T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA ŞERAN

BALIKESİR, OCAK - 2016

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA ŞERAN

Jüri Üyeleri : Yrd. Doç. Dr. Pınar METE (Tez Danışmanı)

Doç. Dr. Fırat ATEŞ

Yrd. Doç. Dr. Celal Cem SARIOĞLU

BALIKESİR, OCAK - 2016

KABUL VE ONAY SAYFASI

Büşra ŞERAN tarafından hazırlanan "**SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 27.01.2016 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Yrd. Doç. Dr. Pınar METE	....
Üye Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Celal Cem SARIOĞLU	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR
YÜKSEK LİSANS TEZİ
BÜŞRA ŞERAN
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: YRD. DOÇ. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, OCAK - 2016

S bir sayısal yarıgrup ve F(S), S'nin Frobenyus sayısı olmak üzere $z \notin S$ tamsayısı $F(S)-z \in S$ olmasını gerektiriyor ise S'ye simetrik sayısal yarıgrup denir. Simetrik sayısal yarıgruplar kullanışlı özelliklere sahip olmalarından dolayı literatürde oldukça çalışılmışlardır.

Bu tez çalışması, simetrik sayısal yarıgruplar üzerine bir derlemedir. Bu tezde olağanüstü özelliklere sahip olan simetrik sayısal yarıgrup aileleri ve değişmeli cebirin önemli tekniklerinden biri olan yapıştırma kavramı incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Sayısal yarıgrup, simetrik sayısal yarıgrup, yapıştırma.

ABSTRACT

SYMMETRIC NUMERICAL SEMIGROUPS
MSC THESIS
BÜŞRA ŞERAN
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: ASSIST. PROF. DR. PINAR METE)

BALIKESİR, JANUARY 2016

A numerical semigroup S with Frobenius number F(S) is symmetric, if every integer $z \notin S$ implies $F(S)-z \in S$. Symmetric numerical semigroups have been extensively studied because of their very useful on the properties.

This thesis study is a survey on the symmetric numerical semigroup with extraordinary properties and the concept of gluing which is one of the most important tecniques in the commutative algebra have been investigated.

KEYWORDS: Numerical semigroup, Symmetric numerical semigroup, Gluing.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

S	:	Sayısal yarıgrup
S*	:	S’ nin sıfır olmayan elemanları kümesi
m(S)	:	S’ nin katlılığı
G(S)	:	S ’nin boşlukları
G(S)	:	S’ nin cinsi
Ap(S,n)	:	S sayısal yarıgrubunun n’ye göre Apery kümesi
<A>	:	A üreteç kümesi
e(S)	:	S’ nin gömme boyutu
F(S)	:	S’ nin Frobenyus sayısı
c(S)	:	S’ nin kondüktorü
PF(S)	:	S’ nin Sözde-Frobenyus sayısı
SG(S)	:	S’ nin özel boşluğu
t(S)	:	S’ nin tipi
R[S]	:	S’ nin Sayısal yarıgrup halkası
R[[S]]	:	S’ nin formal yarıgrup halkası
$\mathrm{Maximal}_{\leq_s}$ Ap(S,n)	:	Ap(S,n) kümesinin $\leq_s$ bağıntısına göre maximal elmanları
M(X)	:	X üzerindeki serbest monoid
#ρ	:	ρ temsilcisinin eleman sayısı

ÖNSÖZ

İlk olarak, değişmeli cebir ve cebirsel geometri ile tanışmamı sağlayan ve her zaman sabırla ve ilgiyle sorularımı yanıtlayan sayın danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Pınar Mete' ye teşekkür ederim.

Hayatımın her anında yanımda olan ve çalışmalarımı her zaman gönülden destekleyen sevgili babam ve anneme, çalışmalarım boyunca her türlü fedakârlığıyla bana destek olan sevgili eşime teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

$a_1, ..., a_n$, $obeb(a_1, ..., a_n) = 1$ olan pozitif tamsayılar olsun.

$$< a_1, ..., a_n >= \left\{x_1 \cdot a_1 + ... + x_n \cdot a_n \mid x_1, ..., x_n \in \mathbb{N}\right\}$$

kümesi bir sayısal yarıgruptur ve tüm sayısal yarıgruplar bu formdadır. Bu nedenle sayısal yarıgrupları çalışmak pozitif katsayılı homojen olmayan bir lineer denklemin negatif olmayan tamsayı çözümlerini çalışmak demektir. Bu klasik problemin çalışması literatürde geniş yer bulmuştur [1], [2], [3], [4], [5], [6]. Sayısal yarıgruplar ile ilgili bilinen ilk problemlerden birisi,

$$S =< a_1, ..., a_n >$$

sayısal yarıgrubunda olmayan en büyük tamsayıyı $a_1, ..., a_n$'ler cinsinden belirlemektir. Bu, Frobenyus$(1849-1917)$'un derslerinden birinde öne sürdüğü bir problem olduğundan literatürde Frobenyus problemi olarak bilinir. Sayısal yarıgruplardaki invaryantlardan Frobenyus sayısı ve cins bu gruplarda özel bir rol oynamaktadır. Bununla birlikte diğer invaryantlar; katlılık, gömme boyutu, kondüktör, Apery kümeleri, Sözde-Frobenyus sayısı ve tiptir.

Bu tezde amaç, oldukça geniş çalışma alanı bulunan simetrik sayısal yarıgrupları çalışmaktır. Simetrik sayısal yarıgrupların çalışılmasında bu yarıgrupların halka teori ile bağlantısının verildiği Kunz'un [7] makalesi öncülük etmiştir.

Tezin 2. bölümünde sayısal yarıgruplar ile ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tezin 3. bölümünde tezin ana konusunu oluşturan simetrik sayısal yarıgruplar örneklerle birlikte anlatılacaktır.

Tezin 4. bölümünde yapıştırma kavramı açıklanacak ve simetrik sayısal yarıgruplar ile bağlantısı kurulacaktır.

2. SAYISAL YARIGRUPLAR

2.1 Monoidler ve Üreteçler

2.1.1 Tanım. $G \neq \varnothing$ bir küme ve "$*$" bir ikili işlem olsun.

(i) $\forall a, b, c \in G$ için

$$a * (b * c) = (a * b) * c$$

ise $(G, *)$ ikilisine bir yarıgrup,

(ii) G bir yarıgrup ve $\forall a \in G$ için

$$a * e = e * a = a$$

olacak şekilde $e \in G$ birim elemanı varsa G yarıgrubuna bir monoid,

(iii) G bir monoid ve $\forall a \in G$ için

$$a * a^{-1} = a^{-1} * a = e$$

olacak şekilde $a^{-1} \in G$ ters elemanı var ise

G monoidine grup adı verilir.

$\varnothing \neq H$, G'nin bir alt kümesi olsun. $\forall a, b \in H$ için

$$a * b^{-1} \in H$$

ise, H kümesine G'nin alt grubu denir.

2.1.2 Örnek. $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesi, '+' toplama işlemine göre bir yarıgruptur.

2.1.3 Tanım. $(G, *)$ bir monoid ve $S \subset G$ olsun.

(i) $e \in S$,

(ii) $\forall a, b \in S$ için $a * b \in S$

ise S' ye G' nin alt monoidi denir.

2.1.4 Tanım. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi ve $S \subset \mathbb{N}$ alt kümesi olsun.

(i) $0 \in S$,

(ii) $\forall a, b \in S$ için

$$a + b \in S$$

ise S kümesine $\mathbb{N}$'nin alt monoidi denir.

2.1.5 Örnek. $\{0\}$ ve $\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$'nin alt monoidleridir: $S = \{0\}$ alalım.

(i) $0 \in S$ ve

(ii) $0 \in S$ için

$$0 + 0 = 0 \in S$$

olduğundan $\{0\}$, $\mathbb{N}$' nin alt monoididir.

2.1.6 Örnek. S bir alt monoid ve $0 \neq a \in S$ olsun. $\forall d \in \mathbb{N}$ için

$$a + a + ... + a = d.a \in S$$

elde edilir.Bu durumda, S sonsuz bir kümedir.

2.1.7 Tanım. S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi ve G, $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin S ile üretilen alt grubu,

$$G = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_{\text{i}} \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Z},\ a_{\text{i}} \in S \right\}$$

olsun. Eğer $1 \in G$ ise S alt monoidine sayısal yarıgrup denir.

2.1.8 Önerme. [8] S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda S'nin bir yarıgrup olması için gerekli ve yeterli koşul $\mathbb{N} \backslash S$'nin sonlu bir küme olmasıdır.

İspat: $\Rightarrow$ S bir sayısal yarıgrup, $G \subset \mathbb{Z}$ ve G, S ile üretilen bir grup olsun. Tanım $2.1.7$.'den $1 \in G$ olduğundan bazı $\lambda_i \in \mathbb{Z}$ ve $a_{\text{i}} \in S$ için,

$$1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{\text{i}}$$

dir. Genelliği bozmadan, $\lambda_1, ...\lambda_l < 0$ ve $\lambda_{l+1}, ...\lambda_k > 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$\sum_{i=1}^{l} -\lambda_i a_{\text{i}} = s$ ise,

$s \in S$ ve $1 = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_{\text{i}} = \sum_{i=1}^{l} \lambda_i a_{\text{i}} + \sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i a_{\text{i}}$ olduğundan

$$1 + s = \sum_{i=l+1}^{k} \lambda_i a_{\text{i}} \in S$$

elde edilir.

Her $n \geq (s-1)\cdot(s+1)$ için $n \in S$ $n \geq (s-1)\cdot(s+1)$ ve $n = q \cdot s + r, 0 \leq r < s$ olsun.

$n = q \cdot s + r \geq (s-1)\cdot s + (s-1) = (s-1)$
olduğundan

$$q \geq (s-1) \geq r$$

Böylece,

$$n = q \cdot s + r$$

$$= (r \cdot s + r) + (q - r)\cdot s$$

$$= r \cdot (s+1) + (q-r)\cdot s$$

Sonuçta, $n \in S$ elde edilir. Böylece $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu bir küme olur.

$\Leftarrow$ $\mathbb{N} \backslash S$'nin sonlu elemanlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$s + 1 \in S$$

olacak şekilde $s \in S$ vardır. Böylece;

$$1 \cdot (s+1) + (-1)\cdot s = 1 \in G$$

elde edilir. Bu S'nin sayısal yarıgrup olması demektir. □

2. 1. 8. Önermesi bize sayısal yarıgrupları aşağıdaki gibi tanımlayabileceğimizi söyler.

2.1.9 Tanım. S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. S kümesi,

(i) $0 \in S$,

(ii) $\forall x, y \in S$ için $x + y \in S$,

(iii) $\mathbb{N} \backslash S$ sonlu,

şartlarını sağlıyor ise, S 'ye bir sayısal yarıgrup denir

2.1.10 Örnek. $S = <3, 5> = \Big\{3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 \,|\, x_1, x_2 \in \mathbb{N}\Big\}$

S kümesi, 2.1.9 Tanımındaki özellikleri sağlar. Açıkça gösterecek olursak

(i) $0 \in S$

(ii) $\forall x, y \in S$, $x = 3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2$ ve $y = 3 \cdot y_1 + 5 \cdot y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ vardır ve $x + y = 3 \cdot (x_1 + y_1) + 5 \cdot (x_2 + y_2) \in S$ dir. Öte yandan $\forall n \geq 8$ tamsayısı için $3 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 = n$ Diofant denkleminin $(3, 5) = 1$ ve $1|8$ olduğundan doğal sayılarda çözümü vardır. Dolayısı ile $S = \Big\{0, 3, 5, 6, 8, 9, 10, \rightarrow\Big\}$ elde edilir.

(iii) $\mathbb{N} \backslash S = \left\{1, 2, 4, 7\right\}$ sonlu

koşullarını sağladığı için bir sayısal yarıgruptur.

Şimdiki Önerme $\mathbb{N}$'nin alt monoidleri yerine neden sayısal yarıgruplar fikrine odaklandığımızı açıklamaktadır.

2.1.11 Önerme. [8] S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda S bir sayısal yarıgruba izomorfiktir.

İspat: $obeb(S) = d$ olsun. Buradan, d elemanı, $\mathbb{Z}$'de S tarafından üretilen grubun üreteci olur.

$$S_1 = \left\{\tfrac{s}{d} \mid s \in S\right\}$$

bir sayısal yarıgruptur:

G, S_1 ile üretimiş bir grup olsun. Bu durumda,

$$G = \left\{ \textstyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cdot a_{\mathrm{i}} \mid n \in \mathbb{N}, \lambda_i \in \mathbb{Z}, a_{\mathrm{i}} \in S \right\}$$

yazabiliriz.

Şimdi $1 \in G$ olduğunu görelim.

$obeb(S) = d$ ise,

$$d = \lambda_1 \cdot s_1 + ... + \lambda_n \cdot s_{\mathrm{n}},\ s_{\mathrm{n}} \in S$$

yazabiliriz. Böylece,

$$1 = \lambda_1 \cdot \tfrac{s_1}{d} + ... + \lambda_n \cdot \tfrac{s_n}{d}$$

elde edilir ki, bu $1 \in G$ demektir. Böylece S_1 bir sayısal yarıgrup olur.

$$\phi : S \to S_1$$

$$s \to \frac{s}{d}$$

dönüşümünü alalım.

$$s_1,\ s_2 \in S \text{ için}$$

$$\phi(s_1 + s_2) = \tfrac{s_1+s_2}{d} = \tfrac{s_1}{d} + \tfrac{s_2}{d}$$

$$= \phi(s_1) + \phi(s_2)$$

olduğundan ϕ bir monoid homomorfizması olur. $\square$

Her $s_1, s_2 \in S$ için

$$\phi(s_1) = \phi(s_2) \Rightarrow \frac{s_1}{d} = \frac{s_2}{d}$$

$$s_1 = s_2$$

elde edilir. Böylece ϕ, birebir bir homomorfizmadır. Yine, $\forall s_1 \in S$ için,

$$s_1 \cdot d = \frac{s}{d} \cdot d \in S$$

olduğundan

$$\phi(s) = \phi(s_1 .d)$$

elde edilir. Buradan,

$$S \cong S_1$$

yazılır.

2.1.12 Not. Herhangi bir sayısal yarıgrup sonsuz elemanlı olmasına rağmen, sonlu tane elemanı tarafından tanımlanabilir. Bunun nedeni, yarıgruptaki sonsuz elemanın sonlu tanesinin bir lineer kombinasyonu ile elde edilmesidir.

2.1.13 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun. $\forall a \in S$ için,

$$a = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i \cdot a_{\mathrm{i}}$$

olacak şekilde $a_1, ..., a_r \in A$ ve $\lambda_1, ..., \lambda_r \in \mathbb{N}$ elemanları var ise S, A ile üretilir denir ve

$$S =< A >$$

ile gösterilir.

2.1.14 Önerme. [8] Sayısal yarıgruplar sonlu üretilmiştir.

İspat: A, S'nin üreteçlerinin bir listesi olsun. m, S' nin sıfır olmayan en küçük elemanı olsun. Bu durumda

$$m \in A$$

olur. $a, a' \in A$, $a < a'$,

$$a \equiv a' \pmod{m}$$

olduğunu varsayalım. Buradan

$$a' = k \cdot m + a, k \in \mathbb{Z}^+$$

yazabiliriz. Böylece A kümesinden a' elemanını çıkarabiliriz. Bu şekilde devam edersek bu işlemlerin sonunda herbiri m modülüne göre aynı denklik sınıfında olan bir tek eleman elde edilir. Bu A kümesini sonlu elemanlı seçilebileceğimiz anlamına gelmektedir. $\square$

A ve B kümeleri $\mathbb{Z}$ tamsayılar kümesinin alt kümeleri olsun.

$$A + B = \Big\{a + b \mid a \in A, b \in B\Big\}$$

olarak tanımlıdır. S sayısal yarıgrubu için

$$S^* = S \backslash \{0\}$$

S'nin sıfır olmayan elemanlarının kümesidir.

$$S^* + S^* = \Big\{s_1 + s_2 \mid s_1, s_2 \in S \setminus 0\Big\}$$

2.1.15 Yardımcı Teorem. [8] S, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. Bu durumda,

$$S^* \setminus (S^* + S^*)$$

S'nin bir üreteç sistemidir. Üstelik, S'nin tüm üreteç sistemleri bu sistemi içerir.

İspat: $s \in S^*$ alalım. Eğer

$$s \notin S^* \setminus (S^* + S^*)$$

ise,

$$s = x + y,\ x, y < s$$

olacak şekilde $x, y \in S^*$ elemanları vardır. Aynı prosedür x ve y elemanları içinde tekrar edilirse, sonlu adımdan sonra

$$s = s_1 + s_2 + ... + s_n$$

olacak şekilde $s_1, s_2, ..., s_n \in S^* \setminus (S^* + S^*)$ elemanlarını bulabiliriz. Bu $S^* \setminus (S^* + S^*)$'in S'nin bir üreteç sistemi olduğunu ispatlar.

Şimdi $S^* \setminus (S^* + S^*)$ sisteminin, S'nin tüm üreteç sistemi tarafından kapsandığını ispatlayalım.

A, S'nin bir başka üreteç sistemi olsun.

$$S^* \setminus (S^* + S^*) \subset A$$

olduğunu görelim.

$$x \in S^* \setminus (S^* + S^*)$$

olsun. Buradan,

$$x = \lambda_1 \cdot a_1 + ... + \lambda_n \cdot a_{\mathrm{n}}$$

olacak şekilde, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, $a_1, ..., a_{\mathrm{n}} \in A$, $\lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{N}$ vardır. $x \notin S^* + S^*$ olduğundan bir $i \in 1, .., n$ için

$$x = a_{\mathrm{i}}$$

olur ki, bu $x \in A$ demektir. □

2.2 Katlılık, Cins, Boşluklar

Bu bölümde, sayısal yarıgruplar ile ilgili temel tanımlar verilecektir.

2.2.1 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve $n_1 < n_2 < .... < n_p$, S'nin bir minimal üreteç kümesi olsun. $0 \neq n_1 \in S$ elemanına, S'nin katlılığı denir ve

$$m(s) = n_1$$

ile gösterilir.

2.2.2 Örnek. S=<3,5,7>

$$= \Big\{3 \cdot \lambda_1 + 5 \cdot \lambda_2 + 7 \cdot \lambda_3 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{N}\Big\}$$
$$= \Big\{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \rightarrow\Big\}$$

$\Big\{3, 5, 7\Big\}$ kümesi, S'nin minimal üreteç kümesidir ve $m(s) = 3$ dür.

2.2.3 Tanım. S bir sayısal yarıgrup olsun

$$\mathbb{N} \setminus S$$

kümesine S'nin boşlukları denir ve $G(S)$ ile gösterilir. $\mathbb{N} \setminus S$'deki eleman sayısına S'nin cinsi denir ve $g(S)$ ile gösterilir.

2.2.4 Örnek. S=<3,5,7> olsun.

$$= \Big\{3, 5, 6, 7, 8, 9, 10 \rightarrow\Big\}$$
$$\mathbb{N} \setminus S = G(S) = \Big\{1, 2, 4\Big\}$$
$$g(S) = 3$$

2.2.5 Not. S bir sayısal yarıgrup olsun. 2.1.8 Önerme'den $\mathbb{N} \setminus S$ sonludur. Böylece, bir sayısal yarıgrubun cinsi her zaman sıfır olmayan bir tamsayıdır.

2.3 Apery Kümeleri

Sayısal yarıgruplar ile ilgilenenler için Apery Kümeleri önemli araçlardan biridir. $2.1.14$ Önermesinin ispatının temelindeki fikir bizi sıradaki tanıma götürür.

2.3.1 Tanım. $n \in S^*$ olsun.S sayısal yarıgrubunun n'ye göre Apery kümesi Ap(S,n) ile gösterilir ve

$$Ap(S,n) = \Big\{ s \in S \mid s - n \notin S \Big\}$$

olarak tanımlanır.

2.3.2 Örnek. $S =< 5, 7, 9 >= \Big\{ 0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow \Big\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$n = 5 \in S^* olsun$$

$$\begin{aligned} Ap(S,5) &= \Big\{ s \in S \mid s - 5 \notin S \Big\} \\ &= \Big\{ 0, 7, 9, 16, 18 \Big\} \end{aligned}$$

2.3.3 Örnek. $S =< 3, 7 >= \Big\{ 0, 3, 6, 7, 9, 10, 12, 13 \rightarrow \Big\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$n = 3 \in S^* olsun$$

$$\begin{aligned} Ap(S,3) &= \Big\{ s \in S \mid s - 3 \notin S \Big\} \\ &= \Big\{ 0, 7, 14 \Big\} \end{aligned}$$

Şimdiki Yardımcı Önerme Ap(S,n) kümesinin tam olarak n tane elemanı olduğunu söyler.

2.3.4 Yardımcı Teorem. [9] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun.Her $i \in 1, 2, ..., n$ için, w(i),

$$w(i) \equiv i (mod\, n)$$

olacak şekilde S'nin en küçük elemanı olsun. Bu durumda,

$$Ap(S,n) = \big\{ 0 = w(0), w(1), ..., w(n-1) \big\}$$

olur.

İspat: $0 \leq i \leq n - 1$ olsun. Tanımdan,

$$w(i) \in S$$

ve

$$w(i) \equiv i (mod\, n)$$

$$\Rightarrow n|(w(i)-i)$$

$$\Rightarrow w(i)-i=n.k, k\in(Z)$$

$$\Rightarrow w(i)-i=n+n(k-1), k\in(Z)$$

$$\Rightarrow w(i)-n=i+n(k-1), k\in(Z)$$

$$\Rightarrow w(i)-n\equiv i(mod\, n)$$

elde edilir. w(i), S sayısal yarıgrubunun

$$w(i)\equiv i(mod\, n)$$

olan en küçük elemanı olduğundan bu

$$w(i)\notin S$$

anlamına gelir. Böylece Ap(S,n)'nin tanımından,

$$w(i)\in Ap(S,n)$$

elde edilir.

Şimdi $a,b\in Ap(S,n)$ olsun. Ap(S,n)'nin tanımından,

$$a-n\notin S$$

$$b-n\notin S$$

olur. $a,b\in S$ ve S yarıgrup olmasından $a+b\in S$.

$$a\equiv b(mod\, n)$$

olduğunu varsayalım.

$$\Rightarrow n|(a-b)$$

$$\Rightarrow a=b+n\cdot k, k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a=b+n+n\cdot(k-1), k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow a-n=b+n\cdot(k-1)$$

$b\in S, a\in S$ ve son eşitlikten,

$$a-n\in S$$

olur. Bu $a\in Ap(S,n)$ olması ile çelişir. Böylece Ap(S,n) kümesi içinde

$$a\equiv b(mod\, n)$$

olacak şekilde $a,b\in Ap(S,n)$ elemanları yoktur. □

2.3.5 Örnek. $S =< 5, 7, 9 >= \Big\{0, 5, 7, 9, 10, 12, 14 \rightarrow \Big\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. 2.3.4 Yardımcı Teoremden,

$$Ap(S, 5) = \Big\{0 = w(0), w(1), w(2), w(3), w(4)\Big\}$$

$$w(1) \equiv 1(mod\, 5) \Rightarrow w(1) = 16$$

$$w(2) \equiv 2(mod\, 5) \Rightarrow w(2) = 7$$

$$w(3) \equiv 3(mod\, 5) \Rightarrow w(3) = 18$$

$$w(4) \equiv 4(mod\, 5) \Rightarrow w(4) = 9$$

Buradan,

$$Ap(S, 5) = \Big\{0, 7, 9, 16, 18\Big\}$$

elde edilir.

2.3.6 Örnek. $S =< 5, 6, 8 >= \Big\{0, 5, 6, 8, 10, 11, 12, 13, 14 \rightarrow \Big\}$ sayısal yarıgrubu için 2.3.4 Yardımcı teoremini kullanarak $Ap(S, 8)$ kümesi,

$$Ap(S, 8) = \Big\{0 = w(0), w(1), w(2), w(3), w(4), w(5), w(6), w(7)\Big\}$$

$$w(1) \equiv 1(mod\, 8) \Rightarrow w(1) = 17$$

$$w(2) \equiv 2(mod\, 8) \Rightarrow w(2) = 10$$

$$w(3) \equiv 3(mod\, 8) \Rightarrow w(3) = 11$$

$$w(4) \equiv 4(mod\, 8) \Rightarrow w(4) = 12$$

$$w(5) \equiv 5(mod\, 8) \Rightarrow w(5) = 5$$

$$w(6) \equiv 6(mod\, 8) \Rightarrow w(6) = 6$$

$$w(7) \equiv 7(mod\, 8) \Rightarrow w(7) = 15$$

Buradan,

$$Ap(S, 8) = \Big\{0, 5, 6, 10, 11, 12, 15, 17\Big\}$$

şeklinde hesaplanır.

Şimdiki önerme, sayısal yarıgruptaki elemanları tek bir şekilde temsil etmek için Apery kümelerinin nasıl kullanıldığını gösterir.

2.3.7 Önerme. [8] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Her $s \in S$ için,

$$s = k \cdot n + w$$

olacak şekilde bir tek

$$(k, w) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$$

ikilisi vardır.

İspat: $s \in S$ olsun.$s \in Ap(S, n)$ ise,

$$k = 0,\ w = s$$

alırsak,

$$s = 0 \cdot n + w$$

olacak şekilde

$$(0, s) \in \mathbb{N} \times Ap(S, n)$$

elde edilir. $s \notin Ap(S, n)$ ise Ap(S,n) kümesinin tanımından

$$s_1 = s - n$$

olur. Şimdi s_1 elemanı ile başlayalım. Bu durumda,

$$s_k = s - k \cdot n \in Ap(S, n)$$

olacak şekilde $k \in \mathbb{N}$ vardır.

$$s = k_1 \cdot n + w_1,\ k_1 \in \mathbb{N},\ w_1 \in Ap(S, n)$$

olsun. $k_1 \neq k$ olduğunu yani s elemanının

$$s = k.n + s_k$$

$$= k_1 \cdot n + w_1$$

olacak şekilde iki türlü yazıldığını varsayalım. Üstteki 1. eşitlikte

$$s_k = w$$

alabiliriz. Bu durumda

$$k_1 \neq k \Rightarrow 0 \neq (k_1 - k) \cdot n = w - w_1$$

$$\Rightarrow w \equiv w_i (mod\, n)$$

bulunur. $w, w_1 \in Ap(S, n)$ olduğundan bu bir çelişkidir. $\square$

2.3.8 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve $A \subseteq S$ olsun. Eğer,

$$S =< A >$$

ve A'nın hiçbir özalt kümesi bu özelliği sağlamıyor ise A kümesine S yarıgrubunun minimal üreteç kümesi denir.

2.3.9 Teorem. [8] Her sayısal yarıgrubun bir tek minimal üreteç kümesi vardır. Bu minimal üreteç kümesi sonludur.

İspat: S bir sayısal yarıgrup olsun. $2.1.15$ Yardımcı Teoremden

$$S^* \backslash (S^* + S^*)$$

S için bir minimal üreteç sistemidir. $2.3.7$ Önermeden, her $n \in S^*$ için

$$S =< Ap(S,n) \cup \{n\} >$$

elde ederiz. $Ap(S,n) \cup \{n\}$ sonlu bir küme olduğundan ve $S^* \backslash (S^* + S^*)$ minimal üreteç kümesini içereceğinden

$$S^* \backslash (S^* + S^*)$$

sonlu bir küme olmak zorunda kalır. □

$2.1.11$ önermesi $\mathbb{N}$'nin tüm alt monoidlerinin bir sayısal yarıgruba izomorfik olduğunu söyler. Bu önerme ve $2.3.9$ Teoreminden sıradaki sonuçları elde ederiz.

2.3.10 Sonuç. M, $\mathbb{N}$'nin bir alt monoidi olsun. M sonlu bir küme ve bir tek minimal üreteç kümesine sahiptir.

İspat: $obeb(M) = d$ olsun.

$$T = \left\{ \frac{x}{d} \mid d \in M \right\}$$

kümesi, M'nin $obeb(T) = 1$ olan bir alt kümesidir. $2.1.11$ Önermesinin ispatından, T bir sayısal yarıgruptur. $2.3.9$ Teoremden, T bir minimal üreteç sistemi vardır. A, T'nin bir minimal üreteç sistemi ise,

$$\{d.a \mid a \in A\}$$

kümesi de M için bir minimal üreteç kümesidir. □

2.3.11 Sonuç. M, $\mathbb{N}$'nin doğal sayılar kümesinin

$$\left\{ 0 \neq m_1 < m_2 < ... < m_p \right\}$$

ile üretilen bir alt monoidi olsun. Bu durumda, $\left\{m_1, m_2, ..., m_p\right\}$, M'nin minimal üreteç sistemidir ancak ve ancak $m_{i+1} \notin < m_1, ..., m_p >$.

2.3.12 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve $\left\{n_1 < n_2 < ... < n_p\right\}$, S'nin bir minimal üreteç sistemi olsun. n_1 sayısına, S'nin bir katlılığı denir ve $m(S)$ ile gösterilir. Minimal üreteç kümesinin eleman sayısı olan p'ye S'nin gömme boyutu denir ve $e(S)$ ile gösterilir.

2.3.13 Önerme. [8] S bir sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda,

(i) $m(S) = m(S \backslash \{0\})$

(ii) $e(S) \leq m(S)$

İspat: (i) S bir sayısal yarıgrup olduğundan, 2.3.9 Teoremden S'nin bir minimal üreteç kümesi vardır:$\left\{n_1 < n_2 < ... < n_p\right\}$ kümesinde n_1, S'nin katlılığı olduğundan

$$m(S) = n_1 = min(S \backslash \{0\})$$

elde edilir. 2.3.10 sonuçun ispatından,

$$S =< \{m(S)\} \cup Ap(S, m(S)) \backslash \{0\} >$$

ve bu minimal üreteç kümesinin eleman sayısı $m(S)$ dir. Böylece,

$$e(S) \leq m(S)$$

olur. □

2.4 Frobenyus ve Sözde-Frobenyus Sayıları

$a_1, ...a_n$ ler pozitif tamsayılar ve

$$obeb(a_1, ...a_n) = 1$$

olmak üzere,

$$a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n = 1$$

denkleminin çözümü olmayan en büyük tamsayı için bir formül bulma problemi ilk defa Frobenyus tarafından öne sürülmüştür. Bu,

$$S =< a_1, ..., a_n >$$

sayısal yarıgrubunda olmayan en büyük tamsayının hangisi olduğu problemine denktir. Bu sebeple

$$max(\mathbb{N} \backslash S)$$

sayısı S'nin Frobenyus sayısı olarak bilinmektedir.

2.4.1 Tanım. S sayısal yarıgrup olsun.

$$F(S) = max(\mathbb{N} \backslash S)$$

sayısına, S'nin Frobenyus sayısı,

$$c(S) = F(S) + 1$$

sayısına, S'nin kondüktörü denir. $\mathbb{N} \backslash S$ kümesine S'nin boşlukları denir ve

$$G(S) = \mathbb{N} \backslash S$$

ile gösterilir. G(S) kümesinin eleman sayısına S'nin cinsi denir ve

$$g(S)$$

ile gösterilir.

2.4.2 Örnek. $S =< 3, 4, 8 >= \left\{0, 3, 4, 7, 8, 9, 10 \rightarrow \right\}$

$$G(S) = \mathbb{N} \backslash S = 1, 2, 5, 6$$

$$g(S) = 4$$

$$F(S) = max(\mathbb{N} \backslash S) = 6$$

$$c(S) = F(S) + 1 = 6 + 1 = 7$$

2.4.3 Önerme. (Selmer Formülleri) [5] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun

(i) $F(S) = max(Ap(S, n)) - n$

(ii) $g(S) = \frac{1}{n}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \frac{n-1}{2}$

İspat: (i)

$$Ap(S,n)=\Big\{s\in S\mid s-n\notin S\Big\}$$

tanımından

$$max(Ap(S,n))-n\notin S$$

elde edilir.

$$x>max(Ap(S,n))-n$$

ise,

$$x+n>max(Ap(S,n))$$

olur. $w\in Ap(S,n)$ öyleki

$$w\equiv x+n(mod\,n)$$

olsun. $x+n>w$ olmasından

$$(x+n)-w=q.n$$

olacak şekilde q pozitif tamsayısı vardır.

$$\Rightarrow x=w+(q-1).n$$

$$\Rightarrow x\in S$$

elde edilir. Bu $max(Ap(S,n))-n$'den büyük sayılar S yarıgrubunda demektir. Böylece

$$\mathbb{N}\backslash S=max(Ap(S,n))-n$$

olur. Bu,

$$F(S)=max(Ap(S,n))-n$$

demektir.

(ii)

$w\in Ap(S,n)$ ise, her $i\in 1,....,n$, $w(i)$, S'nin,

$$w(i)\equiv i(modn)$$

olacak şekilde en küçük elemanı olduğunda

$$Ap(S,n)=\big\{0,w(i),..,w(n-1)\big\}$$

eşitliğinden

$$w=k_i.n+i$$

olacak şekilde k_i pozitif tamsayısı vardır. Böylece,

$$Ap(S,n) = \{0, k_1 \cdot n + 1, ..., k_{n-1} \cdot n + (n-1)\}$$

elde edilir. $x \in \mathbb{N}$ ve

$$x \equiv i(mod\, n)$$

olduğunu varsayalım.

$$x \in S \Leftrightarrow w(i) \leq x$$

olduğunu ispatlayalım. $x \equiv i(modn)$ olduğundan,

$$x = q_i \cdot n + i, q_i \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x - w(i) = (q_i \cdot n + i) - (k_i \cdot n + i)$$

$$= (q_i - k_i) \cdot n$$

Buradan,

$$w(i) \leq x \Leftrightarrow k_i \leq q_i$$

$$\Leftrightarrow x = (q_i - k_i) \cdot n + w(i) \in S$$

Bu,

$$x \notin S \Leftrightarrow x = q_i \cdot n + i,\ q_i < k_i$$

anlamına gelir.

$$g(S) = k_1 + k_2 + ... + k_{n-1}$$
$$= \frac{k_1 \cdot n + k_2 \cdot n + ... + k_{n-1} \cdot n}{n}$$
$$= \frac{k_1 \cdot n + k_2 \cdot n + ... + k_{n-1 \cdot n}}{n} + \frac{1 + 2 + ... + (n-1)}{n} - \frac{(n-1)}{2}$$
$$\frac{1}{n}[(k_1 \cdot n + 1) + ... + (k_{n-1} \cdot (n-1))] - \frac{(n-1)}{2}$$
$$= \frac{1}{2}(\sum_{w \in Ap(S,n)} w) - \frac{n-1}{2}$$

eşitliğini elde ederiz. □

2.4.4 Önerme. [6] a ve b, $obeb(a,b) = 1$ olan pozitif tamsayılar olsunlar.

(i) $F(< a, b >) = a \cdot b - a - b$

(ii) $g(S) = \frac{a \cdot b - a - b + 1}{2}$

İspat: [6]

2.4.5 Örnek. $S =< 4, 7 >= \left\{0, 4, 7, 8, 11, 12, 14, 15, 16, 18 \rightarrow \right\}$

$$G(S) = \mathbb{N} \backslash S = 1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 13, 17$$

$$g(S) = 9$$

$$F(S) = max(\mathbb{N} \backslash S) = 17$$

olduğunu önceki bilgilerimizle bulabiliriz. Şimdi örneğimizi yukarıdaki Önermeyi kullanarak çözelim:

$$F(< 4, 7 >) = 4.7 - 4 - 17$$
$$g(s) = \frac{(4.7 - 4 - 17) + 1}{2} = 9$$

2.4.6 Tanım. S bir sayısal yarıgrup olsun. $x \notin S$ ve her $s \in S^*$ için,

$$x + s \in S$$

oluyor ise $x \in \mathbb{N}$ sayısına Sözde-Frobenyus sayısı denir. Sözde-Frobenyus sayılarının kümesi $PF(S)$ ile gösterilir. $PF(S)$ kümesinin eleman sayısına S'nin tipi denir ve $t(S)$ ile gösterilir. Sözde-Frobenyus tanımından,

$$F(S) = max(PF(S))$$

olduğu açıktır. $a, b \in \mathbb{N}$ olsun. S üzerinde " $\leq_s$ " bağıntısı,

$$b - a \in S \Leftrightarrow a \leq_s b$$

ile tanımlansın. Bu bağıntı, S sayısal yarıgrubu üzerinde bir sıralama bağıntısıdır: $a \in S$ ve $a - a = 0 \in S \Leftrightarrow a \leq_s a$ Böylece, $\leq_s$ yansımalıdır.

$a, b \in S$ için $a \leq_s b \; ve \; b \leq_s a$ olsun.

$$a \leq_s b \Leftrightarrow b - a \in S$$

$$b \leq_s a \Leftrightarrow a - b \in S$$

S sayısal yarıgrup olduğundan,

$$b - a \in S \; ve \; a - b \in S$$

iken $a = b$ olmalıdır. Bu, " $\leq_s$ " bağıntısının ters simetrik olduğunu gösterir.

$a, b, c \in S$ için $a \leq_s b$ ve $b \leq_s c$ olsun.

$$a \leq_s b \Leftrightarrow b - a \in S$$

$$b \leq_s c \Leftrightarrow c - b \in S$$

sayısal yarıgrup olduğundan,

$$(b - a) + (c - b) = c - a \in S$$

elde edilir. Böylece, $\leq_s$ bağıntısı geçişmelidir.

2.4.7 Önerme. [8] S sayısal yarıgrup olsun.

$$PF(S) = max_{\leq_s}(\mathbb{N} \backslash S)$$

İspat: $x \in S$ olsun.2.4.6 Tanımdan,

$$x \notin \quad \text{ve } x + S^* \subseteq S$$

olur.

$$y \in \mathbb{N} \backslash S \text{ ve } x \leq_s y$$

olduğunu varsayalım.

$$x \neq y \Leftrightarrow y - x = s \in S^*$$

$$\Leftrightarrow y = x + s \in x + S^* \leq S$$

$$\Leftrightarrow y \in S$$

Bu $y \in \mathbb{N} \backslash S$ ile çelişir. Böylece $x = y$ yani $x \in max_{\leq_s}(\mathbb{N} \backslash S)$ elde edilir. Tersine $x \in max_{\leq_s}(\mathbb{N} \backslash S)$ olsun. Bir $s \in S^*$ için, $x + s \notin S$ ise,

$$(x + s) - x = s \in S$$

olduğundan

$$x \leq_s x + S$$

elde edilir. Bu x'in maximal olması ile çelişir. Bu durumda $x \notin S$ için,

$$x + s \in S$$

elde edilir. Böylece $x \in PF(S)$ $\square$

Şimdi, Sözde-Frobenyus sayılarının Apery kümelerini kullanarak nasıl karakterize edildiğini görelim.

2.4.8 Önerme. [10] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. Bu durumda,

$$PF(S) = \left\{w - n \mid w \in max_{\leq_s} Ap(S, n)\right\}$$

İspat: $x \in PF(S)$ olsun. Sözde-Frobenyus tanımından,

$$x \notin S \; ve \; x + n \in S$$

yazılır. Ap(S,n) tanımı ve

$$(x + n) - n = x \in S$$

olmasından,

$$x + n \in Ap(S, n)$$

elde edilir. $x + n$'nin Ap(S,n) üzerindeki $\leq_s$ bağıntısına göre maksimal olduğunu hesaplayalım: $w \in Ap(S, n)$ öyleki $x + n \leq_s w$ olsun.

$$\Rightarrow w - x - n = s \in S$$

$$\Rightarrow w - n = x + s$$

olur.$s \in S^*$ ise, $x + s \in S$. Buradan,

$$w - n \in S$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece,

$$x + n \leq_s w$$

olamaz. Yani $x + n$ maksimaldir. Tersine, $w \in max_{\leq_s} Ap(S, n)$ ve $s \in S^*$ olsun.

$$w + s - n \notin S$$

ise $w + s \in Ap(S, n)$ olması w'nun maksimal olması ile çelişir. Bu durumda,

$$(w - n) + s \in S$$

$$\Rightarrow w - n \in PF(S)$$

bulunur. □

2.4.9 Örnek. $S =< 5, 9, 21 >= \Big\{0, 5, 9, 10, 14, 15, 18, 19, 20, 21, 23 \rightarrow \Big\}$ sayısal yarıgrubunu alalım. Buradan,

$< 5, 9, 21, 27 >=< 5, 9, 10, 21 >=< 5, 9, 21 >$ olduğundan minimal üreteç sistemi

$$< 5, 9, 21 >$$

olur.

$e(S) = 3$
$m(S) = 5$
$G(S) = \mathbb{N}\backslash S = \Big\{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 11, 12, 13, 16, 17, 22\Big\}$
$g(S) = 13$
$F(S) = max(\mathbb{N}\backslash S) = \Big\{22\Big\}$
$c(S) = F(S) + 1 = 22 + 1 = 23$
$PF(S) = \Big\{16, 22\Big\}$
$t(S) = 2$
$F(S) = max(PF(S)) = 22$
şeklinde bulunur.

2.5 Sayısal Yarıgrup Halkaları

Bu bölümde, özel tipten halkaları ele alacağız. Grup halkaları, klasik cebiririn nispeten yeni konularından biridir. Halkaların, gruplara nazaran daha fazla cebirsel özelliklere sahip olması fikrinden ortaya çıkmışlardır.

2.5.1 Tanım. S bir yarıgrup ve R bir halka olsun.

$$R[S] = \Big\{f : S \longmapsto R \mid f^{-1}(0)\,\text{sonlu}\Big\}$$

kümesini alalım. Bu küme üzerinde, toplama ve çarpma işlemleri, $f, g \in R[S]$ için

$$f + g : S \longmapsto R,\ s \longmapsto f(s) + g(s)$$

$$f.g : S \longmapsto R,\ s \longmapsto \sum_{\substack{t_1.t_2 = s \\ t_1, t_2 \in S}} f(t_1).f(t_2)$$

olarak tanımlansın.

$(R[S], +, .)$ bir halkadır. Halka olma şartlarından bazılarını gösterelim:

$f, g \in R[S], s \in S$ için

$$(f+g)(s) = f(s) + g(s) = g(s) + f(s) = (g+f)(s)$$

olduğundan

$$f + g = g + f$$

dir. Benzer şekilde, $f, g, h \in R[S]$ için

$$f + (g+h) = (f+g) + h$$

olduğu kolayca görülebilir. Dolayısıyla "+" işlemi birleşmelidir.

$$0 : S \longmapsto R$$
$$s \longmapsto 0_R$$

fonksiyonu, $f \in R[S]$ için

$$(0+f)(s) = O(s) + f(s)$$
$$= 0_R + f(s) = f(s)$$

olduğundan $" + "$işleminin birim elemanıdır.

$$-f : S \longmapsto R$$
$$s \longmapsto -f(s)$$

ile tanımlı fonksiyon da, $f \in R[S]$ için

$$(f + (-f)) = f(s) + (-f)(s)$$

$$= f(s) - f(s) = 0(S)$$

olduğundan, $-f$, f'nin ters elemandır. Böylece, $(R[S], +, .)$ bir değişmeli gruptur.

$f, g, h \in R[S]$, $s \in S$ için

$$(f(gh))(s) = \textstyle\sum_{t_1.t_4=s} f(t_1).(gh)(t_4) = \sum_{t_1.t_4=s} f(t_1). \sum_{t_2.t_3=t_4} f(t_2).h(t_3)$$
$$= \textstyle\sum_{t_1.t_2.t_3.t_4=s} f(t_1).(g(t_2).h(t_3)$$

$f(t_1), g(t_2), h(t_3) \in R$ ve R'nin halka olmasından

$$= \sum_{t_1.t_2.t_3.t_4=s} (f(t_1).g(t_2)).h(t_3)$$
$$= \sum_{t_5.t_3=s} (\sum_{t_1.t_2=t_5} f(t_1).g(t_2)).h(t_3)$$

$$= \sum_{t_5.t_3=s} (f.g)(t_5).h(t_3)$$
$$= ((f.g)h)(s)$$

Böylece $R[S]$, "$\cdot$" işlemine göre birleşmelidir.

$f, g, h \in R[S]$, $s \in S$ için

$$(f.(g+h))(s) = \sum_{t_1.t_2=s} f(t_1).(g+h)(t_2)$$
$$= \sum_{t_1.t_2=s} f(t_1).(g(t_2)+h(t_2))$$
$$\sum_{t_1.t_2=s} f(t_1).g(t_2) + \sum_{t_1.t_2=s} f(t_1).h(t_2)$$
$$(f.g)(s) + (f.h)(s)$$

Benzer şekilde,

$$((g+h).f)(s) = (g.f)(s) + (h.f)(s)$$

elde edilir.

$R[S]$ halkasına, S yarıgrubunun R halkası üzerindeki yarıgrup halkası denir.

R bir halka t bir değişken olmak üzere, katsayıları R halkasında olan polinom halkası $R[t]$ ile gösterilir.

Şimdi $R[t]$ ile $R[S]$ arasındaki bağıntıyı görelim.

S yarıgrubu olarak $(\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$ grubunu alalım.

$$f : S \longmapsto R$$
$$s \longmapsto f(s)$$

dönüşümünün t^m kuvvetlerinin katsayılarını düzenlediğini düşünelim. Bu durumda f dönüşümü

$$\sum_{i \geq 0} f(i).t^i$$

polinomunu temsil eder. Bu sonsuz toplam, f'nin üzerindeki $f^{-1}(0)$ sonlu koşulundan dolayı sonlu olmak zorundadır.

Sonuçta, yarıgrup halkalarının notasyonlarını kullanarak, $S = (\mathbb{Z}^{\geq 0}, +)$ seçildiğinde, R üzerindeki polinom halkası elde edilmektedir. $R[S]$ halkasının elemanları genellikle

$$\sum_{s \in S} f(s) \cdot x^s \ , s \in S, \ f(s) \in R$$

formunda yazılır. $R[S]$ üzerindeki işlemler polinomlar halkası üzerindeki toplama ve çarpma işlemleri ile çelişir. Bu nedenle yarıgrup halkaları genelleştirilmiş polinom halkalarıdır.

2.5.2 Tanım. S_1, S_2 iki yarıgrup ve

$$\varphi : S_1 \longmapsto S_2$$

olsun. $\forall a, b \in S_1$

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$$

ise, φ'ye yarıgrup homomorfizması denir. φ homomorfizması $1-1$ ise, monomorfizma, örten ise epimorfizma ve hem $1-1$ hemde örten ise izomorfizma adını alır.

$S =< n_1, ..., n_p >$ bir sayısal yarıgrup ve $k[x_1, ..., x_p]$ k cismi üzerindeki $x_1, ..., x_p$ değişkenli polinomlar halkası olsun. $k[S]$, k cismi üzerindeki sayısal yarıgrup halkası olmak üzere

$$\psi : k[x_1, ..., x_p] \longmapsto k[S]$$
$$x_i \longmapsto t^{n_i} \ i = i, ..., p$$

dönüşümünü alalım. ψ bir yarıgrup homomorfizmasıdır:

$p_1, p_2 \in k[x_1, ..., x_p]$ olsun. Bu durumda,

$$p_1 = \sum_{i_p,..,i_1} r_{i_1,...i_p}.x_1^{i_1}...x_p^{i_p}$$

$$p_2 = \sum_{i_p,..,i_1} S_{i_1,...i_p}.x_1^{i_1}...x_p^{i_p}$$

olur.

$$p_1 + p_2 = \sum_{i_p,..,i_1} (r_{i_1,...i_p} + S_{i_1,...i_p}).x_1^{i_1}...x_p^{i_p}$$

olmasından,

$$\psi(p_1 + p_2) = \psi(\sum_{i_p,..,i_1} (r_{i_1,...i_p} + S_{i_1,...i_p}).x_1^{i_1}...x_p^{i_p})$$
$$= \sum_{i_p,..,i_1} (r_{i_1,...i_p} + S_{i_1,...i_p}).(t^{n_1})^{i_1}...(t^{n_p})^{i_p} \in k[S]$$

ve $k[S]$ halka olduğundan,

$$= \sum_{i_p,..,i_1} r_{i_1,...i_p}.(t^{n_1})^{i_1}...(t^{n_p})^{i_p} + \sum_{i_p,..,i_1} S_{i_1,...i_p}.(t^{n_1})^{i_1}...(t^{n_p})^{i_p}$$
$$= \psi(p_1) + \psi(p_2)$$

elde edilir.

$$\text{çek}\psi = \big\{f(x_1, ..., x_p) \in k[x_1, ..., x_p] \mid \psi(f) = 0\big\}$$
$$= \big\{f(x_1, ..., x_p) \in k[x_1, ..., x_p] | f(t^{n_1}...t^{n_p}) = 0\big\}$$

elde edilir.

2.5.3 Tanım. ψ homomorfizmasının çekirdeği $çek\psi$'ye S'yi tanımlayan ideal denir.

$$\psi : k[x_1, ..., x_p] \longmapsto k[S]$$

dönüşümü

$$k[x_1, ..., x_p]/çek\psi \cong k[S] = k[t^{n_1}...t^{n_p}]$$

izomorfizmasını verir.

2.6 Formal Yarıgrup Halkaları

Bu bölümde R bir halka ve S bir yarıgrup olmak üzere, $R[[S]]$ formal yarıgrup halkasının kuruluşunu anlatacağız.

$$f : S \longmapsto R$$
$$s \longmapsto r_s$$

bir dönüşüm olsun. Yine, tıpkı yarıgrup halkalarındaki gibi

$$R[[S]] = \{f \mid f : S \longmapsto R\}$$

$R[[S]]$ halkasının elemanlarını yine $\sum_{s\in S} r_s \in S$ (sonsuz olabilen) formal toplam ile temsil ediyoruz. Toplama işlemi, karşılık gelen katsayıların toplanması ile tanımlanırken çarpma işlemi

$$(\sum_{s\in S} r_s.s).(\sum_{s'\in S} r_{s'}.s') = \sum_{t\in S}(\sum_{\substack{s.s'=t \\ s.s'\in S}} r_s.r_{s'}).t$$

olarak tanımlanır.

Tıpkı yarıgrup halkalarındaki gibi benzer izlemlerle $R[[S]]$ için halka şartları sağlanabilir. Bu halkaya, S yarıgrubunun formal yarıgrup halkası adı verilir.

$$S = \{x_1^{k_1}, ..., x_p^{k_p} \mid (k_1, ..., k_p) \in \mathbb{N}^p\}$$

yani p değişkenli tüm tek terimlilerin kümesi olduğunda, $R[[S]]$ yerine

$$R[[x_1, ..., x_p]]$$

notasyonu kullanılır.

2.6.1 Tanım. $R[[x_1, ..., x_p]]$ halkasına R halkası üzerindeki $(formal)$ kuvvet serileri halkası denir.

3. SİMETRİK SAYISAL YARIGRUPLAR

Simetrik sayısal yarıgruplar muhtemelen literatürde en çok çalışılmış konulardan biridir. Bunun başlıca nedenlerinden biri bu sayısal yarıgrupların olağanüstü özellikleri sağlamasıdır. Bir diğeride değişmeli cebirdeki pek çok problemin çözülmesinde araç olarak kullanılmasını sağlayan halka teori ile bağlantısıdır. [7]

Simetrik sayısal yarıgruplar, tek sayı olan Frobenyus sayısına sahiptirler. Çift sayı olan Frobenyus sayısına sahip sayısal yarıgrup kavramı bizi sözde simetrik sayısal yarıgrup tanımına götürür. Bu yarıgruplarda simetrik sayısal yarıgruplar ile benzer güzel özelliklere sahiptir. Sözde-simetrik kavramı, simetrik kavramının bir çeşit genellemesidir. İndirgenemez sayısal yarıgruplar bu iki aileyi biraraya getirir.

3.1 İndirgenemez Sayısal Yarıgruplar

Sayısal yarıgruplar, sonlu sayıda indirgenemez sayısal yarıgrupların kesişimi olarak ifade edilebilmektedir. Bu yarıgruplar, simetrik ve sözde-simetrik sınıflarına ayrılmıştır. Bu kavramı ilk olarak Rosales ve Branco [11] tarafından ortaya konulmuştur.

Literatürde genellikle simetrik ve sözde-simetrik kavramları birbirinden bağımsız çalışılmıştır. İndirgenemez sayısal yarıgruplar, bu iki aileyi bir araya getirmektedir.

Bu bölümde, indirgenemez sayısal yarıgrupları tanıttıktan sonra, ayrıştırıldığı simetrik ve sözde-simetrik sınıflarının karakterizasyonunu vereceğiz.

3.1.1 Tanım. S bir sayısal yarıgrup ve S_1, S_2

$$S \subseteq S_1,\ S \subseteq S_2\ ve\ S = S_1 \cap S_2$$

özelliklerine sahip sayısal yarıgruplar olsun. Bu durumda,

$$S = S_i,\ i = 1, 2$$

ise S'ye indirgenemez sayısal yarıgrup denir. Bir başka ifadeyle, bir S sayısal yarıgrubu, kendisini kapsayan S_1 ve S_2 sayısal yarıgruplarının kesişimi olarak yazılamıyor ise, S'ye indirgenemezdir denir.

3.1.2 Yardımcı Teorem. [12] $\mathbb{N} \neq S$ bir sayısal yarıgrup ve $F(S)$, S'nin Frobenyus sayısı olsun. Bu durumda,

$$S \cup \{F(S)\}$$

bir sayısal yarıgruptur.

İspat: $S \cup \{F(S)\}$'nin bir sayısal yarıgrup olduğunu göstermek için $2.1.9$ Tanımı kullanalım:

S bir sayısal yarıgrup olduğundan,

$$0 \in S \Rightarrow 0 \in S \cup \{F(S)\}$$

olur.

$x, y \in S \cup F(S)$ alalım.

$$x + y \geq F(S) \Rightarrow x + y \in S \cup \{F(S)\}$$

elde edilir.

$x, y \in S$ için $x + y \in S$ olduğundan

$$x + y \in S \cup \{F(S)\}$$

bulunur.

Son olarak

$$\mathbb{N} \backslash (S \cup \{F(S)\}) = (\mathbb{N} \backslash S) \cap (\mathbb{N} \backslash \{F(S)\})$$

eşitliğinden , $\mathbb{N} \backslash S$'nin sonlu $\mathbb{N} \backslash \{F(S)\}$'nin sonsuz olmasından,

$$\mathbb{N} \backslash (S \cup \{F(S)\})$$

kümesinin sonlu olduğu görülüyor. □

3.1.3 Teorem. [11] S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) S indirgenemezdir.

(ii) S, S'yi kapsayan ve Frobenyus sayıları $F(S)$ ile aynı olan tüm sayısal yarıgruplar kümesi içerisinde maksimaldir.

(iii) S, S'yi kapsayan ve Frobenyus sayıları $F(S)$' yi içermeyen tüm sayısal yarıgruplar kümesi içerisinde maksimaldir.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ T, $F(S) = F(T)$ koşulunu sağlayan bir sayısal yarıgrup olsun. $S \subseteq T$ ise,

$$\begin{aligned} T \cap (S \cup F(S)) &= (T \cap S) \cup (T \cap F(S)) \\ &= (T \cap S) \cup (T \cap F(T)) \\ &= S \cup \varnothing \\ &= S \end{aligned}$$

dir. ve $S \neq S \cup F(S)$ olduğundan, $T \cap (S \cup F(S)) = S$ eşitliğnden

$$S = T$$

sonucuna varılır.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ T, $F(S) \notin T$ ve $S \subseteq T$ olan bir sayısal yarıgup olsun.

$$T_1 = T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, ...\}$$

alalım. $F(S) \notin T$ olduğundan,

$$F(T_1) = F(S)$$

olduğu açıktır. T_1'in sayısal yarıgrup olduğunu gösterelim: T bir sayısal yarıgrup olduğundan, $0 \in T$ ve böylece $0 \in T_1$ dir. $x, y \in T_1$ alalım.

$$x + y > F(T_1) = F(S) \Rightarrow x, y \geq F(S) + 1$$

ve T_1 tanımından

$$x + y \in T_1$$

elde edilir. $x, y \in T$ için $x + y \in T$ olduğundan

$$x + y \in T_1$$

olur. $\mathbb{N} \backslash (T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, ...\})$ kümesinin sonlu olduğunu gösterelim: $\mathbb{N} \backslash (T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, ...\}) = (\mathbb{N} \backslash T) \cap (\mathbb{N} \backslash \{F(S)+1, F(S)+2, ...\})$ yazılır. T sayısal yarıgrup olduğundan, $(\mathbb{N} \backslash T)$ sonludur. $(\mathbb{N} \backslash \{F(S)+1, F(S)+2, ...\})$ kümeside sonlu olduğundan arakesit kümeside sonlu bir kümedir. $S \subseteq T$ olmasından $S \subseteq T_1$'dir. (ii) hipotezinden

$$S = T_1$$

olur. Her $k \geq 1$ için $F(S) + k \in S$ olduğundan ve

$$T_1 = T \cup \{F(S)+1, F(S)+2, ...\}$$

eşitliğinden,

$$S = T$$

elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (ii)$ S_1 *ve* S_2,

$$S \subseteq S_1, S \subseteq S_2,\ S = S_1 \cap S_2$$

olacak biçimde iki sayısal yarıgrup olsun. S'nin indirgenemez olduğunu göstermek için

$$S = S_i,\ i = 1, 2$$

olduğunu göstermeliyiz.

$$F(S) \notin S \Rightarrow F(S) \in S_1 \text{ veya } F(S) \in S_2$$

$$F(S) \in S_1 \Rightarrow F(S) \notin S_2$$

ve (iii) hipotezinden,

$$S = S_2$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$F(S) \in S_2 \Rightarrow F(S) \notin S_2$$

ve (iii) den

$$S = S_1$$

olur. □

3.2 Simetrik ve Sözde-Simetrik Sayısal Yarıgruplar

Bu bölümde, simetrik ve sözde-simetrik yarıgruplarının tanımlarını verdikten sonra, bu yarıgrupların bazı karakterizasyonlarını vereceğiz.

3.2.1 Tanım. S indirgenemez bir sayısal yarıgrup olsun. Bu S sayısal yarıgrubuna $F(S)$ Frobenyus sayısı tek ise simetrik yarıgrup, çift ise sözde-simetrik yarıgrup denir.

3.2.2 Önerme. [13] S bir sayısal yarıgrup olsun.

$$H = \{x \in \mathbb{Z} \backslash S \mid F(S) - x \notin S,\, x \neq \frac{F(S)}{2}\}$$

kümesinin boş küme olmadığını varsayalım. $h = max\{H\}$ ise, $S \cup \{h\}$ Frobenyus sayısı $F(S)$ olan bir sayısal yarıgruptur.

İspat: S bir sayısal yarıgrup olduğundan

$$0 \in S \Rightarrow 0 \in S \cup \{h\}$$

elde edilir. $a, b \in S \cup \{h\}$ için

$a, b \in S$ ise S sayısal yarıgrup olduğundan

$$a + b \in S$$

$$\Rightarrow a + b \in S \cup \{h\}$$

bulunur. $a \in S^*$ olsun. $h = max\{H\}$ olmak üzere,

$$a + h \in S \cup \{h\}$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır. $a + h \notin S \cup \{h\}$ olduğunu varsayalım.

$$a + h \notin S \Rightarrow a + h \in \mathbb{Z} \backslash S$$

elde edilir. $F(S) - (a + h) \notin S$ olsaydı H'nin tanımından,

$$a + h \in H$$

olurdu. Bu, h'nin maksimum olması ile çelişir. Bu durumda,

$$F(S) - (a + h) \in S$$

bulunur. Dolayısı ile

$$F(S) - h = a + F(S) - a - h \in S$$

olur. Bu h'nin tanımı ile çelişir. Böylece

$$a + h \in S$$

olmalıdır. Bu

$$a + h \in S \cup \{h\}$$

olduğu anlamına gelir. $2h \notin S$ ise,

$$2h \in \mathbb{Z} \backslash S$$

olur. h'nin maksimal olmasından,

$$2h \notin H \Rightarrow F(S) - 2h \in S$$

$$F(S) - 2h = s, s \in S$$

$$\Rightarrow F(S) - h = s + h \in S$$

elde edilir. Bu, h'nin tanımıyla çelişir. Sonuçta,

$$2h \in S$$

olur.

$$\mathbb{N} \backslash (S \cup \{h\}) = (\mathbb{N} \backslash S) \cap (\mathbb{N} \backslash \{h\})$$

sonlu bir kümedir. Böylece,

$$S \cup \{h\}$$

bir sayısal yarıgruptur. □

3.2.3 Tanım. S bir sayısal yarıgrup olsun.

$$\{x \in \mathbb{Z} \backslash (S \cup \frac{F(S)}{2}) \mid F(S) - x \notin S\}$$

kümesinin bir maksimum elemanı var ise, bu elemana özel boşluk denir ve $SG(S)$ ile gösterilir.

3.2.4 Örnek. $S =< 7, 9, 11, 17 >= \{0, 7, 9, 11, 14, 166, 17, 18, 20, 21 \rightarrow\}$

S'nin boşlukları,

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 13, 15, 19\}$$

olur.

$$F(S) = 19$$

olduğundan

$$x < \frac{19}{2} \; ve \; 19 - x \notin S$$

$$H(S) = \{4, 6, 13, 15\}$$

elde edilir. Böylece ,

$$maxH(S) = 15$$

bulunur.

3.2.5 Önerme. [8] S bir sayısal yarıgrup olsun.

(i) S simetriktir. $\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ için $F(S) - x \in S$

(ii) S sözde-simetriktir $\Leftrightarrow$ Her $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ için $F(S) - x \in S$ veya $x = \frac{F(S)}{2}$

İspat: (i) ($\Rightarrow$): S'nin simetrik olduğunu varsayalım.

$$F(S) - x \notin S$$

olacak şekilde $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ elemanı olduğunu kabul edelim. S'nin simetrikliğinden, $F(S)$ bir tek sayıdır.

$$H(S) = \left\{x \in \mathbb{Z}\backslash S \mid x \neq \frac{F(S)}{2}\right\}$$

olduğundan ve $x \in H$'den $H \neq \varnothing$ dır. Böylece $3.2.2$ Önermeden

$$T = S \cup \left\{h = max\{H\}\right\}$$

$F(S) = F(T)$ olan bir sayısal yarıgruptur. Ayrıca $S \subset T$'dir. Bu durum S'nin indirgenemez olmasından $3.1.3$ Teoreminin (iii) özelliği ile çelişir. Sonuçta her $x \in \mathbb{Z}\backslash S$

$$F(S) - x \in S$$

elde edilir.

($\Leftarrow$): Her $x \in \mathbb{Z}\backslash S$ için $F(S) - x \in S$ olduğunu kabul edelim. S'nin simetrik olduğunu göstermek için ilk önce $F(S)$ Frobenyus sayısının bir tek sayı olduğunu görelim:

$F(S) \in S$ bir çift sayı olduğunu varsayalım.

$$\frac{F(S)}{2} \notin S \Rightarrow \frac{F(S)}{2} \in \mathbb{Z}\backslash S$$

Kabulümüzden,

$$F(S) - \frac{F(S)}{2} = \frac{F(S)}{2} \in S$$

elde edilir. Bu çift sayı olarak Frobenyus sayısının S'ye düşmesi anlamına gelir. Bu bir çelişkidir. Bu durumda $F(S)$ bir tek sayıdır.

Şimdi S'nin indirgenemez olduğunu gösterelim. Bunun için $3.1.3$ Teoreminin doğrultusunda, S'nin $F(S)$'yi içermeyen tüm sayısal yarıgruplar içerisinde maksimum olduğunu ispatlayalım.

$S \subset T \Rightarrow x \in T\backslash S$ alabiliriz.

Hipotezden,

$$F(S) - x \in S \Rightarrow F(S) - x \in T$$

$$F(S) = (F(S) - x) + x \in T$$

$$F(S) \in T$$

Bu bir çelişkidir. Bu durumda,

$$S = T$$

elde edilir ki, bu S'nin indirgenemez olduğu anlamına gelir. $\square$

3.2.6 Örnek. $S =< 3,8 >= \{0, 3, 6, 8, 9, 11, 12, 14, \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S) = \{1, 2, 4, 5, 7, 10, 13\}$$

$F(S) = 13$ Frobenyus sayısı tek ve her $x \in \mathbb{Z} \backslash S$ için $F(S) - x \in S$ olduğundan $3.2.1$ Tanım ve $3.2.5$ Önermeden S sayısal yarıgrubu simetriktir.

3.2.7 Önerme. [14] S bir sayısal yarıgrup olsun.

$$S\text{simetriktir} \Leftrightarrow g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$$

İspat: [14]

3.2.8 Örnek. $S =< 7, 8, 12 >= \{0, 7, 8, 12, 14, 15, 16, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26 \rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunu alalım.

$$G(S) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 11, 13, 17, 18, 25\}$$

$$g(S) = 13$$

$$F(S) = 25$$

$$S\text{simetriktir} \Leftrightarrow g(S) = \frac{25+1}{2} = 13$$

$2.4.4.$ Önerme ve $3.2.7$ Önermeden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.2.9 Sonuç. [8] S bir sayısal yarıgrup olsun. Gömme boyutu 2 olan tüm sayısal yarıgruplar simetriktir.

İspat: S, $e(S) = 2$ olan bir sayısal yarıgrup olsun.

$$S =< a, b > \text{ ve obeb}(a, b) = 1\text{olur.}$$

Önerme $2.4.4.$'ten $F(< a, b >) = a \cdot b - a - b$ ve $g(S) = \frac{a \cdot b - a - b + 1}{2}$ olduğunu biliyoruz. Burada $g(S) = \frac{F(S)+1}{2}$ dir. bu durumda $3.2.7$ Önermeden S simetriktir denir.

3.3 Apery Kümeleri ve Simetriklik

İndirgenemez sayısal yarıgrupların Apery kümeleri özel formlara sahiptirler. Bu bölümde, Apery kümelerini kullanarak indirgenemez sayısal yarıgrupların nasıl karakterize edildiğini göstereceğiz.

3.3.1 Yardımcı Teorem. [8] S sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun.
$x, y \in S$ ve $x + y \in Ap(S, n)$ ise $x, y \in Ap(S, n)$.

İspat: S sayısal yarıgrubunun $n \in S^*$'a göre Apery kümesinin

$$Ap(S, n) = \{s \in S \mid s - n \notin S\}$$

olduğunu biliyoruz.

$y \notin Ap(S, n)$ olduğunu varsayalım. Dolayısı ile

$$\Rightarrow y - n \in S$$

dir. $x \in S$ olduğundan,

$$(x + y) - n \in S$$

$$\Rightarrow x + y \notin Ap(S, n)$$

elde edilir. Bu, $x + y \in Ap(S, n)$ olması ile çelişir. Böylece

$$y \in A(S, n)$$

elde edilir. Benzer şekilde $x \in Ap(S, n)$ olur. □

3.3.2 Önerme. [9] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun. $n \in S$ için

$$Ap(S, n) = \{0 = a_0 < a_1 < .... < a_{n-1}\}$$

kümesidir. Bu durumda,

$$S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow \forall i \in \{0, 1, ...(n-1)\} \text{ için } a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$$

İspat: $\Rightarrow$ S'nin bir sayısal yarıgrup olduğunu biliyoruz. 2.4.2 Önermesi, ile verilen Selmer Formülün'den

$$F(S) = max(Ap(S, n)) - n$$

olduğunu biliyoruz. Böylece,

$$F(S) = a_{n-1} - n$$

olur. $0 \leqslant i \leqslant n-1$ için $a_i \in Ap(S,n)$ ve Apery kümesi tanımından,

$$a_i - n \notin S$$

$$\Rightarrow a_i - n \in \mathbb{Z} \backslash S$$

S simetrik olduğundan $3.2.5$ Önermeden

$$F(S) - (a_i - n) = F(S) - a_i + n$$

$$= a_{n-1} - n - a_i + n$$

$$= a_{n-1} - a_i \in S$$

elde edilir. $a_{n-1} - a_i = s \in S$ diyelim.

$$\Rightarrow a_{n-1} = a_i + s \in Ap(S,n)$$

$3.3.1$ Yardımcı Teoremden,

$$s \in Ap(S,n)$$

elde edilir. Bu durumda,

$$s = a_j$$

olacak şekilde $j \in 0, ...(n-1)$ bulunabilir.

Her $0 \leqslant i \leqslant n-1$ için bu doğru olduğundan

$$j = n - 1 - i$$

elde ederiz.

$\Leftarrow$ Her $i \in 0, ..., (n-1)$ için,

$$a_i + a_{n-1-i} = a_{n-1}$$

olduğunu varsayalım. Hipotezden,

$$max_{\leqslant_s} Ap(S,n) = a_{n-1}$$

S'nin simetrikliğini ispatlamak için

$$\forall x \in \mathbb{Z} \backslash S \Rightarrow F(S) - x \in S$$

olduğunu görelim. $2.4.5$ Önermeden,

$$PF(S) = \{ w - n \mid w \in max_{\leqslant_s} Ap(S,n) \}$$

$$= \{a_{n-1} - n\}$$

$$= \{max(Ap(S,n)) - n\}$$

dir

Selmer Formüllerinden,

$$PF(S) = \{F(S)\}$$

bulunur.

2.4.4. Önermeden,

$$PF(S) = max_{\leqslant_s}(\mathbb{N}\backslash S) = F(S)$$

olur.

$$x \in \mathbb{Z}\backslash S \Rightarrow x \notin S$$

$$\Rightarrow x \leqslant_s F(S)$$

$\leqslant_s$ sıralama bağıntısının tanımından,

$$F(S) - x \in S$$

elde edilir.

$F(S)$'nin tekliği için 3.2.5 Önermesinin ispatındaki argüman aynen tekrarlanabilir. □

Şimdi, simetrik sayısal yarıgrupların tipi 1 olan sayısal yarıgruplar olduğunu ispatlayacağız.

3.3.3 Sonuç. [8] S bir sayısal yarıgrup olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) S simetriktir.

(ii) $PF(S) = F(S)$

(iii) $t(S) = 1$

İspat: $(i) \Leftrightarrow (ii)$ S simetrik sayısal yarıgrup olsun. Bu durumda, 3.3.2 Önermenin ispatından,

$$PF(S) = F(S)$$

eşitliği elde edilir.

$(ii) \Leftrightarrow (iii)$ $t(S)$, $PF(S)$ kümesinin eleman sayısı olduğundan

$$t(S) = 1$$

bulunur. □

$2.4.8$ Önerme ve $3.3.3$ Sonuçtan aşağıdaki sonucu elde ederiz.

3.3.4 Sonuç. [8] S bir sayısal yarıgrup ve $n \in S^*$ olsun.

$$S \text{ simetriktir} \Leftrightarrow \text{Maximal}_{\leqslant_s} Ap(S,n) = \{F(S)+n\}$$

3.3.5 Örnek. $S =< 4,6,7 >= \{0,4,6,7,8,10,11,\rightarrow\}$ sayısal yarıgrubunun simetrikliğini yukarıdaki sonuca göre inceleyelim.

$$G(S) = \{1,2,3,5,9\} \text{ ve } F(S) = 9$$

$$Ap(S,4) = \{0 = w(0), w(1), w(2), w(3)\}$$

$$Ap(S,4) = \{0,6,7,13\}$$

$Maximal_{\leqslant_s} Ap(S,4)$ kümesini hesaplayalım.

$$0 \leqslant_s 6,\ 0 \leqslant_s 7,\ 0 \leqslant_s 13$$

$$6 \nleqslant_s 7,\ 6 \leqslant_s 13$$

$$7 \leqslant_s 13$$

Buradan $Maximal_{\leqslant_s} Ap(S,4) = \{13\}$ bulunur. Bu durumda,

$$S\ simetriktir \Leftrightarrow Maximal_{\leqslant_s} Ap(S,4) = \{13\} = \{F(S) = 9+4 = 13\}$$

4. SAYISAL YARIGRUPLARI YAPIŞTIRMAK

Sayısal yarıgruplar karşılık geldiği varyetenin, tam kesişim olmak gibi özelliklerini incelemek için de literatürde oldukça çalışılmıştır. Delorme makalesinde [15] bir sayısal yarıgrubun tam kesişim olması için gerekli ve yeterli koşulun bu sayısal yarıgrup, iki tam kesişim sayısal yarıgrubun yapıştırmasıdır önermesini ispatlamıştır. Rosales doktora tezinde [16] Delorme'nin karektarizasyonunu tekrardan yazarak, sayısal yarıgrupların yapıştırılması kavramını tanıtmıştır. Daha sonra bu tanım afin yarıgruplar için genelleştirilmiştir ve bir afin yarıgrup tam kesişimdir ancak ve ancak bu yarıgrup iki afin yarıgrubun yapıştırmasıdır, önermesi yapıştırma fikri kullanılarak ispatlanmıştır. [16]

4.1 Serbest Monoidler ve Temsilcileri

4.1.1 Tanım. $\varnothing \neq X$ bir küme olsun. X üzerinde bir ikili işlem, $X * X$'in bir σalt kümesidir. $(a, b) \in \sigma$ ise $x\sigma y$ yazarız ve x,y ile σ-bağıntılıdır denir.

Her $a, b, c \in X$ için;

$a\sigma a$ ise σ yansımalı,

$a\sigma b$ iken $b\sigma a$ ise σ simetrik,

$a\sigma b$ ve $b\sigma c$ iken $a\sigma c$ ise σ geçişmeli bağıntı oluyor ise σ bir denklik bağıntısıdır denir.

4.1.2 Tanım. $a \in X$ ve σ bir denklik bağıntısı olsun. a'nın $\sigma-$ sınıfı

$$[a]_\sigma = \big\{b \in X \mid a\sigma b\big\}$$

olarak tanımlanır.

$$\frac{X}{\sigma} = \big\{[a]_\sigma \mid a \in X\big\}$$

kümesine X'in σ ile bölüm kümesi denir ve bu kümeye X'in bir parçalanışı denir.

4.1.3 Tanım. M bir monoid ve σ M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

Her $a, b, c \in M$ için

$$a\sigma b \text{ iken } (a + c)\sigma(b + c)$$

ise σ'ya M monoidi üzerinde bir kongrüans denir.

4.1.4 Yardımcı Teorem. [8] M bir monoid ve σ M üzerinde bir kongrüans olsun. $\frac{M}{\sigma}$ kümesi üzerinde toplama işlemi

$$[a]_\sigma + [b]_\sigma = [a+b]_\sigma$$

olarak tanımlansın. $(\frac{M}{\sigma}, +)$ bir monoiddir.

İspat: $(M,+)$ bir monoid olduğundan "+" işlemi M üzerinde birleşmelidir ve M'nin "+" işlemine göre birim elemanı vardır.

İlk önce "+" işleminin $\frac{M}{\sigma}$ kümesinde iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Bunun için

$[a]_\sigma = [c]_\sigma$ ve $[b]_\sigma = [d]_\sigma$ iken $[a]_\sigma + [b]_\sigma = [c]_\sigma + [d]_\sigma$ eşitliğini buna ek olarak

$$[a+b]_\sigma = [c+d]_\sigma$$

eşitliğini göstereceğiz. $[a]_\sigma = [c]_\sigma$ ise $c \in [a]_\sigma \Rightarrow a\sigma c$

$[b]_\sigma = [d]_\sigma$ ise $d \in [b]_\sigma \Rightarrow b\sigma d$

σ bir kongrüans olduğundan

$$(a+b)\sigma(c+d)$$

$$\Rightarrow [a+b]_\sigma = [c+d]_\sigma$$

elde edilir.

"+" işlemi $\frac{M}{\sigma}$'da birleşmelidir:

$\forall [a]_\sigma, [b]_\sigma, [c]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ için

$$([a]_\sigma + [b]_\sigma) + [c]_\sigma = ([a+b]_\sigma) + [c]_\sigma$$

$$= [(a+b)+c]_\sigma$$

$a, b, c \in M$ ve $(M,+)$ bir monoid olduğundan

$$= [a+(b+c)]_\sigma$$

$$= [a]_\sigma + ([b+c][a]_\sigma)$$

$$= [a]_\sigma + [b][a]_\sigma + [c][a]_\sigma$$

olur.

M değişmeli bir monoid olduğundan her $a, b \in M$ için

$$[a]_\sigma + [b]_\sigma = [a+b]_\sigma = [b+a]_\sigma$$

$$= [b]_\sigma + [a]_\sigma$$

"+" işlemi $\frac{M}{\sigma}$'da değişmelidir.

$0 \in M$ iken $[0]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ olur ve her $[a]_\sigma \in \frac{M}{\sigma}$ için

$$[a]_\sigma + [0]_\sigma = [a+0]_\sigma = [a]_\sigma$$

eşitliğinden $[0]_\sigma$, $\frac{M}{\sigma}$'nin birimidir. □

4.1.5 Tanım. $f : X \longrightarrow Y$ bir monoid homomorfizması olsun. Bu durumda, her $x, y \in X$ için

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \text{ ve } f(a) = 0$$

olur. f homomofrizmasının çekirdek kongrüansı

$$\text{\c{c}}ek(f) = \big\{(a,b) \in X * X \mid f(a) = f(b)\big\}$$

kümesidir.

$\text{\c{c}}ek(f)$ bağıntısı, X üzerinde bir kongrüanstır:

$a, b, c \in X$ olsun.

$a(\text{\c{c}}ekf)b$ olsun

$$\Rightarrow f(a) = f(b)$$

$$\Rightarrow f(a) + f(c) = f(b) + f(c)$$

$$\Rightarrow f(a+c) = f(b+c)$$

$$\Rightarrow (a+c)\text{\c{c}}ekf(b+c)$$

elde edilir.

4.1.6 Tanım. $f : X \longrightarrow Y$ bir monoid homomorfizması olsun.

$$G\ddot{o}r(f) = \big\{f(a) \mid a \in X\big\}$$

kümesine f'nin görüntüsü denir. $G\ddot{o}rf$ Y'nin bir alt monoididir.

4.1.7 Tanım. $\varnothing \neq X$ bir küme olsun. X üzerindeki serbest monoid,

$$M(X) = \big\{\lambda_1 \cdot x_1 + ... + \lambda_k \cdot x_k \mid k \in \mathbb{N}, \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{N}, x_1, ..x_k \in X\big\}$$

kümesi olarak tanımlanır.

$M(X)$ üzerindeki toplama işlemi,

$$\lambda_1.x_1 + ... + \lambda_k.x_k, \mu_1.x_1 + ... + \mu_k.x_k \in M(X)$$

elemanları için $(\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k)+(\mu_1.x_1+....+\mu_k.x_k)=(\lambda_1+\mu_1).x_1+....+(\lambda_k+\mu_k).x_k)$ olarak tanımlanır.

$(M(X),+)$ bir monoiddir.

4.1.8 Yardımcı Teorem. [8] M, $\{m_1...,,m_k\}\subset M$ ile üretilen bir monoid ise,

$$\varphi : M(X)\longrightarrow M$$

$$\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k\longrightarrow\lambda_1.m_1+....+\lambda_k.m_k$$

dönüşümü bir monoid epimorfizmasıdır. Böylece

$$G\ddot{o}r(\varphi)=M$$

dir.

İspat: $\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k,\mu_1.x_1+....+\mu_k.x_k\in M(X)$olsun

$$\varphi((\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k)+(\mu_1.x_1+....+\mu_k.x_k))=\varphi((\lambda_1+\mu_1).x_1+....+(\lambda_k+\mu_k).x_k)$$

$$(\lambda_1+\mu_1).m_1+....+(\lambda_k+\mu_k).m_k$$

$$(\lambda_1.m_1+....+\lambda_k.k_k)+(\mu_1.m_1+....+\mu_k.m_k)$$

$$\varphi(\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k)+\varphi(\mu_1.x_1+....+\mu_k.x_k)$$

$$\varphi(0)=\varphi(0.x_1+...+0.x_k)=0.m_1+...+0.m_k=0$$

Böylece φ bir monoid hommorfizmasıdır.

φ'nın örten olduğunu gösterelim:

$$\lambda_1.m_1+....+\lambda_k.m_k\in M$$

olsun.

$$\varphi(\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k)=\lambda_1.m_1+....+\lambda_k.m_k$$

olacak şekilde $\lambda_1.x_1+....+\lambda_k.x_k\in M(X)$ bulunacağından φ örtendir. Bu,

$$G\ddot{o}r(\varphi)=M$$

demektir. □

Şimdi bir küme ile üretilen kongrüans kavramını tanıtalım.

4.1.9 Tanım. X bir küme ve

$$\rho\subset M(X)*M(X)$$

alt kümesini alalım. $M(X)$ üzerinde ρ'yu kapsayan tüm kongrüansların ara kesitine ρ ile üretilen kongrüans denir ve $Kong(\rho)$ ile gösterilir.

Bu kümedeki elemanları görelim.

$$\Delta(X) = \big\{(x,x) \mid x \in S\big\}$$

ikili işlemine X üzerinde diyagonal(köşegen) denir. X kümesi üzerindeki ρ ikili işlemi için

$$\rho^{-1} = \big\{(b,a) \mid (a,b) \in \rho\big\}$$

kümesine ρ'nin ters bağıntısı denir.

4.1.10 Önerme. [16] $\varnothing \neq X$ bir küme ve $\rho \subset M(X) * M(X)$ olsun.

$$\rho^0 = \rho \cup \rho^{-1} \cup \Delta(M(X))$$

$$\rho^1 = \big\{(v+u, w+u) \mid (v,w) \in \rho^0, u \in M(X)\big\}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $Kong(\rho)$, $k \in \mathbb{N}$ ve $v_0, .., v_k \in M(X)$ öyleki her $0 \leq i \leq k-1$ için

$$v_0 = v, v_k = w, (v_i, v_{i+1}) \in \rho^1$$

olacak şekilde

$$(v,w) \in M(X) * M(X)$$

ikililerinin bir kümesidir.

İspat: [16]

4.1.11 Tanım. $\sigma = Kong(\rho)$ ise σ kongrüansına ρ ile üretilir denir. ρ'ya da σ'nın üreteçler sistemi adı verilir. Eğer σ kongrüansının bir sonlu üreteç sistemi var ise σ'ya sonlu üretilmiştir denir.

4.1.12 Tanım. M sonlu üretilmiş bir monoid olsun. M'nin temsilcisi bir sonlu X kümesi için

$$M \cong M(X)|Kong(\rho)$$

olacak şekilde $M(X)$ kümesi üzerinde bir kongrüanstır.

4.1.13 Tanım. S minimal üreteç kümesi $n_1, ...n_l$ olan bir sayısal yarıgrup ve $X = \big\{n_1, ...n_l\big\}$ her $i \neq j$ için $x_i \neq x_j$ olan küme olsun. Eğer ρ,

$$\varphi : M(x_1, ...x_l) \longrightarrow S$$

$$a_1.x_1 + ... + a_l.x_l \longrightarrow a_1.n_1 + ... + a_l.n_l$$

dönüşümünün çekirdek kongrüansının bir minimal bağıntısı ise ρ'ya minimal temsilci denir.

4.1.14 Teorem. [16] S bir sayısal yarıgrup olsun. $e(S)$ S'nin gömme boyutu olmak üzere, S'nin minimal temsilcisinin eleman sayısı $e(S)-1$'den büyük veya eşittir.

İspat: [16]

4.1.15 Tanım. S bir sayısal yarıgrup olsun.S'nin minimal temsilcilerinden birinin eleman sayısı $e(S)-1$ ise S'ye tam kesişimdir denir.

4.2 Yapıştırma Kavramı

Bu bölümde bir monoidin üreteç kümeleri olarak alınan pozitif tamsayılar kümesinin, iki ayrışımının yapıştırılması olarak nasıl elde edildiğini anlatacağız. Bunun için öNcelikle bazı notasyonları tanıtalım.

$A = \{m_1, ...m_r\}$ pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi ve $X = \{x_1, ...x_r\}$ olsun.

$$\varphi : M(X) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$a_1.x_1 + ... + a_r.x_r \longrightarrow a_1.m_1 + ... + a_r.m_r$$

olsun. φ bir monoid homomorfizmasıdır.

φ'nin çekirdek kongrüansı,

$$çek\varphi = \{(a,b) \in M(X) * M(X) \mid \varphi(a) = \varphi(b)\}$$

ve $\sigma = çek\varphi$ ile gösterelim. Bu durumda ,

$$a\sigma b \Leftrightarrow \varphi(a) = \varphi(b)$$

$B \subseteq A$ alalım.

$$X_B = \{x_i \mid m_i \in B\}$$

olduğundan

$$M(X_B) \subseteq M(X)$$

olduğu açıktır.

$M(X_B) \longrightarrow \mathbb{N}$ ve $\sigma_B = çek\varphi_B$ olarak tanımlanır ve

$$\sigma_B \subseteq \sigma$$

Bu notasyonları kullanarak yapıştırma kavramlarını verelim.

4.2.1 Tanım. A_1, A_2, A kümesinin bir parçalanışı olsun. $\rho_1 \subseteq \sigma_{A_1}$, $\rho_2 \subseteq \sigma_{A_2}$, $\varnothing \neq a \in M(X_{A_1})$ ve $\varnothing \neq b \in M(X_{A_2})$ iken σ'nın

$$\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup (a, b)$$

olacak şekilde ρ üreteç sistemi var ise, A'ya A_1 ve A_2'nin yapıştırmasıdır denir.

4.2.2 Tanım. C,$\mathbb{N}$'nin bir alt kümesi ve $x \in < C > \backslash 0$ olsun. Bir x elemanının bir C kümesine göre Apery kümesi,

$$Ap(C, x) = \big\{ x \in < C > | \; s - x \in < C > \big\}$$

olarak tanımlanır.

Yapıştırma kavramı pek çok farklı şekilde karakterize edilebilmektedir. Biz burada Rosales'in tezindeki [16] karakterizasyonu vermekteyiz.

4.2.3 Teorem. [16] A, pozitif tamsayılar kümesinin bir alt kümesi ve A_1, A_2, A kümesinin bir parçalanışı olsun. Aşağıdaki ifadeler denktirler:

(i) A, A_1 ve A_2'nin yapıştırmasıdır.

(ii) $d_1 = obeb(A_1)$ ve $d_2 = obeb(A_2)$ ise,

$$ekok\{d_1, d_2\} \in < A_1 > \cap < A_2 >$$

olur.

(iii) $f : Ap(A_1, d) * Ap(A_2, d) \longrightarrow Ap(A, d)$

$$(S_1, S_2) \longrightarrow s_1 + s_2$$

dönüşümü 1-1 ve örten olacak şekilde,

$$\varnothing \neq d \in < A_1 > \cap < A_2 >$$

elemanı vardır.

(iv) ρ_1 ve ρ_2 sırasıyla σ_{A_1} ve σ_{A_2}'nin üreteç sistemi olmak üzere,

$$\rho_1 \cup \rho_2 \cup (a, b)$$

σ'nın bir üreteç sistemi olacak şekilde $\varnothing \neq a \in M(X_{A_1})$ ve $\varnothing \neq b \in M(X_{A_2})$ olan

$$(a, b) \in \sigma$$

vardır.

İspat: [16]

4.2.4 Örnek. S, $A = \{85, 187, 221, 60, 80, 90\}$ kümesi ile (minimal) üretilen bir sayısal yarıgrup olsun.

$A_1 = \{85, 187, 221\}$ ve $A_2 = \{60, 80, 90\}$ alalım.

$$obeb(A_1) = 17 \; ve \; obeb(A_2) = 10$$

$$okek(10, 17) = 170 \in < A_1 > \cap < A_2 >$$

Bu durumda 4.2.3 Teoremden, A, A_1 ve A_2'nin yapıştırmasıdır.

4.3 Sayısal Yarıgrupların Yapıştırılması

Bu bölümde yapıştırma kavramının, sayısal yarıgrupların yapıştrılmasında nasıl kullanıldığını göstereceğiz. Sonrasında ise Delorme'nin karakterizasyonunu bu terminoloji cinsinden tekrar veren Rosales'in sonuçlarını verceğiz. Tüm bunların sonucunda ise tüm tam kesişim sayısal yarıgrupların simetrik olduğu sonucu verilecektir.

4.3.1 Tanım. S_1 ve S_2 minimal üreteç kümeleri $n_1, ..., n_r$ ve $n_{r+1}, ..., n_l$ olan iki sayısal yarıgrup olsun. $obeb(\lambda, \mu) = 1$ olacak şekilde,

$$\lambda \in S_1 \backslash \{n_1, ..., n_r\} \text{ ve } \mu \in S_2 \backslash \{n_{r+1}, ..., n_l\}$$

olsun. Böylece

$$S =< \mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l >$$

S_1 ve S_2 yarıgruplarının bir yapıştırmasıdır.

İlk olarak bu tanım ile pozitif tamsayıların alt kümelerinin yapıştırılması arasındaki bağlantıyı inceleyelim.

4.3.2 Yardımcı Teorem. [16] S_1 ve S_2 minimal üreteç kümeleri $\{n_1, ..., n_r\}$ ve $\{n_{r+1}, ..., n_l\}$ olan iki sayısal yarıgrup ve $obeb(\lambda, \mu) = 1$ olan

$$\lambda \in S_1 \backslash \{n_1, ..., n_r\} \; ve \; \mu \in S_2 \backslash \{n_{r+1}, ..., n_l\}$$

alalım.

(i) S minimal üreteç sistemi

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$$

olan bir sayısal yarıgruptur.

(ii) $\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$,

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r\} \text{ ve } \{\lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$$

kümelerinin bir yapıştırmasıdır

İspat: (i) $obeb(\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l) = obeb(\mu, \lambda)$ ve $obeb(\mu, \lambda) = 1$ olduğundan S bir sayısal yarıgruptur.

Şimdi,

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$$

kümesinin S'nin minimal üreteç kümesi olduğunu gösterelim.

$$\mu.n_1 = a_2(\mu.n_2) + ... + a_r.(\mu.n_r) + a_{r+1}(\lambda.n_{r+1}) + ... + a_l(\lambda.n_l)$$

olduğunu varsayalım.

$$a_{r+1}(\lambda.n_{r+1}) + ... + a_l(\lambda.n_l) = \mu.n_1 - a_2(\mu.n_2) - ... - a_r.(\mu.n_r)$$

$$= \mu(n_1 - a_2.n_2 - ... - a_r.n_r)$$

olduğundan μ'nun bir katıdır. Aynı zamanda,

$$a_{r+1}(\lambda.n_{r+1}) + ... + a_l(\lambda.n_l) = \lambda(a_{r+1}.n_{r+1} + ... + a_l.n_l)$$

olmasından λ'nında bir katıdır.

Bu durumda bir $k \in \mathbb{Z}^+$ için,

$$\mu.n_1 = a_2(\mu.n_2) + ... + a_r.(\mu.n_r) + \lambda\mu(k)$$

yazabiliriz. Buradan,

$$n_1 = a_2.n_2 - ... - a_r.n_r + \lambda.k$$

elde edilir. Fakat $\lambda \in S_1$ ve n_1, S'nin minimal üreteci olduğundan bu bir çelişkidir. Bu S'nin tüm elemanları için benzer şekilde kullanılır ise,

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$$

kümesinin S'nin minimal üreteç kümesi olduğu ispatlanır.

(ii)

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$$

kümesi $4.2.3$ Teoremden, $\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r\}$ ve $\{\lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l\}$ kümelerinin bir yapıştırılması olduğunu göstermek için

$$\lambda.\mu \in < \mu.n_1, ..., \mu.n_r > \cap < \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l >$$

olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$obeb(\mu.n_1, ..., \mu.n_r) = \mu$ ve $obeb(\lambda, \mu) = 1$

$$okek(\lambda, \mu) = \lambda.\mu$$

elde edilir.

$$okek(\lambda, \mu) = \lambda.\mu \in < \mu.n_1, ..., \mu.n_r > \cap < \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_l >$$

olur ki, bu ispatı tamamlar. □

4.3.3 Önerme. İki tam kesişim sayısal yarıgrubun yapıştırması da bir tam kesişimdir.

İspat: S_1 ve S_2, iki tam kesişim sayısal yarıgruplar ve S'de, S_1 ve S_2'nin bir yapıştırması olsun. $4.3.2$ Yardımcı Teoremden

$$e(S) = e(S_1) + e(S_2)$$

olur. ρ_1 ve ρ_2, sırasıyla S_1 ve S_2 sayısal yarıgrupları için minimal temsilciler olsunlar. $4.1.14$ Teoremden, $i \in \{1, 2\}$ için

$$\sharp\rho = e(S_i) - 1$$

$4.3.2$ Yardımcı Teorem ve $4.2.3$ Teoremden, S'nin

$$\rho = \rho_1 \cup \rho_2 \cup \{a, b\}$$

formunda bir temsilci olur. Böylece,

$$\sharp\rho = \sharp\rho_1 + \sharp\rho_2 + 1$$

$$= (e(S) - 1) + (e(S) - 1) + 1$$

$$= e(S) - 1$$

$4.1.14$ Teoremden S bir tam kesişimdir. □

Üstteki önermenin tersi de doğrudur. İspatı vermeden önce bir kaç notasyonu tekrar hatırlatarak ispatta kullanılan bir önermeyi ispatsız olarak verelim.

S, minimal üreteç kümesi $A = \{n_1, ..., n_e\}$ olan bir sayısal yarıgrup ve $X = \{x_1, ..., x_e\}$ olsun.

$$\varphi : M(X) \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$a_1.x_1 + ... + a_e.x_e \longrightarrow a_1.n_1 + ... + a_e.n_e$$

bir monoid homomorfizması, $\sigma = çek\varphi$ ve ρ, σ'nın bir üreteç sistemi olsun. Yine, P_m, A'nın bir parçalanışı ve γ_m, ρ'nun belli koşulları sağlayan bir alt kümesi olsun. Bu durumda, aşağıdakiler sağlanır.

4.3.4 Yardımcı Teorem. (i) $\sharp\gamma_m = e - \sharp P_m$

(ii) $P_m = \{B_1, ..., B_t\}$ ise $\gamma_m \subset \sigma_{B_1} \cup .. \cup \sigma_{B_t}$

(iii) $\rho \leq e - 1$ ve $\sharp P_m \geq 2$ ise, $\sharp P_{m+1} = \sharp P_m - 1$

İspat: [8]

4.3.5 Teorem. [16] S, $\mathbb{N}$ dışında bir sayısal yarıgrup olsun. S bir tam kesişimdir ancak ve ancak, S, tam kesişim iki sayısal yarıgrubun bir yapıştırmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$ Önerme $4.3.3$

$\Rightarrow S$, $A = \{n_1, ..., n_e\}$ minimal üreteç sistemine sahip bir tam kesişim sayısal yarıgrup olsun. S bir tam kesişim olduğundan S'nin

$$\sharp\rho = e - 1$$

olan bir ρ temsilcisi vardır. $4.3.5$ Yardımcı Teoremin ispatından

$$P_e = \{A\},\ P_{e-1} = \{A_1, A_2\}$$

$$\gamma_{e-1} \subseteq \sigma_{A_1} \cup \sigma_{A_2}$$

sonucu elde edilebilir. Böylece, A, A_1 ve A_2'nin bir yapıştırması olur.

$$A_1 = \{n_1, ..., n_r\} \text{ ve } A_2 = \{n_{r+1}, ..., n_e\}$$

olduğunu varsayalım.

$$d_1 = obeb(A_1)\ ve\ d_2 = obeb(A_2)$$

olsun.

$$S_1 =< \frac{n_1}{d_1}, ..., \frac{n_r}{d_1} > \ ve\ S_2 =< \frac{n_{r+1}}{d_2}, ..., \frac{n_e}{d_2} >$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda,

$$\{\frac{n_1}{d_1}, ..., \frac{n_r}{d_1}\} \text{ ve } \{\frac{n_{r+1}}{d_2}, ..., \frac{n_e}{d_2}\}$$

sırasıyla, S_1 ve S_2'nin minimal üreteç sistemleridir. A, A_1 ve A_2'nin bir yapıştırması olduğundan, $4.2.3$ Teoremden,

$$d_1.d_2 = okek\{d_1, d_2\} \in < n_1, ..., n_r > \cap < n_{r+1}, ..., n_e >$$

Böylece,

$$d_1 \in S_2 \; ve \; d_2 \in S_2$$

elde edilir. Bir $i \in \{1, ..., r\}$ için

$$d_2 = \frac{n_i}{d_1}$$

olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$d_1.d_2 = n_i \in < n_{r+1}, ..., n_e >$$

elde edilir ki, bu A'nın, S'nin bir minimal üreteç sistemi olmasıyla çelişir. Bu,

$$d_2 \notin \{n_1, ..., n_r\}$$

olmasını kanıtlar. Benzer şekilde

$$d_1 \notin \{n_{r+1}, ..., n_e\}$$

ispatlanır. Bu, S'nin $S_1 \; ve \; S_2$'nin bir yapıştırması olmasını söyler.

Şimdi, $S_1 \; ve \; S_2$'nin bir tam kesişim olduklarını ispatlayalım.

$\rho_i = \sigma_{A_i} \cap \rho$, S_i, $i \in \{1, 2\}$ için bir temsilcidir.

$$\sharp\rho_1 + \sharp\rho_2 = e - 2$$

ve $4.1.14$ Teoreminden,

$$\sharp\rho_1 \geq r - 1 \text{ ve } \sharp\rho_1 \geq e - r - 1$$

olmasından,

$$\sharp\rho_1 = r - 1 \text{ ve } \sharp\rho_2 = e - r - 1$$

sonucuna varılır. Bu, $S_1 \; ve \; S_2$'nin bir tam kesişim olmaları demektir. $\square$

4.3.6 Yardımcı Teorem. [16] Simetrik sayısal yarıgrupların yapıştırması da simetriktir.

İspat: $S_1\ ve\ S_2$ sırasıyla

$$\{n_1, ..., n_r\} \text{ ve } \{n_{r+1}, ..., n_e\}$$

minimal üreeç sistemlerine sahip iki sayısal yarıgrup olsun.

$$obeb(\lambda, \mu) = 1$$

olacak şekilde

$$\lambda \in S_1 \backslash \{n_1, ..., n_r\} \text{ ve } \mu \in S_2 \backslash \{n_{r+1}, ..., n_e\}$$

ve

$$S = \{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_e\}$$

olsun. 4.3.2 Yardımcı Teoremden,

$$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r, \lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_e\}$$

$\{\mu.n_1, ..., \mu.n_r\}$ ve $\{\lambda.n_{r+1}, ..., \lambda.n_e\}$'nin bir yapıştırmasıdır.

4.2.3 Teoremden,

$$Ap(S, n) = \{s_1 + s_2 \mid s_1 \in Ap(A_1, \lambda.\mu), s_2 \in Ap(A_2, \lambda.\mu)\}$$

elde edilir. Böylece,

$$Ap(S, \lambda.\mu) = \{\lambda.w_1 + \mu.w_2 \mid w_1 \in Ap(S_1, \lambda), w_2 \in Ap(S_2, \mu)\}$$

olur. □

Üstteki Önerme, simetrikliğin yapıştırma altında aynen korunduğu anlamına gelir.

5. SONUÇ

Sayısal yarıgruplar, $a_1, a_2, ..., a_n, b$'ler negatif olmayan tamsayılar olmak üzere,

$$a_1 \cdot x_1 + ... + a_n \cdot x_n = b$$

formundaki Diofant denklemlerin negatif olmayan tamsayı çözümlerinin çalışılması sırasında kendiliğinden ortaya çıkmıştır. Yine, sayısal yarıgruplar değişmeli cebirdeki problemlerin çözümünde sık sık kullanılan bir araçtır. k bir cisim ve $k[t^{a_1}, ...t^{a_n}]$ polinomların bir k-cebiri olmak üzere $a_1, a_2, ..., a_n$'ler tarafından üretilen sayısal yarıgrubun özelliklerinden bu halka ile ilgili bilgiler elde edebilmektedir. Tam kesişimler, dolayısıyla Gorenstein yarıgrup halkalarıyla bağlantılı olan pek çok sayısal yarıgrup ailesi vardır. Bu sebeple Gorenstein halka örnekleri aranırken, bir tam kesişim sayısal yarıgrup üzerindeki yarıgrup halkaları ile ilgilenilmektedir.

Bu tezde, ilk olarak sayısal yarıgruplar ve temel özellikleri açıklandıktan sonra olağanüstü özelliklere sahip olan simetik sayısal yarıgrup aileleri ve değişmeli cebirde önemli tekniklerden birisi olan yapıştırma kavramı detaylıca çalışılmıştır.

6. KAYNAKLAR

[1] Brauer, A., "On a Problem of Partitions", Amer. J. Math., 64 , 299-312, (1942).

[2] Brauer, A., Shockley, J. E., "On a Problem of Frobenius" J. Reine Angew. Math. 211, 215-220, (1962).

[3] Davison, J. L., "On the linear Diophantine Problem of Frobenius", J. Number Theory, 48, 353-363, (1994).

[4] Johnson, S. M., "A linear Diophantine Problem", Canad. J. Math. 12, 390-398, (1960).

[5] Selmer, E., *On a linear Diophantine Problem of Frobenius*, J. Reine Angew. Math., 293-294, 1-17, (1977).

[6] Sylvester, J., "Mathematical questions with their solutions", *Educational Times*, 41, 21, (1884).

[7] Kunz, E., "The value-semigroup of a one-dimensional Gorenstein ring", Proc. Amer. Math. Soc., 25, 748-751, (1970).

[8] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez, P.A., *Numéricas Semigroups*, Springer, New York, (2000).

[9] Apéry, R., "Sur les branches superlin´eaires des courbes alg´ebriques", C. R. Acad. Sci. Paris, 222, 1198-1200, (1946).

[10] Froberg, R., Gottlieb, C., Haggkvist, R., *On numerical semigroups*, Semigroup Forum 35, 63-83, (1987).

[11] Rosales, J. C., Branco, M.B., "Irreducible numerical semigroups", Pacific J. Math., 209, 131-143, (2003).

[12] Rosales, J. C., *On numerical semigroups*, Semigroup Forum, 52, 307-318, (1996).

[13] Rosales, J. C., " On symmetric numerical semigroups", J. Algebra 182 , no. 2, 422-434, (1996).

[14] Madero-Craven, M. G., *Apery Sets of Numerical Semigroups*, Ms. Thesis, Graduate School of University of Maryland, USA, (2003).

[15] Delorme, C., "Sous-monoides d'intersection complete de ℕ", Ann. Scient Ecola Norm., (4), 9, 145-154, (1976).

[16] Rosales, J. C., *Semigrupos num´ericos*, Tesis Doctoral, Universidad de Granada, Spain, (2001).