T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMİT SARP

BALIKESİR, HAZİRAN - 2014

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI KİSMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMİT SARP

BALIKESİR, HAZİRAN - 2014

KABUL VE ONAY SAYFASI

Ümit SARP tarafından hazırlanan "**BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİREFANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 10.06.2014 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2014/155 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

BAZI KISMİ TÜREVLİ DİFERANSİYEL DENKLEMLERİN DİFERANSİYEL DÖNÜŞÜM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ VE DİĞER YÖNTEMLERLE KARŞILAŞTIRILMASI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ÜMİT SARP
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
BALIKESİR, HAZİRAN - 2014

Bu tezde, bazı yüksek mertebeden kısmi türevli diferansiyel denklemlerin Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözümü araştırılmış ve diğer sayısal yöntemler ile bulunan sonuçlar karşılaştırılmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; yöntemin ortaya çıkış süreci ve genel bir literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel denklemlerim tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Diferansiyel Dönüşüm Yöntemlerinin tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde; bazı kısmi türevli lineer olmayan diferansiyel denklemler Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla çözülmüş, elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde; tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Diferansiyel dönüşüm yöntemi, diferansiyel denklem, seri çözüm.

ABSTRACT

SOLVING OF SOME PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS BY DIFFERENTIAL TRANSFORM METHOD AND COMPARISON WITH OTHER METHODS
MSC THESIS
ÜMİT SARP
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)
BALIKESİR, JUNE 2014

In this thesis, the numerical solutions of some high order partial differential equations have been analyzed by differential transform method and compared with other numerical methods.

This thesis consist of five chapters. In the first chapter which is the introduction and result of literature is introduced.

In the second chapter, the definition of differential equation are given.

In the third chapter, the definition of Differential Transformation Method and properties are given.

In the fourth chapter, some partial nonlinear differential equation are solved by using Differential Transform Method and this secition are compared with other solutions.

In the fifth chapter, the result of obtained in this thesis are summarized.

KEYWORDS: Differential transform method, differential equation, serial solution.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET I
ABSTRACT II
İÇİNDEKİLER III
ŞEKİL LİSTESİ IV
TABLO LİSTESİ V
SEMBOL LİSTESİ VI
KISALTMALAR LİSTESİ VII
ÖNSÖZ VIII
1. GİRİŞ 1
2. TEMEL KAVRAMLAR 5
3. YÖNTEMLER 7
3.1 Diğer Yöntemler 7
3.1.1 Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM) 7
3.1.2 Adomian Ayrışım Yöntemi (ADM) 8
3.1.3 Homotopy Pertürbasyon Yöntemi (HPM) 9
3.2 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DTM) 10
3.2.1 Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 12
3.2.2 İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 15
3.2.3 Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 16
3.2.4 n - Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi 18
4. BULGULAR VE KARŞILAŞTIRMALAR 19
4.1 “K(2,2) Equation” Çözümü ve Karşılaştırılması 19
4.2 “Caudrey-Dodd-Gibbon Equation” Çözümü ve Karşılaştırmaları 22
4.3 “Sawada-Kotera Equation” Çözümü ve Karşılaştırmaları 28
4.4 Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Çözümü ve Karşılaştırılması 34
4.5 Kısmi türevli “Inviscid-Burger” Denkleminin Çözümü ve Karşılaştırılması 36
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 40
6. KAYNAKLAR 41

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 4.1: K(2,2) d. için DTM k=0,…,10 ve h=0,…,10 adımda çözümü............ 21
Şekil 4.2: Farshad, 2013 K(2,2) d. çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı......... 21
Şekil 4.3: DTM ile CDG denkleminin $u(x,0)=x$ ’deki seri çözümü.................. 25
Şekil 4.4: DTM ile CDG denkleminin $u(x,0)=\frac{15+\sqrt{105}}{30}-\tanh^2(x)$ ’deki seri çözümü 27
Şekil 4.5: VIM ile CDG denkleminin $u(x,0)=\frac{15+\sqrt{105}}{30}-\tanh^2(x)$ ’deki seri çözümü .. 28
Şekil 4.6: DTM ile SK denkleminin $u(x,0)=x$ ’deki seri çözümü 31
Şekil 4.7: SK denklemi için DTM k=0,…,2 ve h=0,…,2 adımda çözümü 33
Şekil 4.8: Biazar’in SK d. çözümünün Taylor-(2,2) seri açılımı........................ 33
Şekil 4.9: (4.18) denklemi için DTM k=0,…,2 ve h=0,…,2 adımda çözümü..... 36
Şekil 4.10: Yanovsky,2005 çözümünün Taylor-(2,2) seri açılımı...................... 36
Şekil 4.11: (4.18) denklemi için DTM k=0,…,6 ve h=0,…,6 adımda çözümü... 36
Şekil 4.12: Yanovsky,2005 çözümünün Taylor-(6,6) seri açılımı...................... 36
Şekil 4.13: Inviscid-Burger d. DTM k=0,…,10 ve h=0,…,10 adımda çözümü... 39
Şekil 4.14: Zwillinger, 1997 çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı................. 39

TABLO LİSTESİ

Sayfa

Table 3.1: Bir değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları 14
Table 3.2: İki değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları 16
Table 3.3: Üç değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları 17

SEMBOL LİSTESİ

D	:	Türev operatörü
F_x	:	F fonksiyonunun x'e göre kısmi türevi
∇	:	nabla diferansiyel operatörü
Δ	:	laplace diferansiyel operatörü
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$w(x)$	:	Bir değişkenli diferansiyel denklem
$W(k)$	:	$w(x)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu
$w(x,y)$	:	İki değişkenli diferansiyel denklem
$W(k,h)$	:	$w(x,y)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu
$w(x,y,t)$	:	Üç değişkenli diferansiyel denklem
$W(k,h,m)$	:	$w(x,y,t)$ 'in diferansiyel dönüşüm fonksiyonu

KISALTMALAR LİSTESİ

DTM **:** Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (*Differential Transform Method)*
VIM **:** Varyasyonel İterasyon Yöntemi (*Variational Iteration Method)*
HPM **:** Homotopy Pertürbasyon Yöntemi (*Homotopy Perturbation Method)*
HAM **:** Homotopy Analiz Yöntemi (*Homotopy Analysis Method)*
CDG **:** Caudrey-Dodd-Gibbon Denklemi
SK **:** Sawada-Kotera Denklemi
KdV **:** Korteweg-de Vries Denklemi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada sadece akademik bilgi ve birikimleriyle değil ayrıca daha birçok alanda her zaman desteğini yanımda hissettiğim danışman hocam Doç. Dr. Sebahattin İKKARDEŞ'e ve tezin hazırlık aşamasında ve daha birçok konuda yardımlarını benden esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Fırat EVİRGEN'e en içten dileklerimle teşekkür ederim. Ayrıca yardımlarından dolayı Merve ÇOLPAN'a çok teşekkür ederim.

Beni yetiştiren, desteklerini hep yanımda hissettiğim aileme de teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler mühendislik ve fizik biliminin hemen hemen her dalında bir problemin ilerlemesi ya da çözülmesi için ortaya çıkar. Bu denklemlerin çözümü için harcanan bilgisayar zamanı, herhangi başka bir problem sınıfını çözmek için harcanan zamandan çok daha fazladır. Kısmi diferansiyel denklemler, birçok problem için analitik olarak çözülemez. Bu nedenle, nümerik yöntemler yaklaşık sonuçların hesaplanmasında çok önemlidir. Sonuç olarak nümerik yöntemler, matematiksel problemlerin çözümü için uygun ve en yakın çözüm veren teknikler geliştirmektedir. **Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (*Differential Transform Method,* DTM)** bu bağlamda ortaya çıkmış yöntemlerden bir tanesidir. Diğer nümerik yöntemlerin aksine daha basit hesaplanabilir işlemler gerektirdiği için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulanabilirlik açısından çok daha verimli bir yöntem olarak kabul edilmektedir. Bilgisayar programlama dillerine uygulanabilirliği yüksek olduğu için matematiksel işlemler içeren bir çok bilgisayar programı da bu yönteme yer vermiştir. Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, çeşitli başlangıç şartları kullanılarak gerçek çözümün Taylor serisine açılımındaki katsayılara ulaşmamızı sağlayan bir yöntemdir ve cebirsel denklemler yardımıyla çözüme ulaşılmaktadır.

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini ilk olarak Zhou (Zhou, 1986) makalesinde tanımlamıştır. Bu makalede elektirik devreleri üzerine lineer ve lineer olmayan başlangıç sınır değer problemleri incelenmiştir. Zhou'nun diferansiyel dönüşüm tanımın ardından, Chen ve arkadaşları (Chen & Ho, 1996) makalelerinde Zhou'nun kullandığı yapıya benzer bir yapı tanımlamış ve öz değer problemlerinin çözümünde Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini kullanmıştır. Chen ve Zhou'nun bu çalışmlarıyla birlikte DTM'nin bilinen yapısı ortaya çıkmaya başlamıştır. Chen ve arkadaşları (Chen & Ho, 1999) makalelerinde lineer olmayan bir diferansiyel deklem çözümü için bu yöntemden yararlanmış ve böylece DTM, diferansiyel deklemlerin çözümü için kullanılmaya başlanmıştır. Jang ve arkadaşları (Jang, et al., 1997) makalelerinde lineer olmayan sönümlü bir sistem tepkisinin analizinde DTM'yi kullanmış ve çözümü Runge-Kutta yöntemi ile karşılaştırmıştır. Jang'ın bu çalışması ile birlikte

DTM'nin sistem çözümleri için de kullanılabileceği sonucu ortaya çıkmış, ayrıca ilk kez başka bir yöntemle karşılaştırıldığı için elde edilen sonuçların verimliliği hakkında fikir yürütülmesine olanak sağlamıştır. İlerleyen çalışmalarla birlikte Chen ve arkadaşları (Chen & Ho, 1999) makalesinde kismi türevli diferansiyel deklemlerin çözümü için iki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemini geliştirmiştir ve böylece kısmi diferansiyel denklemlerin çözümü için de DTM kullanılmaya başlanmıştır. Jang ve arkadaşları (Jang, et al., 2000) makalelerinde başlangıç-değer promleminin çözümü için Diferansiyel Dönüşüm Yöntemini kulanmışlardır. Daha sonra Chen ve arkadaşları (Chen & Liu, 1998) makalelerinde iki değişkene bağlı kısmi diferansiyel denklem çözümleri için farklı denklemlerin dönüşmlerini listeleyerek DTM'de kullanılan döşümlere katkı sağlamışlardır. Hassan ve arkadaşları (Hassan & I., 2002) makalelerinde, Chen'nin ilk makalelerindeki gibi özdeğer problemleri çözümünde DTM kullanmışlardır. Ayrıca aynı yıl yayımlanan bir başka makalede (Hassan & I., 2002) Chen ve Jang'ın ispatladıklarından farklı fonksiyonlar için yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamışlardır. Ayaz (Ayaz, 2003) makalesinde iki boyutlu kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde DTM'yi kullanmış ve iki boyutlu kısmi difransiyel denklemler için yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamıştır. Ayaz (Ayaz, 2004) makalesinde daha önce DTM uygulanmış sistem yapılarından farklı sistem çözümleri için DTM'yi kulanmıştır. Ayaz ve Oturanç (Ayaz & Oturanç, 2004) makalelerinde lineer olmayan Burger Diferansiyel Denklemini DTM ile çözmüşlerdir. Ayaz (Ayaz, 2004) makalesinde daha önceki makalelerindeki dönüşüm fonksiyonlarına ek olarak yeni dönüşüm yapıları ispatlamıştır. Arıkoğlu ve Özkol (Arikoglu & Ozkol, 2005) makalelerinde integral içeren lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler için DTM'yi kullanmış ve bu sayede içerisinde integral yapıları da olan yeni dönüşüm fonksiyonları tanımlamışlardır. Kurnaz ve arkadaşları (Kurnaz, et al., 2005) makalelerinde *n* boyutlu DTM'yi tanımlamışlardır ve bu makale ile birlikte *n.* mertebeden bir diferansiyel denkleminde DTM ile çözülebileceği sonucu ortaya çıkmıştır. Kurnaz ve Oturanç (Kurnaz & Oturanç, 2005) makalelerinde adi diferansiyel denklemler içeren sistem çözümleri için DTM kullanmışlardır. Bildik ve arkadaşları (Bildik, et al., 2006) makalesinde bazı kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünü hem DTM ile hem de Adomian Ayrışım Yöntemiyle çözmüş ve sonuçlarını karşılaştırmıştır. Arıkoğlu ve Özkol (Arikoglu & Ozkol, 2006) makalelerinde diferansiyel fark denklemleri için Difeansiyel Dönüşüm yapısını tanımlamış, sonuçları Taylor Polinomları yaklaşımıyla karşılaştırmşılardır. Momani ve arkadaşları (Momani, et al., 2007) makalelerinde kesirli diferansiyel denklemlerin çözümü için DTM'yi kullanmışlardır. Keskin ve arkadaşları (Keskin, et al., 2007) makalelerinde genelleştirilmiş pantograph denklemlerini DTM ile çözmüştür. (Karakoç & Bereketoğlu, 2009) gecikmeli diferansiyel denklemler için DTM yapısına uygun yeni dönüşümler tanımlamış, lineer ve lineer olmayan bazı gecikmeli diferansiyel denklemleri DTM ile çözülmüştür. Keskin ve arkadaşları (Keskin & Oturanç, 2009) makalelerinde indigenmiş diferansiyel dönüşüm yöntemini tanımlamışlar ve iki değişkenli diferansiyel denklemleri bir değişkenli diferansiyel denklemlere indirgeyerek çözüme ulaşmışlardır. Tüm bu çalışmalar göstermektedir ki DTM; sistem, diferansiyel denklem, fark denklemleri, gecikmeli diferansiyel denklemler ve daha birçok denklem yapısı için çözüm olanağı sağlamaktadır. Literatürde DTM ile ilgili birçok makale ve tez bulunabilir.

Son olarak DTM "**Adomians Decomposition Method**" , "**Homotopy Perturbation Method**" , "**Homotopy Analysis Method**" , "**Variational Iteration Method**" v.b. yöntemlerle hibrit edilebilen ve çok daha iyi sonuçlara ulaşabilmeze olanak sağlayan bir yöntemdir.

Bu çalışmada, çözümü yaklaşık yollarla hesaplanmış bazı kismi türevli diferansiyel denklemlerin, DTM ile çözümü araştırılmıştır. Mühendislik ve fizik alanlarında kullanımı yaygın olan varlık araştırmasına ihtiyaç duymacağımız bu denklemler aşağıdaki gibidir;

1-Caudrey-Dodd-Gibbon Equation

2-Sawada-Kotera Equation

3- Korteweg-de Vries Equation

4- Inviscid-Burger Equation

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; yöntemin ortaya çıkış süreci ve genel bir literatür özetine yer verilmiştir.

İkinci bölümde; diferansiyel denklemlerim tanımı verilmiştir.

Üçüncü bölümde; Diferansiyel Dönüşüm Yöntemlerinin tanımı ve özelliklerine yer verilmiştir.

Dördüncü bölümde; bazı kısmi türevli lineer olmayan diferansiyel denklemler Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi yardımıyla çözülmüş, elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

Beşinci bölümde; tezde elde edilen sonuçlar özetlenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Tanım Bir bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini içeren bir denkleme, diferansiyel denklem denir.

2.1 Örnek Aşağıdaki denklemler, y bilinmeyen fonksiyonunu içeren diferansiyel denklemlerdir.

$$\frac{dy}{dx} = 8x + 5 \tag{2.1}$$

$$5\frac{d^2y}{dx^2} = (\cos x)\frac{dy}{dx} + 21xy^2 \tag{2.2}$$

2.2 Tanım Eğer bilinmeyen fonksiyon sadece bir bağımsız değişkene bağlı ise bu diferansiyel denkleme "adi diferansiyel denklem" denir.

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$$

şeklinde gösterilir.

2.2 Örnek Aşağıdaki denklemler adi diferansiyel denklemlerdir.

$$\frac{dy}{dx} = \cos x \tag{2.3}$$

$$y' + y = e^{-x} \tag{2.4}$$

şeklinde gösterilir.

2.3 Tanım Eğer bilinmeyen fonksiyon iki veya daha fazla bağımsız değişkene bağlı ise bu diferansiyel denklemlere "kısmi diferansiyel denklemler" denir.

Kısmı diferansiyel denklemlerin birçok çeşidi ve sınıflaması vardır. Biz bu çalışmada iki değişkene bağlı diferansiyel denklemler ile işlemler yapacağımızdan dolayı ikinci mertebeden kısmî diferansiyel denklemlerin tanımıyla devam edelim.

2.4 Tanım A, B, C, H ve u, x ve y bağımsız değişkenlerinin herhangi bir fonksiyonu olmak üzere $u(x,y)$ 'nin kısmi türevlerini içeren aşağıdaki denklemine

$$A\frac{\partial u^2}{\partial x^2}+B\frac{\partial u^2}{\partial x\partial x}+C\frac{\partial u^2}{\partial y^2}+f(x,y,u,\partial u/\partial x,\partial u/\partial y)=H(x,y) \qquad (2.5)$$

"ikinci mertebe kısmî diferansiyel denklem" denir.

İkinci mertebeden iki değişkene bağlı kısmî diferansiyel denklemler parabolik, eliptik ve hiperbolik olmak üzere üç kategoride incelenir.

2.5 Tanım Genel olarak "potansiyel adı verilen bir büyüklüğün bölge içindeki değişimini temsil eden denklemlere Eliptik Denklemler denir.

2.6 Tanım Potansiyelin bir başlangıç durumundan itibaren eriştiği daimi durum değerleri gösteren denklemlere Parabolik Denklemler denir. Bu yüzden bu denklemlerin bağımsız değişkenlerinden biri t-zaman değişkenidir.

2.7 Tanım Dalgaların nasıl yayıldığını ifade etmek için kullanılan denklemleri ifade eden yapılara da Hiperbolik Denklemler denir. Parabolik denklemler gibi Hiperbolik Denklemler de bağımsız değişkenlerinden biri t-zaman değişkenidir.

Diferansiyel denklemin, hangi sınıfta yer alan bir denklem olduğunu bulmak için (2.5) denklem kullanılarak aşağıdaki sınama yapılabilir;

$$\begin{array}{ll} B^2-4AC<0 & \quad eliptik \\ B^2-4AC=0 & \quad parabolik \\ B^2-4AC>0 & \quad hiperbolik \end{array}$$

(2.5) denkleminde sınır koşulu; u cinsiden verilmiş ise bu diferansiyel denkleme **Dirichlet tipi,** u'nun türevleri cinsiden verilmiş ise **Neuman tipi,** bu ikisi cinsiden verilmiş ise **Karışık tipte** diferansiyel denklem denir.

3. YÖNTEMLER

Diferansiyel deklemleri çözmek için birçok nümerik ve analitik yöntem kullanılmaktadır. Bu bölümde iki ana başlıkta sık kullanılan diğer yöntemler ve Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi açıklanmıştır.

3.1 Diğer Yöntemler

Bu bölümde 4. Bölüm'de yer alan Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözülmüş diferansiyel denklemlerin karşılaştırıldığı yöntemlere kısaca yer verilmiştir.

3.1.1 Varyasyonel İterasyon Yöntemi (VIM)

3.1.1.1 Tanım Varyasyonel İterasyon Yöntemi (Variational Iteration Method, VIM) uygulanmasında aşağıdaki temel denklem ele alınır;

$$Lu + Nu = g(x) \tag{3.1}$$

Burada yer alan L lineer operatör, N lineer olmayan operatör ve $g(x)$ homojen olmayan terimlerdir. (3.1) denkleminden yararlanılarak aşağıdaki denklem elde edilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) + \int_0^x \lambda\{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\}d\xi \tag{3.2}$$

Burada yer alan λ hesaplanabilir genel Lagrange çarpanıdır, $\int_0^x \lambda\{Lu_n(\xi) + N\tilde{u}_n(\xi) - g(\xi)\}d\xi$ integrali düzeltme olarak adlandırılır ve $\tilde{u}_n$ nın sınırlanmış bir varyasyonu olarak kabul edilir. Başlangıç koşulu u_0 olarak seçilerek başlanır ve diğer adımlar bulunarak işlem devam eder. Elde edilen u_n ler toplandığında seri çözüm ortaya çıkmış olur. Bu yönteme Varyasyonel İterasyon Yöntemi denir, (He, 1997) .

3.1.2 Adomian Ayrışım Yöntemi (ADM)

3.1.2.1 Tanım Adomian Ayrışım Yöntemi (Adomian Decomposition Method, ADM) uygulanmasında aşağıdaki temel denklem ele alınır. F hem lineer hem de lineer olmayan terimleri içeren adi diferansiyel operatör olmak üzere;

$$Fu(x) = g(x) \tag{3.3}$$

denkemi ele alınsın. (3.3) denklemi lineer olan ve olmayan terimlerine ayrıştırılırsa,

$$Lu + Nu = g \tag{3.4}$$

şeklinde yazılır. Burada yer alan L verilen diferansiyel denklemin en yüksek mertebeden türevi, N lineer olmayan terim ve R lineer operatörün kalan kısmı olarak ifade edilir. L lineer ve terslenebilir bir operatördür. Bu durumda;

$$Lu = g - Ru - Nu \tag{3.5}$$

(3.5) eşitliğinin her iki tarafına L^{-1} operatörü sol taraftan uygulanırsa,

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.6}$$

eşitliği elde edilir. L operatörünün ikinci mertebeden ve tersi mevcut olan lineer bir operatör olduğu kabul edilsin. Bu durumda (3.6) eşitliği;

$$u = u(0) + tu(0) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.7) denkleminde Nu lineer olmayan terimleri,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.8}$$

olarak gösterilir. Burada yer alan A_n pollinomları özel polinomlardır ve Adomian Polinomları olarak adlandırılır. Bu polinomlar ile ilgili bilgileri daha detaylı bir şekilde Adomian'ın (Adomian, 1990) makalesinde incelemek mümkündür.

(3.7) eşitliğindeki u ayrıştırılmış bir seri çözüm fonksiyonudur. Bu seri çözüm fonksiyonun birinci terimi olan u_0, verilen başlangıç değeridir. Bu değer denklemin sağ taraf fonksiyonunun integrali alınmak üzere,

$$u_0 = a + bt - L^{-1}g \tag{3.9}$$

şeklinde bulunur.

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu serinin yakınsak olduğu düşünülecek olursa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{3.10}$$

şeklinde elde edilir. (3.10) eşitliğinden yararlanılarak,

$$\begin{aligned} u_1 &= -L^{-1}Ru_0 - L^{-1}A_0 \\ u_2 &= -L^{-1}Ru_1 - L^{-1}A_1 \\ &\vdots \\ u_{n+1} &= -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \,, n \geq 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

seri çözüm elde edilir. Bu yönteme Adomian Ayrışım Yöntemi denir, (Adomian, 1990) .

3.1.3 Homotopy Pertürbasyon Yöntemi (HPM)

3.1.3.1 Tanım Pertürbasyon teorisi ve topolojinin temel kavramlarında biri olan homotopi kavaramını birleştirerek, diferansiyel deklemlerin seri çözümünü araştıran bir yöntemdir. Homotopi Pertürbasyon Yönteminin incelediği denklem yapıları Ω bir bölge olmak üzere;

$$\begin{aligned} &A\left[u\left(\vec{r}\right)\right] - f\left(\vec{r}\right) = 0, \qquad && \vec{r} \in \Omega \\ &B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, && \vec{r} \in \Gamma \end{aligned} \tag{3.12}$$

şeklindedir. (3.12) esitliginde A lineer ve lineer olmayan operatör; B sınır operatörü; Γ; Ω bölgesinin sınırı ve $f\left(\vec{r}\right)$ bilinen analitik bir fonksiyondur. A operatörü L , lineer, N lineer olmayan operatörler şeklinde $A = L + N$ olarak parçalanır.

$p \in [0,1]$ ve $u_0 f\left(\vec{r}\right)$, (3.12) denkleminin sınır koşullarını sağlayan başlangıç değeri ve $v \in \mathbb{R}$ olmak üzere $H(v(\vec{r};p);p) = 0$ homotopisi;

$$\begin{aligned} &H : R\,x\,[0,1] \to R \\ &H(v;p) = (1-p)\left\{L\left[v(\vec{r};p)\right] - L\left[u_0(\vec{r})\right]\right\} + p\left\{A\left[v(\vec{r};p)\right] - f(\vec{r})\right\} = 0 \end{aligned} \tag{3.13}$$

olarak tanımlanır. (3.13) denkleminde,

$$p = 0 \Rightarrow L\left[v(\vec{r};0)\right] - L\left[u_0(\vec{r})\right] = 0 \tag{3.14}$$

$$p = 1 \Rightarrow A\left[v(\vec{r};p)\right] - f(\vec{r}) = 0 \tag{3.15}$$

olarak bulunur. Burada aranan çözüm $p = 1$ için sağlanmaktadır. Bu durumda p parematresi 0 'dan 1'e doğru değiştikçe $u_0(\vec{r})$ da, $u(\vec{r})$ 'ye doğru değişmektedir. p paremetresi $[0,1]$ aralığında pertürbasyon açılımı uygulanırsa,

$$v(\vec{r};p) = p^0 v_0(\vec{r};p) + p^1 v_1(\vec{r};p) + p^2 v_2(\vec{r};p) + \ldots = \sum_{i=0}^{n} p^i v_i(\vec{r};p) \tag{3.16}$$

biçimide yazılır. (3.15) denklemini $p = 1$ çözümü yaklaşık bir seri çözümü verir, bu durumda $u(\vec{r})$ 'nin çözümü;

$$u(\vec{r}) = \lim_{p\to 1} v(\vec{r};p) = \lim_{p\to 1}\left(p^0 v_0(\vec{r};p) + p^1 v_1(\vec{r};p) + p^2 v_2(\vec{r};p) + \ldots\right) \tag{3.17}$$

olarak bulunur. Bu yönteme Homotopi Pertürbasyon Yöntemi denir, (He, 1999).

3.2 Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (DTM)

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi (Differential Transform Method, DTM); özdeğer problemleri, lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler ve sistem çözümleri için kullanılabilmektedir.

DTM, bir boyutlu, iki boyutlu, üç boyutlu ve n boyutlu olmak üzere dört farklı grupta incelenir. Bu çalışmada iki boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi, kısmi türevli lineer olmayan yüksek mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılmıştır.

DTM kullanılırken; Taylor serisi, Taylor serisinin kısmi toplamlar dizisi, diferansiyel operatör ve diferansiyel operatör özelliklerinden yararlanılmıştır.

3.2.1 Tanım Türev operatörünün fonksiyon hali olarak tanımlanan yapıya Diferansiyel operatörü denir ve

$$\frac{d}{dx} = D = D_x \tag{3.18}$$

şeklinde gösterilir.

$n.$ mertebeden diferansiyel operatör;

$$\frac{d^n}{dx^n} = x^{(n)} = D^n x \tag{3.19}$$

şeklinde tanımlanır. (Branson, 2009)

Diferansiyel operatörün bazı temel özellikleri;

1) $Dy(x) = y'(x)$

2) $D^2 y(x) = D(Dy(x)) = Dy'(x) = y''(x)$

3) $D^n y(x) = y^{(n)}(x)$

4) $\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$ nabla diferansiyel operatörü

5) $\Delta = \nabla.\nabla = \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ Laplace diferansiyel operatörü

6) α keyfi sabit $\frac{d}{dx}(u(x) \pm \alpha v(x)) = \frac{d}{dx}(u(x)) \pm \alpha \frac{d}{dx}(v(x))$

3.2.2 Tanım $f(x)$, α 'yı bir iç nokta olarak kabul eden ve açık bir aralıkta her mertebeden türevi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \\ &= f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n + \ldots \end{aligned} \tag{3.20}$$

serisine $f(x)$ 'in $x = \alpha$ noktasındaki Taylor Serisi denir. (George & Thomas, 2010)

3.2.3 Tanım $f(x)$ fonksiyonunun, $x = 0$ noktasındaki Taylor Serisi açılımına $f(x)$ fonksiyonunun Maclaurin Serisi denir ve

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \\
&= f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)}{2!}(x)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + \ldots
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

şeklinde gösterilir. (George & Thomas, 2010)

3.2.4 Tanım $f(x,y)$ ve $f(x,y)$ 'nin $(n+1)$ inci mertebeye kadar kısmi türevleri, merkezi (a,b) ’de olan bir R açık yuvarda sürekli olsunlar. Bu durumda, R’de,

$$
\begin{aligned}
f(a+h,b+k) = {} & f(a,b) + (hf_x + kf_y)\big|_{(a,b)} + \frac{1}{2!}(h^2 f_{xx} + 2hkf_{xy} + k^2 f_{yy})\big|_{(a,b)} + \\
& \frac{1}{3!}(h^3 f_{xxx} + 3h^2kf_{xxy} + 3hk^2 f_{xyy} + k^3 f_{yyy})\big|_{(a,b)} + \ldots + \\
& \frac{1}{n!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^n f\,\big|_{(a,b)} + \frac{1}{(n+1)!}(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f\,\big|_{(a+ch,b+ck)}
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

serisine $f(x,y)$ ’in (a,b) noktasındaki Taylor Serisi denir. (George & Thomas, 2010)

3.2.5 Tanım $f(x)$ fonksiyonunun, $x=0$ noktasındaki Taylor serisi açılımının kısmi toplamlar dizisi;

$$
f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(\alpha)}{k!}(x-\alpha)^k \tag{3.23}
$$

şeklinde tanımlanır. $f_n(x)$ ’e $f(x)$ ’in α civarında *n.* dereceden Taylor Polinomu denir. (George & Thomas, 2010).

3.2.1 Bir Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Bir boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi, bir değişken içerdiği için adi diferansiyel denklemlerin ve adi diferansiyel denklem sistemlerinin çözümü için kullanılabilir.

3.2.1.1 Tanım $w(x)$ fonksiyonunun diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k)$ olmak üzere;

$$W(k)=\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0} \tag{3.24}$$

şeklinde tanımlanır. $W(k)$ fnksiyonuna $w(x)$'in dönüşüm fonksiyonu denir, (Chen & Ho, 1996).

3.2.1.2 Tanım $W(k)$'nın diferansiyel ters dönüşümü;

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}W(k)x^k \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanır, (Chen & Ho, 1996).

3.2.1.2 Tanım (3.25) eşitliğinde (3.24) eşitliği yerine yazılarak

$$w(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left[\frac{d^k}{dx^k}w(x)\right]_{x=0}x^k \tag{3.26}$$

eşitliği elde edilir. (3.26) denklemine Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi denir, (Chen & Ho, 1996).

(3.26) de yer alan eşitlik Taylor Serisini genişlemesinden yola çıkılarak elde edilmiştir.

(3.24) ve (3.25) eşitliklerinden işlemlerinden yararlanılarak Tablo 3.1 dönüşüm fonksiyonlarını elde edilir.

Fonksiyon	Dönüşüm Fonksiyonu	
$w(x)=y(x)+z(x)$	$W(k)=Y(k)\pm Z(k)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\lambda y(x)$	$W(k)=\lambda Y(k)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=y(x)z(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k} Y(r)Z(k-r)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\frac{dy(x)}{dx}$	$W(k)=(k+1)Y(k+1)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=x^m$	$W(k)=\delta(k-m)=\begin{cases}1, & k=m\\ 0, & k\neq m\end{cases}$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=e^{\lambda x}$	$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}$	(Hassan & I., 2002)
$w(x)=\sin(\omega x+\alpha)$	$W(k)=\frac{\omega^k}{k!}\sin(\frac{\pi k}{2}+\alpha)$	(Hassan & I., 2002)
$w(x)=\cos(\omega x+\alpha)$	$W(k)=\frac{\omega^k}{k!}\cos(\frac{\pi k}{2}+\alpha)$	(Hassan & I., 2002)
$w(x)=\int_{x_0}^{x} u(x)dx$	$W(k)=\frac{U(k-1)}{k}, k\geq 1$	(Arikoglu & Ozkol, 2006)
$w(x)=\frac{d^m y(x)}{dx^m}$	$W(k)=(k+1)(k+2)...(k+m)U(k+m)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=u(x)\frac{d^2}{dx^2}v(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(k-r+2)(k-r+1)U(r)V(k-r+2)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\frac{d}{dx}u(x)\frac{d}{dx}v(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}(r+1)(k-r+1)U(r+1)V(k-r+1)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=u(x)v(x)s(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}U(r)V(t)S(k-r-t)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=u(x)v(x)\frac{d^2}{dx^2}s(x)$	$W(k)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}(k-r-t+2)^2U(r)V(t)S(k-r-t+2)$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\omega^{\lambda x}$	$W(k)=\frac{\lambda^k(\ln\omega)^k}{k!}$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=e^{\lambda x+b}$	$W(k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^b$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=sh(\lambda x)$	$W(k)=\begin{cases}\frac{\lambda^k}{k!}, & k\ tek\ ise\\ 0, & k\ çift\ ise\end{cases}$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=ch(\lambda x)$	$W(k)=\begin{cases}0, & k\ tek\ ise\\ \frac{\lambda^k}{k!}, & k\ çift\ ise\end{cases}$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$W(k)=\frac{1}{G(0)}\left[F(k)-\sum_{m=0}^{k-1}H(m)G(k-m)\right]$	(Chen & Ho, 1996)
$w(x)=\left[g(x)\right]^b$	$W(k)=\begin{cases}G(0), & k=0\\ \sum_{m=0}^{k}\frac{(b+1)m-k}{kG(0)}G(m)W(k-m), & k\geq 1\end{cases}$	(Chen & Ho, 1996)

Table 3.1: Bir değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları

3.2.2 İki Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

İki boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi, x, y değikenler olmak üzere iki değişken içerdiği için iki değikene bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için kullanılabilir.

3.2.2.1 Tanım $w(x, y)$ fonksiyonunun iki değişkene bağlı diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k, h)$ olmak üzere;

$$W(k,h) = \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} \quad (3.27)$$

şeklinde tanımlanır. $W(k, h)$ fonksiyonuna $w(x, y)$ ’in dönüşüm fonksiyonu denir, (Zhou, 1986).

3.2.2.2 Tanım $W(k, h)$ 'nın diferansiyel ters dönüşümü;

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} W(k,h) x^k y^h \quad (3.28)$$

şeklinde tanımlanır, (Zhou, 1986).

3.2.2.3 Tanım (3.28) eşitliğinde (3.27) eşitliği yerine yazılarak aşağıdaki

$$w(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!}\left[\frac{\partial^{k+h}}{\partial x^k \partial y^h} w(x,y)\right]_{\substack{x=0\\ y=0}} x^k y^h \quad (3.29)$$

eşitliği elde edilir. (3.29) denklemine iki değişkenli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi denir, (Zhou, 1986).

(3.27) ve (3.28) eşitliklerinden yararlanılarak Tablo 3.2 deki dönüşüm fonksiyonlarını elde edilir.

Fonksiyon	**Dönüşüm Fonksiyonu**	
$w(x,y)=u(x,y)\pm v(x,y)$	$W(k,h)=U(k,h)\pm V(k,h)$	(Zhou, 1986)
$w(x,y)=\alpha u(x,y)$	$W(k,h)=\alpha U(k,h)$	(Zhou, 1986)
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}$	$W(k,h)=(k+1)U(k+1,h)$	(Zhou, 1986)
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}$	$W(k,h)=(h+1)U(k,h+1)$	(Zhou, 1986)
w(x,y)=u(x,y)v(x,y)	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{i=1}^{h}U(r,h-s)V(k-r,s)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=x^m y^n$	$W(k,h)=\delta(k-m,h-n)=\delta(k-m)\delta(h-n)=\begin{cases}1, & k=m,h=n\\ 0, & aksi\ halde\end{cases}$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial x}$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+1)U(r+1,h-s)V(k-r+1,s)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial y}\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(s+1)(h-s+1)U(r,h-s+1)V(k-r,s+1)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}\dfrac{\partial v(x,y)}{\partial y}$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s)V(r,h-s+1)$	(Ayaz, 2003)
w(x,y)=u(x,y)v(x,y)z(x,y)	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}U(r,h-s-p)V(t,s)Z(k-r-t,p)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=u(x,y)\dfrac{\partial^2 v(x,y)}{\partial x^2}$	$W(k,h)=\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)V(k-r+2,s)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=\dfrac{\partial^{(r+s)}u(x,y)}{\partial x^r\partial y^s}$	$W(k,h)=(k+1)(k+2)...(k+r)(h+1)(h+2)...(h+s)U(k+r,h+s)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=x^m e^{at}$	$W(k,h)=\dfrac{a^h}{h!}\delta(k-m)$	(Ayaz, 2003)
$w(x,y)=e^{y-x}$	$W(k,h)=\dfrac{1^h}{h!}\dfrac{(-1)^k}{k!}$	(Ayaz, 2003)
w(x,y)=x	$W(k,h)=\delta(k-1)$	(Ayaz, 2003)

Table 3.2: İki değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları

3.2.3 Üç Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

Üç boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi, x, y, t değişkenler olmak üzere üç değişken içerdiği için üç değikene bağlı kısmi türevli diferansiyel denklemlerin ve denklem sistemlerinin çözümü için kullanılabilir.

3.2.3.1 Tanım $w(x, y, t)$ fonksiyonunun iki değişkene bağlı diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k, h, m)$ olmak üzere;

$$W(k,h,m)=\frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial y^m} w(x,y,t)\right]_{x=0,y=0,t=0} \tag{3.30}$$

şeklinde tanımlanır. $W(k,h,m)$ fonksiyonuna $w(x,y,t)$ 'in dönüşüm fonksiyonu denir, (Ayaz, 2004).

3.2.3.2 Tanım $W(k,h,m)$'nın diferansiyel ters dönüşümü;

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} W(k,h,m)x^k y^h t^m \tag{3.31}$$

şeklinde tanımlanır, (Ayaz, 2004).

3.2.3.3 Tanım İki boyutlu DTM'de olduğu gibi (3.31) eşitliğinde (3.30) eşitliği yerine yazılarak

$$w(x,y,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{k!h!m!}\left[\frac{\partial^{k+h+m}}{\partial x^k \partial y^h \partial y^m} w(x,y,t)\right]_{x=0,y=0,t=0} x^k y^h t^m \tag{3.32}$$

eşitliği elde edilir. (3.32) denklemine iki değişkenli Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi denir, (Ayaz, 2004).

(3.30) ve (3.31) eşitliklerinden yararlanılarak Tablo 3.3 deki dönüşüm fonksiyonlarını elde edilir.

Fonksiyon	**Dönüşüm Fonksiyonu**	
$w(x,y,t)=u(x,y,t)\pm v(x,y,t)$	$W(k,h,m)=U(k,h,m)\pm V(k,h,m)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\alpha u(x,y,t)$	$W(k,h,m)=\alpha U(k,h,m)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}$	$W(k,h,m)=(k+1)U(k+1,h,m)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}$	$W(k,h,m)=(h+1)U(k,h+1,m)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}$	$W(k,h,m)=(m+1)U(k,h,m+1)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\frac{\partial^{(r+s+p)}u(x,y,t)}{\partial x^r \partial y^s \partial y^t}$	$W(k,h,m)=\frac{(k+r)!}{k!}\frac{(h+s)!}{k!}\frac{(m+p)!}{k!}U(k+r,h+s,m+p)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=u(x,y,t)v(x,y,t)$	$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} U(r,h-s,m-p)V(k-r,s,p)$	(Ayaz, 2004)
$w(x,y,t)=\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\frac{\partial v(x,y,t)}{\partial y}$	$\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{m} (k-r+1)(h-s+1)U(k-r+1,s,p)V(r,h-s+1,m-p)$	(Ayaz, 2004)

Table 3.3: Üç değişken için DTM dönüşüm fonksiyonları

3.2.4 n - Boyutlu Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi

n - boyutlu diferansiyel dönüşüm yöntemi, n tane değişkene bağlı olarak, iki ve üç boyutlu DTM gibi genellenebilir, bu sayade yüksek mertbeden n değişkenli kısmi türevli denklemlerin ve sistemlerin çözümü için kullanılabilir.

3.2.4.1 Tanım $w(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ fonksiyonunun n değişkene bağlı diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $W(k_1, k_2, k_3, ..., k_n)$ olmak üzere;

$$W(k_1, k_2, k_3, ..., k_n) = \frac{1}{k_1!k_2!k_3!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+k_2+k_3+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}\partial x_2^{k_2}\partial x_3^{k_3}...\partial x_n^{k_n}} w(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)\right]_{x_{1,2,...,n}=0} \quad (3.33)$$

şeklinde tanımlanır. $W(k_1, k_2, k_3, ..., k_n)$ fonksiyonuna $w(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ 'in dönüşüm fonksiyonu denir, (Kurnaz, et al., 2005).

3.2.4.2 Tanım $W(k, h, m)$ 'nın diferansiyel ters dönüşümü;

$$w(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty} W(k_1, k_2, k_3, ..., k_n) x_1^{k_1} x_2^{k_2} x_3^{k_3} ... x_n^{k_n} \quad (3.34)$$

şeklinde tanımlanır, (Kurnaz, et al., 2005).

3.2.4.3 Tanım İki ve üç boyutlu DTM'de olduğu gibi (3.34) eşitliğinde (3.33) eşitliği yerine yazılarak aşağıdaki

$$w(x_1, ..., x_n) = \sum_{k_1=0}^{\infty}...\sum_{k_n=0}^{\infty}\frac{1}{k_1!...k_n!}\left[\frac{\partial^{k_1+...+k_n}}{\partial x_1^{k_1}...\partial x_n^{k_n}} w(x_1, ..., x_n)\right]_{x_{1,...,n}=0} x_1^{k_1}... x_n^{k_n} \quad (3.35)$$

eşitliği elde edilir, (Kurnaz, et al., 2005).

4. BULGULAR VE KARŞILAŞTIRMALAR

Bu bölümde, daha önce farklı yöntemlerle çözülmüş ya da nümerik iterasyonlar dışında çözümlenmemiş kısmi türevli diferansiyel denklemlerin, DTM ile belirli adımlarda çözümleri araştırılmış ve elde edilen sonuçlar diğer yöntemlerle elde edilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır.

4.1 "K(2,2) Equation" Çözümü ve Karşılaştırılması

4.1.1 Tanım Üçüncü mertebeden

$$u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0 \tag{4.1}$$

kısmı türevli diferansiyel denkleminine K(2,2) diferansiyel denklemi denir.

(4,1) denklemi; kuantum mekaniği, dalga hesapları, lazer optiği, plazma fiziği ve daha birçok mühendislik ve fizik alanlarında önemli rol oynadığını bilinen bir denklemdir. (Farshad , et al., 2013) iteratif bir yöntem kullanarak çeşitli başlangıç şartlarıyla sonuçlar elde etmişlerdir. Bu çalışmada bir başlangıç şartıyla çözüm araştırılmış ardından (Farshad , et al., 2013) çözümü ile DTM ile bulunan çözümler karşılaştırılmıştır.

4.1.1 Örnek

$$\begin{aligned} &u_t + (u^2)_x + (u^2)_{xxx} = 0 \\ &\textit{başlangıç koşulu}, \quad u(x,0) = x \end{aligned} \tag{4.2}$$

Üstlü ifadeleri açtığımızda lineer olmayan $u_t + 2uu_x + 6u_x u_{xx} + 6uu_{xxx} = 0$ denkleminin, $u(x,0) = x$ başlangıç şartını kullanarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözümü; $u(x,t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere Tablo 3.2'deki dönüşümlerden yardımıyla;

$$
\begin{aligned}
&(h+1)U(k,h+1) \\
&+2\sum_{r=0}^{k}\left(\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+1,s)\right) \\
&+6\sum_{r=0}^{k}\left(\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)u(r+1,h-s)u(k-r+2,s)\right) \\
&+6\sum_{r=0}^{k}\left(\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)u(r,h-s)u(k-r+3,s)\right)
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

şeklinde yazılabilir.

$u(x,0)=x$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$x = 0 + x + 0 + 0 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k$$

$$
\left.\begin{aligned}
U(0,0) &= 0 \\
U(1,0) &= 1 \\
&\vdots \\
U(n,0) &= 0
\end{aligned}\right\} \quad bu \;\; durumda \quad U(k,0) = \begin{cases} 1 & k=1, \\ 0 & aksi \;\; halde \end{cases}
$$

$U(1,1)$ adımının değerini bulmak için (4.3) denkleminde $k=1, h=0$ alınırsa;

$$
\begin{aligned}
&U(1,1) + 4u(0,0)U(2,0) + 2\big(U(1,0)\big)^2 \\
&+72U(1,0)U(3,0) + 24\big(U(2,0)\big)^2 + 144U(0,0)U(4,0) = 0
\end{aligned} \tag{4.4}
$$

(4.4) denkleminde $U(k,0)$ değerleri sırasıyla yerine yazılırsa;

$$U(1,1) + 2 \;=\; 0 \tag{4.5}$$

değeri bulunur. Benzer işlemler $k = 0,\ldots,6 \;\; ve \;\; h = 0,\ldots,6$ için tekrarlandığında

$$
\begin{aligned}
&U(0,1) + 2U(0,0)U(1,0) + 12U(1,0)U(2,0) + 36U(0,0)U(3,0) = 0 \\
&2U(0,2) + 2U(0,1)U(1,0) + 2U(0,0)U(1,1) + 12U(1,1)U(2,0) \\
&+12U(1,0)U(2,1) + 36U(0,1)U(3,0) + 36U(0,0)U(3,1) = 0 \\
&U(1,1) + 4U(0,0)U(2,0) + 2\big(U(1,0)\big)^2 + 72U(1,0)U(3,0) \\
&+24\big(U(2,0)\big)^2 + 144U(0,0)U(4,0) = 0 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

şeklinde devam eder, $U(k,h)$ değerleri, Maple yardımıyla yerine yazılırsa istenen seri çözüm;

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{10}\sum_{h=0}^{10} U(k,t)x^k t^h$$
$$u(x,t) = x\left(1-2t+4t^2-8t^3+16t^4-32t^5+64t^6+\ldots\right)$$

Bulduğumuz sonucu (4.2) diferansiyel denkleminin Farshad'ın (Farshad , et al., 2013) makalesindeki çözümünün seri açılımıyla karşılaştıralım;

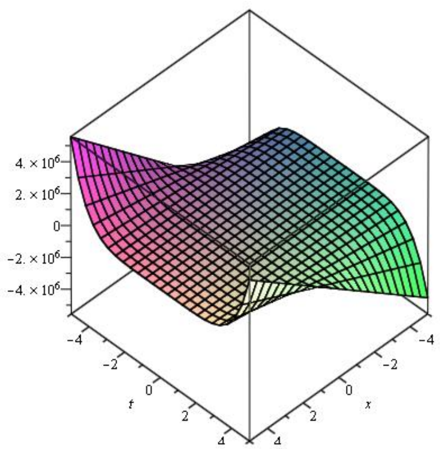
Farshad'ın (Farshad , et al., 2013) makalesindeki çözümü;

$$u(x,t) = \frac{x}{1+2t}$$

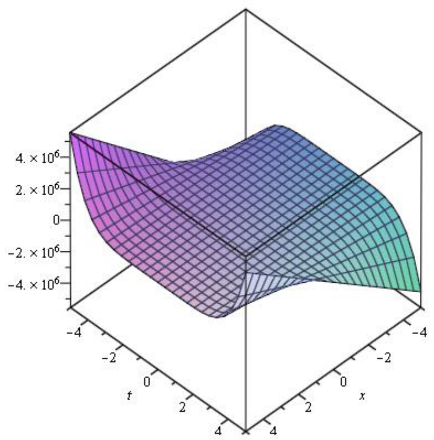
Farshad'ın (Farshad , et al., 2013) makalesindeki çözümünün Taylor Seri açılımı;

$$u(x,t) = x\left(1-2t+4t^2-8t^3+16t^4-32t^5+64t^6+\ldots\right)$$

biçimindedir. Aşağıda DTM k=0,…,10 ve h=0,…,10 ve (Farshad , et al., 2013)'ın çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı şartları altında grafiği verilmiştir.



Şekil 4.1: K(2,2) d. için DTM k=0,…,10 ve h=0,…,10 adımda çözümü



Şekil 4.2: Farshad, 2013 K(2,2) d. çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı

Buradan anlaşılacağı üzere birinci mertebeden lineer olmayan (4.2) diferansiyel denklemin DTM ile çözümünden elde edilen sonuçlar, (Farshad , et al., 2013)'nin çözüm ile aynıdır.

4.2 “Caudrey-Dodd-Gibbon Equation” Çözümü ve Karşılaştırmaları

4.2.1 Tanım α,β,γ ve ω keyfi değişkenler olmak üzere,

$$u_t+\omega u_{xxxxx}+\alpha u u_{xxx}+\beta u_x u_{xx}+\gamma u^2 u_x=0 \quad (4.6)$$

kısmı türevli diferansiyel denklemine, beşinci mertebe Korteweg–de Vries (KdV) kısmı türevli diferansiyel denklemi denir.

4.2.2 Tanım (4.6) daki keyfi değişkenler $\alpha=30,\beta=30,\gamma=180$ ve $\omega=1$ olarak seçilirse aşağıdaki denklem elde edilir.

$$u_t+u_{xxxxx}+30u u_{xxx}+30u_x u_{xx}+180u^2 u_x=0 \quad (4.7)$$

(4.7) denklemine Caudrey-Dodd-Gibbon diferansiyel denklemi denir, (Caudrey, et al., 1976).

Caudrey-Dodd-Gibbon diferansiyel denklemi, lazer optiği ve plazma fiziği alanlarında önemli rol oynadığını bilinen bir diferansiyel denklemdir. Jin (Jin, 2010) makalesinde “Variational Iteration Method (VIM)” yöntemini kullanarak çeşitli başlangıç şartlarıyla CDG diferansiyel denklemini çözmüştür. Daha sonra Safari (Safari , 2011) makalesinde bu diferansiyel denklemi “Variational Iteration Method (VIM)” ve “Adomians Decomposition Method (ADM)” ile birlikte çözerek iki yöntemin sonuçlarını karşılaştırmıştır.

Bu çalışmamızda ilk olarak farklı bir başlangıç şartıyla CDG diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü araştırılmış ardından Jin ve Safari’nin kullandığı başlangıç şartları kullanılarak DTM ile çözülmüş ve bu çözüm Jin ve Safari’nin çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

4.2.1 Örnek (4.7) denklemine $u(x,0)=x$ başlangıç şartı kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulansın. $u(x,t)$ ’nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere Tablo 3.2’deki dönüşümlerden yardımıyla aşağıdaki dönüşüm fonksiyonları yazılabilir.

u_t , $(h+1)U(k,h+1)$

u_{xxxxx} , $\dfrac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)$

$30uu_{xxx}$, $30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)$

$30u_x u_{xx}$, $30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)$

$180u^2u_x$, $180\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)$

Sonuç olarak (4.7) de verilen denkleme ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
&(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)+\\
&30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)+\\
&30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)+\\
&180\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)=0
\end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde yazılır.

$u(x,0)=x$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$x=0+x+0+0+...=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k$$

$$\left.\begin{aligned} U(0,0)&=0\\ U(1,0)&=1\\ &\vdots\\ U(n,0)&=0\end{aligned}\right\}\quad bu \ \ durumda \quad U(k,0)=\begin{cases}1 & k=1,\\ 0 & aksi \ \ halde\end{cases}$$

$U(1,1)$ adımının değerini bulmak için (4.8) denkleminde $k=1, h=0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
&U(1,1)+720U(6,0)U(4,0)+360U(1,0)U(3,0)+\\
&120U^2(2,0)+360U^2(0,0)U(2,0)+360U(0,0)U^2(1,0)=0
\end{aligned}$$

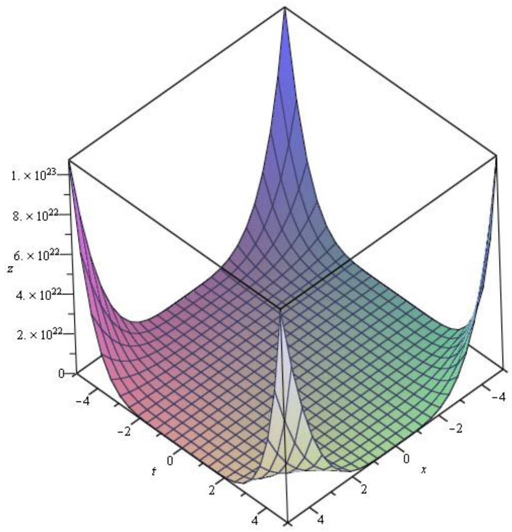
$U(1,1) = 0$ olarak bulunur.

Aynı işlemi, $k = 0,...,6$ ve $h = 0,...,6$ için uygulanırsa Maple yardımıyla elde edilen sonuçlar;

$$
\begin{aligned}
u(x,t) \quad &\cong \quad \sum_{k=0}^{6}\sum_{h=0}^{6} U(k,t)x^k t^h \\
u(x,t) \quad &\cong \quad U(1,0)x + U(2,0)x^2 + U(3,0)x^3 + U(4,0)x^4 + U(5,0)x^5 + \\
&U(6,0)x^6 + U(0,1)t + U(2,3)x^2t^3 + U(4,4)x^4t^4 + U(4,3)x^4t^3 + \\
&U(6,3)x^6t^3 + U(4,2)x^4t^2 + U(3,6)x^3t^6 + U(2,1)x^2t + U(0,3)t^3 + \\
&U(3,2)x^3t^2 + U(4,6)x^4t^6 + U(3,4)x^3t^4 + U(6,2)x^6t^2 + \\
&U(2,5)x^2t^5 + U(3,3)x^3t^3 + U(4,5)x^4t^5 + U(6,5)x^6t^5 + U(0,2)t^2 + \\
&U(5,4)x^5t^4 + U(0,5)t^5 + U(3,5)x^3t^5 + U(6,4)x^6t^4 + U(1,2)xt^2 + \\
&U(5,1)x^5t + U(3,1)x^3t + U(1,1)xt + U(5,5)x^5t^5 + U(0,6)t^6 + \\
&U(5,6)x^5t^6 + U(5,2)x^5t^2 + U(4,1)x^4t + U(6,6)x^6t^6 + U(1,6)xt^6 + \\
&U(1,5)xt^5 + U(5,3)x^5t^3 + U(2,4)x^2t^4 + U(2,6)x^2t^6 + U(2,2)x^2t^2 + \\
&U(0,4)t^4 + U(1,3)xt^3 + U(1,4)xt^4 + U(6,1)x^6t + U(0,0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u(x,t) = {} & 5400t^2 - 525929760000t^5 + x - 9720000.xt^3 + \\
& 1833258874000000.xt^6 - 180x^2t + 11547360000x^2t^4 + \\
& 64800x^3t^2 - 11715321600000x^3t^5 - 29160000x^4t^3 + \\
& 10940598720000000.x^4t^6 + 14696640000x^5t^4 - \\
& 7936185600000x^6t^5 + ...
\end{aligned}
$$

olarak bulunur.



Şekil 4.3: DTM ile CDG denkleminin $u(x,0)=x$ 'deki seri çözümü

4.2.2 Örnek (4.7) denklemine $u(x,0)=\dfrac{15+\sqrt{105}}{30}-\tanh^2(x)$ başlangıç şartı kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulansın. Bu durumda (4.7) denklemine ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu, denklem değişmediği için 4.2.1Örnek'teki fonksiyon ile aynı olacaktır.

$$
\begin{aligned}
&(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)+\\
&30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)+\\
&30\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)+\\
&180\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)=0
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

(4.8) denklemi (4.9) denklemi aynıdır.

$u(x,0)=\dfrac{15+\sqrt{105}}{30}-\tanh^2(x)$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$\frac{15+\sqrt{105}}{30}-\tanh^2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k \tag{4.10}$$

denklemi elde edilir, (4.10) denkleminin sol tarafı Taylor Serisine açıldığında,

$$\left(\frac{15+\sqrt{105}}{30}\right)x^0+\left(\frac{0}{1!}\right)x^1+\left(\frac{-2}{2!}\right)x^2+$$
$$\left(\frac{0}{3!}\right)x^3+\left(\frac{16}{4!}\right)x^4+\left(\frac{0}{5!}\right)x^5+\left(\frac{-272}{6!}\right)x^6+\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k \tag{4.11}$$

eşitliği elde edilir. Aynı dereceli x 'li terimlerin katsayılarını özdeşleştirdiğimizde,

$$\frac{15+\sqrt{105}}{30}-x^2+\frac{2}{3}x^4-\frac{17}{45}x^6+\ldots=U(0,0)+U(1,0)x+U(2,0)x^2+$$
$$U(3,0)x^3+U(4,0)x^4+U(5,0)x^5+U(6,0)x^6+\ldots \tag{4.12}$$

seri açılımdaki diğer terimleri için kullanılacak başlangıç değerleri Maple yardımıyla hesaplandığında,

$$\left.\begin{aligned}
&U(0,0)=\frac{15+\sqrt{105}}{30}\\
&U(1,0)=0\\
&U(2,0)=-1\\
&U(3,0)=0\\
&U(4,0)=\frac{2}{3}\\
&U(5,0)=0\\
&U(6,0)=-\frac{17}{45}\\
&U(7,0)=0\\
&U(8,0)=\frac{62}{315}\\
&U(9,0)=0\\
&U(10,0)=-\frac{1382}{14175}\\
&U(11,0)=0\\
&U(12,0)=\frac{21844}{467775}\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}.$$

olarak bulunur. $U(1,1)$ adımının değerini bulmak için (4.9) denkleminde $k=1, h=0$ alınırsa;

$$U(1,1)+720U(6,0)U(4,0)+360U(1,0)U(3,0)+$$
$$120U^2(2,0)+360U^2(0,0)U(2,0)+360U(0,0)U^2(1,0)=0$$

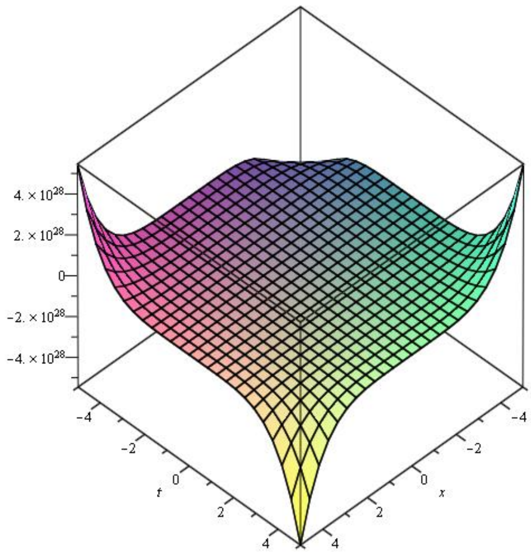
$U(1,1) = 434.0659216$ olarak bulunur.

Aynı işlemi, $k = 0,...,5$ ve $h = 0,...,5$ için uygulanırsa Maple yardımıyla elde edilen sonuçlar 4.2.1 Örnek'teki sonuçlara benzer bir şekilde;

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{5}\sum_{h=0}^{5} U(k,t)x^k t^h$$

$$\begin{aligned} u(x,t) \cong{}& 0.5000000000 + 1/30\sqrt{105} + 231200.9316t^2 + \\ & 141108235100000.0t^4 + 434.0659216xt + \\ & 17147355250.0xt^3 - 8.432990653\times 10^{19}\, xt^5 - x^2 + \\ & 5055669.133x^2t^2 - 3177739576000000.0x^2t^4 - \\ & 605.8303928x^3t - 118272066400.0x^3t^3 - \\ & 5.219658388\times 10^{20}\, x^3t^5 - \frac{17}{45}x^4 - 12774308.01x^4t^2 + \\ & 170342913500000000.0x^4t^4 - 3332.676257x^5t - \\ & 4565090670000.0x^5t^3 - 5.567376106\times 10^{21}\, x^5t^5 \end{aligned}$$

olarak bulunur.



Şekil 4.4: DTM ile CDG denkleminin $u(x,0) = \dfrac{15+\sqrt{105}}{30} - \tanh^2(x)$ 'deki seri çözümü

Bulduğumuz sonucu CDG diferansiyel denkleminin Jin'in (Jin, 2010) makalesindeki VIM ile çözümünün seri açılımıyla karşılaştıralım;

Jin'in (Jin, 2010) makalesindeki çözümü;

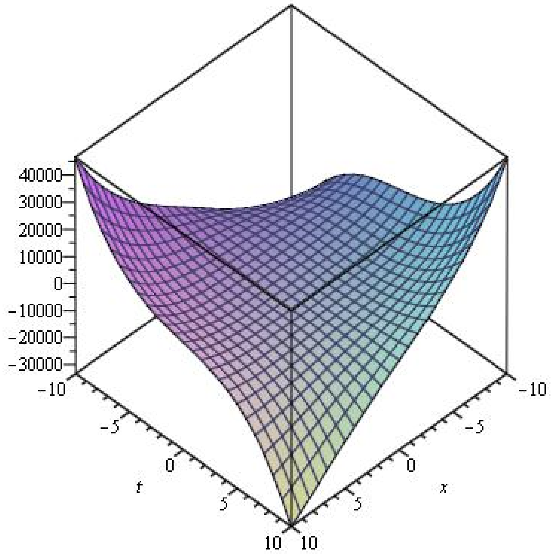
$$u(x,t) \cong \frac{15+\sqrt{105}}{30} - \left(\tanh(x)\right)^2 + \left(44-4\sqrt{105}\right)t\left(sech(t)\right)^2 \tanh(x) \quad (4.13)$$

biçimindedir.

Bu çözümün seri açılımı;

$$\begin{aligned} u(x,t) \cong\ & 1/2 + 1/30\sqrt{105} - x^2 + \left(44-4\sqrt{105}\right)tx + 2/3x^4 + \\ & \left(-44+4\sqrt{105}\right)xt^3 + \left(-\frac{44}{3} + 4/3\sqrt{105}\right)x^3t + \ldots \end{aligned} \quad (4.14)$$

çözümlerin benzer oldukları görülür.



Şekil 4.5: VIM ile CDG denkleminin $u(x,0) = \frac{15+\sqrt{105}}{30} - \tanh^2(x)$ 'deki seri çözümü

4.3 "Sawada-Kotera Equation" Çözümü ve Karşılaştırmaları

4.3.1 Tanım (4.6) deki keyfi değişkenler $\alpha = 15, \beta = 15, \gamma = 45$ ve $\omega = 1$ olarak seçilirse aşağıdaki denklemi elde edilir.

$$u_t + u_{xxxxx} + 15uu_{xxx} + 15u_x u_{xx} + 45u^2 u_x = 0 \tag{4.15}$$

Bu diferansiyel denkleme Sawada-Kotera Denklemi diferansiyel denklemi denir, (Sawada & Kotera, 1974).

Caudrey-Dodd-Gibbon Denklemi gibi Sawada-Kotera Denklemi de KdV denkleminin bir versiyonu olup, lazer optiği ve plazma fiziği alanlarında önemli rol oynadığı bilinen bir denklemdir. Bu diferansiyel denklem (Biazar, et al., 2009) ve (Ghasemia, et al., 2011) makalelerinde "Homotopy perturbation method (HPM)" yöntemini kullanarak çeşitli başlangıç şartlarıyla çözülmüştür.

Bu çalışmamızda ilk olarak farklı bir başlangıç şartıyla SK diferansiyel denkleminin DTM ile çözümü araştırılmış ardından denklem (Biazar, et al., 2009) ve (Ghasemia, et al., 2011) makalelerinde verilen başlangıç şartlarıyla DTM yöntemi kullanılarak çözülmüş ve bu çözüm Biazar ve Ghasemia çözümleri ile karşılaştırılmıştır.

4.3.1 Örnek (4.15) denklemine (4.8) denklemine benzer şekilde $u(x,0) = x$ başlangıç şartı kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulayalım. Bu durumda elde edilecek denklem katsayılar hariç 4.2.1 Örnek'teki gibi olacaktır. $u(x,t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere Tablo 3.2'deki dönüşümlerden yardımıyla aşağıdaki dönüşüm fonksiyonları elde edilir.

$$u_t \quad , \quad (h+1)U(k,h+1)$$

$$u_{xxxxx} \quad , \quad \frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)$$

$$15uu_{xxx} \quad , \quad 15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)$$

$$15u_x u_{xx} \quad , \quad 15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)$$

$$45u^2 u_x \quad , \quad 45\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)$$

Sonuç olarak (4.15) de verilen denkleme ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu;

$$\begin{aligned}
&(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)+\\
&15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)+\\
&15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)+\\
&45\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)=0
\end{aligned} \tag{4.16}$$

şeklinde yazılır.

$u(x,0)=x$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$x=0+x+0+0+...=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k$$

$$\left.\begin{aligned} U(0,0)&=0\\ U(1,0)&=1\\ &\vdots\\ U(n,0)&=0 \end{aligned}\right\} \quad bu\ \ durumda \quad U(k,0)=\begin{cases}1 & k=1,\\ 0 & aksi\ \ halde\end{cases}$$

$U(1,1)$ adımının değerini bulmak için (4.16) denkleminde $k=1, h=0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
&U(1,1)+90U^2(0,0)U(2,0)+90U(0,0)U^2(1,0)+180.U(1,0)U(3,0)+\\
&60U^2(2,0)+360U(0,0)U(4,0)+720U(6,0)=0
\end{aligned}$$

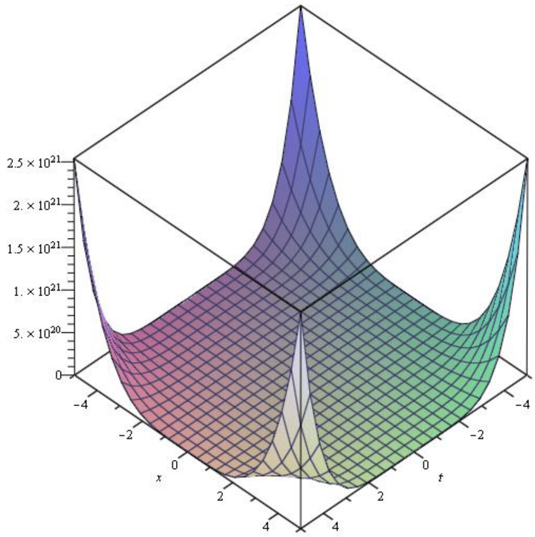
$U(1,1)=0$ olarak bulunur.

Aynı işlemi, $k=0,...,6$ $\ ve\ $ $h=0,...,6$ için uygulanırsa Maple yardımıyla elde edilen sonuçlar;

$$u(x,t)\cong\sum_{k=0}^{6}\sum_{h=0}^{6}U(k,t)x^k t^h$$

$$u(x,t) = 675.0t^2 - 2054413125.0t^5 + x - 303750.0xt^3 +$$
$$5338273964000.0xt^6 - 45.0x^2t + 90213750.0x^2t^4 + 4050.0x^3t^2 -$$
$$22881487500.0x^3t^5 - 455625.0x^4t^3 + 259838845000000.0x^4t^6 +$$
$$57408750.0x^5t^4 - 37316698710.0x^6t^5 + \dots$$

olarak bulunur.



Şekil 4.6: DTM ile SK denkleminin $u(x,0) = x$ 'deki seri çözümü

4.3.2 Örnek Bu örnekte (4.15) denklemine $u(x,0) = 2c^2 \sec h^2(cx),\ \ c \in \mathbb{R}$, başlangıç şartı kullanılarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi uygulansın. $u(x,t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere Tablo 3.2'deki dönüşümlerden yardımıyla aşağıdaki dönüşüm fonksiyonları yazılabilir.

$$u_t \quad , \quad (h+1)U(k,h+1)$$

$$u_{xxxxx} \quad , \quad \frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)$$

$$15uu_{xxx} \quad , \quad 15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)$$

$$15u_xu_{xx} \quad , \quad 15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)$$

$$45u^2u_x \quad , \quad 45\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)$$

Sonuç olarak (4.15) de verilen denkleme ait diferansiyel dönüşüm fonksiyonu Örnek 4.3.1 ile aynıdır;

$$\begin{aligned}
&(h+1)U(k,h+1)+\frac{(k+5)!}{k!}U(k+5,h)+\\
&15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(k-r+3)(k-r+2)(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+3,s)+\\
&15\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}(r+1)(k-r+2)(k-r+1)U(r+1,h-s)U(k-r+2,s)+\\
&45\sum_{r=0}^{k}\sum_{t=0}^{k-r}\sum_{s=0}^{h}\sum_{p=0}^{h-s}(k-r-t+1)U(r,h-s-p)U(t,s)U(k-r-t+1,p)=0
\end{aligned} \tag{4.17}$$

şeklinde yazılır.

$u(x,0)=2c^2\sec h^2(cx),\ \ c=1$; başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$0+2+0-2x^2+0+\frac{4}{3}x^4+0-\frac{34}{45}x^6+0+\frac{124}{315}x^8+0-\frac{2764}{14175}x^{10}+0+...=\sum_{k=0}^{\infty}U(k,0)x^k$$

$$\left.\begin{aligned}
U(0,0)&=0\\
U(1,0)&=2\\
U(2,0)&=0\\
U(3,0)&=-2\\
U(4,0)&=9\\
U(5,0)&=\frac{4}{3}\\
U(6,0)&=0\\
U(7,0)&=-\frac{34}{45}\\
&\vdots
\end{aligned}\right\}$$

$U(1,1)$ adımının değerini bulmak için (4.17) denkleminde $k=1,h=0$ alınırsa;

$$\begin{aligned}
&U(1,1)+90U^2(0,0)U(2,0)+90U(0,0)U^2(1,0)+180.U(1,0)u(3,0)+\\
&60U^2(2,0)+360U(0,0)U(4,0)+720U(6,0)=0
\end{aligned}$$

$U(1,1)=720$ olarak bulunur.

Aynı işlemi, $k = 0,...,2 \;\; ve \;\; h = 0,...,2$ için uygulanırsa Maple yardımıyla elde edilen sonuçlar;

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{2}\sum_{h=0}^{2} U(k,t)x^k t^h$$

$$u(x,t) = -160t - 777840t^2 + 2x + 720.xt + 6022947884.xt^2 + 1544x^2t + 21091419700x^2t^2 + ...$$

olarak bulunur.

Bulduğumuz sonucu SK diferansiyel denkleminin Biazar'ın (Biazar, et al., 2009) makalesindeki HPM ile çözümünün seri açılımıyla karşılaştıralım;

Biazar'ın (Biazar, et al., 2009) makalesindeki çözümü;

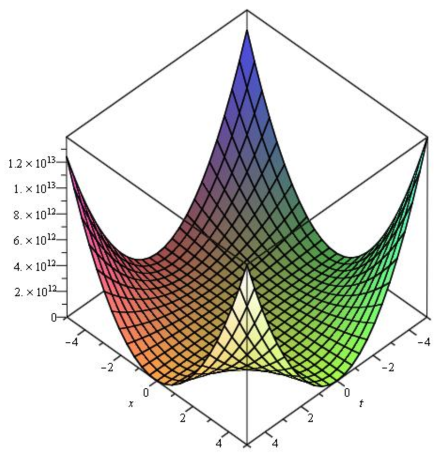
$$u(x,t) = 2\left(sech\left(x\right)\right)^2 + 64\tanh\left(x\right)\left(sech\left(x\right)\right)^2 t + 512\left(sech\left(x\right)\right)^4\left(2\left(\cosh\left(x\right)\right)^2 - 3\right)t^2 + ...$$

biçimindedir.

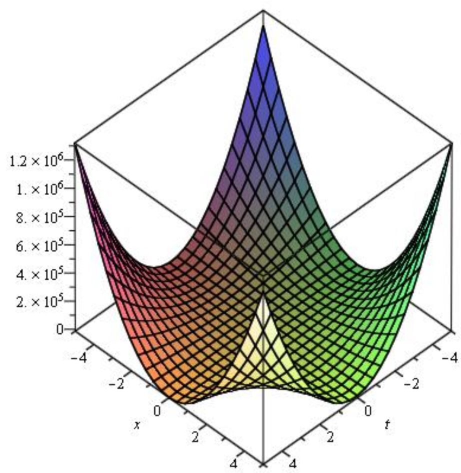
Bu çözümün seri açılımı;

$$u(x,t) = 2 - 2x^2 + 64xt - 512t^2 + 4/3x^4 - \frac{256}{3}tx^3 + 2048x^2t^2 + ...$$

çözümlerin benzer oldukları görülür.



Şekil 4.7: SK denklemi için DTM k=0,…,2 ve h=0,…,2 adımda çözümü



Şekil 4.8: Biazar'ın SK d. çözümünün Taylor-(2,2) seri açılımı

4.4 Lineer Olmayan Kısmi Türevli Diferansiyel Denklem Çözümü ve Karşılaştırılması

4.4.1 Örnek İkinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem ve başlangıç şartı;

$$\frac{1}{2}u_x^{\;2} - u_t = -\frac{x^2}{2}, \qquad u(x,0) = x \tag{4.18}$$

olarak verilsin. $u(x,t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ ve olmak üzere Tablo 3.2'deki dönüşümler yardımıyla;

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{k}\sum_{s=0}^{h}\left(r\left(k-r+1\right)+1\right)u\left(r+1,h-s\right)u\left(k-r+1,s\right)-\\&\left(h+1\right)u\left(k,h+1\right)=-\frac{1}{2}\delta\left(k-m,h-n\right)\end{aligned} \tag{4.19}$$

dönüşüm fonksiyonu yazılabilir.

$u(x,0) = x$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$x = 0 + x + 0 + 0 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k$$

$$\left.\begin{matrix} U(0,0)=0 \\ U(1,0)=1 \\ \vdots \\ U(n,0)=0 \end{matrix}\right\} \quad bu \;\; durumda \quad U(k,0) = \begin{cases} 1 & k=1, \\ 0 & aksi \;\; halde \end{cases}$$

olarak bulunur. Benzer biçimde $\delta(k-m,h-n)$ fonksiyonun terimleri $m = 2, n = 0$ için;

$$\delta(k-2,0) = \delta(k-2)\delta(0) = \begin{cases} 1, & k=2, h=0 \\ 0, & aksi \;\; halde \end{cases}$$

olarak bulunur.

(4.19) denkleminde $k = 0,...,6 \;\; ve \;\; h = 0,...,6$ değerleri sırasıyla yerine yazılırsa;

$$\frac{1}{2}\left(U(1,0)\right)^2 = U(0,1) - \frac{1}{2}\delta(0,0)$$
$$\frac{3}{2}U(1,0)U(2,0) = U(1,1) - \frac{1}{2}\delta(1,0)$$
$$U(1,1)U(1,0) = 2U(0,2) - 1/2\delta(0,1)$$
$$\frac{3}{2}U(1,1)U(2,0) + \frac{3}{2}U(1,0)U(2,1) = 2U(1,2) - \frac{1}{2}\delta(1,1)$$
$$2U(1,1)U(3,0) + 2U(1,0)U(3,1) + 2U(2,1)U(2,0) = 2U(2,2) - \frac{1}{2}\delta(2,1)$$
$$\frac{3}{2}U(1,2)U(2,0) + \frac{3}{2}U(1,1)U(2,1) + \frac{3}{2}U(1,0)U(2,2) = 3U(1,3) - \frac{1}{2}\delta(1,2)$$
$$\vdots$$

şeklinde devam eder, $U(k,0)$ ve $\delta(k-m,h-n)$ değerleri Maple yardımıyla yerine yazılırsa istenen seri çözüm;

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{6}\sum_{h=0}^{6} U(k,t)x^k t^h$$
$$u(x,t) = x + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x^2t + \frac{3}{8}xt^2 + \frac{1}{8}t^3 + \frac{1}{12}x^2t^3 + \frac{13}{128}xt^4 + \frac{11}{320}t^5 + \frac{1}{60}x^2t^5 + \frac{379}{15360}xt^6 + \ldots$$

Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile (4.18) diferansiyel denkleminin çözüm, Yanovsky'nin (Yanovsky, 2005) çalışmasındaki çözüm ile karşılaştırıldığında;

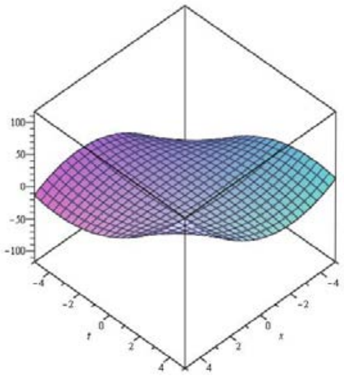
Yanovsky'nin çözümü,

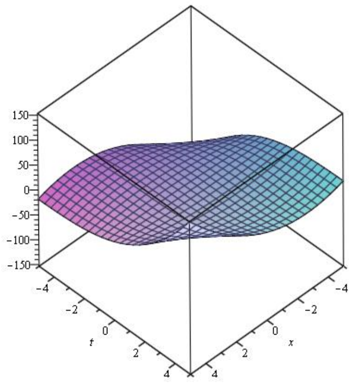
$$u(x,t) = x\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{1}{2}\frac{\left(x+\sin(t)\right)^2\sin(t)}{\cos(t)}$$

biçimindedir.

Yanovsky'nin çözümünün Taylor Seri açılımı;

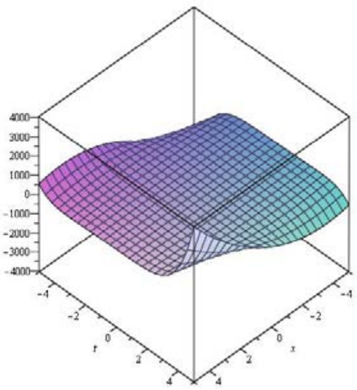
$$u(x,t) = x + \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}x^2t + \frac{1}{2}xt^2 + \frac{1}{6}t^3 + \frac{1}{6}x^2t^3 + \frac{5}{24}xt^4 + \frac{1}{15}t^5 + \frac{1}{15}x^2t^5 + \frac{61}{720}xt^6 + \frac{17}{630}t^7 + \ldots$$

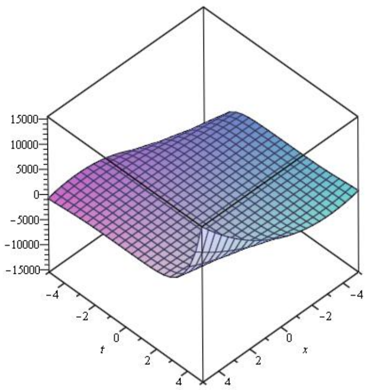




Şekil 4.9: (4.18) denklemi için DTM k=0,…,2 ve h=0,…,2 adımda çözümü

Şekil 4.10: Yanovsky,2005 çözümünün Taylor-(2,2) seri açılımı





Şekil 4.11: (4.18) denklemi için DTM k=0,…,6 ve h=0,…,6 adımda çözümü

Şekil 4.12: Yanovsky,2005 çözümünün Taylor-(6,6) seri açılımı

(Şekil 4.9) ile (Şekil 4.10) den yola çıkarak (Şekil 4.11) ile (Şekil 4.12) incelendiğinde, adım sayısı artıkça seri çözümüm ideal değerine ulaştığı gözlenmektedir.

4.5 Kısmi türevli "Inviscid-Burger" Denkleminin Çözümü ve Karşılaştırılması

4.5.1 Tanım İki değişkenli kısmı türevli Inviscid-Burger Denklemi α keyfi sabit olmak üzere,

$$u_t + \alpha u u_x = 0 \qquad (4.20)$$

olarak tanımlanır.

4.5.1 Örnek İkinci mertebeden lineer olmayan (4.20) denkleminin bir formu

$$u_t - uu_x = 0 \tag{4.21}$$

denkleminin, $u(x,0)=\dfrac{x^2}{5}$ başlangıç şartını kullanarak Diferansiyel Dönüşüm Yöntemi ile çözümü; $u(x,t)$ 'nin diferansiyel dönüşüm fonksiyonu $U(k,h)$ olmak üzere Tablo 3.2'deki dönüşümlerden yardımıyla;

$$(h+1)U(k,h+1) = \sum_{r=0}^{k}\left(\sum_{s=0}^{h}(k-r+1)U(r,h-s)U(k-r+1,s)\right) \tag{4.22}$$

dönüşüm fonksiyonu yazılabilir.

$u(x,0)=\dfrac{x^2}{5}$ başlangıç koşuluna 3.2.2.2 Tanım uygulanırsa;

$$\frac{x^2}{5} = 0+0+\frac{x^2}{5}+0+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} U(k,0)x^k$$

$$\left.\begin{array}{l} U(0,0)=0 \\ U(0,0)=0 \\ U(2,0)=1 \\ \quad\vdots \\ U(n,0)=0 \end{array}\right\} \quad bu \;\; durumda \quad U(k,0)=\begin{cases} \dfrac{1}{5} & k=2, \\ 0 & aksi \;\; halde \end{cases}$$

olarak bulunur.

(4.22) denkleminde $k=0,\ldots,10$ ve $h=0,\ldots,10$ değerleri sırasıyla yerine yazılırsa;

$$U(0,1) = U(0,0)U(1,0)$$
$$2U(0,2) = U(0,1)U(1,0) + U(0,0)U(1,1)$$
$$3U(0,3) = U(0,2)U(1,0) + U(0,1)U(1,1) + U(0,0)U(1,2)$$
$$U(1,1) = 2U(0,0)U(2,0) + \left(U(1,0)\right)^2$$
$$2U(1,2) = 2U(0,1)U(2,0) + 2U(0,0)U(2,1) + 2U(1,1)U(1,0)$$
$$3U(1,3) = 2U(0,2)U(2,0) + 2U(0,1)U(2,1) + 2U(0,0)U(2,2) + 2U(1,2)U(1,0) + \left(U(1,1)\right)^2$$
$$U(2,1) = 3U(0,0)U(3,0) + 3U(1,0)U(2,0)$$
$$2U(2,2) = 3U(0,1)U(3,0) + 3U(0,0)U(3,1) + 3U(1,1)U(2,0) + 3U(1,0)U(2,1)$$
$$\vdots$$

şeklinde devam eder, $U(k,0)$ değerleri Maple yardımıyla yerine yazılırsa istenen seri çözüm;

$$u(x,t) \cong \sum_{k=0}^{10}\sum_{h=0}^{10} U(k,t)x^k t^h$$
$$u(x,t) = 1/5x^2 + \frac{2}{25}tx^3 + 1/25t^2x^4 + \frac{14}{625}t^3x^5 + \frac{42}{3125}t^4x^6 + \frac{132}{15625}t^5x^7 + \frac{429}{78125}t^6x^8 + \frac{286}{78125}t^7x^9 + \frac{4862}{1953125}t^8x^{10} \ldots$$

olarak bulunur.

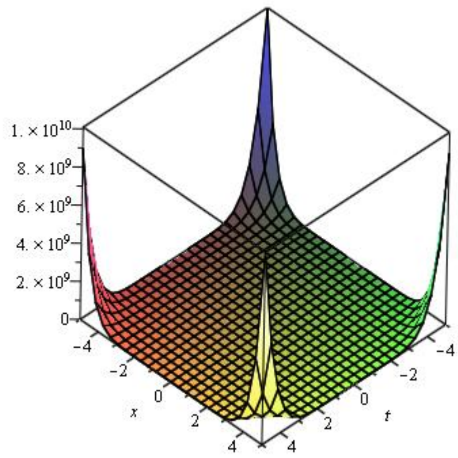
Bulduğumuz sonucu Inviscid-Burger diferansiyel denkleminin Zwillinger'in (Zwillinger, 1997) çalışmasındaki çözümünün seri açılımıyla karşılaştıralım;

$$u(x,t) = \frac{1-(0.4)tx-(0.5)\sqrt{25-20tx}}{(0.4)t^2}$$

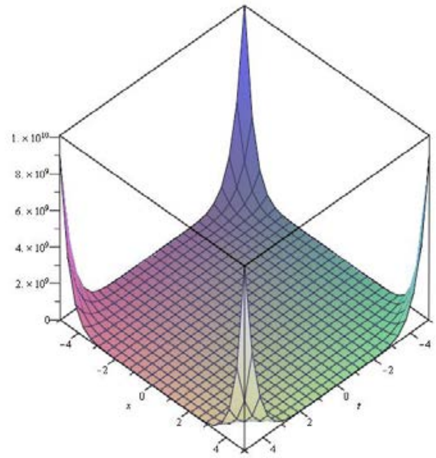
biçimindedir. Zwillinger'in çözümünün Taylor Seri açılımı;

$$u(x,t) = 1/5x^2 + \frac{2}{25}tx^3 + 1/25t^2x^4 + \frac{14}{625}t^3x^5 + \frac{42}{3125}t^4x^6 + \frac{132}{15625}t^5x^7 + \frac{429}{78125}t^6x^8 + \frac{286}{78125}t^7x^9 + \frac{4862}{1953125}t^8x^{10} \ldots$$

olduğu görülür. Buradan anlaşılacağı üzere birinci mertebeden lineer olmayan (4.21) diferansiyel denklemin DTM ile çözümünden elde edilen sonuçlar, Zwillinger'in çözüm ile aynıdır. Aşağıda iki çözümün DTM k=1…10 ve h=1…10 ve Zwillinger, 1997 çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı şartları altında grafiği verilmiştir.



Şekil 4.13: Inviscid-Burger denklemi için DTM k=0,…,10 ve h=0,…,10 adımda çözümü



Şekil 4.14: Zwillinger, 1997 çözümünün Taylor-(10,10) seri açılımı

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Diferansiyel denklemler; günlük hayatta geniş bir kullanım alanı olan neredeyse tüm bilim dallarında büyük bir öneme sahip denklem çeşitleridir.

Yüksek mertebelerden ve lineer olmayan yapılardan oluşan diferansiyel denklemlerin gerçek çözümüne ulaşmak her zaman mümkün olamayabilir. Özellikle gerçek çözümü bilinmeyen fakat bilim için gerçek çözümü oldukça önemli olan diferansiyel denklemleri DTM kullanarak hesaplamak mümkündür.

Bu çalışmada iki ve daha yüksek mertebelerden iki değişkene bağlı lineer olmayan ve yarı-lineer diferansiyel denklemlerin farklı başlangıç şartları altında çözümü araştırılmış elde edilen çözümler farklı yöntemlerle hesaplanmış sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Elde edilen sonuçlardan da anlaşılacağı üzere DTM ile yapılan çözümlerde hata payı birçok iteratif yönteme göre daha azdır. Ayrıca DTM, türev yapılarını basit cebirsel ifadeler yardımıyla incelediği için diğer birçok yaklaşık hesap yapan yönteme göre daha kolay kullanılabilir bir yapıya sahiptir. Basit denklemlerin bilgisayar programları yardımıyla hesaplanması çok daha kolay olacağından DTM'yi diferansiyel denklemlerin hesaplamalarında kullanmak zamandan ve maliyetten tasarruf sağlamaktadır. Örnek 4.1.1, Örnek 4.2.1, Örnek 4.2.2, Örnek 4.3.1, Örnek 4.3.2, Örnek 4.4.1, Örnek 4.5.1, de elde edilen sonuçlar birer seri açılımdır ve bu çalışmanın 4. Bölümünde DTM ile elde edilen sonuçlar aynı örneklerin diğer yöntemlerle elde edilmiş sonuçları ile karşılaştırılmıştır. Karşlılaştırmadan da anlaşılacağı üzere DTM, diferansiyel denklem çözümleri için kullanışlı bir yöntemdir.

DTM kullanılarak bu çalışmada ve çalışmada yer alan kaynakların dışında daha birçok kısmi türevli diferansiyel denklemin çözümü yapılabilir ve var olan çözümlerle karşılaştırılabilir. Diğer yöntemlerin (VIM, HPM, HAM, …) olumlu yanlarını alarak DTM'nin kolay kullanılabilir yapısını birleştirmek daha hassas çözümler yapmak için bir başlangıç noktası olabilir. Bu sayede başlangıç şartı olmadan, DTM kullanılarak hata payı en aza indirilmiş çözümlere ulaşmak mümkün olabilir.

6. KAYNAKLAR

Adomian, G., (1990). A Review of the Decomposition Method and Some Recent Results for Nonlinear Equations. *Mathematical and Computer Modelling,* Issue 13, pp. 17-43.

Arikoglu, A. & Ozkol, I., (2005). Solution of boundary value problem for integro-differential equations by using differential transform method. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 168, pp. 1145-1158.

Arikoglu, A. & Ozkol, I., (2006). Solution of differential-difference equations by using differential transform method. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 181(1), pp. 153-162.

Ayaz, F., (2003). On the two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 143, pp. 361-374.

Ayaz, F., (2004). Applications of differential transform method to differential-algebraic equations. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 152, no. 3, p. 649–657.

Ayaz, F., (2004). Solutions of the system of differential equations by differential transform Method. *Applied Mathematics and Computation,* Cilt 147, p. 547–567.

Ayaz, F. & Oturanç, G., (2004). An Aproximate Solution of Burger Equation by Differential Transform Method. *Selçuk Journal of Applied Mathematics,* 2(5), pp. 15-24.

Biazar, J., Hosseini, K. & Gholamin, P., (2009). Homotopy Perturbation Method for Solving KdV and Sawada-Kotera Equations. *Journal of Applied Mathematics,* Issue 6, p. 23–29.

Bildik, N., Konuralp, A., Bereketoğlu, F. & Kucukarslan, S., (2006). Solution of different type of the partial differential equation by differential transform method and Adomian's decomposition method. *Applied Mathematics and Computation,* 551-567(172).

Branson, R., (2009). *Differential Equations.* s.l.:Schaum's Outline.

Caudrey, p. J., Dodd, R. K. & Gibbon, J. D., (1976). A new heirarchy of Korteweg-de Vries equations. *Proceedings of the Royal Society of London,* Issue A 351, p. 407–422.

Chen, C. K. & Ho, S. H., (1996). Application of differential transformation to eigenvalue problems. *Applied Mathematics and Computation,* pp. 173-188.

Chen, C. K. & Ho, S. H., (1999). Solving partial differential equations by two-dimensional differential transform method. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 106, p. 171–179.

Chen, C. L. & Liu, Y. C., (1998). Differential transformation technique for steady nonlinear heat conduction problems. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 95, pp. 155- 164.

Dodd, R. K. & Gibbon, J. D., (1977). The prolongation structure of a higher order Korteweg-de Vries equations. *Proceedings of the Royal Society of London,* Issue A 358, p. 287–300.

Farshad , E., Amin, H., Farzad , E. & Rohoallah , M., (2013). An Iterative Method for Solving Partial Differential Equations and Solution of Korteweg-de Vries Equations for Showing the Capability of the Iterative Method. *World Applied Programming,* 3(8), pp. 320-327.

George, B. & Thomas, J., (2010). *Thomas' Calculus, 12/E.* s.l.:Massachusetts Institute of Technology.

Ghasemia, M., Fardib, M., Tavassoli, K. M. & Khoshsiar, G. R., (2011). Numerical solution of fth order KdV equations by homotopy perturbation method. *Mathematical Sciences,* 2(5), pp. 169-181.

Hassan, A. H. & I., H., (2002). Different applications for the differential transformation in the differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* 2-3(129), p. 183–201.

Hassan, A. H. & I., H., (2002). On solving some eigenvalue problems by using a differential Transformation. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 127, p. 1–22.

He, J. H., (1997). Variational iteration method for delay differential equations. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation,* 4(2), p. 235–236.

He, J. H., (1999). Homotopy perturbation technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering,* Issue 178, pp. 257-262.

He, J. H., (1999). Variational iteration method - a kind of non-linear analytical technique: Some examples. *International Journal of Non-Linear Mechanics,* Issue 34, p. 699–708.

Jang, M. J., Chen, C. L. & Liu, Y. C., (1997). Analysis of the response of a strongly nonlinear damped system using a differential transformation technique. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 88, pp. 137-151.

Jang, M. J., Chen, C. L. & Liu, Y. C., (2000). On solving the initial-value problems using the di?erential transformation method. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 115, p. 145–60.

Jang, M. J., Chen, C. L. & Liu, Y. C., (2001). Two-dimensional differential transform for partial differential equations. *Applied Mathematics and Computation,* Issue 121, pp. 261-270.

Jin, L., (2010). Application of the Variational Iteration Method for Solving the Fifth Order Caudrey-Dodd-Gibbon Equation. *International Mathematical Forum,* 5(66), p. 3259 – 3265.

Karakoç, F. & Bereketoğlu, H., (2009). Solutions of delay differential equations by using differential transform method. *International Journal of Computer Mathematics,* Issue 86, pp. 914-923.

Keskin, Y., Kurnaz, A., Kiris, M. E. & Oturanc, G., (2007). Approximate solutions of generalized pantograph equations by the differential transform method. *International Journal of Nonlinear Science,* Issue 8, pp. 159-164.

Keskin, Y. & Oturanç, G., (2009). Reduced differential transform method for partial differential equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation,* 6(10), pp. 741-749.

Kurnaz, A. & Oturanç, G., (2005). The differential transform approximation for the system of ordinary differential equations. *International Journal of Computer Mathematics,* 6(82), pp. 709-719.

Kurnaz, A., Oturanç, G. & Kiriş, . E. M., (2005). n-Dimensional differential transformation method for solving PDE. *International Journal of Computer Mathematics,* 3(82), pp. 369-380.

Momani, S., Odibat, Z. & Erturk, V. S., (2007). Generalized differential transform method for solving a space and time fractional diffusion-wave equation. *Physics Letters,* Issue A 370, pp. 379-387.

Safari , M., (2011). Application of He's Variational Iteration Method and Adomian Decomposition Method to Solution for the Fifth Order Caudrey-Dodd-Gibbon (CDG) Equation. *Applied Mathematics,* Issue 10.4236, p. 28131 .

Sawada, K. & Kotera, T., (1974). A Method for Finding N-Soliton Solutions of the K.d.V. Equation and K.d.V.-Like Equation. *Progress of Theoretical Physics ,* Issue 51, pp. 1355-1367.

Yanovsky, I., (2005). Graduate Level Problems and Solution (handbook). *Partial Differential Equations.* s.l.:s.n., pp. 86-87.

Zhou, J. K., (1986). Differential Transformation and Its Applications for Electrical Circuits. *Huazhong University Press.*

Zwillinger, D., (1997). *Handbook of Differential Equations.* s.l.:Academic Press.