T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU VE ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VOLKAN YILMAZ

BALIKESİR, HAZİRAN-2012

T.C.

BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

$\overline{H}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU VE ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

VOLKAN YILMAZ

BALIKESİR, HAZİRAN-2012

KABUL VE ONAY SAYFASI

Volkan YILMAZ tarafından hazırlanan **"$\overline{H}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU VE ALT GRUPLARI"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 12/06/2012 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	**İmza**
Danışman Prof. Dr. Recep ŞAHİN	…………………………..
Üye Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	…………………………..
Üye Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	…………………………..

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Hilmi NAMLI ………………………….

ÖZET

$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU VE ALT GRUPLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
VOLKAN YILMAZ
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ, FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)
BALIKESİR, 2012

Bu tezde $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu ve bazı alt grupları verilmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Giriş bölümü olan birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde gerekli olan temel tanımlar, kavramlar, teoremler ve metodlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde $\mathrm{H}(\lambda_5)$ Hecke grubu tanıtılmış ve temel bölgesi verilmiştir. Ayrıca $\mathrm{H}(\lambda_5)$ Hecke grubunun komütatör ve kuvvet alt grupları, serbest normal alt grupları, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılmış ve grup yapıları incelenmiştir.

Dördüncü bölüm tezin ana kısmıdır. Önce, $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu tanıtılmıştır. Sonra bu grubun temel bölgesi ve bazı özellikleri verilmiştir. $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun komütatör alt grupları ile kuvvet alt grupları arasındaki ilişkiler, bazı normal alt grupları, serbest normal alt grupları, denklik ve temel denklik alt grupları hakkında bilgi verilmiştir.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER : genişletilmiş Hecke grubu, komütatör alt grubu, kuvvet alt grubu, Hecke grubu.

ABSTRACT

THE EXTENDED HECKE GROUP $\overline{H}(\lambda_5)$ AND ITS SUBGROUPS
MSC THESIS
VOLKAN YILMAZ
BALIKESİR UNIVERSITY, INSTITUE OF SCIENCE
DEPARTMENT OF MATHEMATICS
(SUPERVISOR: PROF. DR. RECEP ŞAHİN)
BALIKESİR, 2012

In this thesis, the extended Hecke group $\overline{H}(\lambda_5)$ and some subgroups of its are given.

This thesis consists of five chapters. In the first chapter which is the introduction the study is introduced.

In the second chapter, the fundamental definitions, notations, theorems and methods which are needed in the other chapters are given.

In the third chapter, the Hecke group $H(\lambda_5)$ is introduced and its fundamental region is given. Also, commutator subgroups, power subgroups, free normal subgroups, congruence subgroups and principal congruence subgroups of the Hecke group $H(\lambda_5)$ are introduced and the group structure of these are investigated.

The fourth chapter is the main part of the thesis. Firstly, the extended Hecke group $\overline{H}(\lambda_5)$ is introduced. Later, its fundamental region and its some properties are given. Informations about the relations between commutator subgroups and power subgroups, some normal subgroups, free normal subgroups, congruence subgroups and principal congruence subgroups of the extended Hecke group $\overline{H}(\lambda_5)$ are given.

In the fifth chapter, the results obtained in this thesis are given.

KEYWORDS : the extended Hecke group, commutator subgroup, power subgroup, the Hecke group.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

[G, X]	: Topolojik dönüşüm grubu
GF(p^n)	: p^n mertebeli Galois cismi
GL(2, K)	: Genel lineer grup
Z(GL(2, K))	: Genel lineer grubun merkezi
PGL(2, K)	: Projektif genel lineer grup
SL(2, K)	: Özel lineer grup
Z(SL(2, K))	: Özel lineer grubun merkezi
PSL(2, K)	: Projektif özel lineer grup
$\mathbf{C}_\infty$	: Genişletilmiş karmaşık düzlem
Aut($\mathbf{C}_\infty$)	: $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizmlerinin kümesi
$\overline{\mathbf{Aut}}$ **($\mathbf{C}_\infty$)**	: $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmlerinin kümesi
U	: Üst yarı düzlem $\{z\in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) >0\}$
PSL(2, R)	: $\{T \mid T(z)=\dfrac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d\in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1\}$
$\mathbf{G_0}$	: $\{U \mid U(z)=\dfrac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a, b, c, d\in \mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=-1\}$
Γ	: Fuchsian gruplar
(g;m₁,…,mᵣ;t;u)	: Fuchsian grupların simgesi
$\mu(\Gamma)$	: Fuchsian grubun temel bölgesinin hiperbolik alanı
(l,m,n)	: $< x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I >$ üçgen grubun simgesi
$\mathbf{C_n}$	: Devirli grup
$\mathbf{D_n}$	: Dihedral grup
$\mathbf{S_n}$	: Simetrik grup
$\mathbf{A_n}$	: Alterne grup
Σ	: Schreier transversali
[a, b]	: a ile b elemanlarının komütatörü
$\mathbf{G'}$	: G grubunun komütatörü
$\mathbf{A\times B}$	: Direk çarpım grubu
$\mathbf{A * B}$	: Serbest çarpım grubu
$\mathbf{A *_H B}$	: Birleştirilmiş serbest çarpım grubu
H(λ)	: Hecke grubu
$\mathbf{H(\lambda_q)}$	: $\lambda=\lambda_q=2\cos\dfrac{\pi}{q},\ 1\le\lambda<2$ için elde edilen Hecke grubu
$\overline{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\lambda_q})$	: $\lambda=\lambda_q=2\cos\dfrac{\pi}{q},\ 1\le\lambda<2$ için genişletilmiş Hecke grubu
$\mathbf{H(\lambda_5)}$	: $\lambda_5=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ için elde edilen Hecke grubu
$\overline{\mathbf{H}}(\boldsymbol{\lambda_5})$	: $\lambda_5=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ için elde edilen genişletilmiş Hecke grubu
$\mathbf{H'(\lambda_5)}$	: $H(\lambda_5)$ grubunun komütatör alt grubu
$\mathbf{H^{(n)}(\lambda_5)}$	: $H(\lambda_5)$ grubunun n. komütatör alt grubu
$\mathbf{H^{m}(\lambda_5)}$	: $H(\lambda_5)$ grubunun m. kuvvet alt grubu

$\left(\mathbf{H}^{\mathbf{m}}\right)'(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$H(\lambda_5)$ grubunun m. kuvvet alt grubunun komütatörü
$\mathbf{H}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$H(\lambda_5)$ grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu
$\overline{\mathbf{H}}'(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun komütatör alt grubu
$\overline{\mathbf{H}}''(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun 2. komütatör alt grubu
$\overline{\mathbf{H}}^{(\mathbf{n})}(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun n. komütatör alt grubu
$\overline{\mathbf{H}}^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun m. kuvvet alt grubu
$\left(\overline{\mathbf{H}}^{\mathbf{m}}\right)'(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun m. kuvvet grubunun komütatör alt grubu
$\overline{\mathbf{H}}_{\mathbf{p}}(\boldsymbol{\lambda}_5)$	:	$\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun p seviyeli temel denklik alt grubu

ÖNSÖZ

Öncelikle, bu konudaki bilgilerimi borçlu olduğum ve her zaman yanımda hissettiğim danışman hocam Prof. Dr. Recep ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Benden hiçbir zaman yardımını esirgemeyen, vakit ayıran ve ilgilenen hocam Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Biricik kardeşim Gülçin'e, beni yetiştiren ve bugünlere gelmemdeki en büyük pay sahibi olan canım teyzem ve anneanneme sevgilerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca annem gibi gördüğüm, her konuda benden desteğini esirgemeyen, her türlü zorlukta yanımda olan sevgili Yüce İNAN'a sonsuz teşekkür ederim.

Son olarak da üzerimde çok emeği olan, bugünlerimi görmesini en çok istediğim dedemi de rahmetle anıyorum.

1. GİRİŞ

Erich Hecke, 1936 yılında “Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung” adlı çalışmasında, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen ve $H(\lambda)$ ile gösterilen grupları tanıtmıştır, [1]. Burada $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir. Ayrıca E. Hecke, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının ayrık olması için gerekli ve yeterli şartın $\lambda \geq 2$ bir reel sayı veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olması gerektiğini gösterdi.

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu, 2 ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur ve grup gösterimi

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q$$

şeklindedir. Literatürde bu gruplardan en çok çalışılanları $H(\lambda_3) = \Gamma = PSL(2, \mathbf{Z})$, $H(\lambda_4) = H(\sqrt{2})$, $H(\lambda_5) = H((1+\sqrt{5})/2)$ ve $H(\lambda_6) = H(\sqrt{3})$ Hecke gruplarıdır. Burada $q \geq 4$ için $H(\lambda_q) \subset PSL(2, \mathbf{Z}[\lambda_q])$ olur.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ tek tamsayı ve $q = 4, 6$) değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır, [2]. $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarında, q=3 değerine karşılık gelen $H(\lambda_3)$ Hecke grubu modüler grup olarak adlandırılır ve PSL(2, **Z**) ile gösterilir. Modüler grup ve normal alt grupları bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır, [3, 4]. Ayrıca matematiğin de sayılar teorisi, otomorfik fonksiyonlar teorisi ve grup teorisi gibi bir çok alanında büyük öneme sahiptir.

Genişletilmiş modüler grup, $H(\lambda_3) = \Gamma = PSL(2, \mathbf{Z})$ modüler grubunun üreteçlerine $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü eklenerek tanımlanır ve $\overline{H}(\lambda_3) = \Pi = PGL(2, \mathbf{Z})$ ile gösterilir, [5-7]. Daha sonra $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü eklenerek $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları, Bizim ve Şahin tarafından tanıtılmıştır ve bazı normal alt grupları (komütatör, kuvvet, çift, temel denklik, serbest alt grupları) ve aralarındaki ilişkiler de Şahin, Bizim, Cangül, Koruoğlu, İkikardeş tarafından verilmiştir, [8-13]. Ayrıca $\overline{H}(\lambda_3)$ genişletilmiş modüler grubun ve $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet alt grupları ile serbest alt grupları ve kuvvet alt grupları ile komütatör alt grupları arasındaki ilişkiler [14, 15] nolu makalelerde çalışılmıştır.

Bu tezde $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ durumuna karşılık gelen $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının $q = 5$ değeri için elde edilen $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu, alt grupları ve özellikleri çalışılmıştır. Çalışmanın ilk bölümü tezin amacını veren ve tezin bölümlerinin anlatıldığı giriş bölümüdür.

İkinci bölüm olan ön bilgiler bölümünde, tezin daha sonraki bölümlerinde kullanacağımız bazı temel tanımlar, teoremler, metodlar ve yöntemler verilmiştir. Ana hatlarıyla topolojik dönüşüm grupları, ayrık gruplar, projektif gruplar, doğrusal dönüşümler, Fuchsian grupları, permütasyon metodu, Reidemeister-Scheier metodu, komütatör alt gruplar, serbest gruplar, serbest çarpımlar, Hecke grupları ve genişletilmiş Hecke gruplarından bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tanımı ve genel özellikleri verilmiş, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu için bir temel bölge tanımlanmıştır. Ayrıca $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun komütatör alt grupları ile kuvvet alt grupları tanıtılmış ve bu alt grupların üreteçleri, üreteçlerinin matris gösterimleri, grup gösterimleri ve simgeleri bulunmuştur. Daha sonra kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları da aynı şekilde incelenmiştir. Ek olarak $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun serbest alt grupları ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Son olarak $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun Temel denklik ve denklik alt grupları tanımlanmıştır.

Dördüncü bölümde, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun tanımı ve grup yapısı verilmiştir. $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu için bir temel bölge tanımlanmıştır. Ayrıca $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun komütatör alt grupları ve kuvvet alt grupları tanıtılmış, üreteç kümeleri ve üreteçlerin matris gösterimleri bulunmuştur. Kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları incelenmiştir. $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun bazı normal alt grupları ve serbest normal alt grupları ile ilgili teoremler ispatlanmıştır. Son olarak $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun Temel denklik ve denklik alt grubu tanımlanmıştır.

Beşinci bölümde, tezde elde edilen sonuçlar verilmiş ve önerilerde bulunulmuştur.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kavramlar tanımlanmış, temel teoremler ve metodlar verilmiştir. Bu bölümdeki bilgilerin bir kısmı [2, 8-10] nolu kaynaklardan elde edilmiştir.

2.1 Topolojik Dönüşüm Grupları

2.1.1 Tanım : G hem bir grup hem de bir topolojik uzay olsun. Eğer her a, $b \in G$ için

$$f : G \times G \rightarrow G \; ; \; f(a,b) = ab,$$

$$g : G \rightarrow G \; ; \; g(a) = a^{-1}$$

biçiminde tanımlanan f ve g işlemleri sürekli iseler, G ye bir *topolojik grup* denir, [16].

2.1.2 Tanım : G bir topolojik grup ve X herhangi bir topolojik uzay olsun.

$$\Lambda : G \times X \rightarrow X \; ; \; \Lambda(g,x) = g \Lambda x$$

sürekli dönüşümü, eğer her g, $h \in G$ ve her $x \in X$ için

(i) $g \Lambda (h \Lambda x) = gh \Lambda x$

(ii) $e \Lambda x = x$

koşullarını sağlıyorsa [G, X] ikilisine bir *topolojik dönüşüm grubu* denir, [16].

2.2 Ayrık Gruplar

2.2.1 Teorem : G bir topolojik grup olsun.

(i) G nin elemanlarının hiçbirisi G nin bir yığılma noktası değil ise G ye *ayrık grup* denir.

(ii) G nin her g elemanı için {g} kümesi g nin bir komşuluğu ise G ye *ayrık grup* denir.

(iii) G nin her g elemanı G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir.

(iv) G nin birim elemanı olan e, G nin bir ayrık noktası ise G ye *ayrık grup* denir, [16].

2.3 Projektif Gruplar

p bir asal sayı olmak üzere, $q=p^n$ biçimindeki her asal kuvveti için izomorfizm farkıyla GF(q) ile gösterilen q elemanlı bir tek cisim vardır ve bu q elemanlı cisim Galois cismidir. Bütün sonlu cisimler bu formdadır, [2].

K, $q=p^n$ mertebeli sonlu bir cisim, yani K=GF(q) olsun. GL(2, K) ile gösterilen *genel lineer grup*,

$$\mathrm{GL}(2,\mathrm{K})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in \mathrm{K}, ad-bc\neq 0\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Bu grubun merkezi Z(GL(2, K)) ile gösterilir ve GL(2, K) nın normal alt grubudur. Buradan PGL(2, K) ile gösterilen *projektif genel lineer grup*

$$\mathrm{PGL}(2,\mathrm{K})=\mathrm{GL}(2,\mathrm{K})/\mathrm{Z}(\mathrm{GL}(2,\mathrm{K}))$$

olarak tanımlanır, [2].

GL(2, K) grubunda determinantı 1 olan matrisler bir alt grup oluştururlar ve SL(2, K) ile gösterilen bu alt gruba *özel lineer grup* denir, yani

$$\mathrm{SL}(2,\mathrm{K})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a,b,c,d\in \mathrm{K}, ad-bc=1\right\}$$

olur. Dolayısıyla PSL(2, K) ile gösterilen *projektif özel lineer grup*,

$$\mathrm{PSL}(2,\mathrm{K})=\mathrm{SL}(2,\mathrm{K})/\mathrm{Z}(\mathrm{SL}(2,\mathrm{K}))$$

biçiminde tanımlanır, [2].

Sadece sonlu cisimler üzerinde tanımladığımız yukarıdaki dört projektif grup genelde K nın sonsuz bir cisim olması halinde de tanımlanabilir. Bu durumda matrislerin ya da indirgenen kesirli lineer dönüşümlerin tüm katsayıları bu sonsuz cisimden alınır. En çok çalışılan projektif gruplar PSL(2, **Z**), PSL(2, **R**) ve PSL(2, **C**) dir.

2.4 Doğrusal Dönüşümler

$\mathbf{C}_\infty$ genişletilmiş karmaşık düzlemin otomorfizmleri a, b, c, d$\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$T(z)=\frac{az+b}{cz+d}$$

biçimindeki dönüşümlerdir. Bu dönüşümlere *doğrusal dönüşüm* veya *Möbius dönüşümü* denir. Bu tip dönüşümlerin kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur ve bu grup Aut($\mathbf{C}_\infty$)=PGL(2, $\mathbf{C}$) ile gösterilir. a, b, c, d $\in\mathbf{C}$ ve $ad-bc\neq 0$ olmak üzere

$$U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$$

dönüşümleri de $\mathbf{C}_\infty$ un anti-otomorfizmleridir. İki anti-otomorfizmin birleşimi bir otomorfizm ve bir anti-otomorfizm ile bir otomorfizmin birleşimi bir anti-otomorfizmdir. Dolayısıyla $\mathbf{C}_\infty$ un tüm otomorfizm ve anti-otomorfizmleri bir grup oluşturur ve bu grup $\overline{\mathrm{Aut}}(\mathbf{C}_\infty)=\overline{\mathrm{PGL}}$ (2, $\mathbf{C}$) biçiminde gösterilir. U bir anti-otomorfizm olmak üzere PGL(2, $\mathbf{C}$) ve UPGL(2, $\mathbf{C}$), $\overline{\mathrm{PGL}}(2,\mathbf{C})$ deki kosetlerdir, yani $\left[\overline{\mathrm{PGL}}(2,\mathbf{C}):\mathrm{PGL}(2,\mathbf{C})\right]=2$ dir ve buradan PGL(2, $\mathbf{C}$), bu grubun normal bir alt grubudur.

U ile üst yarı düzlemi gösterelim yani, ***U***=$\{z\in\mathbf{C} : \mathrm{Im}(z)>0\}$ olsun. Hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini kullanacağız. Bu çalışmada kullanacağımız gruplar hiperbolik geometrinin eşmetrilerinin grupları olduğundan ve hiperbolik geometri için üst yarı düzlem gösterimini seçtiğimizden bu dönüşümlerin gerçel katsayılı olanları ile ilgileneceğiz. Bu nedenle PGL(2, $\mathbf{C}$) nin bazı dönüşümlerinden oluşan

$$\mathrm{PSL}(2,\mathbf{R})=\{T \mid T(z)=\frac{az+b}{cz+d},\ a, b, c, d\in\mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=1\}$$

ve

$$G_0=\{U \mid U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d},\ a, b, c, d\in\mathbf{R} \text{ ve } ad-bc=-1\}$$

biçimindeki iki alt kümesini alalım ve G= PSL(2, $\mathbf{R}$)$\cup G_0$ kümesini oluşturalım. G kümesinin fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup olduğu kolayca görülebilir.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbius dönüşümleri ile matrisler arasında bire bir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, T(z)=$\frac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı teoremler verelim.

2.4.1 Teorem : θ :GL(2, **C**)$\rightarrow$Aut(**C**$_\infty$)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir, [17].

Dikkat edilirse Teorem 2.4.1 deki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün, k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur.

2.5 Fuchsian Grupları

2.5.1 Tanım : (i) [G, ***U***] topolojik dönüşüm grubunun ayrık alt gruplarına *Öklidyen olmayan kristallografik* (*non-Euclidean Crystallographic*) *grup* denir ve kısaca N.E.C. grup diye yazılır.

(ii) PSL(2, **R**) nin alt grubu olan N.E.C. gruplara *Fuchsian gruplar* denir ve Γ ile gösterilir.

Her Γ Fuchsian grubunun aşağıdaki şekilde bir temsili vardır:

Üreteçler : $a_1, b_1, \dots, a_g, b_g$ (hiperbolik)

$x_1, \dots, x_r$ (eliptik)

$p_1, \dots, p_t$ (parabolik)

$h_1, \dots, h_u$ (hiperbolik sınır elemanı)

Bağıntılar : $x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g}[a_i, b_i]\prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$

Γ Fuchsian grubuna

$$(g;m_1,\ldots,m_r;t;u) \tag{2.1}$$

simgesine sahiptir denir. Burada $m_1, \ldots, m_r \geq 2$ sayıları tamsayılardır ve bunlara Γ nın *periyotları* denir. g, Γ nın üzerinde ayrık olarak hareket ettiği $\boldsymbol{U}/\Gamma$ Riemann yüzeyinin cinsidir.

2.5.2 Riemann-Hurwitz Formülü : Γ, simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir grup olsun. Γ nın hiperbolik alanını

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{m_i}) + t + u$$

olarak tanımlayalım. Eğer $\mu(\Gamma) > 0$ ise simgesi (2.1) biçimindeki gibi olan bir Fuchsian grup vardır. Eğer Γ, birinci türden Fuchsian grupsa $\mu(\Gamma) > 0$ dır. Şimdi Γ_1, Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olsun. o zaman

$$[\Gamma : \Gamma_1] = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

olur. Burada $\mu(\Gamma_1)$ ve $\mu(\Gamma)$ sırasıyla Γ_1 ve Γ grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanını göstermektedir. Bu formüle *Riemann-Hurwitz formülü* denir, [18].

2.6 Permütasyon Metodu

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt gruplarının simgelerini bulmakta kullanacağımız permütasyon metodunu aşağıdaki teorem ile verelim.

2.6.1 Teorem : $p+q=r+t$ ve $1<k_i \leq \infty$ $(1 \leq i \leq q)$ olmak üzere Γ grubunun simgesi $(g;m_1,...,m_p,n_1k_1,...,n_qk_q)$ ve Γ_1, Γ grubunun μ indeksli bir normal alt grubu ise Γ_1 alt grubu $(g_1;k_1^{(\mu/n_1)},...,k_q^{(\mu/n_q)})$ simgesine sahiptir. Burada $k_i^{(\mu/n_i)}$, k_i mertebeli elemandan μ/n_i tane var demektir ve g_1 cinsi Riemann-Hurwitz formülü ile bulunabilir, [19].

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu üçgen grup olarak düşünülebileceğinden üçgen gruplardan biraz bahsedelim.

l, m, n $\geq$ 2 olacak şekildeki tamsayılar olsun. Açıları π/l, π/m, π/n olan hiperbolik üçgeni göz önüne alalım. σ_1, σ_2, σ_3 bu üçgenin kenarlarındaki yansımalar ve Γ^* grubu bu üç yansıma ile üretilen grup olsun.

$$\Gamma^* = < \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \mid \sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = (\sigma_2\sigma_3)^l = (\sigma_3\sigma_1)^m = (\sigma_1\sigma_2)^n = I >$$

Burada σ_1, σ_2 ve σ_3 yön korumayan elemanları, $\sigma_2\sigma_3$, $\sigma_3\sigma_1$ ve $\sigma_1\sigma_2$ ise yön koruyan elemanlarıdır . $x = \sigma_2\sigma_3$ ve $y = \sigma_3\sigma_1$ olarak alırsak $xy = \sigma_1\sigma_2$ olarak elde edilir. Buradan Γ^* grubunun sadece x, y ve xy yön koruyan eşmetrilerinden oluşan bir Γ alt grubunu

$$\Gamma = < x, y \mid x^l = y^m = (xy)^n = I >$$

biçiminde elde ederiz. Bu alt grup bir Fuchsian gruptur ve simgesi (0;l,m,n) dir. Kısaca (l,m,n) biçiminde gösterilir. Bu Γ alt grubuna bir *üçgen grup* denir. Γ alt grubu Γ^* grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur, [20].

Şimdi (1,m,n) gösterimine sahip herhangi bir üçgen grup için şu teoremi verelim:

2.6.2 Teorem : Eğer $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}>1$ ise üçgen grup sonlu, $\frac{1}{l}+\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\leq 1$ ise sonsuz mertebelidir, [21].

Sonlu mertebeli bazı üçgen grupları ana hatlarıyla inceleyelim:

(i) C_n Devirli grupları : C_n devirli gruplarının gösterimleri

$$C_n \cong \langle \alpha \mid \alpha^n = I \rangle$$

biçimindedir. Bunların üçgen grubu olarak gösterimleri de her $n \in \mathbf{N}$ için (l,n,n) biçimindedir. Ayrıca m tek sayı olduğunda

$$C_{2m} \cong \langle \alpha, \beta \mid \alpha^2 = \beta^m = I, \alpha\beta = \beta\alpha \rangle$$

olacağından C_{2m} in üçgen grubu olarak gösterimi (2,m,2m) biçiminde olur, [20].

(ii) D_n Dihedral Grupları : D_n gruplarının gösterimleri

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2 = \beta^2 = (\alpha\beta)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^2 = \beta^n = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n \cong \langle \alpha,\beta \mid \alpha^n = \beta^2 = (\alpha\beta)^2 = I \rangle$$

biçimindedir ve $|D_n| = 2n$ dir. D_n grubunun üçgen grubu olarak gösterimi (2,2,n) veya (2,n,2) veya (n,2,2) biçimindedir, [20].

(iii) Simetrik ve Alterne Gruplar : n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir. $|S_n| = n!$ ve $|A_n| = \frac{n!}{2}$ dir. Çok karşılaşılan simetrik ve alterne gruplar $D_3 \cong S_3 \cong (2,2,3)$, $A_4 \cong (2,3,3)$, $S_4 \cong (2,3,4)$ ve $A_5 \cong (2,3,5)$ gruplarıdır, [20].

2.7 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu kısımda $H(\lambda_5)$ Hecke ve $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun kuvvet ve komütatör alt gruplarının üreteçlerini bulmakta kullanılacak bir teknik olan Reidemeister-Schreier metodu verilecektir.

G, $\{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Metod önce H için bir Scheier transversali seçmekle ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $\quad I \in \Sigma$

(ii) $\quad \Sigma$ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \ldots g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \ldots g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki biçimde olacaktır, [2].

(Σ nın bir elemanı)x(G nin bir üreteci)x(önceki çarpımın koset gösterimi)$^{-1}$

2.7.1 Örnek : D_5 dihedral grubunun $D_5^{\,2}$ 2.kuvvet alt grubunu bulalım.

D_5 dihedral grubunun grup gösterimi;

$$D_5 = < a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^2 = I >$$

biçimindedir. $D_5^{\,2}$ kuvvet alt grubu, D_5 grubunun normal alt grubudur ve bölüm grubu,

$$D_5 / D_5^{\,2} = < a, b \mid a^2 = b^5 = (ab)^2 = a^2 = b^2 = (ab)^2 = \ldots = I >$$

gösterimine sahiptir. Gerekli kısaltmalar yapılırsa bu gösterim

$$D_5 / D_5^{\,2} = < a \mid a^2 = I >$$

biçiminde yazılabilir. Buradan $D_5^{\,2}$ alt grubunun D_5 grubundaki indeksinin 2 olduğu görülür.

$D_5^{\,2}$ kuvvet alt grubunun üretelerini bulmak için bir Schreier transversali olarak,

$$\{ I, a \}$$

kümesini seçelim. Burada mümkün olan tüm çarpımlar aşağıdaki gibidir:

$$I.a.(a)^{-1}=I, \qquad I.b.(I)^{-1}=b,$$
$$a.a.(I)^{-1}=I, \qquad a.b.(a)^{-1}=aba.$$

Ayrıca, $aba = (b)^{-1}$ olduğundan, $D_5^{\,2}$ kuvvet alt grubunun gösterimi,

$$D_5^{\,2} = < b \mid b^5 = I >$$

olarak bulunur, [9].

2.8 Komütatör Alt Grupları, Serbest Gruplar ve Serbest Çarpımlar

2.8.1 Tanım : G bir grup olsun. $a, b \in G$ ve $[a, b] = aba^{-1}b^{-1}$ olmak üzere

$$< [a, b] \mid a, b \in G >$$

ile tanımlanan gruba G grubunun *komütatör alt grubu* denir ve G' ile gösterilir.

2.8.2 Yardımcı Teorem : G/G', G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur. Yani G/N, G nin başka bir değişmeli bölüm grubu ise

$$G' \triangleleft N \triangleleft G$$

olur ve bir

$$\Theta : G/G' \to G/N$$

homomorfizmi vardır, [22].

Şimdi $H(\lambda_q)$ bir serbest çarpım olarak bazı serbest alt gruplara sahip olduğundan, bu alt grupların yapısıyla ilgili bazı sonuçları verelim.

2.8.3 Tanım : X bir F grubunun alt kümesi ve G herhangi bir grup olmak üzere,

$$\phi_0 : X \to G$$

şeklinde herhangi bir dönüşüm için,

$$\phi : F \to G$$

ϕ_0 dönüşümünün uzantısı olan tek bir ϕ homomorfizması varsa F grubuna X üzerinde *serbesttir* denir, [23].

X bir F grubunun bir alt kümesi olsun. F, aşağıdaki koşulları sağlayan X tabanı ile bir serbest gruptur: Eğer ϕ, X kümesinden bir H grubu içine herhangi bir fonksiyon ise ϕ homomorfizminin F den H ye bir ϕ^* homomorfizmine tek bir genişlemesi vardır. Burada X e F nin *serbest tabanı* denir, [23].

X serbest tabanının mertebesine F nin *rankı* denir. Eğer $|X| = n$ ve $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise F, $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ üzerinde *serbesttir* diyeceğiz ve bunu F_n ile göstereceğiz, [23].

2.8.4 Teorem : İki serbest grubun izomorf olması için gerek ve yeter koşul ranklarının aynı olmasıdır, [23].

0 ranklı bir serbest grup aşikardır ve 1 ranklı bir serbest grup sonsuz devirlidir.

2.8.5 Teorem : F grubunun bir serbest grup olması için gerek ve yeter koşul F nin $F=<X;>$ biçiminde bir gösterimi olmasıdır, [24].

2.8.6 Teorem : Her G grubu bir serbest grubun bir homomorfik görüntüsüdür, [24].

2.8.7 Teorem : Bir serbest grup bükümsüzdür (torsion-free), yani bir serbest grupta birim eleman dışında sonlu mertebeli eleman yoktur, [24].

2.8.8 Teorem (Nielsen-Screier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbesttir, [24].

Biçim ve özellik bakımından serbest gruplara en yakın kavram, grupların serbest çarpımlarıdır. Burada çalışmamızda kullanacağımız kadarıyla serbest çarpımların genel özelliklerini [24] nolu kaynaktan yararlanarak vereceğiz.

2.8.9 Tanım : $A=\langle a_1,...;R_1,...\rangle$ ve $B=\langle b_1,...;S_1,...\rangle$ iki grup olsun. A ve B gruplarının $A*B$ ile gösterilen serbest çarpımı,

$$\langle a_1,...,b_1,...;R_1,...,S_1,...\rangle$$

gösterimli gruptur. Yani G grubunun üreteçleri, A ve B gruplarının üreteçlerinin tümünden ve bağıntıları da A grubunun R_i ve B grubunun S_j bağıntılarının tümünden oluşur. A ve B gruplarına *G* grubunun *çarpanları* denir, [24].

Serbest çarpım kavramı keyfi sayıdaki gruplara da genişletilmiştir.

2.8.10 Tanım : Eğer $A_\alpha = \langle \text{ür}A_\alpha : \text{bağ}A_\alpha \rangle, \alpha \in I$ grupların bir koleksiyonu ise bu grupların G=$*$ A_α serbest çarpımı, üreteçleri A_α gruplarının üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α gruplarının bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur, [24].

2.8.11 Teorem : G=A$*$B olsun. O zaman $A \to G$ ve $B \to G$ eşlemeleri birebir eşlemelerdir. A nın üreteçleri ile üretilen G grubunun alt grubu <A grubunun üreteçleri, A grubunun bağıntıları> biçiminde gösterime sahiptir. Yani A grubuna izomorftur. Benzer durum B içinde geçerlidir. Bu yüzden A ve B, G grubunun alt grupları olarak düşünülebilir, [24].

Bir G grubunun bir serbest çarpım olarak ayrışıp ayrıştırılamayacağını belirlemek önemlidir. G için verilen bir gösterimde G grubunun üreteçlerini, bağıntılar da ayrışacak biçimde iki kümeye bölmeye çalışmak basit bir yöntemdir. Yani G=<R$\cup$S; {sadece R deki üreteçleri içeren bağıntılar} $\cup$ { sadece S deki üreteçleri içeren bağıntılar}> biçiminde yazmaya çalışmaktır. Artık G,

G_1 =<R ; R deki üreteçleri içeren bağıntılar>

ve

G_2 =<S; S deki üreteçleri içeren bağıntılar>

gruplarının serbest çarpımıdır.

Serbest çarpımlar, serbest gruplarla bir çok özelliği paylaşır. Örneğin Kurosh'un teoremi ile serbest gruplar için verilmiş olan Nielsen-Schreier teoremi serbest çarpımlara genişletilmiştir.

2.8.12 Teorem (Kurosh) : G, A_α alt gruplarının çarpımı yani,

$$G=\prod_{\alpha} {}_{*} A_\alpha$$

olsun. Eğer H, G nin bir alt grubu ise

$$H = F * \prod_{\beta} {}_{*} B_\beta$$

olur. Burada F bir serbest grup ve her bir β için B_β, bir A_α alt grubuna eşleniktir, [2].

2.8.13 Teorem : Eğer G=A$*$B ve $H \subset A$, $K \subset B$ ise H ve K ile üretilen alt grup bunların serbest çarpımıdır. Yani <H,K>=H$*$K dır, [24].

2.8.14 Tanım : $A = \langle a_1,...;R_1,...\rangle$ ve $B = \langle b_1,...;S_1,...\rangle$ iki grup, $H \subset A$, $K \subset B$ has alt grupları ve $\Phi : H \to K$ bir izomorfizm olsun. A ve B nin, H yi K ya birleştirerek elde edilen serbest çarpımı, gösterimi

$$G = \langle a_1,...,b_1,...;R_1,...,S_1,...,H = \Phi(H)\rangle$$

olan G grubudur. G grubunun üreteçleri A ve B nin üreteçlerinin ayrık birleşimidir ve bağıntıları da A ve B nin bağıntıları ile birlikte alt grup izomorfizmini veren bağıntıların ek bir kümesinden oluşur.

H izomorfik resmi ile özdeşlendiği için G, A ve B gruplarının H ile *birleştirilmiş serbest çarpımıdır* denir. Bu çarpım $G = A *_H B$ ile gösterilir. A ile B gruplarına G nin çarpanları denir.

Bir G grubu eğer aşikar olmayan bir H has alt grubu ve her ikisi de aşikar olmayan G_1 ve G_2 grupları için $G = G_1 *_H G_2$ ise G birleştirilmiş bir serbest çarpımdır.

H={1} alınırsa bir serbest çarpım elde edilir. Bu nedenle serbest çarpımlar, birleştirilmiş serbest çarpımların özel halleridir.

2.9 Hecke Grupları

Eric Hecke, 1936 yılında "Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung" adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.9.1 Tanım : λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \qquad \text{ve} \qquad U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Burada $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$$

elde edilir.

2.9.2 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının ayrık olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ bir reel sayı veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır, [1].

$\lambda \geq 2$ değerleriyle elde edilen Hecke grupları için $H(\lambda)$ gösterimi kullanılır. $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$, durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ ile gösterilir.

2.9.3 Teorem : $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının grup gösterimi,

$$H(\lambda_q) = < T, S \mid T^2 = S^q = I > \cong C_2 * C_q$$

şeklinde, 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır, [2].

2.10 Genişletilmiş Hecke Grupları

2.10.1 Tanım : Hecke gruplarına $R_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde gruplara *genişletilmiş Hecke grupları* denir, [8].

Şimdi de $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ için genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimini elde edelim.

S ve T, Hecke grubunun üreteçleri olmak üzere,

$$R_2 = R_1 S \qquad \text{ve} \qquad R_3 = R_1 T$$

dönüşümlerini alalım. S ve T dönüşümleri;

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q} \qquad \text{ve} \qquad T(z) = -\frac{1}{z}$$

olduğundan R_2 ve R_3 dönüşümleri;

$$R_2(z) = -\frac{1}{\overline{z}+\lambda_q} \qquad \text{ve} \qquad R_3(z) = -\overline{z}$$

olur. R_1 , R_2 ve R_3 yansımaları genişletilmiş Hecke gruplarının üreteçleridir. Dolayısıyla genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimleri

$$\overline{H}(\lambda_q) =< R_1, R_2, R_3 \mid R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^3 = (R_3 R_1)^2 = I >$$

biçimindedir. Burada $R_3R_1=R_1R_3=T$, $R_1R_2=S$ ve $R_1=R$ olduğu dikkate alınırsa, genişletilmiş Hecke gruplarının grup gösterimleri

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I > \qquad (2.2)$$

biçiminde ifade edilebilir, [8,21].

3. $H(\lambda_5)$ HECKE GRUBU

Bu bölüm, bundan sonraki bölümde inceleyeceğimiz $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubuna geçmeden önce, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tanıtılmasına ve genel özelliklerine ayrılmıştır. Bu bölümde $H(\lambda_5)$ Hecke grubu ve temel bölgesi tanımlanmış, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun komütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları tanıtılmış, bu alt gruplarının üreteç kümeleri ile üreteçlerinin matris gösterimleri elde edilmiş ve bu grupların simgeleri bulunmuştur. Bu bölümde [2, 12, 25-36] nolu kaynaklar referans olarak alınmıştır.

3.1 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubu ve Ayrışımı

Bölüm 2.9 da verilen $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, (q = 3, 4, 5, …) için elde edilen $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarından, özel olarak q = 5 değeriyle bulunan $H(\lambda_5)$ Hecke grubuyla ilgileneceğiz.

3.1.1 Tanım : $H(\lambda_q)$ Hecke gruplarının

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

üretecinde, q = 5 için $\lambda_5 = 2\cos\frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ değerinin yazılması ile elde edilen gruba, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu denir.

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu PSL(2, **Z**[λ_5]) kümesinin alt kümesidir. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimi Teorem 2.9.3 te belirtildiği gibi ;

$$H(\lambda_5) = < T, S \mid T^2 = S^5 = I >$$

biçimindedir, [2].

Ayrıca $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad \text{ve} \quad S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_5}$$

üreteçlerinin matris gösterimleri

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

3.1.2 Tanım : [G, X] bir topolojik dönüşüm grubu ve $P \subset X$ olsun. Eğer $g_1, g_2 \in G$ ve $g_1 \neq g_2$ için $g_1P \cap g_2P = \emptyset$ ise P ye bir *G-paketleme* denir, [25].

Denk olarak, eğer $I \neq g \in G$ için $gP \cap P = \emptyset$ ise P ye bir G-paketleme denir. Eğer P bir G-paketleme ise her bir yörüngeden en fazla bir tane eleman içerir, [25].

3.1.3 Yardımcı Teorem : H ve K bir [G, X] topolojik dönüşüm grubunun iki alt grubu olsun. Eğer P bir H-paketleme, Q bir K-paketleme, A=<H, K> (H ve K gruplarının üreteçleri ile üretilen grup), $P \cup Q = X$, $P \cap Q \neq \emptyset$ ise $A \cong H * K$ olur. Ayrıca $P \cap Q$ bir A-paketlemedir, [25].

3.1.4 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubu 2 ve 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur, yani

$$H(\lambda_5) \cong C_2 * C_5$$

dir, [26].

İspat: $H=\langle T\rangle \cong C_2$ ve $K=\langle S\rangle \cong C_5$ olsun. O halde; $H \leq H(\lambda_5)$ ve $K \leq H(\lambda_5)$ olur.

Şimdi Yardımcı Teorem 3.1.3 için gerekli koşulların sağlandığı H ve K alt gruplarının P ve Q paketlerini bulalım:

$$T(z) = -\frac{1}{z} = -\frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

olduğundan, işaret(ReT(z)) = – işaret (Re(z)) bulunur. Buradan H=<T> = { I, T } ve P= $\{z \in U : Re(z) < 0\}$ kümesi için, I.P $\cap$ T.P = $\varnothing$ olduğundan, P kümesi bir H-paketlemedir. Şimdi

$$Q = \{z \in U : |z + 1/\lambda_5| > 1/\lambda_5, Re(z) > -\lambda_5 / 2\}$$

kümesini düşünelim. $S(z) = -\dfrac{1}{z+\lambda_5}$ eliptik dönüşümü aşağıdaki dönüşümlerin bir birleşimi olarak gösterilebilir.

a) $R_1(z) = \dfrac{z}{|z|^2} = \dfrac{1}{\bar{z}}$, birim çemberdeki yansıma.

b) $R_2(z) = -\bar{z}$, Re(z) = 0 doğrusundaki yansıma.

c) $R(z) = z + \lambda_5$, λ_5 boyunca öteleme.

Burada $S(z) = R_1R_2R(z)$ olduğu açıkça görülür.

Q ; a , 0 ve ∞ köşelerine sahiptir. Eğer R dönüşümünü Q dönüşümüne uygularsak ; RQ nun köşelerini $\dfrac{\lambda_5}{2} + iy$, λ_5 , ∞ şeklinde elde ederiz. R_2 yansımasını RQ ya uygularsak köşeleri a , $-\lambda_5$, ∞ olan RQ nun bir yansımasını elde ederiz. Son olarak R_1 yansımasını R_2RQ ya uygularsak; köşeleri a , $-1/\lambda_5$ ve 0 olan R_2RQ nun bir SQ yansımasını elde ederiz.

Benzer olarak, R ve R_1 sırasıyla SQ ya uygulanırsa son bölgeyi S^2Q elde ederiz. Bu bölgenin köşeleri a, $\lambda_5/(1-\lambda_5^2)$ ve $-1/\lambda_5$ olur. Bu işlemi 2 kez uygularsak S^3Q ve S^4Q bölgelerini elde ederiz. S elemanının bir sabit noktası a olduğundan, her S^nQ nun diğer iki köşesini bulalım. Basit bir hesaplama ile;

$$S^n(\infty) = -\frac{\alpha_{n-1}(\lambda_5)}{\alpha_n(\lambda_5)}$$

bulunur. Burada $0 \le n \le 4$, α_n ler aşağıdaki indirgenme formülü ile verilen polinomlardır.

$$\alpha_{-1}(\lambda_5) = \alpha_0(\lambda_5) = 0,$$

$$\alpha_1(\lambda_5) = 1,$$

$$\alpha_n(\lambda_5) = \lambda_5.\alpha_{n-1}(\lambda_5) - \alpha_{n-2}(\lambda_5) ; n \ge 2.$$

3.1.5 Yardımcı Teorem : S^nQ , $0 \le n \le 4$, bölgesinin köşeleri; a , $S^n(\infty)$ ve $S^{n+1}(\infty)$ dir, [25].

Yardımcı Teorem 3.1.5` den ve $S^{n+1}(\infty) = S^n(0)$ olmasından dolayı S^nQ ların hiçbirisi çakışmaz. Yani Q , K- paketlemedir.

Artık bir H-paketleme ve bir K-paketlemeye sahip olduğumuzdan, Yardımcı Teorem 3.1.3 ü uygulayabiliriz. Bu durumda $H(\lambda_5)$ Hecke grubu H ve K alt gruplarının serbest çarpımına izomorfiktir. Yani

$$H(\lambda_5) \cong C_2 * C_5$$

bulunur. Ayrıca

$$P \cap Q = \{z \in U : |z + 1/\lambda_5| > 1/\lambda_5 ,\ -\lambda_5/2 < \mathrm{Re}(z) < 0\}$$

bir $H(\lambda_5)$-paketlemedir.

3.2 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun temel bölgesini vermeden önce bir G grubunun temel bölgesi tanımını vererek başlıyalım:

3.2.1 Tanım : F, $\boldsymbol{U}$ üst yarı düzleminde açık bir küme olsun. Eğer F kümesi,

(i) her bir $z \in \boldsymbol{U}$ için G(z) yörüngesi ile $\overline{F}$ en az bir noktada kesişir,

(ii) her bir $z \in \boldsymbol{U}$ için G(z) yörüngesi ile F en çok bir noktada kesişir,

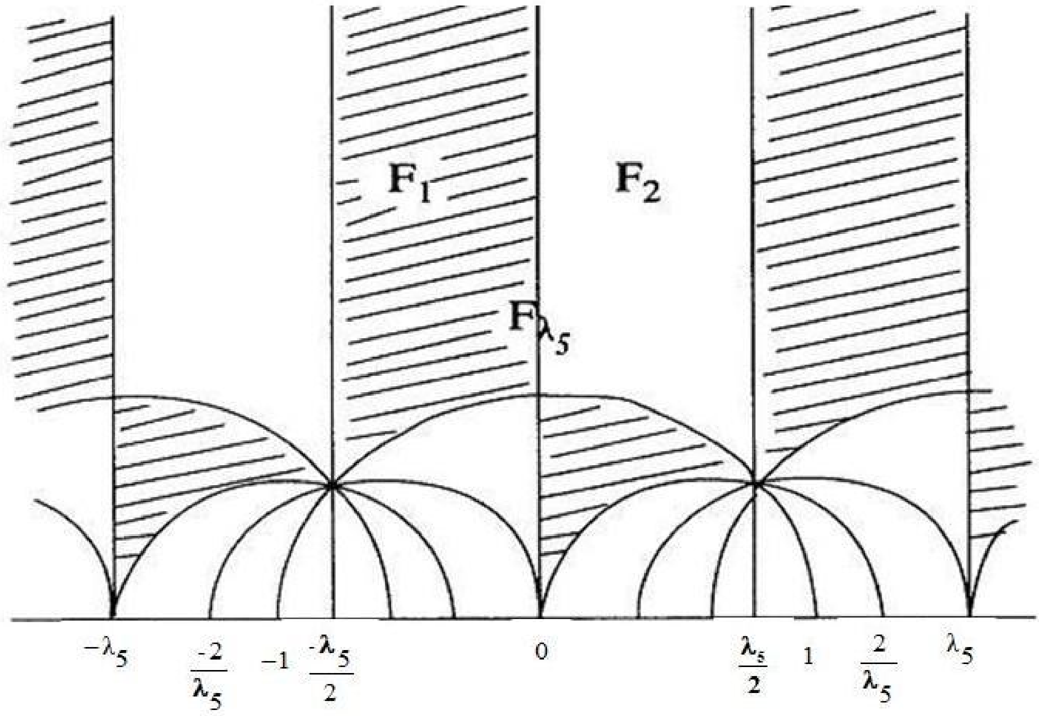
koşullarını sağlıyorsa F kümesine G grubu için bir *temel bölgedir* denir, [25].

3.2.2 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun bir temel bölgesi;

$$F_{\lambda_5} = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\lambda_5}{2}, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir, [25].

Şekil 3.1 de gösterilen $F_{\lambda_5} = F_1 \cup F_2$ kümesi, $H(\lambda_5)$ Hecke grubu için bir temel bölgedir.



Şekil 3.1 : $H(\lambda_5)$ Hecke grubu için bir temel bölge

3.3 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Komütatör Alt Grupları

$H(\lambda_5)$ Hecke grubunun birinci komütatör alt grubunu $H'(\lambda_5)$ ile göstereceğiz. Eğer $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi elde edilir. Benzer şekilde $H'(\lambda_5)$ grubunun gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı eklenirse $H'(\lambda_5)/H''(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi elde edilir, [26].

3.3.1 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu, $(2;\infty)$ simgeli ve 4 ranklı serbest bir alt gruptur. Ayrıca

$$\left|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)\right| = 10 \text{ ve}$$

$$H'(\lambda_5) = <TSTS^4> * <TS^2TS^3> * <TS^3TS^2> * <TS^4TS>$$

olur, [2, 26].

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = < T, S \mid T^2 = S^5 = I > \cong C_2 * C_5$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısını ekleyerek $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimini elde edelim. Buradan $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi

$$H(\lambda_5)/H'(\lambda_5) = <T, S \mid T^2 = S^5 = I, TS=ST> \cong C_2 \times C_5$$

elde edilir. Ayrıca indeks, $|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = 10$ olarak bulunur.

Şimdi $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak { I, T, S, S^2, S^3, S^4, TS, TS^2, TS^3, TS^4 } kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur.

$I.T.(T)^{-1}=I$,	$I.S.(S)^{-1}=I$,
$T.T.(I)^{-1}=I$,	$T.S.(TS)^{-1}=I$,
$S.T.(TS)^{-1}=STS^4T$,	$S.S.(S^2)^{-1}=I$,
$S^2.T.(TS^2)^{-1}=S^2TS^3T$,	$S^2.S.(S^3)^{-1}=I$,
$S^3.T.(TS^3)^{-1}=S^3TS^2T$,	$S^3.S.(S^4)^{-1}=I$,
$S^4.T.(TS^4)^{-1}=S^4TST$,	$S^4.S.(I)^{-1}=I$,
$TS.T.(S)^{-1}=TSTS^4$,	$TS.S.(TS^2)^{-1}=I$,
$TS^2.T.(S^2)^{-1}=TS^2TS^3$,	$TS^2.S.(TS^3)^{-1}=I$,
$TS^3.T.(S^3)^{-1}=TS^3TS^2$,	$TS^3.S.(TS^4)^{-1}=I$,
$TS^4.T.(S^4)^{-1}=TS^4TS$,	$TS^4.S.(T)^{-1}=I$.

Burada $(STS^4T)^{-1}=TSTS^4$, $(S^2TS^3T)^{-1}=TS^2TS^3$, $(S^3TS^2T)^{-1}=TS^3TS^2$, $(S^4TST)^{-1}=TS^4TS$ olduğu göz önüne alınırsa, $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesi

$$\{ TSTS^4, TS^2TS^3, TS^3TS^2, TS^4TS \}$$

olarak bulunur. Buradan $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun sonsuz mertebeli dört grubun serbest çarpımı, yani

$$H'(\lambda_5) = <TSTS^4> * <TS^2TS^3> * <TS^3TS^2> * <TS^4TS>$$

olduğu görülür. Ayrıca $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu serbest bir gruptur ve üreteçlerinin matris gösterimi

$$TSTS^4 = \begin{pmatrix} -2-\lambda_5 & -\lambda_5 \\ -\lambda_5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$TS^2TS^3 = \begin{pmatrix} -2-2\lambda_5 & -1-2\lambda_5 \\ -1-2\lambda_5 & -2-\lambda_5 \end{pmatrix},$$

$$TS^3TS^2 = \begin{pmatrix} -2-\lambda_5 & -1-2\lambda_5 \\ -1-2\lambda_5 & -2-2\lambda_5 \end{pmatrix},$$

$$TS^4TS = \begin{pmatrix} -1 & -\lambda_5 \\ -\lambda_5 & -2-\lambda_5 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun simgesini belirleyelim.

$$H(\lambda_5) = <T, S \mid T^2 = S^5 = I> \cong (2,5,\infty)$$

$$H(\lambda_5)/H'(\lambda_5) = <T, S \mid T^2 = S^5 = (TS)^{10} = I> \cong (2,5,10)$$

ve

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = 10$$

olduğunu biliyoruz. Permütasyon metodundan faydalanarak $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun işareti $\left(g;\infty^{(10/10)}\right) = (g;\infty)$ olarak bulunur.

$H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun cinsini bulmak içinde Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım;

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = \frac{\mu(H'(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

$$10 = \frac{2g-1}{(2.0-2)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)+1}$$

$$g=2$$

bulunur. Böylece $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun simgesi

$$(2;\infty)$$

olarak elde edilir.

3.4 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun $H^m(\lambda_5)$ Kuvvet Alt Grupları

3.4.1 Tanım: m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetleri alınarak üretilen alt gruba $H(\lambda_5)$ grubunun *m. kuvvet alt grubu* denir ve bu alt grup $H^m(\lambda_5)$ ile gösterilir, [2].

3.4.2 Tanım : G bir grup ve H bu grubun bir alt grubu olsun. Eğer her $f : G \to G$ endomorfizmi için $f(H) \subset H$ oluyorsa, H ye *tamamen değişmez* (*fully invariant*) özelliğe sahiptir denir, [27].

3.4.3 Teorem : (i) Kuvvet alt grupları tamamen değişmez özelliğe sahiptirler.

(ii) G grubunun H alt grubu, tamamen değişmez özelliğe sahipse, G nin normal alt grubudur, [28].

Teorem 3.4.3 den kuvvet alt gruplarının normal alt gruplar olduğu sonucu bulunur. Kuvvet alt gruplarının tanımından, aşağıda vereceğimiz özellikler kolaylıkla görülebilir. G herhangi bir grup, m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere kuvvet alt grupları için

$$G^m > G^{mn} \quad \text{ve}$$
$$(G^m)^n > G^{mn}$$

özellikleri sağlanır.

3.4.4 Teorem : m,n pozitif tamsayı ve (m,n) m ile n pozitif tamsayısının en büyük ortak böleni olmak üzere;

$$H^m(\lambda_5) . H^n(\lambda_5) = H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur, [2].

İspat : Alt grup tanımından;

$$H^m(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5) \text{ ve } H^n(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ikisi birlikte düşünülecek olursa,

$$H^m(\lambda_5) . H^n(\lambda_5) \leq H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur.

Şimdi de eşitliğin diğer tarafını ispatlayalım. u, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun herhangi bir öğesi olsun. m_1 ve n_1 tam sayılarını $m_1m+n_1n=(m,n)$ olacak biçimde seçelim. Buradan

$$u^{(m,n)} \in H^{(m,n)}(\lambda_5) \text{ ve } u^{m_1m+n_1n} \in H^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur. Ayrıca

$$u^{m_1m} \in H^m(\lambda_5) \text{ ve } u^{n_1n} \in H^n(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan;

$$u^{m_1m}.u^{n_1n} \in H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5)$$

$$u^{m_1m+n_1n} \in H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5)$$

elde edilir. Böylece

$$u^{(m,n)} \in H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan

$$H^{(m,n)}(\lambda_5) \leq H^m(\lambda_5).H^n(\lambda_5)$$

elde edilir ve ispat biter.

Şimdi m pozitif tamsayısının durumlarına göre elde edilen kuvvet alt gruplarını inceleyelim. Öncelikle m=2 ve m=5 durumlarını inceleyeceğiz.

3.4.5 Teorem : $H^2(\lambda_5)$ normal alt grubu 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$\left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5)\right| = 2,$$

$$H(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cup T.H^2(\lambda_5) \text{ ve}$$

$$H^2(\lambda_5) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$$

olur. $H^2(\lambda_5)$ normal alt grubu $(0;5^2,\infty)$ simgesine sahiptir, [2, 29].

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimine her $X \in H(\lambda_5)$ için $X^2=I$ bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5) \cong \langle T, S \mid T^2=S^5=(TS)^2=S^2=\ldots=I \rangle$$

biçiminde bulunur. Burada $S^5=S^2=I$ olduğundan S=I olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5) \cong <T \mid T^2=I> \cong C_2$$

olur. Ayrıca

$$\left|H(\lambda_5):H^2(\lambda_5)\right| = 2$$

elde edilir. Burada üreteçleri bulmak için Schreier transversali olarak { I, T } kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur.

$$I.T.(T)^{-1}=I, \qquad I.S.(I)^{-1}=S,$$

$$T.T.(I)^{-1}= I, \qquad T.S.(T)^{-1}=TST.$$

$H^2(\lambda_5)$ alt grubunun üreteçleri S ve TST olarak bulunur. Buradan da

$$H^2(\lambda_5) =<S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I> \cong C_5 * C_5$$

ve

$$H(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cup T.H^2(\lambda_5)$$

bulunur. Ayrıca üreteçlerin matris gösterimleri

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad TST = \begin{pmatrix} -\lambda_5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi de $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun işaretini belirleyelim. Burada

$$H(\lambda_5) =<T, S \mid T^2 = S^5 = I> \cong (2,5,\infty),$$

$$H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5) \cong <T \mid T^2=I> \cong (2, 1, 2),$$

$$\left|H(\lambda_5):H^2(\lambda_5)\right| = 2,$$

oldukları bilindiğinden, permütasyon metodundan faydalanarak $H^2(\lambda_5)$ alt grubunun işareti (g; 5^2, ∞) olarak bulunur. Cinsi belirlemek için de Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\left|H(\lambda_5):H^2(\lambda_5)\right| = \frac{\mu(H^2(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

$$2=\frac{2g+\frac{3}{5}}{(2.0-2)+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(1-\frac{1}{5}\right)+1}$$

buradan da g=0 elde edilir. Böylece genel olarak $H^2(\lambda_5)$ alt grubunun simgesi;

$$(0;5^2,\infty)$$

olarak bulunur.

3.4.6 Teorem : $H^5(\lambda_5)$ normal alt grubu 2 mertebeli beş devirli grubun serbest çarpımına izomorftur ve

$$\left|H(\lambda_5):H^5(\lambda_5)\right|=5$$

ve

$$H^5(\lambda_5)=\langle T\rangle*\langle STS^4\rangle*\langle S^2TS^3\rangle*\langle S^3TS^2\rangle*\langle S^4TS\rangle$$

olur. Ayrıca $H^5(\lambda_5)$ normal alt grubu $(0;2^5,\infty)$ simgesine sahiptir, [2, 29].

İspat: $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5)=\langle T, S \mid T^2=S^5=I\rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine her $X\in H(\lambda_5)$ için X^5=I bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)=\langle T, S \mid T^2=S^5=T^5=(TS)^5=S^5=\ldots=I\rangle$$

biçiminde bulunur. Burada $T^2=T^5=I$ olduğundan T=I olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)\cong\langle S \mid S^5=I\rangle\cong C_5$$

olur ve

$$\left|H(\lambda_5):H^5(\lambda_5)\right|=5$$

elde edilir. Burada üreteçleri bulmak için Schreier transversali olarak {I, S, S^2, S^3, S^4 } kümesini seçelim. Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibi olur.

$I.T.(I)^{-1}=T$,	$I.S.(S)^{-1}=I$,
$S.T.(S)^{-1}=STS^4$,	$S.S.(S^2)^{-1}=I$,
$S^2.T.(S^2)^{-1}=S^2TS^3$,	$S^2.S.(S^3)^{-1}=I$,

$$S^3.T.(S^3)^{-1}=S^3TS^2, \qquad S^3.S.(S^4)^{-1}=I,$$
$$S^4.T.(S^4)^{-1}=S^4TS, \qquad S^4.S.(I)^{-1}=I$$

olur. Böylece $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun üreteçleri T, STS^4 , S^2TS^3, S^3TS^2 ve S^4TS olarak bulunur. Buradan da

$$H^5(\lambda_5) =< T, STS^4, S^2TS^3, S^3TS^2, S^4TS \mid T^2=(STS^4)^2=(S^2TS^3)^2$$
$$=(S^3TS^2)^2=(S^4TS)^2=I>$$

$$H^5(\lambda_5) \cong C_2*C_2*C_2*C_2*C_2$$

olur. Ayrıca üreteçlerinin matris gösterimi

$$T=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$STS^4=\begin{pmatrix} -\lambda_5 & -1 \\ 2+\lambda_5 & \lambda_5 \end{pmatrix},$$

$$S^2TS^3=\begin{pmatrix} -1-2\lambda_5 & -2-\lambda_5 \\ 2+2\lambda_5 & 1+2\lambda_5 \end{pmatrix},$$

$$S^3TS^2=\begin{pmatrix} -1-2\lambda_5 & -2-2\lambda_5 \\ 2+\lambda_5 & 1+2\lambda_5 \end{pmatrix},$$

$$S^4TS=\begin{pmatrix} -\lambda_5 & -2-\lambda_5 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

Şimdi de $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun işaretini belirleyelim. Burada

$$H(\lambda_5)=<T, S \mid T^2 = S^5 = I > \cong(2,5, \infty),$$

$$H(\lambda_5)/ H^5(\lambda_5) \cong < S \mid S^5=I> \cong (1, 5, 5),$$

$$\left|H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5)\right| = 5$$

oldukları biliniyor. Permütasyon metodundan faydalanarak $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun işareti $(g;2^5,\infty)$ olarak bulunur. Cinsi belirlemek için de Riemann-Hurwitz formülünü kullanalım.

$$\left|H(\lambda_5) : H^5(\lambda_5)\right| = \frac{\mu(H^5(\lambda_5))}{\mu(H(\lambda_5))}$$

eşitliği kullanılarak g=0 elde edilir. Böylece genel olarak $H^5(\lambda_5)$ alt grubunun simgesi

$$(0;\, 2^5,\, \infty)$$

olarak bulunur.

Böylece m pozitif tamsayısının bazı durumlarına göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.4.7 Teorem: m pozitif bir tamsayı olmak üzere $H^m(\lambda_5)$ normal alt grubu için aşağıdaki durumlardan biri doğrudur;

$$H^m(\lambda_5) = \begin{cases} H(\lambda_5), & \text{eğer } (m,10) = 1 \text{ ise} \\ H^2(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 2 \text{ ve } (m,5) = 1 \text{ ise} \\ H^5(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 1 \text{ ve } (m,5) = 5 \text{ ise} \end{cases}$$

, [2, 29].

İspat : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösteriminin

$$H(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2 = S^5 = I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun grup gösterimine her $X \in H(\lambda_5)$ için $X^m=I$ bağıntısı eklenirse $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi;

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T, S \mid T^2=S^5=T^m=S^m=(TS)^m=\ldots=I \rangle$$

biçiminde olur.

Eğer (m,10)=1 $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T, S \mid T=S=I \rangle$$

gösterimine sahip olur. Böylece

$$H^m(\lambda_5) = H(\lambda_5)$$

bulunur.

Eğer (m,5)=1 ve (m,2)=2 ise, $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = \langle T \mid T^2=I \rangle \cong C_2$$

biçiminde gösterime sahip olur. Böylece Teorem 3.4.3 den dolayı $H^m(\lambda_5) = H^2(\lambda_5)$ bulunur.

Eğer (m,2)=1 ve (m,5)=5 ise $H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5)$ bölüm grubu,

$$H(\lambda_5)/H^m(\lambda_5) = < S \mid S^5=I> \cong C_5$$

biçiminde gösterime sahip olur. Teorem 3.4.4 den dolayı $H^m(\lambda_5)=H^5(\lambda_5)$ bulunur.

Eğer (m,10)=10 ise önceki metotları kullanarak $H^m(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup yapısını bulmak mümkün değildir. Sadece bu kuvvet alt gruplarının serbest alt gruplar olduğunu gösterebiliriz. Bunu göstermek için şu teoreme ihtiyaç duyacağız.

3.4.8 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun $H'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu,

$$H'(\lambda_5) = H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)$$

eşitliğini sağlar, [2, 29, 30].

İspat : Teorem 3.4.5 ve Teorem 3.4.6 de $H(\lambda_5)/H^2(\lambda_5)$ ile $H(\lambda_5)/H^5(\lambda_5)$ bölüm gruplarının devirli birer grup olduklarını göstermiştik. Dolayısıyla bu bölüm grupları değişmelidirler. $H(\lambda_5)/H'(\lambda_5)$ bölüm grubu $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun en geniş değişmeli alt grubu olduğundan

$$H'(\lambda_5) \subset H^2(\lambda_5) \quad \text{ve} \quad H'(\lambda_5) \subset H^5(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan

$$H'(\lambda_5) \subset H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)$$

elde edilir.

Şimdi de eşitliğin diğer tarafını görelim. $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt grubu oldukları için izomorfizma teoremlerinden faydalanırsak ;

$$\frac{H^2(\lambda_5).H^5(\lambda_5)}{H^5(\lambda_5)} \cong \frac{H^2(\lambda_5)}{H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)}$$

olarak bulunur. $H^2(\lambda_5) . H^5(\lambda_5) = H(\lambda_5)$ olduğundan

$$\left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)\right| = \left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5)\right| . \left|H^2(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)\right|$$

$$\left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)\right| = 2.5$$

$$\left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)\right| = 10$$

elde edilir.

Diğer yandan

$$H(\lambda_5) \supset H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) \supset H'(\lambda_5) \text{ ve}$$

$$|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)| = |H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5)| = 10$$

olarak bulunur. Böylece

$$H^2(\lambda_5) \cap H^5(\lambda_5) = H'(\lambda_5)$$

olduğu görülür.

Artık Teorem 3.4.7 te ele almadığımız $H^{10m}(\lambda_5)$ gruplarını göz önüne alabiliriz. Kuvvet alt grubu tanımından;

$$H^2(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5) \quad \text{ve} \quad H^5(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5)$$

kapsamalarını biliyoruz. Buradan Teorem 3.4.8 dan $H'(\lambda_5) \supset H^{10}(\lambda_5)$ elde edilir.

3.4.9 Sonuç : $H^{10m}(\lambda_5)$ alt grupları serbesttir, [2, 29].

3.5 Kuvvet Alt Gruplarının Komütatör Alt Grupları

Bu kısımda [12, 31] nolu kaynaklardan yararlanarak $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt gruplarının komütatör alt gruplarını inceleyeceğiz.

3.5.1 Teorem : (i) $\left|H^2(\lambda_5) : (H^2)'(\lambda_5)\right| = 25$

(ii) $(H^2)'(\lambda_5)$ grubu 16 ranklı [S, TST], [S, TS^2T], [S, TS^3T], [S, TS^4T], [S^2, TST], [S^2, TS^2T], [S^2, TS^3T], [S^2, TS^4T], [S^3, TST], [S^3,TS^2T], [S^3,TS^3T], [S^3, TS^4T], [S^4, TST], [S^4, TS^2T], [S^4, TS^3T], [S^4, TS^4T] tabanlı ve $(6;\infty^{(5)})$ simgeli bir serbest gruptur.

(iii) $(H^2)'(\lambda_5)$ grubu, $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun 5 indeksli bir alt grubudur, [12, 31].

İspat : (i) $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun

$$H^2(\lambda_5) = < S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I > \cong C_5 * C_5$$

olduğunu Teorem 3.4.5 ten biliyoruz. Eğer $H^2(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmeliliği bağıntısı eklenirse $H^2(\lambda_5)/\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ bölüm grubunun grup gösterimi

$$H^2(\lambda_5)/\left(H^2\right)'(\lambda_5) = < S, TST \mid S^5 = (TST)^5 = I, STST = TSTS > \cong C_5 \times C_5$$

elde edilir. Böylece, $\left|H^2(\lambda_5) : \left(H^2\right)'(\lambda_5)\right| = 25$ olur.

(ii) Şimdi $\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak { I, S, S^2, S^3, S^4, TST, TS^2T, TS^3T, TS^4T, TSTS, TS^2TS, TS^3TS, TS^4TS, $TSTS^2$, TS^2TS^2, TS^3TS^2, TS^4TS^2, $TSTS^3$, TS^2TS^3, TS^3TS^3, TS^4TS^3, $TSTS^4$, TS^2TS^4, TS^3TS^4, TS^4TS^4 } kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi

$[S, TST]$, $[S, TS^2T]$, $[S, TS^3T]$, $[S, TS^4T]$, $[S^2, TST]$, $[S^2, TS^2T]$, $[S^2, TS^3T]$, $[S^2, TS^4T]$, $[S^3, TST]$, $[S^3, TS^2T]$, $[S^3, TS^3T]$, $[S^3, TS^4T]$, $[S^4, TST]$, $[S^4, TS^2T]$, $[S^4, TS^3T]$, $[S^4, TS^4T]$

olarak bulunur. $\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ grubunun üreteçleri ve matris gösterimleri

$$[S, TST] = STSTS^4TS^4T = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 5+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^2T] = STS^2TS^4TS^3T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & 7+10\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^3T] = STS^3TS^4TS^2T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -6-10\lambda_5 & 7+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^4T] = STS^4TS^4TST = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2\lambda_5 \\ -2-6\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TST] = S^2TSTS^3TS^4T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 7+10\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^2T] = S^2TS^2TS^3TS^3T = \begin{pmatrix} 9+12\lambda_5 & -10-16\lambda_5 \\ -10-16\lambda_5 & 13+20\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^3T] = S^2TS^3TS^3TS^2T = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & -8-14\lambda_5 \\ -12-20\lambda_5 & 11+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^4T] = S^2TS^4TS^3TST = \begin{pmatrix} 7+8\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -6-10\lambda_5 & 3+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TST] = S^3TSTS^2TS^4T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -6-10\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 7+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^2T] = S^3TS^2TS^2TS^3T = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & -12-20\lambda_5 \\ -8-14\lambda_5 & 11+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^3T] = S^3TS^3TS^2TS^2T = \begin{pmatrix} 13+20\lambda_5 & -10-16\lambda_5 \\ -10-16\lambda_5 & 9+12\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^4T] = S^3TS^4TS^2TST = \begin{pmatrix} 7+10\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TST] = S^4TSTSTS^4T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2-6\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^2T] = S^4TS^2TSTS^3T \begin{pmatrix} 7+8\lambda_5 & -6-10\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 3+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^3T] = S^4TS^3TSTS^2T = \begin{pmatrix} 7+10\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^4T] = S^4TS^4TSTST = \begin{pmatrix} 5+4\lambda_5 & -2\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 1 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $H^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun simgesinin (0;5, 5, ∞) olduğunu Teorem 3.4.5 den biliyoruz. $H^2(\lambda_5)/\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ bölüm grubunun simgesinin (g;5, 5, 5) olduğu düşünülüp, Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu kullanılırsa $\left(H^2\right)'(\lambda_5)$ grubunun simgesinin (6;$\infty^{(5)}$) olduğu bulunur.

(iii) $\left|H^2(\lambda_5) : H'(\lambda_5)\right|=5$ ve $\left|H^2(\lambda_5) : \left(H^2\right)'(\lambda_5)\right|=25$ olduğundan $\left|H'(\lambda_5) : \left(H^2\right)'(\lambda_5)\right|=5$ elde edilir.

3.5.2 Teorem : (i) $\left|H^5(\lambda_5) : \left(H^5\right)'(\lambda_5)\right| = 32$

(ii) $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubu 49 ranklı ve $(17;\infty^{(16)})$ simgeli bir serbest gruptur.

(iii) $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubu, $H'(\lambda_5)$ komütatör grubunun 16 indeksli bir alt grubudur, [31].

İspat : (i) $H^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun

$$H^5(\lambda_5) = \langle T, STS^4, S^2TS^3, S^3TS^2, S^4TS \mid T^2=(STS^4)^2=(S^2TS^3)^2 =(S^3TS^2)^2=(S^4TS)^2=I\rangle$$

$$H^5(\lambda_5) \cong C_2 * C_2 * C_2 * C_2 * C_2$$

olduğunu Teorem 3.4.6 ten biliyoruz. Burada k_1=T, k_2=STS^4, k_3=S^2TS^3, k_4=S^3TS^2, k_5= S^4TS diyelim. Eğer $H^5(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı $k_i.k_j=k_j.k_i$ ($i\neq j$ ve i, j = 1, … , 5) eklenirse

$$H^5(\lambda_5)/\left(H^5\right)'(\lambda_5) \cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$$

elde edilir. Böylece, $\left|H^5(\lambda_5) : \left(H^5\right)'(\lambda_5)\right| = 32$ olur.

(ii) Şimdi $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak { I, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1k_2, k_1k_3, k_1k_4, k_1k_5, k_2k_3, k_2k_4, k_2k_5, k_3k_4, k_3k_5, k_4k_5, $k_1k_2k_3$, $k_1k_2k_4$, $k_1k_2k_5$, $k_1k_3k_4$, $k_1k_3k_5$, $k_1k_4k_5$, $k_2k_3k_4$, $k_2k_3k_5$, $k_2k_4k_5$, $k_3k_4k_5$, $k_1k_2k_3k_4$, $k_1k_2k_3k_5$, $k_1k_2k_4k_5$, $k_1k_3k_4k_5$, $k_2k_3k_4k_5$, $k_1k_2k_3k_4k_5$ } kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubun üreteç kümesi 49 ranklı olarak bulunur.

$\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubunun üreteçleri ve matris gösterimleri şunlardır;

$$TSTS^4TSTS^4 = \begin{pmatrix} 6+6\lambda_5 & 1+4\lambda_5 \\ 1+4\lambda_5 & 2+\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TS^3TS^2TS^3 = \begin{pmatrix} 13+20\lambda_5 & 10+17\lambda_5 \\ 10+17\lambda_5 & 10+13\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^3TS^2TS^3TS^2} = \begin{pmatrix} 10+13\lambda_5 & 10+17\lambda_5 \\ 10+17\lambda_5 & 13+20\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^4TSTS^4TS} = \begin{pmatrix} 2+\lambda_5 & 1+4\lambda_5 \\ 1+4\lambda_5 & 6+6\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STSTS^4TSTS^3} = \begin{pmatrix} -2-4\lambda_5 & -1-4\lambda_5 \\ 9+14\lambda_5 & 10+11\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STS^2TS^3TS^2TS^2} = \begin{pmatrix} 7+14\lambda_5 & 10+17\lambda_5 \\ -24-37\lambda_5 & -30-47\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STS^3TS^2TS^3TS} = \begin{pmatrix} -4-7\lambda_5 & -10-17\lambda_5 \\ 10+17\lambda_5 & 27+40\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S^2TSTS^4TSTS^2} = \begin{pmatrix} 4+12\lambda_5 & 9+14\lambda_5 \\ -9-14\lambda_5 & -12-19\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S^2TS^2TS^3TS^2TS} = \begin{pmatrix} 7+14\lambda_5 & 24+37\lambda_5 \\ -10-17\lambda_5 & -30-47\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S^3TSTS^4TSTS} = \begin{pmatrix} -2-4\lambda_5 & -9-14\lambda_5 \\ 1+4\lambda_5 & 10+11\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTS^4TSTS^3T} = \begin{pmatrix} -10-11\lambda_5 & 9+14\lambda_5 \\ -1-4\lambda_5 & 2+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTS^3TS^2TS^4TS^4} = \begin{pmatrix} -26-37\lambda_5 & -5-10\lambda_5 \\ -5-10\lambda_5 & -2-2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^2TS^3TS^2TS^2T} = \begin{pmatrix} 30+47\lambda_5 & -24-37\lambda_5 \\ 10+17\lambda_5 & -7-14\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^4} = \begin{pmatrix} -66-105\lambda_5 & -22-37\lambda_5 \\ -22-37\lambda_5 & -9-12\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^3TS^2TS^3TST} = \begin{pmatrix} -27-40\lambda_5 & 10+17\lambda_5 \\ -10-17\lambda_5 & 4+7\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^3TSTS^4TS^2TS^4} = \begin{pmatrix} -37-56\lambda_5 & -14-23\lambda_5 \\ -14-23\lambda_5 & -6-9\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^2TSTS^4TSTS^2T} = \begin{pmatrix} 12+19\lambda_5 & -9-14\lambda_5 \\ 9+14\lambda_5 & -4-12\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^3 = \begin{pmatrix} -38-61\lambda_5 & -27-44\lambda_5 \\ -27-44\lambda_5 & -22-30\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TS^2TS^3TS^2TST = \begin{pmatrix} 30+47\lambda_5 & -10-17\lambda_5 \\ 24+37\lambda_5 & -7-14\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TS^2TSTS^4TS^3TS^3 = \begin{pmatrix} -46-73\lambda_5 & -36-57\lambda_5 \\ -36-57\lambda_5 & -29-44\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTS^4TSTST = \begin{pmatrix} -10-11\lambda_5 & 1+4\lambda_5 \\ -9-14\lambda_5 & 2+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTSTS^4TS^4TS^2 = \begin{pmatrix} -14-17\lambda_5 & -13-20\lambda_5 \\ -13-20\lambda_5 & -14-22\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STSTSTS^4TSTS^3TS^4 = \begin{pmatrix} 6+9\lambda_5 & 1+4\lambda_5 \\ -29-50\lambda_5 & -14-16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STSTSTS^3TS^2TS^4TS^3 = \begin{pmatrix} 8+13\lambda_5 & 5+10\lambda_5 \\ -45-74\lambda_5 & -36-52\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STSTS^2TS^3TS^2TS^2TS^4 = \begin{pmatrix} -24-41\lambda_5 & -10-17\lambda_5 \\ 112+179\lambda_5 & 47+74\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^3 = \begin{pmatrix} 28+47\lambda_5 & 22+37\lambda_5 \\ -130-209\lambda_5 & -103-164\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^2TSTS^4TSTS^2TS^4 = \begin{pmatrix} -18-35\lambda_5 & -9-14\lambda_5 \\ 63+98\lambda_5 & 26+42\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^2 = \begin{pmatrix} -22-41\lambda_5 & -27-44\lambda_5 \\ 75+118\lambda_5 & 82+132\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TSTSTS^4TSTS^3TS^3 = \begin{pmatrix} 36+63\lambda_5 & 29+50\lambda_5 \\ -55-88\lambda_5 & -44-70\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TSTSTS^3TS^2TS^4TS^2 = \begin{pmatrix} -38-67\lambda_5 & -45-74\lambda_5 \\ 59+94\lambda_5 & 66+106\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^4 = \begin{pmatrix} 41+56\lambda_5 & 4+11\lambda_5 \\ 4+11\lambda_5 & 2+\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3T = \begin{pmatrix} 36+52\lambda_5 & -45-74\lambda_5 \\ 5+10\lambda_5 & -8-13\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTSTS^4TSTS^3TS^4T} = \begin{pmatrix} 14+16\lambda_5 & -29-50\lambda_5 \\ 1+4\lambda_5 & -6-9\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTS^2TSTS^4TS^3TS^4TS^4} = \begin{pmatrix} 70+105\lambda_5 & 12+25\lambda_5 \\ 12+25\lambda_5 & 5+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^3T} = \begin{pmatrix} 103+164\lambda_5 & -130-209\lambda_5 \\ 22+37\lambda_5 & -28-47\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTS^2TS^3TS^2TS^2TS^4T} = \begin{pmatrix} -47-74\lambda_5 & 112+179\lambda_5 \\ -10-17\lambda_5 & 24+41\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^2TSTSTS^4TS^4TS^3TS^4} = \begin{pmatrix} 65+100\lambda_5 & 18+35\lambda_5 \\ 18+35\lambda_5 & 10+9\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^2T} = \begin{pmatrix} -82-132\lambda_5 & 75+118\lambda_5 \\ -27-44\lambda_5 & 22+41\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTS^2TSTS^4TSTS^2TS^4T} = \begin{pmatrix} -26-42\lambda_5 & 63+98\lambda_5 \\ -9-14\lambda_5 & 18+35\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^2TSTSTSTS^4TS^4TS^4TS^3} = \begin{pmatrix} 26+41\lambda_5 & 16+29\lambda_5 \\ 16+29\lambda_5 & 17+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^2TSTSTS^3TS^2TS^4TS^2T} = \begin{pmatrix} -66-106\lambda_5 & 59+94\lambda_5 \\ -45-74\lambda_5 & 38+67\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TS^2TSTSTS^4TSTS^3TS^3T} = \begin{pmatrix} 44+70\lambda_5 & -55-88\lambda_5 \\ 29+50\lambda_5 & -36-63\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^3} = \begin{pmatrix} -9-14\lambda_5 & -4-11\lambda_5 \\ 66+109\lambda_5 & 52+71\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3TS^4} = \begin{pmatrix} -18-28\lambda_5 & -5-10\lambda_5 \\ 125+208\lambda_5 & 46+67\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{STSTSTSTS^4TSTS^3TS^4TS^4} = \begin{pmatrix} -10-14\lambda_5 & -1-4\lambda_5 \\ 59+104\lambda_5 & 18+21\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTSTSTSTS^4TS^4TS^4TS^4TS^4} = \begin{pmatrix} -26-25\lambda_5 & -5\lambda_5 \\ -5\lambda_5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{TSTSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^3T} = \begin{pmatrix} -52-71\lambda_5 & 66+109\lambda_5 \\ -4-11\lambda_5 & 9+14\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TSTSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3TS^4T = \begin{pmatrix} -46-67\lambda_5 & 125+208\lambda_5 \\ -5-10\lambda_5 & 18+28\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TSTSTSTSTS^4TSTS^3TS^4TS^4T = \begin{pmatrix} -18-21\lambda_5 & 59+104\lambda_5 \\ -1-4\lambda_5 & 10+14\lambda_5 \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Ayrıca $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubunun simgesi Riemann-Hurwitz formülü ve permütasyon metodu kullanılırsa $(17;\infty^{(16)})$ olarak bulunur.

(iii) $\left|H^5(\lambda_5):H'(\lambda_5)\right|=2$ ve $\left|H^5(\lambda_5):\left(H^5\right)'(\lambda_5)\right|=32$ olduğundan $\left|H'(\lambda_5):\left(H^5\right)'(\lambda_5)\right|=16$ elde edilir.

3.5.3 Sonuç : $H'(\lambda_5)=\left(H^2\right)'(\lambda_5).\left(H^5\right)'(\lambda_5)$, [31].

3.5.4 Teorem : m pozitif bir tamsayı olmak üzere $\left(H^m\right)'(\lambda_5)$ grubu için aşağıdaki durumlardan biri doğrudur;

$$\left(H^m\right)'(\lambda_5)=\begin{cases} H'(\lambda_5), & \text{eğer } (m,10)=1 \text{ ise} \\ \left(H^2\right)'(\lambda_5), & \text{eğer } (m,5)=1 \text{ ve } (m,2)=2 \text{ ise} \\ \left(H^5\right)'(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2)=1 \text{ ve } (m,5)=5 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat : Teorem 3.4.7 den elde edilir.

3.5.5 Teorem : m pozitif bir tamsayı ve $n \geq 2$ olmak üzere,

$$\left|H^m(\lambda_5):\left(H^m\right)^{(n)}(\lambda_5)\right|=\infty$$

, [31].

3.6 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Serbest Normal Alt Grupları

$H(\lambda_5)$ Hecke grubu iki ve beş mertebeli sonlu devirli iki grubun serbest çarpımına eşit olduğundan iki çeşit alt gruba sahiptir. Birincisi iki ve beş mertebeli bazı devirli gruplarla, bazı sonlu devirli grupların serbest çarpımları olan gruplardır, ikincisi ise serbest alt gruplardır. Kısaca bu gruplardan [2] nolu kaynaktan yararlanarak biraz bahsedelim.

3.6.1 Teorem : Eğer N alt grubu; $H(\lambda_5)$ in sıfır cinsli bir normal alt grubu ve $[H:N]<\infty$ ise, H/N bölüm grubu sonlu üçgen gruplarının birine izomorftur, [2].

3.6.2 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun sonlu mertebeli eleman içeren alt grupları $H(\lambda_5)$, $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$ normal alt gruplarından başka sonlu mertebeli eleman içeren normal alt grubu yoktur, [2].

İspat : N, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun sonlu mertebeli bir eleman içeren bir normal alt grubu olsun. O halde N, iki veya beş mertebeli bir eleman içerir. Beş mertebeli bir eleman S dönüşümünün bir kuvvetine konjugedir, iki mertebeli bir eleman ise T dönüşümüne konjugedir. Dolayısıyla eğer N normal alt grubu sonlu mertebeli bir eleman içerirse, bu durumda N normal alt grubu T dönüşümünü veya S dönüşümünü veya her ikisini de içerir. Buradan şu üç durumu elde ederiz:

(i) Eğer N alt grubu T ve S dönüşümlerini içerirse $N = H(\lambda_5)$ olur.

(ii) Eğer N alt grubu S dönüşümünü içerip T dönüşümünü içermezse $H(\lambda_5)/N$ bölüm grubu $T^2 = S = I$ bağıntılarından C_2 grubuna izomorftur. Buradan, permütasyon metodu ve Riemann–Hurwitz formülü ile $N = H^2(\lambda_5)$ elde edilir.

(iii) Eğer N alt grubu T dönüşümünü içerip, S dönüşümünü içermezse, $T = S^5 = I$ bağıntılarından $H(\lambda_5)/N$ bölüm grubu C_5 grubuna izomorftur. Ayrıca, permütasyon metodu ve Riemann–Hurwitz formülünden $N = H^5(\lambda_5)$ bulunur.

3.6.3 Teorem : N alt grubu, $H(\lambda_5)$ in $H(\lambda_5)$, $H^2(\lambda_5)$ ve $H^5(\lambda_5)$ den farklı bir aşikar olmayan normal alt grubu ise N serbest gruptur, [2].

3.6.4 Teorem : N alt grubu, $H(\lambda_5)$ in μ indeksli bir serbest normal alt grubu olsun. Bu durumda $10 \mid \mu$ olur, [2].

İspat : $|H:N| = |H:H'|.|H':N|$ yazılabilir. Burada $|H:H'|$=10 olduğundan 10|μ olduğu görülür.

3.7 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Temel Denklik Alt Grupları

3.7.1 Tanım : p bir asal sayı olmak üzere, $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun *p seviyeli temel denklik alt grubu*;

$$H_p(\lambda_5) = \{T \in H(\lambda_5) : T \equiv \pm I \,(\text{mod} p)\}$$

$$H_p(\lambda_5) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_5 \\ c\lambda_5 & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1,\, b \equiv c \equiv 0 \,(\text{mod} p),\, ad - bc\lambda_5^2 = 1 \right\}$$

biçiminde tanımlanır, [2,32,33].

p asal sayı olmak üzere, $H_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunu elde etmenin yöntemlerinden biri, p modülüne göre "indirgeme homomorfizmi" ni göz önüne almaktır. Burada;

$$H(\lambda_5) \rightarrow H(\lambda_5) / K_{p,u}(\lambda_5)$$

homomorfizmasını göz önüne alırsak bu homomorfizma altında T, S ve R =TS nin görüntüleri sırası ile t_p ,s_p , ve r_p olmak üzere $H(\lambda_5) / K_{p,u}(\lambda_5)$ kümesi,

$$< t_p, s_p \;\middle|\; t_p^2 = s_p^5 = r_p^p = I,\; r_p = t_p.s_p >$$

kümesinin bir homomorfik görüntüsüdür. Burada ki p nin tüm durumları ayrıntılı bir biçimde [2,34] nolu kaynaklarda incelenmiştir.

3.7.2 Sonuç : $H(\lambda_5)$ grubunun $K_{p,u}(\lambda_5)$ temel denklik alt gruplarına bölüm grupları ve bölüm gruplarının mertebeleri aşağıdaki gibidir:

$$H(\lambda_5) / K_{p,u}(\lambda_5) \cong \begin{cases} PSL(2,p) & ;\; p \equiv \pm 1 \,\text{mod}(10), \\ PSL(2,p^2) & ;\; p \equiv \pm 3 \,\text{mod}(10) \text{ ve } p \neq 3,5 \\ D_5 & ;\; p = 2, \\ A_5 & ;\; p = 3, 5. \end{cases}$$

$$\left|H(\lambda_5):K_{p,u}(\lambda_5)\right| \cong \begin{cases} \dfrac{(p-1)p(p+1)}{2} & ; \; p \equiv \pm 1 \bmod(10), \\ \dfrac{(p^2-1)p^2(p^2+1)}{2} & ; \; p \equiv \pm 3 \bmod(10) \text{ ve } p \neq 3,5 \\ 10 & ; \; p = 2, \\ 60 & ; \; p = 3,5. \end{cases}$$

, [2,33].

3.8 $H(\lambda_5)$ Hecke Grubunun Denklik Alt Grupları

3.8.1 Tanım : I, **Z**[λ_5] halkasının bir ideali olsun.

$$H(\lambda_5, I)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1, b \equiv c \equiv 0 \bmod(I)\right\}$$

şeklinde tanımlı $H(\lambda_5, I)$ kümesine $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun *I seviyeli temel denklik alt grubu* denir, [35,36].

3.7 Kısımda verilen $K_{p,u}(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu ile $H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grupları aynı alt gruplardır.

3.8.2 Tanım : $H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grubunu içeren $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun herhangi bir alt grubuna *I seviyeli bir denklik alt grubu* denir, [35,36].

$H(\lambda_5, I)$ temel denklik alt grupları $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun normal alt gruplarıdır. Ancak denklik alt grupları normal alt grup olmak zorunda değillerdir. $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun en önemli iki denklik alt grupları şunlardır:

$$H_0(\lambda_5, I) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \,\middle|\, c \equiv 0 \,(\bmod\, I)\right\},$$

$$H_1(\lambda_5, I) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in H(\lambda_5) \,\middle|\, a \equiv d \equiv 1, \; c \equiv 0 \,(\bmod\, I)\right\}$$

Ayrıca $H(\lambda_5, I) \leq H_1(\lambda_5, I) \leq H_0(\lambda_5, I) \leq H(\lambda_5)$ olduğunu görmek kolayca mümkündür, [35].

4. $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ GENİŞLETİLMİŞ HECKE GRUBU

Çalışmanın esas kısmı olan bu bölümde $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu incelenmiştir. $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu tanıtılmış, temel bölgesi tanımlanmış ve $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun komütatör, kuvvet, denklik ve temel denklik alt grupları verilmiştir. Bu bölümde [8-15] nolu kaynaklar referans olarak alınmıştır.

4.1 $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubu ve Ayrışımı

Bölüm 2.10 de verilen $\lambda = \lambda_q = 2\cos\dfrac{\pi}{q}$, (q = 3, 4, 5, …) için elde edilen $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarından, özel olarak q = 5 değeriyle bulunan $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubuyla ilgileneceğiz.

4.1.1 Tanım : $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının

$$S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

üretecinde, q = 5 için $\lambda_5 = 2\cos\dfrac{\pi}{5} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ değerinin yazılması ile elde edilen gruba, $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu denir.

$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu PGL(2, $\mathbf{Z}[\lambda_5]$) kümesinin alt kümesidir. $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun grup gösterimi;

$$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5) = \langle T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=I,\ TR=RT,\ RS=S^{-1}R \rangle$$

veya

$$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5) = \langle T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=I \rangle$$

biçimindedir, [8]. Ayrıca $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun

$$T(z) = -\frac{1}{z}, \qquad S(z) = -\frac{1}{z+\lambda_5} \qquad \text{ve} \qquad R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

üreteçlerinin matris gösterimleri

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.1.2 Teorem : $H(\lambda_5)$ Hecke grubu, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli bir normal alt grubudur, [11].

$H(\lambda_5)$ trivial merkeze sahiptir. $H(\lambda_5)$ in dış otomorfizm sınıf grubu $\operatorname{Out} H(\lambda_5)$ = $\operatorname{Aut} H(\lambda_5)/\operatorname{Inn} H(\lambda_5)$ otomorfizmler tarafından üretilir ve T ile S^{-1} elemanlarını sabit bırakır. Bu yüzden $\overline{H}(\lambda_5) \cong \operatorname{Aut} H(\lambda_5)$ olur.

Şimdi,

$$\alpha : T \to RT, S \to S, R \to R$$

fonksiyonunu ele alalım. Bu fonksiyon (2.2) deki bağıntıyı korur. Bu yüzden $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun dış otomorfizm sınıf grubu $\operatorname{Out}\overline{H}(\lambda_5)$=$\operatorname{Aut}\overline{H}(\lambda_5)/\operatorname{Inn}\overline{H}(\lambda_5)$ iki mertebelidir ve α tarafından üretilir.

(2,2) deki sunuma

$$\alpha : T \to RT, S \to S, R \to R$$

fonksiyonu uygulanırsa

$$\alpha(H(\lambda_5)) = < RT, S \mid (RT)^2 = S^5 = I >$$

elde edilir. Buradan da $\alpha(H(\lambda_5))$ grubu $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun iki indeksli alt grubu olur.

Şimdi $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke grubunun grup yapısı ile ilgili bir teorem verelim.

4.1.3 Teorem : $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu D_2 dihedral grubu ve D_5 dihedral grubunun Z_2 alt grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımı şeklinde verilir.

$$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5) \cong D_2 *_{Z_2} D_5$$

, [11].

İspat : $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5) = < T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=I >$$

olduğunu biliyoruz.

$$< T, R \mid T^2=R^2=(TR)^2=I > \cong D_2 \text{ ve } < S, R \mid S^5=R^2=(SR)^2=I > \cong D_5$$

olmak üzere burada $D_2 * D_5$, R=R özdeşleşmesi ile $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubudur. Buradan $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5) \cong D_2 *_{Z_2} D_5$ elde edilir.

4.2 $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubu İçin Bir Temel Bölge

4.2.1 Teorem : $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun bir temel bölgesi ;

$$\overline{F}_{\lambda_5} = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : -\frac{\lambda_5}{2} < \mathrm{Re}(z) < 0, |z| > 1 \right\}$$

kümesidir, [8].

İspat : $\mathrm{H}(\lambda_5)$ Hecke grubu için

$$F_{\lambda_5} = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : |\mathrm{Re}(z)| < \frac{\lambda_5}{2}, |z| > 1 \right\}$$

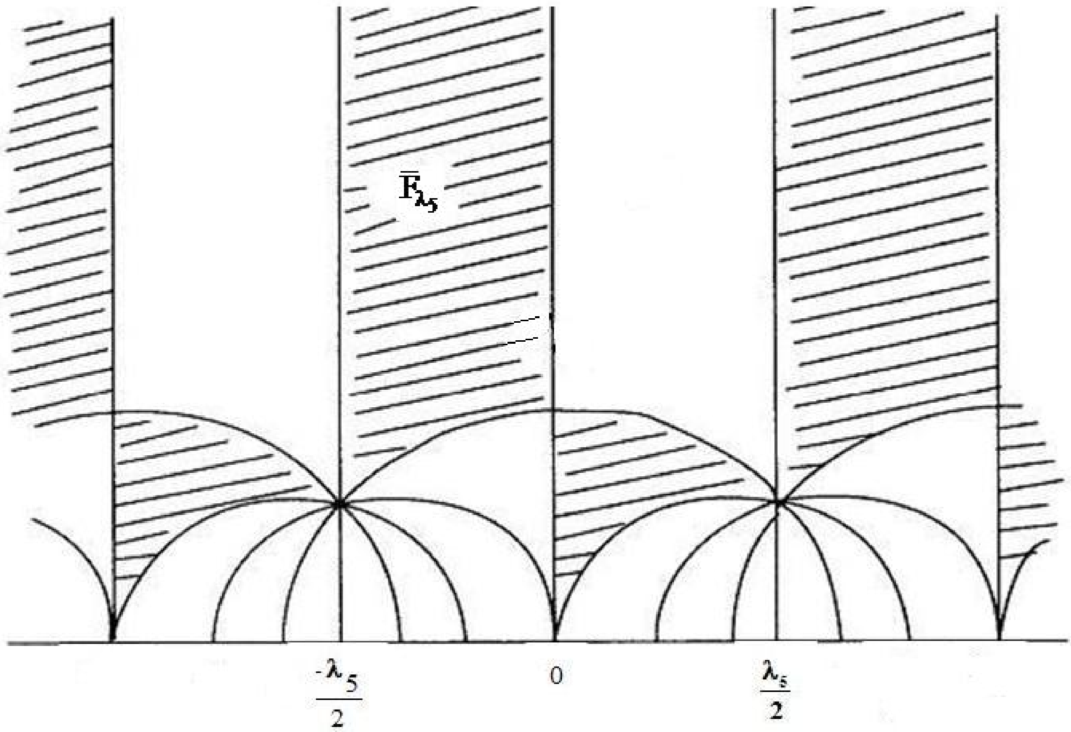
kümesinin bir temel bölge olduğunu Teorem 3.2.2 den biliyoruz. Ayrıca $\mathrm{H}(\lambda_5)$ Hecke grubunun $\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli bir alt grubu olduğunu da Bölüm 4.1 den biliyoruz. Dolayısıyla Riemann-Hurwitz formülü gereği, alt grubun temel bölgesinin hiperbolik alanının grubun temel bölgesinin hiperbolik alanına oranı indeksi vereceğinden,

$$\left|\mathrm{H}(\lambda_5) : \overline{\mathrm{H}}(\lambda_5)\right| = \frac{\mu(\overline{\mathrm{H}}(\lambda_5))}{\mu(\mathrm{H}(\lambda_5))} = 2$$

olacaktır. Buna göre $H(\lambda_5)$ Hecke gruplarının temel bölgesinin yarısını alarak $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel bölgesini bulabiliriz. Yani Şekil 4.1 de gösterilen

$$\overline{F}_{\lambda_5} = \left\{ z \in \boldsymbol{U} : -\frac{\lambda_5}{2} < \mathrm{Re}(z) < 0, |z| > 1 \right\}$$

kümesi $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu için bir temel bölge olur.



Şekil 4.1 : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu için bir temel bölge

4.3 $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Komütatör Alt Grupları

$\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun birinci komütatör alt grubunu $\overline{H}'(\lambda_5)$ ile göstereceğiz. Eğer $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi elde edilir. Benzer şekilde $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı eklenirse $\overline{H}'(\lambda_5)/\overline{H}''(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi bulunur.

4.3.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu, 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_5):\overline{H}'(\lambda_5)\right| = 4 \text{ ve}$$

$$\overline{H}'(\lambda_5) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$$

olur, [8, 11, 13].

İspat: $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_5) = \langle T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=I,\ TR=RT,\ RS=S^4R \rangle$$

olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmeliliği bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5)$ bölüm grubunun grup gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) = \langle T,S,R \mid T^2=S^5=R^2=I, TR=RT, RS=S^4R, RS=SR, TS=ST \rangle$$

elde edilir. Burada

$$RS=S^4R \text{ ve } RS=SR$$

bağıntıları yardımıyla, $S^3=S^5=S^2=I$ olduğundan $S=I$ olarak bulunur. Böylece bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) = \langle T, R \mid T^2=R^2=(TR)^2=I \rangle \cong C_2 \times C_2 \cong V_4$$

elde edilir. Ayrıca indeks, $\left|\overline{H}(\lambda_5):\overline{H}'(\lambda_5)\right| = 4$ olur.

Şimdi $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak { I, T, R, TR } kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibidir.

$I.T.(T)^{-1}=I$,	$I.S.(I)^{-1}=S$,	$I.R.(R)^{-1}=I$,
$T.T.(I)^{-1}=I$,	$T.S.(T)^{-1}=TST$,	$T.R.(TR)^{-1}=I$,
$R.T.(TR)^{-1}=RTRT$,	$R.S.(R)^{-1}=RSR$,	$R.R.(I)^{-1}=I$,
$TR.T.(R)^{-1}=TRTR$,	$TR.S.(TR)^{-1}=TRSRT$,	$TR.R.(T)^{-1}=I$,

Burada $RTRT=I$, $TRTR=I$, $RSR=S^{-1}$, $TRSRT=TS^{-1}T=(TST)^{-1}$ olduğu gerekli işlemler yapılarak görülür ve $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteç kümesi { S, TST } bulunur. Böylece, $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunun gösterimi

$$\overline{H}'(\lambda_5) =< S, TST \mid S^5=(TST)^5=I > \cong C_5 * C_5$$

ve

$$\overline{H}'(\lambda_5) =<S> * <TST>$$

elde edilir. Ayrıca $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunun üreteçlerinin matris gösterimi,

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix} \quad \text{ve} \quad TST = \begin{pmatrix} -\lambda_5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

olur.

4.3.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}''(\lambda_5)$ ikinci komütatör alt grubu için

(i) $\left|\overline{H}'(\lambda_5) : \overline{H}''(\lambda_5)\right| = 25$,

(ii) $\overline{H}''(\lambda_5)$ ikinci komütatör alt grubu 16 ranklı $[S, TST]$, $[S, TS^2T]$, $[S, TS^3T]$, $[S, TS^4T]$, $[S^2, TST]$, $[S^2, TS^2T]$, $[S^2, TS^3T]$, $[S^2, TS^4T]$, $[S^3, TST]$, $[S^3, TS^2T]$, $[S^3, TS^3T]$, $[S^3, TS^4T]$, $[S^4, TST]$, $[S^4, TS^2T]$, $[S^4, TS^3T]$, $[S^4, TS^4T]$ serbest gruptur, [8, 11, 12].

İspat : (i) $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun

$$\overline{H}'(\lambda_5) =< S, TST \mid S^5=(TST)^5=I > \cong C_5 * C_5$$

olduğunu biliyoruz. Eğer $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmeliliği bağıntısı eklenirse $\overline{H}'(\lambda_5) / \overline{H}''(\lambda_5)$ bölüm grubunun grup gösterimi

$$\overline{H}'(\lambda_5) / \overline{H}''(\lambda_5) =< S, TST \mid S^5=(TST)^5=I, STST=TSTS > \cong C_5 \times C_5$$

elde edilir. Böylece, $\left|\overline{H}'(\lambda_5) : \overline{H}''(\lambda_5)\right| = 25$ olur.

(ii) Şimdi $\overline{H}''(\lambda_5)$ ikinci komütatör alt grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak $\{ I, S, S^2, S^3, S^4, TST, TS^2T, TS^3T, TS^4T, TSTS, TS^2TS, TS^3TS, TS^4TS, TSTS^2, TS^2TS^2, TS^3TS^2, TS^4TS^2, TSTS^3, TS^2TS^3, TS^3TS^3, TS^4TS^3, TSTS^4, TS^2TS^4, TS^3TS^4, TS^4TS^4 \}$ kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $\overline{H}''(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi;

$[S, TST]$, $[S, TS^2T]$, $[S, TS^3T]$, $[S, TS^4T]$, $[S^2, TST]$, $[S^2, TS^2T]$, $[S^2, TS^3T]$, $[S^2, TS^4T]$, $[S^3, TST]$, $[S^3, TS^2T]$, $[S^3, TS^3T]$, $[S^3, TS^4T]$, $[S^4, TST]$, $[S^4, TS^2T]$, $[S^4, TS^3T]$, $[S^4, TS^4T]$

olarak bulunur. Ayrıca $\overline{H}''(\lambda_5)$ ikinci komütatör alt grubunun üreteçlerinin matris gösterimleri aşağıdaki gibidir;

$$[S, TST] = STSTS^4TS^4T = \begin{pmatrix} 1 & -2\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 5+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^2T] = STS^2TS^4TS^3T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & 7+10\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^3T] = STS^3TS^4TS^2T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -6-10\lambda_5 & 7+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S, TS^4T] = STS^4TS^4TST = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2\lambda_5 \\ -2-6\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TST] = S^2TSTS^3TS^4T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 7+10\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^2T] = S^2TS^2TS^3TS^3T = \begin{pmatrix} 9+12\lambda_5 & -10-16\lambda_5 \\ -10-16\lambda_5 & 13+20\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^3T] = S^2TS^3TS^3TS^2T = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & -8-14\lambda_5 \\ -12-20\lambda_5 & 11+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^2, TS^4T] = S^2TS^4TS^3TST = \begin{pmatrix} 7+8\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -6-10\lambda_5 & 3+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TST] = S^3TSTS^2TS^4T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -6-10\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 7+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^2T] = S^3TS^2TS^2TS^3T = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & -12-20\lambda_5 \\ -8-14\lambda_5 & 11+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^3T] = S^3TS^3TS^2TS^2T = \begin{pmatrix} 13+20\lambda_5 & -10-16\lambda_5 \\ -10-16\lambda_5 & 9+12\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^3, TS^4T] = S^3TS^4TS^2TST = \begin{pmatrix} 7+10\lambda_5 & -2-4\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TST] = S^4TSTSTS^4T = \begin{pmatrix} 3+2\lambda_5 & -2-6\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^2T] = S^4TS^2TSTS^3T \begin{pmatrix} 7+8\lambda_5 & -6-10\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 3+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^3T] = S^4TS^3TSTS^2T = \begin{pmatrix} 7+10\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ -2-4\lambda_5 & 3+2\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$[S^4, TS^4T] = S^4TS^4TSTST = \begin{pmatrix} 5+4\lambda_5 & -2\lambda_5 \\ -2\lambda_5 & 1 \end{pmatrix}$$

4.3.3 Teorem : n>2 olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}^{(n)}(\lambda_5)$ n. komütatör alt grubu için

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^{(n)}(\lambda_5)\right| = \infty$$

olur, [9, 10, 11].

İspat : $\overline{H}''(\lambda_5)/\overline{H}'''(\lambda_5)$ bölüm grubunu elde etmek için $\overline{H}''(\lambda_5)$ ikinci komütatör alt grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmelilik koşulunu eklersek $\overline{H}''(\lambda_5)/\overline{H}'''(\lambda_5)$ bölüm grubu sonsuz mertebeli çıkar. Yani $\overline{H}'''(\lambda_5)$, $\overline{H}''(\lambda_5)$ içinde sonsuz indekslidir. Bu şekilde komütatör alt grupların serisine devam edilirse $\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^{(n)}(\lambda_5)\right| = \infty$ olduğu görülür.

4.3.4 Teorem : (i) $\overline{H}'(\lambda_5) = H(\lambda_5) \cap \alpha(H(\lambda_5))$,

(ii) $H'(\lambda_5)$ grubu $\overline{H}'(\lambda_5)$ grubunun 5 indeksli alt grubudur,

(iii) $\overline{H}''(\lambda_5)$ grubu $H'(\lambda_5)$ grubunun 5 indeksli alt grubudur, [9, 10, 11].

İspat : (i) Hem $H(\lambda_5)$ hemde $\alpha(H(\lambda_5))$, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indekli normal alt grupları olduğundan, $H(\lambda_5) \cap \alpha(H(\lambda_5))$ grubu 4 indekse sahip olur. Böylece 4 indeksli tek normal alt grup $\overline{H}'(\lambda_5)$ olduğundan $\overline{H}'(\lambda_5) = H(\lambda_5) \cap \alpha(H(\lambda_5))$ bulunur.

(ii) $\left|H(\lambda_5) : H'(\lambda_5)\right| = \left|H(\lambda_5) : H^2(\lambda_5)\right| . \left|H^2(\lambda_5) : H'(\lambda_5)\right|$ eşitliği ile bulunur.

(iii) $\left|\overline{H}'(\lambda_5) : \overline{H}''(\lambda_5)\right| = \left|\overline{H}'(\lambda_5) : H'(\lambda_5)\right| . \left|H'(\lambda_5) : \overline{H}''(\lambda_5)\right|$ eşitliği ile bulunur.

4.4 $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun $\overline{H}^m(\lambda_5)$ Kuvvet Alt Grupları

4.4.1 Tanım : m pozitif bir tamsayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun tüm elemanlarının m. kuvvetleri alınarak üretilen alt gruba $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun *m. kuvvet alt grubu* denir ve bu alt grup $\overline{H}^m(\lambda_5)$ ile gösterilir.

4.4.2 Sonuç : $\overline{H}^m(\lambda_5)$ kuvvet alt grupları $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun normal alt gruplarıdır.

İspat : Teorem 3.4.3 den kuvvet alt gruplarının normal alt grup olduğu sonucu bulunur.

4.4.3 Teorem : m, n pozitif tam sayı ve (m,n), m ile n pozitif tam sayılarının en büyük ortak böleni olmak üzere;

$$\overline{H}^m(\lambda_5).\overline{H}^n(\lambda_5) = \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur, [8].

İspat : Alt grup tanımından;

$$\overline{H}^m(\lambda_5) \leq \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5) \quad \text{ve} \quad \overline{H}^n(\lambda_5) \leq \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olduğunu biliyoruz. Bu ikisi birlikte düşünülerek

$$\overline{H}^m(\lambda_5).\overline{H}^n(\lambda_5) \leq \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5) \tag{4.1}$$

elde edilir.

Şimdi eşitliğin diğer tarafını gösterelim. z, $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun herhangi bir elemanı olsun. $m_1m+n_1n=(m,n)$ olacak şekilde m_1 ve n_1 tam sayılarını seçelim. Buradan

$$z^{(m,n)} \in \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5) \text{ ve } z^{m_1m+n_1n} \in \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5)$$

olur. Ayrıca

$$z^{m_1m} \in \overline{H}^m(\lambda_5) \text{ ve } z^{n_1n} \in \overline{H}^n(\lambda_5)$$

olduğundan

$$z^{m_1m}.z^{n_1n} \in \overline{H}^m(\lambda_5).\overline{H}^n(\lambda_5)$$

$$z^{m_1m+n_1n} \in \overline{H}^m(\lambda_5).\overline{H}^n(\lambda_5)$$

elde edilir. Böylece

$$z^{(m,n)} \in \overline{H}^{m}(\lambda_5)\,.\,\overline{H}^{n}(\lambda_5)$$

bulunur. Buradan

$$\overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5) \leq \overline{H}^{m}(\lambda_5)\,.\,\overline{H}^{n}(\lambda_5) \tag{4.2}$$

elde edilir ve (4.1) ile (4.2)'den

$$\overline{H}^{m}(\lambda_5)\,.\,\overline{H}^{n}(\lambda_5) = \overline{H}^{(m,n)}(\lambda_5)$$

eşitliği bulunur. Burada $\overline{H}(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5)\,.\,\overline{H}^{5}(\lambda_5)$ olduğu açıktır.

Şimdi m pozitif tam sayısının durumlarına göre elde edilen kuvvet alt gruplarını inceleyelim. Öncelikle m=2 ve m=5 durumlarını inceleyeceğiz.

4.4.4 Teorem : $\overline{H}^{2}(\lambda_5)$ normal alt grubu 5 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^{2}(\lambda_5)\right| = 4,$$

$$\overline{H}(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5) \cup T\,\overline{H}^{2}(\lambda_5) \cup R\,\overline{H}^{2}(\lambda_5) \cup TR\,\overline{H}^{2}(\lambda_5) \text{ ve}$$

$$\overline{H}^{2}(\lambda_5) = \langle S \rangle * \langle TST \rangle$$

olur, [8, 11].

İspat : $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_5) = \langle\, T, S, R \mid T^2 = S^5 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I \,\rangle$$

olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine her $X \in \overline{H}(\lambda_5)$ için $X^2 = I$ bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^{2}(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^{2}(\lambda_5) = \langle\, T, S, R \mid T^2 = S^5 = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = S^2 = (TS)^2 = \ldots = I \,\rangle$$

biçiminde bulunur. Burada $S^5 = I = S^2$ olduğundan $S = I$ elde edilir. Böylece bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^{2}(\lambda_5) = \langle\, T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \,\rangle \cong C_2 \times C_2 \cong V_4$$

olur. Ayrıca $\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^{2}(\lambda_5)\right| = 4$ elde edilir.

Şimdi $\overline{H}^{2}(\lambda_5)$ kuvvet grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier sistemi olarak { I, T, R, TR } kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibidir.

$I.T.(T)^{-1}=I$,	$I.S.(I)^{-1}=S$,	$I.R.(R)^{-1}=I$,
$T.T.(I)^{-1}=I$,	$T.S.(T)^{-1}=TST$,	$T.R.(TR)^{-1}=I$,
$R.T.(TR)^{-1}=RTRT$,	$R.S.(R)^{-1}=RSR$,	$R.R.(I)^{-1}=I$,
$TR.T.(R)^{-1}=TRTR$,	$TR.S.(TR)^{-1}=TRSRT$,	$TR.R.(T)^{-1}=I$,

Burada $RTRT=I$, $TRTR=I$, $RSR=S^{-1}$, $TRSRT=TS^{-1}T=(TST)^{-1}$ olduğu gerekli işlemler yapılarak görülür ve $\overline{H}^2(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesi { S, TST } bulunur. Böylece, $\overline{H}^2(\lambda_5)$ grubunun gösterimi

$$\overline{H}^2(\lambda_5) = < S, TST \mid S^5=(TST)^5=I > \cong C_5 * C_5$$

ve

$$\overline{H}(\lambda_5) = \overline{H}^2(\lambda_5) \cup T\overline{H}^2(\lambda_5) \cup R\overline{H}^2(\lambda_5) \cup TR\overline{H}^2(\lambda_5)$$

olarak bulunur. Ayrıca $\overline{H}^2(\lambda_5)$ grubunun üreteçlerinin matris gösterimi

$$S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_5 \end{pmatrix} \qquad \text{ve} \qquad TST = \begin{pmatrix} -\lambda_5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

şeklindedir.

4.4.5 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubu,

$$\overline{H}^5(\lambda_5) = \overline{H}(\lambda_5)$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}^5(\lambda_5)\right| = 1$$

olur, [8, 11].

İspat : $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_5) = < T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=I >$$

olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine her $X \in \overline{H}(\lambda_5)$ için $X^5=I$ bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^5(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^5(\lambda_5) = < T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=T^5=R^5=\ldots=I >$$

biçiminde bulunur. Burada $T^2=T^5=R^2=R^5=I$ olduğundan $T=R=I$ elde edilir. Ayrıca $S^5=(SR)^2=R=I$ olduğundan $S=I$ elde edilir. Böylece

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^5(\lambda_5) = I$$

bulunur. Ayrıca indeks, $\left|\overline{H}(\lambda_5):\overline{H}^5(\lambda_5)\right|=1$ olur. Buradan

$$\overline{H}^5(\lambda_5)=\overline{H}(\lambda_5)$$

olduğu görülür.

4.4.6 Teorem : m pozitif bir tam sayı olmak üzere $\overline{H}^m(\lambda_5)$ normal alt grubu için aşağıdaki durumlardan birisi doğrudur;

$$\overline{H}^m(\lambda_5)=\begin{cases}\overline{H}(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2)=1 \text{ ise}\\ \overline{H}^2(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2)=2 \text{ ve } (m,5)=1 \text{ ise}\end{cases}$$

, [11].

İspat : $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}(\lambda_5)=\langle T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=I\rangle$$

olduğunu biliyoruz. $\overline{H}(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine her $X\in\overline{H}(\lambda_5)$ için $X^m=I$ bağıntısı eklenirse $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)$ bölüm grubunun gösterimi

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)=\langle T, S, R \mid T^2=S^5=R^2=(TR)^2=(SR)^2=T^m=R^m=\ldots=I\rangle$$

biçiminde bulunur.

Eğer (m,2)=1 ise,

$$R^2=R^m=I,\quad S^5=S^m=(SR)^2=(SR)^m=I,\quad T^2=T^m=I$$

olduğundan R=S=R=I olur. Böylece $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)=I$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$\overline{H}^m(\lambda_5)=\overline{H}(\lambda_5)$$

bulunur.

Eğer (m,2)=2 ve (m,5)=1 ise,

$$R^2=R^m=I,\quad T^2=T^m=I,\quad S^5=S^m=I$$

olduğundan $S=R^2=T^2=I$ olur. Böylece $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)$ bölüm grubu

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}^m(\lambda_5)=\langle T, R \mid T^2=R^2=(TR)^2=I\rangle\cong C_2\times C_2\cong V_4$$

elde edilir ve (önceki bir teoremden) dolayı

$$\overline{H}^m(\lambda_5)=\overline{H}^2(\lambda_5)$$

bulunur.

Eğer (m,10)=10 ise, önceki metotları kullanarak $\overline{H}^{m}(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun üreteçlerini ve grup yapısını bulmak mümkün değildir. Sadece bu kuvvet alt grupların serbest alt gruplar olduğunu gösterebiliriz.

4.4.7 Sonuç : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu,

$$\overline{H}'(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5)$$

eşitliğini sağlar, [11].

Şimdi $\overline{H}^{10m}(\lambda_5)$ alt grupları incelenebilir. $\overline{H}^{2}(\lambda_5) > \overline{H}^{10}(\lambda_5)$ olduğundan yukarıdaki sonuç gereğince

$$\overline{H}'(\lambda_5) > \overline{H}^{10}(\lambda_5)$$

olarak bulunur. $\overline{H}'(\lambda_5)$ serbest grup olduğundan $\overline{H}^{10}(\lambda_5)$ grubu da serbest bir gruptur. Buradan da m bir doğal sayı olmak üzere

$$\overline{H}^{10}(\lambda_5) > \overline{H}^{10m}(\lambda_5)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.8 Sonuç : $\overline{H}^{10m}(\lambda_5)$ alt grupları serbesttir, [8, 11].

4.4.9 Teorem : (i) $H^{2}(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5) \cap \overline{H}^{5}(\lambda_5)$

(ii) $\left(\overline{H}'(\lambda_5)\right)^{5} \subset \overline{H}''(\lambda_5)$

, [9, 11].

İspat : [11] nolu kaynakta bulunabilir.

4.4.10 Teorem : m pozitif bir tam sayı olmak üzere $\overline{H}^{10m}(\lambda_5)$ kuvvet alt grubu, $\overline{H}''(\lambda_5)$ grubunun alt grubudur, [9, 11].

İspat : Kuvvet alt gruplarının özelliğinden dolayı $\overline{H}^{10}(\lambda_5) \subset \left(\overline{H}^{2}(\lambda_5)\right)^{5}$ kapsaması sağlanır ve $\overline{H}'(\lambda_5) = \overline{H}^{2}(\lambda_5)$ eşitliğini bu kapsamada yerine yazarsak $\overline{H}^{10}(\lambda_5) \subset \left(\overline{H}'(\lambda_5)\right)^{5}$ elde edilir. Teorem 4.4.9 dan $\left(\overline{H}'(\lambda_5)\right)^{5} \subset \overline{H}''(\lambda_5)$ olduğu kullanılırsa $\overline{H}^{10}(\lambda_5) \subset \overline{H}''(\lambda_5)$ bulunur ve kuvvet alt gruplarının özelliğinden $\overline{H}^{10m}(\lambda_5) \subset \overline{H}''(\lambda_5)$ olur.

4.5 Kuvvet Alt Gruplarının Komütatör Alt Grupları

Bu kısımda $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke grubunun $\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5)$ kuvvet alt gruplarının komütatör alt grupları hakkında bilgi verilmiştir.

4.5.1 Teorem : m pozitif bir tam sayı olmak üzere $\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5)$ alt grubu için aşağıdaki durumlardan birisi doğrudur;

$$\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5) = \begin{cases} \overline{H}'(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 1 \text{ ise} \\ \overline{H}''(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 2 \text{ ve } (m,5) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

İspat : Teorem 4.4.6 dan m pozitif tamsayısı için,

$$\overline{H}^m(\lambda_5) = \begin{cases} \overline{H}(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 1 \text{ ise} \\ \overline{H}^2(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 2 \text{ ve } (m,5) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğunu ve Sonuç 4.4.7 den $\overline{H}'(\lambda_5) = \overline{H}^2(\lambda_5)$ eşitliğini biliyoruz. Bunlar göz önünde bulundurularak $\overline{H}^m(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun $\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu m pozitif tamsayısının durumuna göre,

$$\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5) = \begin{cases} \overline{H}'(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 1 \text{ ise} \\ \overline{H}''(\lambda_5), & \text{eğer } (m,2) = 2 \text{ ve } (m,5) = 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur.

Burada $\overline{H}^2(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun $\left(\overline{H}^2\right)'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu $\overline{H}''(\lambda_5)$ alt grubu ve $\overline{H}^5(\lambda_5)$ kuvvet alt grubunun $\left(\overline{H}^5\right)'(\lambda_5)$ komütatör alt grubu $\overline{H}'(\lambda_5)$ alt grubu olduğu açıktır.

4.6 $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Bazı Normal Alt Grupları

4.6.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun tam olarak 3 tane 2 indeksli normal alt grubu vardır. Bunlar

$$H(\lambda_5) = < T, S \mid T^2 = S^5 = I > \cong C_2 * C_5,$$

$$\overline{H}_0(\lambda_5) = < R, S, TST \mid R^2 = S^5 = (TST)^5 = (RS)^5 = (RTST)^2 = I > \cong D_5 *_{Z_2} D_5,$$

$$\alpha\big(H(\lambda_5)\big) = < TR, S \mid (TR)^2 = S^5 = I > \cong C_2 * C_5$$

alt gruplarıdır, [9, 10, 11].

İspat : $N \lhd \overline{H}(\lambda_5)$ ile $\left|\overline{H}(\lambda_5) : N\right| = 2$ olsun. Böylece $\overline{H}(\lambda_5)/N$ değişmeli grup olur ve $\overline{H}'(\lambda_5) \subset N \subset \overline{H}(\lambda_5)$ elde edilir.

Şimdi $\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}'(\lambda_5) = C_2 \times C_2 = D_2$, bir Klein 4-gruptur. Bu tam olarak 3 tane 2 indeksli normal alt gruba sahiptir. Bu yüzden $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunu kapsayan $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2 indeksli normal alt grupları $H(\lambda_5)$, $\overline{H}_0(\lambda_5)$ ve $\alpha\big(H(\lambda_5)\big)$ dır. N, $\overline{H}'(\lambda_5)$ komütatör grubunu kapsadığı için bunlardan biri olmalıdır.

4.6.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 3 indeksli normal alt grubu yoktur, [9, 11].

İspat : Varsayalım ki $N \lhd \overline{H}(\lambda_5)$ ile $\left|\overline{H}(\lambda_5) : N\right| = 3$ olsun. $A = \overline{H}(\lambda_5)/N$ diyelim. O halde $|A| = 3$ tür ve böylece A değişmelidir. Bu yüzden $\overline{H}'(\lambda_5) \subset N$ olur fakat $\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}'(\lambda_5)\right| = 4$ olduğundan imkansızdır.

4.6.3 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun tam olarak 2 tane 10 indeksli normal alt grubu vardır. Bunlar

$$H^5(\lambda_5) = <T> * <STS^4> * <S^2TS^3> * <S^3TS^2> * <S^4TS>$$

ve

$$\overline{H}_2(\lambda_5) = <TR> * <RSTS> * <RS^2TS^2> * <RS^3TS^3> * <RS^4TS^4>$$

dir. ($\overline{H}_2(\lambda_5)$, $\overline{H}(\lambda_5)$ nin temel denklik alt grubudur.), [9, 11].

4.7 $\overline{H}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Serbest Normal Alt Grupları

$\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun D_2 ve D_5 gruplarının $\mathbf{Z}_2$ alt grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımı şeklinde olduğunu Teorem 4.1.3 den biliyoruz. Kurosh alt grup teoremi yardımıyla, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu iki çeşit alt gruba sahiptir. Birincisi serbest alt gruplardır. Diğeri ise sonsuz mertebeli devirli gruplar, bazı 2 ve 5 mertebeli devirli gruplar, bazı D_2 ve D_5 dihedral gruplar ile bazı D_{m_1} ve D_{m_2} dihedral grupların serbest çarpımlarından oluşan alt gruplardır. Burada m_i indisi 2 veya 5 sayısını böler. İşte biz bu alt grupları ve cebirsel yapılarını araştıracağız.

4.7.1 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun birimden farklı N normal alt grubunun serbest olması için gerekli ve yeterli koşul N normal alt grubunun, sonlu mertebeli eleman içermemesidir, [9, 11].

İspat : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu 4 mertebeli D_2 ve 10 mertebeli D_5 dihedral gruplarının $\mathbf{Z}_2$ grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımı olduğunu Teorem 4.1.2 den biliyoruz. Aradığımız N grubunun yapısı;

$$N = F * \prod\nolimits_* C_r * \prod\nolimits_* (D_{m_1} *_{Z_2} D_{m_2})$$

şeklindedir. Burada F ya serbest ya da birim grup; C_r ise {T}, {S}, {TR} elemanları tarafından üretilen gruplara izomorftur. her bir D_{m_i} dihedral grubu {T, R}, {S, R} elemanları ile üretilen gruplardan biridir. N sonlu mertebeli eleman bulundurmadığından

$$\prod\nolimits_* C_r * \prod\nolimits_* (D_{m_1} *_{Z_2} D_{m_2})$$

Serbest çarpımları olamaz. Ek olarak N, birimden farklı olduğundan tek seçenek F serbest grubu olmak zorundadır.

İspatın diğer tarafı serbest grup tanımından açıktır.

4.7.2 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubundaki sonlu mertebeli elemanlar, T, R, TR, S, S^2 elemanlarından biri ile konjugedir, [9].

4.7.3 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun, sonlu indeksli, sonlu mertebeli eleman içeren normal alt grupları şunlardır:

$$\overline{H}(\lambda_5),\ H(\lambda_5),\ \overline{H}_0(\lambda_5),\ \alpha(H(\lambda_5)),\ H^2(\lambda_5),\ H^5(\lambda_5) \text{ ve } \overline{H}_2(\lambda_5)$$

, [9, 11].

İspat : N, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun sonlu mertebeli eleman içeren, sonlu indeksli normal alt grubu olsun. Sonlu mertebeli elemanlar, N alt grubundan şu şekilde bulunabilir: 2 mertebeli bir eleman; 5 mertebeli bir eleman; 2 mertebeli iki eleman; 2 ve 5 mertebeli iki eleman; 2 mertebeli iki eleman ile 5 mertebeli üç eleman. $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun, sonlu mertebeli elemanlarının, 2 mertebeli T, S veya TR elemanına, 5 mertebeli bir eleman da S elemanın bir S, S^2 kuvvetine konjuge olacağını Teorem 4.7.2 de belirtmiştik. Buradan sonlu indeksli N normal alt grubu sonlu mertebeli bir eleman içeriyorsa; T, R, TR veya S nin S, S^2 kuvvetlerinden birini içerir. Burada incelenecek dokuz durum ortaya çıkar. Bunları teker teker inceleyelim:

(i) Eğer N alt grubu, T, R elemanları ile S, S^2 elemanlarından birini içeriyorsa, N=$\overline{H}(\lambda_5)$ olur.

(ii) N alt grubu, T dönüşümü ve S, S^2 dönüşümlerinden birini içerip; R ve TR dönüşümlerini içermesin. Buradan,

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong \langle R \mid R^2=I \rangle \cong C_2$$

bölüm grubu elde edilir. 2 indeksli ve bu şartlara uyan normal alt grup $H(\lambda_5)$ dir.

(iii) Eğer N alt grubu, R dönüşümü ile S, S^2 dönüşümlerinden birini bulundurup; T ve TR dönüşümlerini bulundurmasın.

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong \langle T \mid T^2=I \rangle \cong C_2$$

elde edilir ki 2 indeksli ve şartları sağlayan N=$\overline{H}_0(\lambda_5)$ alt grubudur.

(iv) Şimdi de N alt grubu, TR ve S, S^2 dönüşümlerini içerip, T ve R dönüşümlerini içermesin.

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong < T \mid T^2=I > \cong C_2$$

olur ki 2 indeksli bu alt grup, $N=\alpha(H(\lambda_5))$ bulunur.

(v) T ve R elemanlarını N alt grubuna ait olup S, S^2 dönüşümleri, N de bulunmasın. O halde bölüm grubu,

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong C_1$$

olur ki $N=\overline{H}(\lambda_5)$ grubun kendisi çıkar.

(vi) Eğer N alt grubu S, S^2 dönüşümlerini bulundurup, T ve R dönüşümlerini içermiyorsa,

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong < T,R \mid T^2=R^2=(TR)^2=I > \cong D_2$$

olur ki $N=H^2(\lambda_5)$ sonucu çıkar.

(vii) N alt grubu, T dönüşümünü içerip, R, S, S^2 dönüşümlerini içermezse bölüm grubu,

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong < S,R \mid S^5=R^2=(SR)^2=I > \cong D_5$$

bulunur ve de $N=H^5(\lambda_5)$ olur.

(viii) Eğer N alt grubu, TR dönüşümünü içerip, T, R, S, S^2 dönüşümlerini içermezse,

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong < T, S \mid T^2=S^5=(TS)^2=I > \cong D_5$$

ve $N=\overline{H}_2(\lambda_5)$ bulunur.

(ix) N alt grubu, R dönüşümünü içerip, T, S, S^2 dönüşümlerini içermesin. Bu durumda

$$\overline{H}(\lambda_5)/N \cong < T \mid T^2=I > \cong C_2$$

olur ve de bu mümkün değildir.

4.7.4 Teorem : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun sonlu indeksli ve birimden farklı N normal alt grubu,

$$\overline{H}(\lambda_5),\ H(\lambda_5),\ \overline{H}_0(\lambda_5),\ \alpha(H(\lambda_5)),\ H^2(\lambda_5),\ H^5(\lambda_5) \text{ ve } \overline{H}_2(\lambda_5)$$

gruplarından farklı ise N serbesttir, [9, 11].

İspat : Teorem 4.7.1 ve 4.7.3 den görülür.

4.7.5 Teorem : Verilen sonlu indeksli N normal alt grubu,

$$\overline{H}(\lambda_5),\ H(\lambda_5),\ \overline{H}_0(\lambda_5),\ \alpha(H(\lambda_5)),\ H^2(\lambda_5),\ H^5(\lambda_5) \text{ ve } \overline{H}_2(\lambda_5)$$

gruplarından farklı ve de $\left|\overline{H}(\lambda_5):N\right| = \mu$ ise μ indeksi, 20 tarafından bölünür, [9, 11].

İspat : Elde edilecek bölüm grubu, 2, 4 ve de 10 mertebeli alt grupları bulunduracağından μ indeksi 20 tarafından bölünür.

4.8 $\overline{\mathbf{H}}(\lambda_5)$ Genişletilmiş Hecke Grubunun Temel Denklik Alt Grupları

Bölüm 3.7 den $H(\lambda_5)$ Hecke grubunun p asalı için $H_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunun,

$$\begin{aligned} H_p(\lambda_5) &= \{T \in H(\lambda_5) : T \equiv \pm I \ (\text{mod } p)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_5 \\ c\lambda_5 & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1,\ b \equiv c \equiv 0 \ (\text{mod } p),\ ad - \lambda_5^2 bc = 1 \right\} \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi benzer olarak $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun p asalı için $\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunu tanımlayalım.

4.8.1 Tanım : p bir asal sayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel denklik alt grubu;

$$\begin{aligned} \overline{H}_p(\lambda_5) &= \{T \in H(\lambda_5) : T \equiv \pm I \ (\text{mod } p)\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b\lambda_5 \\ c\lambda_5 & d \end{pmatrix} : a \equiv d \equiv \pm 1,\ b \equiv c \equiv 0 \ (\text{mod } p),\ ad - \lambda_5^2 bc = \pm 1 \right\} \end{aligned}$$

, [12].

$\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu her zaman $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubudur.

4.8.2 Sonuç : $H_p(\lambda_5) = \overline{H}_p(\lambda_5) \cap H(\lambda_5)$, [12].

4.8.3 Teorem : $p \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu hiçbir yansıma dönüşümü içermez. Yani,

$$\overline{H}_p(\lambda_5) = H_p(\lambda_5)$$

olur, [12].

İspat : $A \in \overline{H}_p(\lambda_5)$ alalım. O halde $\det A = \pm 1 = ad - \lambda_5^2 bc \equiv 1 \pmod p$ olur. $p \geq 3$ olduğundan, $\det A = 1$dir ve bu yüzden $A \in H_p(\lambda_5)$ olur. Bu da bize $\overline{H}_p(\lambda_5) = H_p(\lambda_5)$ olduğunu gösterir.

Şimdi Teorem 4.8.3 ü kullanarak $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu ile bölüm grubunu oluşturalım. $p \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}_p(\lambda_5)\right| &= \left|\overline{H}(\lambda_5) : H_p(\lambda_5)\right| \\ &= \left|\overline{H}(\lambda_5) : H(\lambda_5)\right| . \left|H(\lambda_5) : H_p(\lambda_5)\right| \end{aligned}$$

olur ve $\left|\overline{H}(\lambda_5) : H(\lambda_5)\right| = 2$ olduğundan,

$$\left|\overline{H}(\lambda_5) : \overline{H}_p(\lambda_5)\right| = 2. \left|H(\lambda_5) : H_p(\lambda_5)\right|$$

elde edilir. Böylece $H(\lambda_5)/H_p(\lambda_5) \cong G$ olduğu zaman

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}_p(\lambda_5) = \overline{H}(\lambda_5)/H_p(\lambda_5) \cong C_2 \times G$$

olur, [12].

Şimdi de p=2 durumunu inceleyelim. $A \in \overline{H}_2(\lambda_5)$ ise ya $\det A = 1$ ya da $\det A = -1$ dir. Böylece

$$\left|\overline{H}_2(\lambda_5) : H_2(\lambda_5)\right| = 2$$

ve

$$\left|\overline{H}(\lambda_5):\overline{H}_2(\lambda_5)\right| = \left|H(\lambda_5):H_2(\lambda_5)\right|$$

$\overline{H}(\lambda_5) \geq \overline{H}_2(\lambda_5) \geq H_2(\lambda_5)$ olduğundan. Bu yüzden

$$\overline{H}(\lambda_5)/\overline{H}_2(\lambda_5) \cong H(\lambda_5)/H_2(\lambda_5)$$

olur, [12].

4.8.4 Sonuç : K, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun bir alt grubu olsun. K, $\overline{H}_p(\lambda_5)$ grubunu içerir ancak ve ancak $H_p(\lambda_5)$ grubunu içerirse, [12].

Şimdi $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}_2(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunun komütatör alt grubunu bulalım. Teorem 4.6.3 te $\overline{H}_2(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunun gösterimini vermiştik. Burada $\overline{H}_2(\lambda_5)$ temel denklik alt grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısını ekleyerek $\overline{H}_2(\lambda_5)/\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ bölüm grubunu oluşturup Reidemeister-Schreier yöntemini kullanarak $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ komütatör alt grubunun üreteçlerini bulalım.

4.8.5 Teorem : (i) $\left|\overline{H}_2(\lambda_5):\overline{H}_2{}'(\lambda_5)\right| = 32$.

(ii) $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubu 49 ranklı bir serbest gruptur.

(iii) $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubu, $H_2(\lambda_5)$ grubunun 16 indeksli bir alt grubudur.

İspat : (i) $\overline{H}_2(\lambda_5)$ grubunun grup gösteriminin

$$\overline{H}_2(\lambda_5) = \langle TR, RSTS, RS^2TS^2, RS^3TS^3, RS^4TS^4 \mid (TR)^2=(RSTS)^2=(RS^2TS^2)^2 =(RS^3TS^3)^2=(RS^4TS^4)^2=I \rangle$$

olduğunu biliyoruz. Burada k_1=TR, k_2=RSTS, $k_3=RS^2TS^2$, $k_4=RS^3TS^3$, $k_5=RS^4TS^4$ diyelim. Eğer $\overline{H}_2(\lambda_5)$ grubunun grup gösterimine üreteçlerin değişmelilik bağıntısı $k_i.k_j=k_j.k_i$ ($i\neq j$ ve i, j = 1, … , 5) eklenirse

$$\overline{H}_2(\lambda_5)/\overline{H}_2{}'(\lambda_5) \cong C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2 \times C_2$$

elde edilir. Böylece, $\left|\overline{H}_2(\lambda_5):\overline{H}_2{}'(\lambda_5)\right| = 32$ olur.

(ii) Şimdi $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubunun üreteç kümesini bulalım. Bunun için Schreier transversali olarak { I, k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, k_1k_2, k_1k_3, k_1k_4, k_1k_5, k_2k_3, k_2k_4, k_2k_5, k_3k_4, k_3k_5, k_4k_5, $k_1k_2k_3$, $k_1k_2k_4$, $k_1k_2k_5$, $k_1k_3k_4$, $k_1k_3k_5$, $k_1k_4k_5$, $k_2k_3k_4$, $k_2k_3k_5$, $k_2k_4k_5$, $k_3k_4k_5$, $k_1k_2k_3k_4$, $k_1k_2k_3k_5$, $k_1k_2k_4k_5$, $k_1k_3k_4k_5$, $k_2k_3k_4k_5$, $k_1k_2k_3k_4k_5$ } kümesini alalım. Reidemeister-Schreier yöntemine göre mümkün olan bütün çarpımlar alınıp, gerekli hesaplamalar yapılırsa $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubun üreteç kümesi 49 ranklı olarak bulunur.

$\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubunun üreteçleri ve matris gösterimleri şunlardır;

$$TS^4TS^4TS^4TS^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4\lambda_5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TS^3TS^3TS^3 = \begin{pmatrix} 9+16\lambda_5 & 8+12\lambda_5 \\ 12+20\lambda_5 & 9+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TS^2TS^2TS^2 = \begin{pmatrix} 9+16\lambda_5 & 12+20\lambda_5 \\ 8+12\lambda_5 & 9+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TSTSTSTS = \begin{pmatrix} 1 & 4\lambda_5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$STS^4TS^4TS^4TS^3 = \begin{pmatrix} -3-4\lambda_5 & -4\lambda_5 \\ 4+8\lambda_5 & 5+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S\ TS^3TS^3TS^3TS^2 = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & 12+20\lambda_5 \\ -24-40\lambda_5 & -29-48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^2TS^2TS^2TS = \begin{pmatrix} -3-4\lambda_5 & -8-12\lambda_5 \\ 8+12\lambda_5 & 21+36\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TS^4TS^4TS^4TS^2 = \begin{pmatrix} 3+8\lambda_5 & 4+8\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & -5-8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TS^3TS^3TS^3TS = \begin{pmatrix} 11+16\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ -12-20\lambda_5 & -29-48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^3TS^4TS^4TS^4TS = \begin{pmatrix} -3-4\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ 4\lambda_5 & 5+4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTSTSTS^2T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -4\lambda_5 \\ 4+8\lambda_5 & -5-4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^2TS^2TSTS^4 = \begin{pmatrix} 15+24\lambda_5 & 8+12\lambda_5 \\ 28+48\lambda_5 & 15+24\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^2TS^2TS^2TS^3T = \begin{pmatrix} -11-16\lambda_5 & 12+20\lambda_5 \\ -24-40\lambda_5 & 29+48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^2TS^3TS^3TS^2TS^4 = \begin{pmatrix} 31+48\lambda_5 & 12+20\lambda_5 \\ 72+120\lambda_5 & 31+48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^3TS^3TS^3TS^4T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -8-12\lambda_5 \\ 8+12\lambda_5 & -21-36\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^3TS^4TS^4TS^3TS^4 = \begin{pmatrix} 7+8\lambda_5 & 4\lambda_5 \\ 16+28\lambda_5 & 7+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTSTSTS^3T = \begin{pmatrix} -3-8\lambda_5 & 4+8\lambda_5 \\ -4-8\lambda_5 & 5+8\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTS^3TS^3TSTS^3 = \begin{pmatrix} 39+64\lambda_5 & 36+56\lambda_5 \\ 44+72\lambda_5 & 39+64\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TS^2TS^2TS^2TS^4T = \begin{pmatrix} -11-16\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ -12-20\lambda_5 & 29+48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TS^2TS^4TS^4TS^2TS^3 = \begin{pmatrix} 31+48\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ 36+60\lambda_5 & 31+48\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TSTSTSTS^4T = \begin{pmatrix} 3+4\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ 4\lambda_5 & -5-4\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^2TSTS^4TS^4TSTS^2 = \begin{pmatrix} 15+24\lambda_5 & 20+32\lambda_5 \\ 8+20\lambda_5 & 15+24\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^4TSTSTSTS^2TS^4 = \begin{pmatrix} -13-16\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ 20+40\lambda_5 & 11+16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^4TSTS^2TS^2TSTS^3 = \begin{pmatrix} -33-52\lambda_5 & -28-48\lambda_5 \\ 68+112\lambda_5 & 63+100\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^4TS^2TS^2TS^2TS^3TS^4 = \begin{pmatrix} 69+112\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ -140-228\lambda_5 & -51-80\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^4TS^2TS^3TS^3TS^2TS^3 = \begin{pmatrix} -89-144\lambda_5 & -72-120\lambda_5 \\ 180+292\lambda_5 & 151+240\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^3TSTSTSTS^3TS^4 = \begin{pmatrix} 13+20\lambda_5 & 4+8\lambda_5 \\ -32-52\lambda_5 & -11-20\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$STS^3TSTS^3TS^3TSTS^2 = \begin{pmatrix} 33+52\lambda_5 & 44+72\lambda_5 \\ -80-132\lambda_5 & -111-180\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TS^4TSTSTSTS^2TS^3 = \begin{pmatrix} -29-44\lambda_5 & -20-40\lambda_5 \\ 32+52\lambda_5 & 27+44\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$S^2TS^4TSTS^2TS^2TSTS^2 = \begin{pmatrix} 49+80\lambda_5 & 68+112\lambda_5 \\ -56-92\lambda_5 & -79-128\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TS^2TS^2TS^4TSTS^4 = \begin{pmatrix} 73+120\lambda_5 & 36+56\lambda_5 \\ 156+252\lambda_5 & 73+120\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^2T = \begin{pmatrix} 33+52\lambda_5 & -28-48\lambda_5 \\ 68+112\lambda_5 & -63-100\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TS^4TS^4TS^3TST = \begin{pmatrix} 13+16\lambda_5 & -4-8\lambda_5 \\ 20+40\lambda_5 & -11-16\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^3TSTSTS^3TSTS^4 = \begin{pmatrix} 49+80\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ 100+160\lambda_5 & 49+80\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^3TS^2TS^2TS^3TS^2T = \begin{pmatrix} 89+144\lambda_5 & -72-120\lambda_5 \\ 180+292\lambda_5 & -151-240\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^3TS^3TS^3TS^2TST = \begin{pmatrix} -69-112\lambda_5 & 24+40\lambda_5 \\ -140-228\lambda_5 & 51+80\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^2TS^4TSTSTS^4TS^2TS^4 = \begin{pmatrix} 49+80\lambda_5 & 20+32\lambda_5 \\ 120+200\lambda_5 & 49+80\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^2TS^4TS^2TS^2TS^4TS^3T = \begin{pmatrix} -33-52\lambda_5 & 44+72\lambda_5 \\ -80-132\lambda_5 & 111+180\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^4TS^2TS^4TS^4TS^4TS^2TST = \begin{pmatrix} -13-20\lambda_5 & 4+8\lambda_5 \\ -32-52\lambda_5 & 11+20\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTS^4TSTSTS^4TSTS^3 = \begin{pmatrix} 73+120\lambda_5 & 60+108\lambda_5 \\ 84+136\lambda_5 & 73+120\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^3T = \begin{pmatrix} -49-80\lambda_5 & 68+112\lambda_5 \\ -56-92\lambda_5 & 79+128\lambda_5 \end{pmatrix}$$

$$TS^3TSTS^4TS^4TS^4TS^3TS^2T=\begin{pmatrix}29+44\lambda_5 & -20-40\lambda_5\\ 32+52\lambda_5 & -27-44\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$STS^4TSTS^4TS^2TS^2TS^4TSTS^3=\begin{pmatrix}-179-288\lambda_5 & -156-252\lambda_5\\ 372+604\lambda_5 & 325+528\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$STS^4TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^2TS^4=\begin{pmatrix}-175-280\lambda_5 & -68-112\lambda_5\\ 360+588\lambda_5 & 145+232\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$STS^4TSTS^4TS^4TS^4TS^3TSTS^4=\begin{pmatrix}-51-76\lambda_5 & -20-40\lambda_5\\ 96+164\lambda_5 & 53+76\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TSTS^4TS^4TSTS^4TSTS^4=\begin{pmatrix}143+216\lambda_5 & 60+108\lambda_5\\ 276+468\lambda_5 & 143+216\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TSTS^3TS^3TSTS^4TS^2T=\begin{pmatrix}179+288\lambda_5 & -156-252\lambda_5\\ 372+604\lambda_5 & -325-528\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TSTS^2TS^2TSTS^3TST=\begin{pmatrix}175+280\lambda_5 & -68-112\lambda_5\\ 360+588\lambda_5 & -145-232\lambda_5\end{pmatrix}$$

$$TS^4TSTS^4TSTSTSTS^2TS^4TST=\begin{pmatrix}51+76\lambda_5 & -20-40\lambda_5\\ 96+164\lambda_5 & -53-76\lambda_5\end{pmatrix}$$

şeklindedir.

(iii) $\left|\overline{H}_2(\lambda_5):H_2(\lambda_5)\right|=2$ ve $\left|\overline{H}_2(\lambda_5):\overline{H}_2{}'(\lambda_5)\right|=32$ olduğundan $\left|H_2(\lambda_5):\overline{H}_2{}'(\lambda_5)\right|=16$ elde edilir.

4.8.6 Teorem : $\left(H^5\right)'(\lambda_5)$ grubunun,

$$\alpha : T\rightarrow RT,\ S\rightarrow S,\ R\rightarrow R$$

fonksiyonu altındaki görüntüsü $\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ grubunu verir. Yani, $\alpha\left(\left(H^5\right)'(\lambda_5)\right)=\overline{H}_2{}'(\lambda_5)$ olur.

İspat : $(H^5)'(\lambda_5)$ grubunun üreteçlerini Teorem 3.5.2 den biliyoruz. Şimdi bu üreteçlerin

$$\alpha: T \to RT,\ \ S \to S,\ \ R \to R$$

fonksiyonu altındaki görüntülerini bulalım.

$\alpha(\ TSTS^4TSTS^4\ ) = TS^4TS^4TS^4TS^4$

$\alpha(\ TS^2TS^3TS^2TS^3\ ) = TS^3TS^3TS^3TS^3$

$\alpha(\ TS^3TS^2TS^3TS^2\ ) = TS^2TS^2TS^2TS^2$

$\alpha(\ TS^4TSTS^4TS\ ) = TSTSTSTS$

$\alpha(\ STSTS^4TSTS^3\ ) = STS^4TS^4TS^4TS^3$

$\alpha(\ STS^2TS^3TS^2TS^2\ ) = STS^3TS^3TS^3TS^2$

$\alpha(\ STS^3TS^2TS^3TS\ ) = STS^2TS^2TS^2TS$

$\alpha(\ S^2TSTS^4TSTS^2\ ) = S^2TS^4TS^4TS^4TS^2$

$\alpha(\ S^2TS^2TS^3TS^2TS\ ) = S^2TS^3TS^3TS^3TS$

$\alpha(\ S^3TSTS^4TSTS\ ) = S^3TS^4TS^4TS^4TS$

$\alpha(\ TSTSTS^4TSTS^3T\ ) = TS^4TSTSTSTS^2T$

$\alpha(\ TSTSTS^3TS^2TS^4TS^4\ ) = TS^4TSTS^2TS^2TSTS^4$

$\alpha(\ TSTS^2TS^3TS^2TS^2T\ ) = TS^4TS^2TS^2TS^2TS^3T$

$\alpha(\ TSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^4\ ) = TS^4TS^2TS^3TS^3TS^2TS^4$

$\alpha(\ TSTS^3TS^2TS^3TST\ ) = TS^4TS^3TS^3TS^3TS^4T$

$\alpha(\ TSTS^3TSTS^4TS^2TS^4\ ) = TS^4TS^3TS^4TS^4TS^3TS^4$

$\alpha(\ TS^2TSTS^4TSTS^2T\ ) = TS^3TSTSTSTS^3T$

$\alpha(\ TS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^3\ ) = TS^3TSTS^3TS^3TSTS^3$

$\alpha(\ TS^2TS^2TS^3TS^2TST\ ) = TS^3TS^2TS^2TS^2TS^4T$

$\alpha(\ TS^2TS^2TSTS^4TS^3TS^3\ ) = TS^3TS^2TS^4TS^4TS^2TS^3$

$\alpha(\ TS^3TSTS^4TSTST\ ) = TS^2TSTSTSTS^4T$

$\alpha(\ TS^3TSTSTS^4TS^4TS^2\ ) = TS^2TSTS^4TS^4TSTS^2$

$\alpha(\ STSTSTS^4TSTS^3TS^4\ ) = STS^4TSTSTSTS^2TS^4$

$\alpha(\ STSTSTS^3TS^2TS^4TS^3\ ) = STS^4TSTS^2TS^2TSTS^3$

$\alpha(\ STSTS^2TS^3TS^2TS^2TS^4\ ) = STS^4TS^2TS^2TS^2TS^3TS^4$

$\alpha(\ STSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^3\ ) = STS^4TS^2TS^3TS^3TS^2TS^3$

$\alpha(\ STS^2TSTS^4TSTS^2TS^4\ ) = STS^3TSTSTSTS^3TS^4$

$\alpha(STS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^2) = STS^3TSTS^3TS^3TSTS^2$

$\alpha(S^2TSTSTS^4TSTS^3TS^3) = S^2TS^4TSTSTSTS^2TS^3$

$\alpha(S^2TSTSTS^3TS^2TS^4TS^2) = S^2TS^4TSTS^2TS^2TSTS^2$

$\alpha(TSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^4) = TS^4TSTS^4TS^2TS^2TS^4TSTS^4$

$\alpha(TSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3T)=TS^4TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^2T$

$\alpha(TSTSTSTS^4TSTS^3TS^4T) = TS^4TSTS^4TS^4TS^4TS^3TST$

$\alpha(TSTSTS^2TSTS^4TS^3TS^4TS^4)=TS^4TSTS^3TSTSTS^3TSTS^4$

$\alpha(TSTSTS^2TS^2TS^3TS^3TS^3T) = TS^4TSTS^3TS^2TS^2TS^3TS^2T$

$\alpha(TSTSTS^2TS^3TS^2TS^2TS^4T)=TS^4TSTS^3TS^3TS^3TS^2TST$

$\alpha(TSTS^2TSTSTS^4TS^4TS^3TS^4) = TS^4TS^2TS^4TSTSTS^4TS^2TS^4$

$\alpha(TSTS^2TSTS^2TS^3TS^4TS^2T) = TS^4TS^2TS^4TS^2TS^2TS^4TS^3T$

$\alpha(TSTS^2TSTS^4TSTS^2TS^4T) = TS^4TS^2TS^4TS^4TS^4TS^2TST$

$\alpha(TS^2TSTSTSTS^4TS^4TS^4TS^3)=TS^3TSTS^4TSTSTS^4TSTS^3$

$\alpha(TS^2TSTSTS^3TS^2TS^4TS^2T) = TS^3TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^3T$

$\alpha(TS^2TSTSTS^4TSTS^3TS^3T) = TS^3TSTS^4TS^4TS^4TS^3TS^2T$

$\alpha(STSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^3) = STS^4TSTS^4TS^2TS^2TS^4TSTS^3$

$\alpha(STSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3TS^4) = STS^4TSTS^4TS^3TS^3TS^4TS^2TS^4$

$\alpha(STSTSTSTS^4TSTS^3TS^4TS^4) = STS^4TSTS^4TS^4TS^4TS^3TSTS^4$

$\alpha(TSTSTSTSTSTS^4TS^4TS^4TS^4TS^4)=TS^4TSTS^4TSTS^4TS^4TSTS^4TSTS^4$

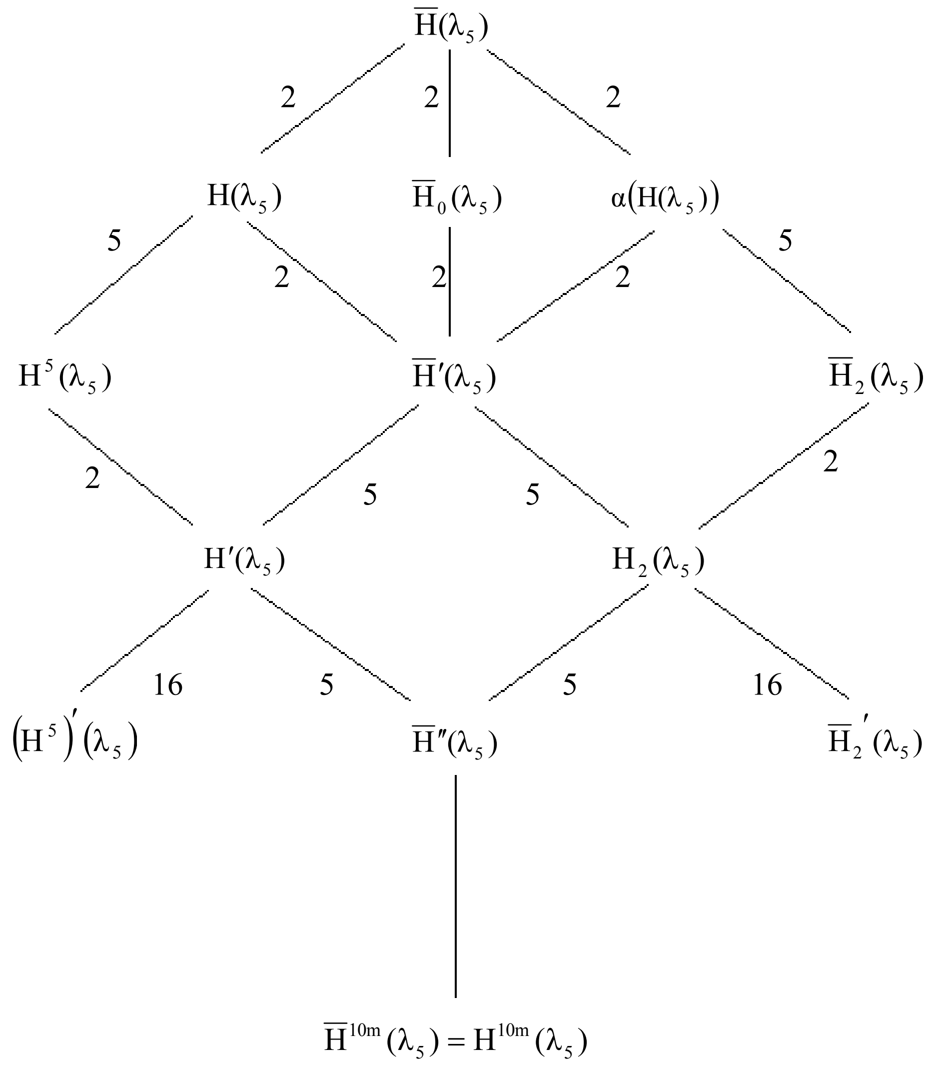
$\alpha(TSTSTSTSTS^2TS^3TS^4TS^4TS^3T)= TS^4TSTS^4TSTS^3TS^3TSTS^4TS^2T$

$\alpha(TSTSTSTSTS^3TS^2TS^4TS^3TS^4T) = TS^4TSTS^4TSTS^2TS^2TSTS^3TST$

$\alpha(TSTSTSTSTS^4TSTS^3TS^4TS^4T) = TS^4TSTS^4TSTSTSTS^2TS^4TST$

Bu üreteçler Teorem 4.8.5 de verilen $\overline{H}_2'(\lambda_5)$ grubunun üreteçleri ile aynı olduğundan $\alpha\left(\left(H^5\right)'(\lambda_5)\right)=\overline{H}_2'(\lambda_5)$ eşitliği elde edilir.

Aşağıda $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu ile alt grupları arasındaki ilişkiyi gösteren şekil verilmiştir:



Şekil 4.2 : $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu ile alt grupları arasındaki ilişki

Bu şekilde $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun alt gruplarını ve bu alt grupların $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun kaç indeksli alt grupları olduğunu görebiliriz. Ayrıca, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun alt gruplarının birbirleriyle olan ilişkilerini ve indekslerini görebiliriz.

5. SONUÇLAR

Bu çalışmada $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$ durumuna karşılık gelen $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke gruplarının $q = 5$ değeri için elde edilen $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu, alt grupları ve özellikleri çalışılmıştır.

Çalışmanın 4.1 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun tanımı ve grup gösterimi verilmiştir. D_2 dihedral grubu ve D_5 dihedral grubunun Z_2 alt grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımına izomorf olduğu verilmiştir.

4.2 kısmında temel bölge tanımı ve $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubu için bir temel bölge verilmiştir.

4.3 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun komütatör alt grupları tanıtılmış, $\overline{H}'(\lambda_5)$ ve $\overline{H}''(\lambda_5)$ komütatör alt gruplarının üreteçleri ve üreteçlerinin matris gösterimleri verilmiştir.

4.4 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}^m(\lambda_5)$ m. kuvvet alt grubunun tanımı verilmiş ve m pozitif tam sayısının bütün durumlarını inceleyen teorem ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca kuvvet alt grupları ile komütatör alt grupları arasındaki ilişkiler incelenmiş ve ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

4.5 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun m pozitif tam sayısının durumlarına göre $\left(\overline{H}^m\right)'(\lambda_5)$ alt grubunu inceleyen teorem ifade ve ispat edilmiştir.

4.6 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun 2, 3 ve 10 indeksli normal alt grupları hakkında bilgi verilmiştir.

4.7 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun serbest normal alt grupları hakkında bilgi verilmiş, ilgili teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

4.8 kısmında $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun temel denklik alt gruplarının tanımı verilmiş. $p \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere, $\overline{H}(\lambda_5)$ genişletilmiş Hecke grubunun $\overline{H}_p(\lambda_5)$ temel denklik alt grubu ile bölüm grubu oluşturulmuştur. Ayrıca $\overline{H}_2'(\lambda_5)$ alt grubunun üreteçleri ve üreteçlerinin matris gösterimleri elde edilmiştir.

6. KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., “Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung”, *Math. Ann.,* 112, 664-699, (1936).

[2] Cangül, İ. N., “Normal Subgroups of Hecke Groups”, Ph.D. Thesis, *Southampton University*, (1993).

[3] Newman, M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, (1962).

[4] Newman, M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).

[5] Jones, G. A., Thornton, J. S., “Automorphisms and congruence subgroups of the extended modular group”, *J. London Math. Soc*. 34, 26-40, (1986).

[6] Kulkarni, R. S., “An arithmetic-geometric method in the study of the subgroups of the modular group”, *Amer. J. Math.*, 113, 1053-1133, (1991).

[7] Singerman, D., “PSL(2, q) as an image of the extended modular group with applications to group actions on surfaces”, *Proc. Edinburgh Math. Soc.,* 30/2, 143-151, (1987).

[8] Şahin, R., “Genişletilmiş Hecke Grupları”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[9] Koruoğlu, Ö., "$\overline{H}(\lambda)$ ile $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları ve Sürekli Kesirler", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[10] İkikardeş, S., "Genelleştirilmiş M^*-Gruplar", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2008).

[11] Sahin, R., İkikardeş S., Koruoğlu Ö.," Some normal subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Rocky Mountain J. Math.*, 36/3, 1033-1048, (2006).

[12] Sahin, R., Bizim, O., " Some subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Acta Math. Sci.*, 23/4, 497-502, (2003).

[13] Sahin, R., Bizim, O., Cangül İ. N., "Commutator subgroups of the extended hecke groups", *Czech. Math. J.*, 54, 253-259, (2004).

[14] Sahin, R., Ikikardes, S., Koruoğlu, Ö., "On the power subgroups of the extended modular group $\overline{\Gamma}$", *Turkish J. Math.*, 29, 143-151, (2004).

[15] Sahin, R., Koruoğlu, Ö., Ikikardes, S., "On the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_5)$", *Algebra Colloq.*, 13, 17-23, (2006).

[16] Başkan, T., Ayrık Gruplar, *Hacettepe Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları*, Beytepe, Ankara, (1980).

[17] Jones, G. A., Singerman, D., Complex Functions, *Cambridge University Press*, Cambridge, 60, (1987).

[18] Maclachlan, C., “Maximal Normal Fuchsian Groups”, *Illionis J. Math*., 15, 104-113, (1971).

[19] Singerman, D., “Subgroups of Fuschian groups and finite permutation groups” *Bull. London Math. Soc*., 2, 319, (1970).

[20] Malik, D. S., Mordeson, J. M., Sen, M. K., “Fundamentals of Abstract Algebra”, *McGraw-Hill*, New York, (1997).

[21] Coxeter H. S. M., Moser W. O. J., “Generators and relations for discrete groups”, second ed., *Springer-Verlag*, Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York, 35-38, (1965).

[22] Allenby, R. B. J. T., “Rings, Fields and Groups. An introduction to abstract algebra”, second ed., Edward Arnold, London, 156-167, (1991).

[23] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., “Combinatorial Group Theory”, *Springer-Verlag*, Berlin-Heidelberg-New York, (1977).

[24] Fine, B., Rosenberger, G., “Algebraic Generalizations of Discrete Groups”, *Marcel Dekker*, Inc, New-York, (1999).

[25] Cangül, İ. N., “The group structure of Hecke groups $H(\lambda_q)$”, *Tr. J. of Mathematics*, 20, 203, (1996).

[26] Cangül, İ. N., Bizim, O., “Commutator subgroups of Hecke groups”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sin*., 30/4, 253, (2002).

[27] Hungerford T. W., “Algebra”, *Springer-Verlag*, New York Inc., 103, 230-238, (1974).

[28] Robinson D. J. S., “A course in the theory of groups”, *Springer-Verlag*, New York-Heildelberg-Berlin, s.28, 119-120, 167, (2001).

[29] Cangül, İ. N., Sahin, R., İkikardes, S., Koruoğlu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups II", *Houston J. Math.*, 33/1, 33, (2007).

[30] Cangül, İ. N., Singerman, D., "Normal subgroups of Hecke groups and regular maps", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 123, 59, (1998).

[31] Sahin, R., Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups", *Ramanujan J.*, 24/2, 151-159, (2011).

[32] İkikardes, S., Sahin, R., Cangül, İ. N., "Principal congruence subgroups of the Hecke groups and related results", *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 40/4, 479, (2009).

[33] Demir, M., Cangül, İ.N., "A class of congruence subgroups of Hecke group $H(\lambda_5)$", *Bull. Inst. Math. Acad. Sin.*, (N.S.) 1/4, 549, (2006).

[34] Saldık, A., "$H(\lambda_5)$ Hecke grubu ve bazı alt grupları", Yüksek Lisans Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2010).

[35] Uzun, S., "On the normalizer of the congruence subgroups $H_5^0(I)$ of the Hecke group H_5", *Turkish J. Math.*, 31/2, 207, (2007).

[36] Lang, M. L., Lim, C. H., Tan, S. P., "Principal congruence subgroups of the Hecke groups", *J. Number Theory*, 85/2, 220, (2000).