III*. Prentice Hall, Inc., (1967).

[3] Gonzalez, M. O. , *Classical Complex Analysis,* Newyork: Marcel Dekker, Inc., (1991).

[4] Suetin, P. K., " Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach Polynomials", *Trudy Mat. Inst. Steklov*,100, (1971).

[5] Gaier, D., *Lectures on Complex Approximation*, Boston: Birkhauser Verlag, (1987).

[6] Pommerenke, Ch., *boundary behaviour of conformal maps*, Berlin: Springer-Verlag, (1992).

[7] Conway, J.B., "Functions of one complex variable II", *Graduate Texts in Mathematics*, 159, (1995).

[8] Aliprantis, C.D. and Burkinsaw, O., *Principles of real analysis*, Newyork : Academic press, (1998).

[9] Duren, P. L., *Theory of* H_p *Spaces*, New York, London: Academic Press, (1970).

[10] Dyn'kin, E. M., "The rate of polynomial approximation in the complex domain", *Complex analysis and spectral theory*, Berlin: Springer, 864, 90-142, (1981).

[11] Dyn'kin, E. M. and Osilenker, B., "Weighted estimates for singular integrals and their applications", *Mathematical Analysis,* Moscow: Itogi Nauki i Techniki Akad. Nauk SSSR Vsesoyuz. Inst. Nauchn. i Tekhn. Inform, 21, 42-129, (1983).

[12] Israfilov, D. M., "Approximation by p-Faber polynomials in the weighted Smirnov space $E^p(G, \omega)$ and the Bieberbach polynomials", *Constr. Approx.*, 17, 335-351, (2001).

[13] Lehto, O. and Virtanen, K., *Quasiconformal mappings in the plane,* 126, Berlin : Springer-Verlag, (1973).

[14] Ahlfors, L.V., *Lectures on quasiconformal mappings*, Wadswort, Brooks/ Cole Advanced Books, Software, Monterey, California, (1987).

[15] Goldstein, V.M.,"The degree of summability of generalized derivatives of plane quasiconformal homeomorfizm", *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 250, (1980).

[16] Privalov, I. I., "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable", *Nauka,* Moscow, (1984).

[17] Andrievski, V.V., Belyi, V.I. and Dzjadyk, V.K., "Conformal invariants in constructive theory of functions of complex variable", *Advanced series in mathematical science and engineering World federation publishers company*, Atlanta, Georgia , (1995).

[18] Mergelyan, S. N. , "Certain questions of the constructive theory of functions" Russian, *Trudy Math. Inst. Steklov*, 37, (1951).

[19] Wue Xue- Mou, "On Bieberbach polynomials", *Acta Math. Sinica,* 13 ,(1963)

[20] Andrievskii, V. V., "Convergence of Bieberbach polynomials in domains with quasi-conformal boundary", *All Union Symposium of approximation Theory in Complex plane*, Ufa, 295-299, (1980).

[21] Gaier, D., "On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with corners", *Constr. Approx.*, 4 (1), 289-305, (1988).

[22] Andrievski, V.V. and Gaier, D., "Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasianalytic boundary", *Mıtteılungen aus dem Mathem. Semınar Gıessen, Sonderdruck aus Heft,* 211, 49, (1992).

[23] Gaier, D., "On the convergence of the Bieberbach polynomials in regions with piecewise analytic boundary". *Arch. Math.*, 58, 462-470, (1992).

[24] Andrievskii, V. V. , "Uniform convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise-quasiconformal boundary", *Theory of Mappings and Approximation of Functions*, Kiev: Nakova Dumka, 3-18, (1988).

[25] Pritsker, I. G., "On the convergence of Bieberbach polynomials in domains with interior zero angles", *Methods of approximation theory in complex analysis and*

mathematical physics, Leningrad, (1991), *Lecture Notes in Math.,Berlin,* 1550, 169-172, (1992).

[26] Andrievskii, V.V. and Pritsker, I.E., "Convergence of Bieberbach polynomials in domains with interior cusps", *J. d' Analyse Math.*, 82, 315-322, (2000).

[27] Davis, PJ., "Interpolation and approximation", *Blaisdell Publishing Company,* Newyork, Toronto, London, (1963).

[28] Israfilov, D. M. , "Uniform convergence of some extremal polynomials in domains with quasi conformal boundary", *East Journal of Approximation*, 4 (4), 527-539, (1998).

[29] Israfilov, D.M., "On the approximation properties of the extremal polynomials", *Dep. VINITI,* No:5461, 23, (1981).

[30] Anderson, J. M., Gehring, F. W. and Hinkkanen, A., "Polynomial approximation On Quasidisk", *Differential Geometry and Complex Analysis*, Berlin, Heidelberg, 75-86, (1985).

[31] Leclerc, M., "A note on a theorem of V.V. Andrievski", *Arch. Math.,* 46, 159-161, (1986).

[32] Israfilov, D. M., Oktay, B., "Approximation properties of the Bieberbach polynomials in the Dini-smooth domains", *Bull Belgian Math. Soc.*, 13, 91, (2003).

[33] Israfilov, D. M., Oktay, B., "Approximation properties of the generalized Bieberbach polynomials in the Dini-smooth domains", *Khazar Journal of Mathematics*, 2, 17, (2006).

[34] Rickman, S., "Characterization of quasiconformal maps", *Ann. Acad Sci. Fenn., Ser. A., Mathematica*", 395, (1966).

[35] Alper, S. Y. , "Approximation in the mean of analytic functions of class E_p", *Investigations on the modern problems of the function theory of a complex variable*, Moscow: Gos. Izdat. Fiz. Mat. Lit., 273, (1960).