T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARI

DOKTORA TEZİ

BİLAL DEMİR

BALIKESİR, MAYIS - 2015

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARI

DOKTORA TEZİ

BİLAL DEMİR

BALIKESİR, MAYIS - 2015

KABUL VE ONAY SAYFASI

Bilal DEMİR tarafından hazırlanan "**GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARI**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 22.05.2015 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....
Üye Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	....
Üye Yrd. Doç. Dr. İlker İNAM	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Doç. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

Bu tez çalışması Balıkesir Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi tarafından 2014/99 nolu proje ile desteklenmiştir.

ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARI
DOKTORA TEZİ
BİLAL DEMİR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, MAYIS - 2015

Hecke gruplarını kapsayan genel Hecke grupları $PSL(2,\mathbb{R})$ nin ayrık alt gruplarının bir sınıfıdır. Genel Hecke gruplarına iki mertebeli yansıma dönüşümünün eklenmesiyle genişletilmiş genel Hecke grupları elde edilir. Böylece genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke gruplarının iki indeksli normal alt grubu olurlar. Bu çalışmada genel Hecke ve genişletilmiş genel Hecke grupları incelenmiştir.

Bu tez yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde çalışma tanıtılmıştır. İkinci bölümde çalışma için gerekli bazı temel kavramlara ve sonuçlara yer verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde $H_{p,q}$ genel Hecke grupları ve $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde $H_{p,q}$ ve $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke gruplarının cinsi sıfır olan sonlu indeksli normal alt gruplarının simgeleri elde edilmiştir. Ayrıca bu şekildeki normal alt grupların sayısı da hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının iki indeksli bir normal alt grubu olan çift alt grubun sunuşu ve simgesi elde edilmiştir. Benzer yöntemle $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının çift alt grubu incelenmiştir.

Altıncı bölümde ikinci tip Hecke gruplarının genellemesi olan $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının kuvvet ve komütatör alt gruplarının sunuşları elde edilmiştir.

Tezin yedinci bölümünde çalışma kapsamında elde edilen sonuçlar tartışılmıştır. Ayrıca ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler ve öneriler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke grupları, konjuge sınıfları, sıfır cinsli alt gruplar, çift alt grup, komütatör alt grup, kuvvet alt grup.

ABSTRACT

EXTENDED GENERALIZED HECKE GROUPS
PH.D THESIS
BİLAL DEMİR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE MATHEMATICS
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, MAY 2015

Hecke groups are included in generalized Hecke groups, a class of discrete subgroups of $PSL(2,\mathbb{R})$. Extended generalized Hecke groups can be obtained by adding two ordered reflection map to generators of generalized Hecke groups. Hence generalized Hecke groups are normal in extended generalized Hecke groups with index 2. In this work generalized Hecke groups and extended generalized Hecke groups are studied.

This thesis consists of seven chapters. In the first chapter the study is introduced. Some basic definitions and results that are necessary to this study are briefly recalled.

In chapter three, the conjugacy classes of finite ordered elements in generalized Hecke groups $H_{p,q}$ and extended generalized Hecke groups $\overline{H}_{p,q}$ are obtained.

In chapter four the signatures of normal genus 0 subgroups of $H_{p,q}$ and $H_{p,\infty}(\lambda)$ are obtained. Also their total number is calculated.

In chapter five the presentation and signature of the even subgroup, the normal subgroup of generalized Hecke groups with index two, is determined. It is investigated the even subgroup of extended generalized Hecke groups by the same method.

In chapter six, presentations of commutator subgroups and power subgroups of generalized Hecke groups $H_{p,\infty}(\lambda)$, the generalization of Hecke groups of second kind, and extended generalized Hecke groups $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$, are obtained.

In chapter seven the results obtained from this study are discussed. Also open problems and suggestions for further studies are given.

KEYWORDS: generalized Hecke groups, extended generalized Hecke groups, conjugacy classes, subgroups of genus 0, even subgroup, commutator subgroup, power subgroup.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge		Adı
$\mathbb{Z}$	:	Tam Sayılar Kümesi, Sonsuz Mertebeli Devirli Grup
$\mathbb{Z}_{\boldsymbol{p}}$	:	p Mertebeli Devirli Grup
$\mathbb{C}$	:	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	:	Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	:	Reel Sayılar Kümesi
$\boldsymbol{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$	:	Genişletilmiş Kompleks Sayılar Kümesinin Otomorfizmaları
$\boldsymbol{GL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	:	Kompleks Sayılar Üzerinde Genel Lineer Grup
$\boldsymbol{PGL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	:	Kompleks Sayılar Üzerinde Projektif Genel Lineer Grup
$\boldsymbol{SL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	:	Kompleks Sayılar Üzerinde Özel Lineer Grup
$\boldsymbol{PSL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	:	Kompleks Sayılar Üzerinde Projektif Özel Lineer Grup
$\boldsymbol{PSL}(\mathbf{2},\mathbb{R})$	:	Reel Sayılar Üzerinde Projektif Özel Lineer Grup
$\boldsymbol{U}$	:	Üst Yarı Düzlem
$[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H}]$	:	H Alt Grubunun G Grubu İçindeki İndeksi
$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})$	:	Üçgen Grup
$\boldsymbol{C_n}$	:	Devirli Grup
$\boldsymbol{D_n}$	:	Dihedral Grup
$\boldsymbol{S_n}$	:	Simetrik Grup
$\boldsymbol{A_n}$	:	Alterne Grup
$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$	:	Direk Çarpım Grubu
$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$	:	Serbest Çarpım Grubu
$\boldsymbol{A}*_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{B}$	:	Karışımlı Serbest Çarpım Grubu
$\boldsymbol{G}'$	:	Komütatör Alt Grup
$\boldsymbol{G^m}$	:	Kuvvet Alt Grup
$[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]$	:	a ile b elemanlarının komütatörü
$\boldsymbol{\Sigma}$	:	Schreier Transverseli

ÖNSÖZ

Bu çalışmayı titizlikle yürüten ve desteğini hiçbir zaman esirgemeyen sayın hocam ve danışmanım Doç. Dr. Özden KORUOĞLU' na,

Çalışmanın gelişmesinde zaman ayırarak önemli fikirler veren Prof. Dr. Recep ŞAHİN' e,

Bilgi ve deneyimleriyle yanımda olan Prof. Dr. Nihal YILMAZ ÖZGÜR' e,

İşe başladığım ilk günden beri yardımlarını esirgemeyen anabilim dalı başkanımız Doç. Dr. Hülya GÜR' e,

Üzerimdeki emeklerini inkar edemeyeceğim hocalarım Doç. Dr. İbrahim YALÇINKAYA' ya, Prof. Dr. Cengiz ÇINAR' a ve Doç. Dr. Abdullah Selçuk KURBANLI' ya,

Ülke çapında bilimin gelişmesine öncülük eden ve beni doktora eğitimim boyunca destekleyen TÜBİTAK'a,

Beni yetiştirip bu günlere gelmemi sağlayan, sevgilerini her daim hissettiğim rahmetli anne ve babama

teşekkür etmeyi kendime bir borç bilirim.

Son olarak çalışmam boyunca büyük sabır ve fedakarlık gösteren, onunla birlikte hayata daha güzel bakabildiğim kıymetli eşim Arş. Gör. Mevhibe KOBAK DEMİR' e ayrıca teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

Çalışmanın ilk kısmı olan bu bölümde, çalışmanın gelişimi ve tezin bölümleri tanıtılacaktır.

Möbius dönüşümlerinin önemli bir alt grubu olan Hecke grupları, Alman matematikçi Erich Hecke tarafından [1] nolu çalışmasıyla tanıtılmıştır. Hecke grupları sabit bir λ pozitif reel sayısı için;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \ , \ U(z) = z + \lambda$$

reel katsayılı kesirli lineer dönüşümleri tarafından üretilir. Erich Hecke bu grupların Fuchsian grup olması için gerekli ve yeter koşulun $\lambda \geq 2$ şeklinde bir reel sayı veya; $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere;

$$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$$

şeklinde olmasını ispatlamıştır. Burada $\lambda = \lambda_q$ şeklinde seçilerek elde edilen Hecke gruplarına birinci tip Fuchsian grup, $\lambda \geq 2$ durumunda ise ikinci tip Fuchsian grup denir. Birinci tip Hecke grupları H_q veya $H(\lambda_q)$ sembolleriyle gösterilir. İkinci tip olanlar için ise $H(\lambda)$ sembolü kullanılır.

Hecke gruplarının üreteçleri için $S = T.U$ alınırsa;

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

dönüşümü elde edilir. Böylelikle birinci tip Hecke grupları, iki mertebeli ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olur. İkinci tip Hecke grupları için $S(z)$ dönüşümü sonsuz mertebeli olacağından, iki mertebeli ve sonsuz mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur.

En çok çalışılan Hecke grubu $q = 3$ değerine karşılık elde edilen $H_3 = \Gamma$ modüler gruptur. Genel olarak bir Hecke grubu için $H_q \subseteq PSL\big(2, \mathbb{Z}[\lambda_q]\big)$ özelliği sağlanırken sadece modüler grup için bu kapsama çift yönlüdür. Diğer önemli Hecke grupları ise H_4 ve H_6 Hecke gruplarıdır. Bu iki grubun elemanlarının yapısı tamamen bilinmektedir.

Hecke gruplarının elemanları, genişletilmiş kompleks düzlemin otomorfizmalarından oluşur. Hecke gruplarına;

$$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

anti-otomorfizmasının eklenmesiyle genişletilmiş Hecke grupları elde edilir. Genişletilmiş Hecke gruplarını Bizim ve Şahin [2] nolu çalışmada tanıtmışlardır.

Hecke ve genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet, komütatör, çift, denklik, temel denklik ve serbest alt grupları ve birbirleriyle olan ilişkileri araştırmacılar tarafından [2-21] nolu kaynaklarda çalışılmıştır.

Lehner ve Newman, 1965 yılında modüler grubun sunuşlarını incelemişler ve bu sonuçları Hecke gruplarına genellemişlerdir [22]. Aynı yıl [23] nolu çalışmalarında, iki sonlu devirli grubun serbest çarpım grubunu çalışmışlardır. Tüm bu çalışmaların üzerine Lehner [24] çalışmasında, Hecke gruplarını kapsayan daha genel bir Fuchsian grup ailesini tanıtmıştır. Lehner; $2 \leq p \leq \infty$ ve $p + q > 4$ eşitsizliklerini gerçekleyen p ve q tamsayıları için;

$$X(z) = -\frac{1}{z - \lambda_p} \quad , \quad V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q$$

dönüşümlerinin ürettiği grubu dikkate almıştır. Bu gruplar genel Hecke grupları olarak isimlendirilir ve $H_{p,q}$ sembolü ile gösterilir. Burada $Y = X.V$ dönüşümü;

$$Y(z) = -\frac{1}{z + \lambda_q}$$

şeklinde elde edilir. Böylece p ve q sayılarının sonlu değerleri için genel Hecke grupları p mertebeli ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımı olurlar.

Tüm birinci tip $H_q = H_{2,q}$ Hecke grupları, $H_{p,q}$ genel Hecke grupları içindedir. Ayrıca $H_{2,2}$ şeklinde bir grup bulunmadığına dikkat edilmelidir.

Lehner $q = \infty$ için $\lambda_q = 2$ olarak belirtmiş ve $H_{p,\infty}$ gruplarını tanıtmıştır. Tüm $\lambda_q = \lambda \geq 2$ değerleri için $H_{p,\infty}$ gruplarının birbirine izomorf oldukları bilinmektedir. Fakat her biri farklı elemanlardan oluştuğu için bu çalışmada $H_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının tanımı verilmiştir. Böylece ikinci tip Hecke grupları da bu sınıfta kapsanmış olur.

Genişletilmiş Hecke gruplarına benzer olarak genişletilmiş genel Hecke grupları da iki mertebeli yansıma dönüşümü yardımıyla tanımlanabilir. Böylelikle genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke grupları içinde iki indeksli bir normal alt grup olurlar.

Tezin diğer bölümlerinde yapılanlar aşağıda kısaca tanıtılmıştır.

Çalışmanın ikinci bölümünde tezde elde edilen sonuçlar için bazı tanımlar, yöntemler ve teoremler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde $H_{p,q}$ ve $\overline{H}_{p,q}$ gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları elde edilmiştir. Böylelikle $H_{p,q}$ grubundaki tüm eliptik elemanlar için ve $\overline{H}_{p,q}$ grubundaki yansıma ve eliptik elemanlar için bir parçalanış elde edilmiştir. Ayrıca bu konjuge sınıfları yardımıyla burulmalı normal alt gruplar ile ilgili sonuçlar da elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının cinsi sıfır olan sonlu indeksli normal alt gruplarının simgeleri elde edilmiştir. Ayrıca p ve q sayılarının değerlerine göre $H_{p,q}$ grubundaki sıfır cinsli normal alt grupların sayısı hesaplanmıştır. Ardından bu alt gruplardan burulmasız olanlar sınıflandırılmıştır. Daha sonra benzer durumlar $H_{p,\infty}(\lambda)$ grupları için incelenmiştir.

Tezin beşinci bölümünde Calta ve Schmidt [25] tarafından genel Hecke grupları için verilen tek ve çift eleman tanımlarından hareketle $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının çift alt gruplarının yapısı incelenmiştir. Çift alt grupların komütatör alt gruplarla ilişkilerine dair sonuçlar da aynı bölümde verilmiştir.

Altıncı bölümde $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının sonlu indeksli kuvvet alt grupları ve komütatör alt gruplarının grup sunuşları elde edilmiştir. Bunun için Reidemeister-Schreier metodundan yararlanılmıştır.

Yedinci bölüm tezin son bölümüdür. Bu bölümde tezde elde edilen sonuçlar kısaca özetlenmiş ve literatürdeki çalışmalarla karşılaştırılmıştır. Ayrıca daha sonra yapılacak çalışmalar için bazı açık problemler ve öneriler verilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin ilerleyen kısımlarında elde edilecek sonuçlar için gerekli bazı tanım ve kavramlara yer verilecektir.

2.1 Möbius Dönüşümleri

Bir z kompleks değişkeninin Möbius dönüşümü veya kesirli lineer dönüşümü, $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ şartını sağlayan kompleks sayılar olmak üzere;

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d} \tag{2.1}$$

olarak tanımlanır. Buradaki $ad - bc$ değerinin neden sıfıra eşit olamayacağını anlamak için aşağıdaki eşitliği incelemek yeterlidir:

$$f(z) - f(z') = \frac{(ad - bc)(z - z')}{(cz + d)(cz' + d)}$$

Yukarıdaki eşitlikte $ad - bc = 0$ olması f fonksiyonunun sabit dönüşüm olması anlamına gelir. Bu sebeple Möbius dönüşümleri tanımında $ad - bc \neq 0$ şartı gereklidir. $ad - bc$ değerine f dönüşümünün determinantı ismi verilir.

Bir Möbius dönüşümü birden fazla yolla ifade edilebilir. Yani verilen bir Möbius dönüşümünün katsayıları kesin olarak belirlenemez. Aynı katsayıların sıfırdan farklı skaler bir katı ile elde edilen dönüşüm de aynı Möbius dönüşümüdür.

(2.1) de tanımlanan f fonksiyonu $z = -d/c$ noktasında tanımlı değildir. Buradan tüm Möbius dönüşümlerinin tanımlı olabileceği $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesini bulmak mümkün değildir [26].

2.1.1 Tanım : [26] $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ kümesine genişletilmiş kompleks sayılar kümesi denir.□

$\mathbb{R}^3$ üzerindeki S^2 küresi ile genişletilmiş kompleks düzlem arasında tanımlanan stereografik iz düşüm dönüşümü bir topolojik eş yapı dönüşümüdür. Bu dönüşüm altında kürenin kuzey kutbunun görüntüsü ∞ olacaktır. Böylelikle genişletilmiş kompleks düzlem kompakt olur. Kompleks sayılar kümesine ∞ un eklenmesi ile kompakt topolojik uzay elde edilmesi tek nokta kompaktifikasyonudur. Bu topolojik uzayın açık kümeleri $\mathbb{C}$ nin açık kümeleri ve $\mathbb{C}$ nin açık kümelerine ∞ un eklenmesiyle elde edilen kümelerdir [27].

Yukarıda tanımlanan $\mathbb{C}_\infty$ kümesi üzerinde Möbius dönüşümleri birebir örten ve meromorf fonksiyonlardır. Böylece aşağıdaki teorem elde edilir.

2.1.2 Teorem : [27] Genişletilmiş kompleks düzlem $\mathbb{C}_\infty$ un tüm otomorfizmalarının kümesi $Aut(\mathbb{C}_\infty)$, Möbius dönüşümlerinden oluşur.□

2.1.3 Teorem : [28] $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ kümesi fonksiyonların bileşke işlemi altında bir gruptur. □

Möbius dönüşümleri ile kompleks katsayılı 2×2 matrisler arasında yakın bir ilişki vardır. Şöyle ki;

$$\varphi : GL(2, \mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}_\infty)$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \to \frac{az+b}{cz+d} \tag{2.2}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir grup epimorfizmasıdır. Ancak bu eşleme birebir değildir. Çünkü bir $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi ile bu matrisin skaler bir katı olan farklı bir matrisin φ altındaki görüntüsü aynı Möbius dönüşümüdür. Bu bağlamda φ epimorfizmasının çekirdeği;

$$\ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{C}^* \right\}$$

şeklinde birim matrisin katlarından ibarettir. Burada elde edilen $GL(2, \mathbb{C})/\ker(\varphi)$ bölüm grubuna projektif genel lineer grup ismi verilir ve $PGL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir. Ayrıca birinci izomorfizma teoreminden;

$$PGL(2, \mathbb{C}) \cong Aut(\mathbb{C}_\infty)$$

elde edilir.

Bir matrisin determinantı tanımını kullanarak;

$$det: GL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$$

dönüşümü oluşturulabilir. Bu dönüşüm işlem koruyan örten bir dönüşüm olduğu için bir grup epimorfizmasıdır. Çekirdeği ise determinantı 1 olan matrislerden oluşur. Böyle matrislerin kümesine özel lineer grup denir ve $SL(2,\mathbb{C})$ ile gösterilir. Dikkat edilirse (2.2) de tanımlanan φ dönüşümü $SL(2,\mathbb{C})$ grubunu da $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ üzerine örten olarak resmeder. Yani $SL(2,\mathbb{C})$ nin bölüm grubundaki resmi olan projektif özel lineer grup $PSL(2,\mathbb{C})$ elde edilir.

2.1.4 Teorem : [27] $Aut(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL(2,\mathbb{C}) \cong PSL(2,\mathbb{C})$□

2.1.5 Tanım : [27] $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ ve $ad - bc \neq 0$ olmak üzere;

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

tipindeki dönüşümlere, $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin anti-otomorfizmaları denir.□

İki anti-otomorfizmanın bileşkesi bir otomorfizma iken bir otomorfizma ile bir anti-otomorfizmanın bileşkesi bir anti-otomorfizmadır. Böylelikle tüm otomorfizmalar ve anti-otomorfizmaların oluşturduğu küme bileşke işlemi altında bir grup olup otomorfizmalar bu grubun iki indeksli bir normal alt grubudur.

2.1.1 Möbius Dönüşümlerinin Geometrik Sınıflandırılması

Möbius dönüşümleri genişletilmiş kompleks düzlem üzerinde 3-geçişli hareket eden bir gruptur. Bu durum bazı geometrik sınıflandırmaları beraberinde getirir. Bu bölümde verilen tanım ve teoremler için detaylı bilgilere [26, 27, 29, 30] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.1.1.1 Tanım : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümü için $a + d$ sayısına f dönüşümünün izi denir ve $tr(f)$ ile gösterilir.□

2.1.1.2 Tanım : $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bir kesirli lineer dönüşümü için;

$$f(z) = z \tag{2.3}$$

denkleminin çözümlerine f dönüşümünün sabit noktaları denir. □

(2.3) denklemi incelenirse;

$$cz^2 + [d-a]z - b = 0 \tag{2.4}$$

eşitliği elde edilir. Bu denklemin çözümlerinin kaç tane olacağı f dönüşümünün izi ile yakından ilgilidir. Örneğin $tr(f) > 2$ durumunda (2.4) denkleminin iki farklı reel kökü olacaktır. Benzer şekilde $tr(f) = 2$ durumunda tek bir reel kök elde edilecektir. $tr(f) < 2$ ise (2.4) denkleminin birbirinin eşleniği 2 kompleks çözümü olacaktır. $tr(f)$ değerinin reel olmadığı durumda ise denklemin çözümleri kompleks sayılar kümesinde aranacaktır. Böylece aşağıdaki tanım elde edilir:

2.1.1.3 Tanım : [27] $f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ bir Möbius dönüşümü ve $tr(f)$ de f dönüşümünün izi olmak üzere;

1) $0 \leq tr^2(f) < 4$ ise f dönüşümüne bir eliptik eleman,

2) $tr^2(f) = 4$ ise f dönüşümüne bir parabolik eleman,

3) $tr^2(f) > 4$ ise f dönüşümüne bir hiperbolik eleman,

4) $tr^2(f) < 0$ veya $tr^2(f) \notin \mathbb{R}$ ise f dönüşümüne bir laksodromik eleman denir. □

2.1.1.4 Teorem : [27] Birim dönüşümden farklı bir Möbius dönüşümünün sonlu mertebeli olması için gerek koşul dönüşümün eliptik eleman olmasıdır. □

2.1.1.4 Teoremde verilen şartın yeter olmadığına dikkat edilmelidir. Yani her eliptik eleman sonlu mertebeli değildir. Bu durum yalnızca Fuchsian gruplar için geçerlidir. Başka bir ifadeyle Fuchsian gruplardaki tüm sonlu mertebeli elemanlar eliptik elemanlardır.

2.2 Reel Katsayılı Lineer Dönüşümler

Bu çalışmada reel katsayılı Möbius dönüşümleri ile ilgilenileceğinden bu dönüşümlerle ilgili özelliklere ihtiyaç duyulacaktır.

$$PSL(2,\mathbb{R})=\left\{\frac{az+b}{cz+d}\ \mid\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \ ad-bc=1\right\}$$

kümesine reel sayılar üzerinde projektif özel lineer grup denir. Bu grup Möbius dönüşümlerinin bir alt grubudur. Ayrıca;

$$G'=\left\{\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}\ \mid\ a,b,c,d\in\mathbb{R},\ \ ad-bc=-1\right\}$$

kümesi de reel katsayılı anti-otomorfizmalardan oluşur. Böylece; $G=PSL(2,\mathbb{R})\cup G'$ grubu elde edilir. G grubunun elemanları reel katsayılı olduğu için reel sayılar kümesini kendi üzerine resmeder.

2.2.1 Teorem : [31] Herhangi bir kesirli lineer dönüşümün $U=\{z\in\mathbb{C}\mid im(z)>0\}$ üst yarı düzlemi kendi üzerine resmetmesi için gerek ve yeter koşul bu dönüşümün G grubunda bulunmasıdır.□

2.1.1 kesiminde Möbius dönüşümleri için yapılan sınıflamadan hareketle $PSL(2,\mathbb{R})$ grubundaki dönüşümler parabolik, hiperbolik veya eliptik elemanlardır. Bu gruba dahil olan parabolik bir dönüşümün reel eksen üzerinde bir tek sabit noktası, hiperbolik bir dönüşümün reel eksen üzerinde iki sabit noktası vardır. Eliptik dönüşümlerin ise birbirinin kompleks eşleniği olan iki farklı karmaşık sabit noktası vardır.

G' grubuna dahil olan bir anti-otomorfizmanın ya iki farklı reel sabit noktası vardır ya da merkezi reel eksende olan bir çemberi tamamen sabit bırakır. Bu durum anti-otomorfizma dönüşümünün izi ile ilgilidir. (2.3) denklemine benzer olarak;

$$\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}=z \tag{2.5}$$

denkleminin çözümleri $x,y\in\mathbb{R}$ olmak üzere $z=x+iy$ için incelenirse;

$$c(x^2+y^2)+(d-a)x-b=0 \tag{2.6}$$

$$(a+d)y = 0 \tag{2.7}$$

şeklinde iki denklemle karşılaşılır. Burada iki olasılık mevcuttur. Şayet $(a+d) \neq 0$ ise bu durumda $y = 0$ olmalıdır. Yani anti-otomorfizmanın reel eksen üzerinde iki farklı sabit noktası vardır. Bu tip dönüşümler kayan-yansıma(glide-reflection) olarak adlandırılır.

Aksi durumda ise anti-otomorfizma $(\frac{a}{c}, 0)$ merkezli ve $1/|c|$ yarıçaplı bir çemberi tamamiyle sabit bırakır. Bu tip dönüşümlere ise yansıma(reflection) denir. Böylece G grubunun parabolik, eliptik, hiperbolik, yansıma ve kayan-yansıma olmak üzere beş tip elemanı vardır [31].

2.3 Konjuge Sınıfları

Herhangi bir G grubunda g ve h gibi iki eleman için $g = aha^{-1}$ eşitliğini gerçekleyen bir $a \in G$ varsa g ve h elemanlarına konjugedirler denir. Bir grup üzerinde bu şekilde tanımlanan konjugelik bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Bu denklik bağıntısının oluşturduğu denklik sınıflarına ise konjuge sınıfları ismi verilir. Birçok durumda bu sınıfların belirlenmesi grubun daha iyi tanınması açısından gereklidir.

Bir Möbius dönüşümünün izi 2.1.1 kesiminde tanımlanmıştı. A ve B herhangi iki Möbius dönüşümünü temsil eden iki matris olmak üzere basit bir hesaplama ile;

$$tr(A.B) = tr(B.A)$$

eşitliği görülebilir. Böylelikle birbirine konjuge olan A ve BAB^{-1} elemanları için;

$$tr(BAB^{-1}) = tr(B^{-1}BA) = tr(A)$$

sağlanır. Buradan tüm konjuge elemanların aynı ize sahip olduğu, dolayısıyla aynı tipten eleman olduğu ve nihayet aynı sayıda sabit noktaya sahip olduğu yorumu yapılabilir.

Bir $\lambda \in \mathbb{C}^*$ için $U(z) = \lambda z$ dönüşümünün matris temsilcisi;

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\lambda} \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Bu dönüşümün izi $tr(U_\lambda) = \sqrt{\lambda} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$ dır [27].

Bir T parabolik elemanının $z_0 \in \mathbb{R}$ şeklinde tek bir reel sabit noktasının olduğu bilinmektedir. Möbius dönüşümlerinin $\mathbb{C}_\infty$ üzerinde geçişli olmasından hareketle z_0 noktasını ∞ a resmeden bir dönüşüm bulmak mümkündür. Bu dönüşüm S ise STS^{-1} dönüşümü sonsuzu sabit bırakan bir dönüşümdür. Yani $T_t = STS^{-1}(z) = z + t$ biçimindedir. Ayrıca $V(z) = z/t$ için; $VT_tV^{-1}(z) = z + 1$ olup tüm parabolik Möbius dönüşümlerinin $z + 1$ dönüşümüne konjuge olduğu görülür.

Benzer şekilde şayet T bir eliptik veya hiperbolik bir eleman olsaydı z_1 ve z_2 gibi iki farklı sabit noktası bulunacaktı. Bu durumda $W(z_1) = 0$ ve $W(z_2) = \infty$ eşlemelerini gerçekleyen bir W dönüşümü için $WTW^{-1} = \lambda z$ olacaktır. Böylelikle aşağıdaki teorem elde edilir.

2.3.1 Teorem : [27] Birimden farklı bir Möbius dönüşümü;

$$U_\lambda(z) = \begin{cases} \lambda z; & \lambda \neq 1 \\ z + 1; & \lambda = 1 \end{cases}$$

dönüşümüne konjugedir. □

Reel katsayılı otomorfizma ve anti-otomorfizmalar grubu olan G grubundaki konjuge sınıfları da aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 2.1: G grubundaki elemanların konjuge sınıfları [31].

G Grubundaki Öğeler	Bulunduğu Küme	Konjuge Öğe
Hiperbolik Elemanlar	$PSL(2,\mathbb{R})$	λz $(\lambda > 0, \lambda \neq 1)$
Parabolik Elemanlar	$PSL(2,\mathbb{R})$	$z+1$
Eliptik Elemanlar	$PSL(2,\mathbb{R})$	$\dfrac{i(1+e^{i\theta})z+e^{i\theta}-1}{(1-e^{i\theta})z+i(1+e^{i\theta})}$ $\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
Kayan-yansıma	G'	$\lambda \bar{z}$ $(\lambda < 0, \lambda \neq 1)$
Yansıma	G'	$-\bar{z}$

2.4 Fuchsian Gruplar

Bu kesimde $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun alt gruplarının önemli bir sınıfı olan Fuchsian gruplar hakkında bazı tanım ve özellikler verilecektir. Ancak bu açıklamalara geçmeden önce süreksiz grup ve ayrık grup kavramları incelenecektir. Fuchsian gruplar hakkında detaylı bilgi için [30-37] kaynaklarına başvurulabilir.

2.4.1 Tanım : [36] $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ve bir $z \in \mathbb{C}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. $V_n(z) \to \alpha$ olacak biçimde terimleri birbirinden farklı $\{V_n\}$ fonksiyon dizisi Γ içinde oluşturulabiliyorsa $\alpha \in \mathbb{C}$ ye Γ grubunun bir limit noktası denir. Şayet $\alpha \in \mathbb{C}$ bir limit noktası değilse sıradan nokta olarak adlandırılır. Bir Γ grubu için tüm limit noktalarının kümesi L ile; tüm sıradan noktaların kümesi $\mathcal{O}$ ile gösterilir. □

2.4.2 Tanım : [36] $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ grubununda $\mathcal{O} \neq \emptyset$ ise Γ grubuna süreksiz grup denir. □

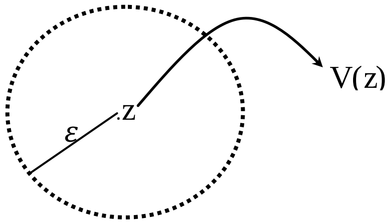
2.4.3 Tanım : [36] $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ için;

$$\Gamma(z) = \{V(z) |\ V \in \Gamma\}$$

kümesine z noktasının yörüngesi denir. □

2.4.4 Sonuç : Yukarıdaki iki tanımı dikkate alarak $\Gamma \leq PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun süreksiz olması; $\forall z \in \mathbb{C}$ için z noktasının en az bir ε-komşuluğu ile z nin yörüngesinin arakesitinin boş olmasıdır [33]. Yani;

$$\Gamma(z) \cap B_z(\varepsilon) = \emptyset.$$



Şekil 2.1: Süreksiz bir grupta yörünge.

2.4.5 Tanım : (X,d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olmak üzere x noktasının en az bir komşuluğu ile X kümesinin arakesiti boş ise x noktasına ayrık(izole) nokta denir. Başka bir deyişle $\forall y \in X$ için $d(x,y) > \delta$ şartını sağlayan $\exists \delta > 0$ sayısı varsa x noktasına ayrık nokta denir. □

2.4.6 Tanım : (X,d) bir metrik uzay ve $Y \subseteq X$ için Y kümesinin her bir noktası ayrık nokta ise Y kümesine ayrık küme denir. □

$PSL(2,\mathbb{R})$ üzerinde ayrıklık tanımını verebilmek için bu grup üzerinde bir metrik tanımlanmalıdır. Bunun için;

$$\gamma_1(z) = \frac{a_1 z + b_1}{c_1 z + d_1}, \quad \gamma_2(z) = \frac{a_2 z + b_2}{c_2 z + d_2}$$

dönüşümleri için;

$$\begin{aligned} d(\gamma_1,\gamma_2) = \min \{&\| (a_1,b_1,c_1,d_1) - (a_2,b_2,c_2,d_2)\|, \\ &\| (a_1,b_1,c_1,d_1) - (-a_2,-b_2,-c_2,-d_2)\|\} \end{aligned}$$

metrik fonksiyonu tanımlanır. Buradaki $\|.\|$ notasyonu $\mathbb{R}^4$ üzerindeki Euclid metriğidir. $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun alt gruplarının ayıklığı bu metrik ile incelenmektedir [35].

Süreksiz gruplar ile ayrık gruplar arasındaki ilişkiyi aşağıdaki teorem ifade eder.

2.4.7 Teorem : [36] Bir Γ grubunun süreksiz olması için gerek ve yeter koşul ayrık olmasıdır.□

Tüm bu kavramsal çerçevenin ardından Fuchsian grup tanımı aşağıdaki gibi verilebilir.

2.4.8 Tanım : $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun ayrık alt gruplarına Fuchsian grup ya da Fuchs grup denir.□

2.4.9 Örnek : $\Gamma = \{z + n |\ n \in \mathbb{Z}\}$ kayma dönüşümlerinin grubu Fuchsian bir gruptur. Burada $n \in \mathbb{R}$ olursa Γ grubunun süreksizlik özelliği yok olur. Böylece Γ Fuchsian grup olmaz.□

2.4.10 Lemma : [37] Bir Fuchsian grubun her alt grubu da Fuchsiandır.□

2.4.1 Bir Fuchsian Grubun Simgesi

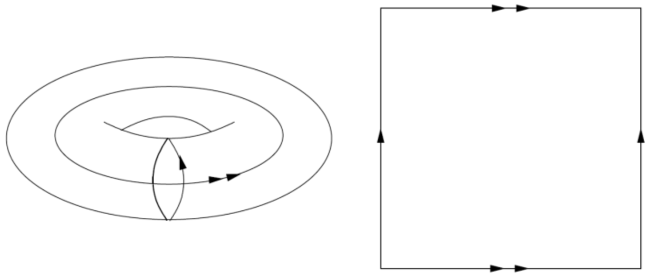
Bir Γ Fuchsian grubu $U = \{z \in \mathbb{C}|\ im(z) > 0\}$ üst yarı düzlemi kendi üzerine resmeder. Böyle bir Fuchsian grup verildiğinde kenar-eşleme dönüşümleri yardımıyla U/Γ bölüm uzayı oluşturulabilir. Bu uzay üstüne konulabilecek uygun bir analitik yapı ile U/Γ bir Riemann yüzeyi olur [8].

İki boyutlu bir X uzayı için en önemli topolojik invaryantlardan biri Euler karekteristiğidir.

2.4.1.1 Tanım: [35] İki boyutlu bir X uzayı sonlu çoklukta çokgensel yüz olacak biçimde katlanabilir. Varsayalım bu katlama V adet köşeyle, E adet kenarla ve F adet yüz ile yapılmış olsun. Bu takdirde X uzayının Euler karekteristiği;

$$\mathcal{X}(X) = V - E + F$$

şeklinde tanımlanır.□



Şekil 2.2: Bir tor yüzeyinin katlanması.

Şekil 2.2 de, bir tor yüzeyinin katlanması görünmektedir. Burada $V = 1$, $E = 2$ ve $F = 1$ olduğu için Euler karekteristiği $\mathcal{X} = 0$ olarak hesaplanır.

Euler karakteristiği bir uzay için başka önemli bir kavram olan cins kavramının doğmasına sebep olur. Genel olarak bir kürenin cinsi 0, bir tor yüzeyinin cinsi 1 dir. Topolojik olarak bir yüzeyin cinsi yüzeyin küreye iliştirilebilecek kulplarının sayısıdır. Bu ise başka bir tabirle yüzey boyunca var olan delik sayısıdır [35].

2.4.1.2 Lemma : [35] İki boyutlu bir X uzayının cinsi g ise;

$$\mathcal{X}(X) = 2 - 2g$$

şeklindedir.□

Bir Γ Fuchsian grubu için, Γ grubunun üzerinde süreksiz olarak etki ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsinden bahsedilebilir. Bununla birlikte aşağıda tanımlanacak olan bir Fuchsian grubun simgesi kavramıyla karşılaşılacaktır. Bu simge Γ grubunun geometrik özellikleri ile cebirsel özellikleri arasında ilişki kuran bir kavramdır.

2.4.1.3 Tanım : [38-39] Herhangi bir Γ Fuchsian grubunun üreteçleri;

$a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_g, b_g$	(Hiperbolik üreteçler)
$x_1, x_2, \dots, x_r$	(Eliptik üreteçler)
$p_1, p_2, \dots, p_t$	(Parabolik üreteçler)

$h_1, h_2, \dots, h_u$ (Hiperbolik sınır elemanları)

olmak üzere bu üreteçler arasında;

$$x_j^{m_j} = \prod_{i=1}^{g} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{r} x_j \prod_{k=1}^{t} p_k \prod_{l=1}^{u} h_l = 1$$

bağıntıları gerçekleniyorsa Γ Fuchsian grubunun;

$$(g; m_1, m_2, \dots, m_r; t; u) \tag{2.8}$$

şeklinde bir simge gösterimi vardır. Buradaki g sayısı Γ grubunun üzerinde süreksiz olarak etki ettiği U/Γ Riemann yüzeyinin cinsidir.

Bir Γ Fuchsian grubunun temel bölgesinin hiperbolik alanı, $2\pi\mu(\Gamma)$ olmak üzere;

$$\mu(\Gamma) = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{m_i}\right) + t + u$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik sayesinde Γ grubu için g sayısı hesaplanabilir. Ayrıca Γ_1, Γ grubunun sonlu indeksli bir alt grubu olmak üzere;

$$\left| {}^{\Gamma}/_{\Gamma_1} \right| = \frac{\mu(\Gamma_1)}{\mu(\Gamma)}$$

eşitliği ile indeks bulunur. Bu son eşitliğe Riemann-Hurtwitz Formülü denir. [3, 39]□

2.5 Hecke Grupları

Hecke grupları Alman matematikçi Erich Hecke' nin [1] nolu çalışmasıyla literatüre girmiştir.

2.5.1 Tanım : Pozitif, sabit bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad U(z) = z + \lambda$$

fonksiyonlarıyla üretilen gruplara Hecke grupları denir. Hecke grupları $H(\lambda)$ ile gösterilir.□

Hecke gruplarının üreteçlerinin reel katsayılı olduğu düşünülürse, bu grupların $PSL(2,\mathbb{R})$ grubunun bir alt grubu olduğu görülür. Bu durumda Hecke gruplarının hangi şartlar altında Fuchs grup olacağı akla gelen en önemli sorulardandır. Erich Hecke bu soruyu aşağıdaki teorem ile cevaplamıştır.

2.5.2 Teorem : [1] $\lambda \geq 2$ bir reel sayı veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere; $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ şeklinde tanımlandığında $H(\lambda)$ grubu bir Fuchsian gruptur. □

Hecke gruplarının üreteçleri için;

$$S(z) = T[U(z)] = -\frac{1}{z+\lambda}$$

dönüşümü elde edilir. Buradaki λ sayısı şayet $\lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$ şeklinde tanımlanırsa S elemanı $H(\lambda_q)$ grubunda q mertebeli eliptik bir eleman olur. T üretecinin ise 2 mertebeli olduğu açıktır. Böylece T ve S elemanlarının ürettiği devirli grupların;

$$< T >= \{I,T\} \cong \mathbb{Z}_2$$
$$< S >= \{I,S,S^2,\dots,S^{q-1}\} \cong \mathbb{Z}_q$$

olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda_q)$ grubunda T ve S elemanlarının birbiri arasında hiçbir ilişki bulunmadığı için $H(\lambda_q)$ grubu 2 mertebeli ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olur. Böylelikle aşağıdaki teorem elde edilir.

2.5.3 Teorem : [3] $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun sunuşu;

$$H(\lambda_q) =< T,S \mid T^2 = S^q = I >\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_q$$

şeklindedir. □

2.5.4 Sonuç : [40] $\lambda \geq 2$ reel sayısı için elde edilen $H(\lambda)$ Hecke grubunun sunuşu;

$$H(\lambda) =< T,S \mid T^2 = S^\infty = I >\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}$$

şeklindedir. □

$H(\lambda_q)$ Hecke grubu, 2 mertebeli ve q mertebeli iki eliptik eleman tarafından üretildiği için simgesi $(0;2,q,\infty)$ biçimindedir. Benzer olarak $H(\lambda)$ gruplarının simge gösterimi ise $(0;2,\infty,\infty)$ şeklindedir.

$H(\lambda_q)$ ve $H(\lambda)$ Hecke gruplarının bazı normal alt grupları [3,6,8-12,14,17-20] çalışmalarda incelenmiştir. Ayrıca bu grupların sürekli kesirler, ikili kuadratik formlar ile ilişkileri ile ilgili çalışmalar da mevcuttur.

2.6 Genişletilmiş Hecke Grupları

Genişletilmiş karmaşık düzlem $\mathbb{C}_\infty$ un, otomorfizmaları ve anti-otomorfizmalarının grubu olan G grubunun ayrık alt gruplarına Eucidean olmayan kristalografik grup (non-euclidean cyristallographic) veya kısaca N.E.C. grup denir [31].

Bu bölümde Hecke gruplarına, bu gruplarda bulunmayan bir anti-otomorfizma ekleyerek G grubunun bir N.E.C. alt grubu elde edilecektir. Bunun için;

$$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

yansıma dönüşümünü dikkate alalım. R dönüşümü -1 determinantlı ve 2 mertebeli bir yansıma dönüşümüdür.

2.6.1 Tanım : [2] Hecke gruplarına, $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü eklenerek elde edilen gruplara genişletilmiş Hecke grupları denir ve λ sayısının değerine göre $\bar{H}(\lambda_q)$ veya $\bar{H}(\lambda)$ simgeleriyle gösterilir.□

2.6.1 Tanımda geçen R dönüşümünün $H(\lambda_q)$ Hecke grubunun üreteçleri ile ilişkileri incelenirse;

$$TR = RT$$

ve

$$SR = RS^{q-1}$$

eşitlikleri görülür. Böylelikle T ve R elemanları tarafından üretilen grup;

$$< T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I > \cong D_2$$

şeklinde iki mertebeli dihedral gruba izomorf olacaktır. Benzer şekilde;

$$< S, R \mid S^q = R^2 = (SR)^2 = I > \cong D_q$$

olduğu görülür. Aynı R elemanı her iki grupta da yer almaktadır. Sonuç olarak $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları 2 mertebeli ve q mertebeli iki dihedral grubun R tarafından üretilen 2 mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorftur [2].

2.6.2 Teorem : [2] $\overline{H}(\lambda_q)$ genişletilmiş Hecke grupları;

$$\overline{H}(\lambda_q) =< T, S, R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

grup sunuşuna sahiptir.□

2.6.3 Sonuç : [6] $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının grup sunuşu;

$$\overline{H}(\lambda) =< T, S, R \mid T^2 = S^\infty = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I > \cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

şeklindedir.□

Hecke gruplarına tek bir eleman ekleyerek elde edilen genişletilmiş Hecke grupları;

$$\overline{H}(\lambda) = H(\lambda) \cup R.H(\lambda)$$

şeklinde iki kosetin birleşimi olarak yazılabilir. Buradan $H(\lambda)$ Hecke gruplarının $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarında iki indeksli bir normal alt grup olarak kapsandığı görülür. Aynı durum $\overline{H}(\lambda_q)$ grupları için de geçerlidir.

Genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt gruplarının cebirsel yapıları [2, 6, 7, 13, 15, 16, 21] çalışmalarında incelenmiştir.

2.7 Genel Hecke Grupları

Lehner [24] nolu çalışmada, Hecke gruplarının kapsandığı daha genel bir sınıf olan genel Hecke gruplarını tanıtmıştır.

2.7.1 Tanım : [24] $2 \leq p \leq q \leq \infty$ ve $p+q>4$ eşitsizliklerini gerçekleyen p ve q tamsayıları için;

$$X(z) = -\frac{1}{z-\lambda_p}; \quad V(z) = z + \lambda_p + \lambda_q \tag{2.9}$$

dönüşümleri ile üretilen gruplara, genel Hecke grupları denir ve $H_{p,q}$ ile gösterilir.□

Açık olarak yukarıdaki tanımda $p = 2$ değeri için;

$$H_{2,q} = H_q = H(\lambda_q)$$

Hecke grupları elde edilir. Ancak bu tanımda $H_{2,2}$ şeklinde bir grup olmadığına dikkat edilmelidir. Ayrıca $p = q$ seçildiği takdirde elemanları Hecke grubunun elemanlarından oluşan $H_{p,p}$ grubu elde edilir. $H_{p,p}$ grupları $H(\lambda_p)$ Hecke gruplarında kapsanır [24].

Genel Hecke gruplarının (2.9) da verilen üreteçlerinde $q < \infty$ değerlerine karşılık $Y = XV$ alınırsa;

$$Y(z) = XV(z) = -\frac{1}{z+\lambda_q}$$

dönüşümü elde edilir. Buna ek olarak X ve Y elemanlarının ürettiği devirli alt gruplar;

$$< X > = < X \mid X^p = I > \cong \mathbb{Z}_p$$

$$< Y > = < Y \mid Y^q = I > \cong \mathbb{Z}_q$$

şeklindedir. Ayrıca $H_{p,q}$ gruplarında X ve Y elemanlarının birbirleri ile bir ilişkisi olmadığından $H_{p,q}$ grubu p ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olur.

2.7.2 Teorem : $2 \leq p \leq q < \infty$ ve $p+q>4$ tam sayı değerlerine karşılık elde edilen $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun sunuşu;

$$H_{p,q} = < X, Y \mid X^p = Y^q = I > \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$$

şeklindedir. $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının simge gösterimi ise;

$$(0; p, q, \infty)$$

olarak elde edilir. □

Lehner [24] çalışmasında $q = \infty$ değerine karşılık $\lambda_q = 2$ kabul etmiş ve elde edilen grupları $H_{p,\infty}$ simgesi ile temsil etmiştir. Bu şekilde elde edilen grupların p mertebeli ve sonsuz mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olduğunu belirtmiştir. Burada λ_q değeri yerine $\lambda \geq 2$ değerleri için elde edilebilecek tüm genel Hecke gruplarının izomorfizma anlamında aynı olduğu söylenebilir. Ancak tüm bu grupların elemanları birbirinden farklı olduğu için aşağıdaki tanıma ihtiyaç duyulmuştur.

2.7.3 Tanım : [41] $p \geq 2$ bir tamsayı ve $\lambda \geq 2$ bir reel sayı olmak üzere;

$$H_{p,\infty}(\lambda) = < X, Y | \, X^p = Y^\infty = I > \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

olarak tanımlanır. Bu tip genel Hecke gruplarının simgesi;

$$(0; p, \infty, \infty)$$

şeklindedir. □

Genel Hecke grubunun elemanlarının katsayıları λ_p ve λ_q sayılarının tanımına göre $\mathbb{Z}[\lambda_p, \lambda_q]$ halkasında yer almaktadır. Ancak Hecke gruplarında olduğu gibi katsayıları $\mathbb{Z}[\lambda_p, \lambda_q]$ halkasından olan herhangi bir Möbius dönüşümünün genel Hecke grubunda kapsanacağını söylemek doğru değildir.

Lehner [24] nolu çalışmasında reel katsayılı Möbius dönüşümlerinden oluşan bir G Fuchsian grubu için;

$$c_0(G) = \min \left\{ |c| \neq 0 \ : \ \frac{az + b}{cz + d} \in G \right\}$$

parametresini tanımlamıştır. Bu parametre yardımıyla genel Hecke gruplarına konjuge olan Fuchsian grupların yapısını incelemiştir.

Lehner ve Newman [22] ve [23] nolu çalışmalarında modüler grup ve herhangi iki devirli grubun serbest çarpım gruplarının konjuge olabileceği gruplardan hareketle mümkün olabilen sunuşlarını incelemişlerdir.

Knopp ve Newmann [42] nolu çalışmasında $p \geq 3$ bir tamsayı ve $\lambda_1.\lambda_2 = 4cos^2\frac{\pi}{p}$ olmak üzere $K(\lambda_1,\lambda_2)$ gruplarını tanıtmışlardır. Bu grupların ayrık olması için bir karakterizasyon elde etmişlerdir. Ayrıca hangi durumlarda bu grupların Hecke gruplarına konjuge olacağını da ispatlamışlardır.

Tsanov [43] çalışmada (p, q, ∞) üçgen gruplarının geometrik özelliklerini, hiperbolik düzlem üzerindeki davranışlarını ve bazı alt gruplarının cebirsel yapılarını incelemiştir.

2.8 Genişletilmiş Genel Hecke Grupları

Kesim 2.7 de tanımlanan genel Hecke grupları üst yarı düzlemin otomorfizmalarından oluşan bir Fuchsian grup sınıfıdır. Bu gruplara genişletilmiş Hecke gruplarının elde edilişine benzer olarak;

$$R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$$

yansıma dönüşümü eklenerek üst yarı düzlemin otomorfizma ve anti-otomorfizmalarından oluşan bir N.E.C. grup oluşturmak mümkündür.

2.8.1 Tanım : Genel Hecke gruplarına $R(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü katılarak elde edilen gruplara genişletilmiş genel Hecke grupları denir. Bu gruplar λ_p ve λ_q sayılarının tanımına göre $\overline{H}_{p,q}$ veya $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ sembolleriyle temsil edilir. □

Öncelikle $\overline{H}_{p,q}$ grubunun yapısını inceleyim. $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubu X , Y ve R elemanları tarafından üretilir. Bu elemanlardan X ve R elemanlarını üreteç kabul eden grubun yapısı;

$$< X, R | \, X^p = R^2 = (XR)^2 = I > \cong D_p$$

şeklinde elde edilir. Benzer olarak Y ve R elemanlarının ürettiği grup da q mertebeli dihedral grup yapısında olacaktır.

$$< Y, R | \, Y^q = R^2 = (YR)^2 = I > \cong D_q$$

Her iki grupta da yer alan R elemanı kendi başına iki mertebeli bir devirli grup üretir. Böylece $\overline{H}_{p,q}$ grubu, elde edilen bu iki dihedral grubun iki mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorf olur.

2.8.2 Teorem : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu aşağıdaki gibidir.

$$\overline{H}_{p,q} =< X,Y,R \,|\, X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >\cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

□

Benzer olarak $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun yapısı da p mertebeli ve sonsuz mertebeli iki dihedral grubun iki mertebeli devirli grup yardımıyla karışımlı serbest çarpımı biçiminde olacaktır.

2.8.3 Teorem : $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) =< X,Y,R \,|\, X^p = Y^\infty = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >\cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_\infty$$

□

Genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke grupları içinde kapsanan iki indeksli bir normal alt gruptur.

2.8.4 Lemma : Genişletilmiş genel Hecke gruplarında

$$XR = RX^{p-1}$$
$$YR = RY^{-1}$$

bağıntıları gerçeklenir.□

Çalışmada kullanılacak grupların tanıtılmasından sonra çalışmada kullanılacak bazı metotlar verilecektir.

2.9 Permütasyon Metodu

Permütasyon metodunu Singerman [38-39] nolu çalışmalarında tanıtmıştır. Bu metod ile bir Fuchsian grubun sonlu indeksli normal alt gruplarının simgeleri hesaplanabilir.

2.9.1 Teorem : [38] Bir Γ Fuchsian grubunun simgesi $(g; m_1, m_2, \dots, m_r; t; u)$ olmak üzere Γ grubunun N indeksli ve

$$(g'; n_{11}, n_{12}, \dots, n_{1p_1}, \dots, n_{r1}, n_{r2}, \dots, n_{rp_r}; s'; t')$$

simgesine sahip bir Γ_1 alt grubu olması için gerek ve yeter koşul aşağıdakilerin gerçekleşmesidir:

1) Γ grubundan N nokta üzerinde geçişli bir permütasyon grubu olan G grubuna aşağıdaki şartları taşıyan bir $\theta: \Gamma \to G$ epimorfizması şu iki koşulu sağlar;

i) $\theta(x_j)$ permütasyon, uzunlukları m_j den kısa olan p_j devirden oluşur. Ayrıca bu devirlerin uzunlukları;

$$\frac{m_j}{n_{j1}}, \frac{m_j}{n_{j2}}, \dots, \frac{m_j}{n_{jp_j}}$$

kadardır.

ii) Her bir $\theta(\gamma)$ permütasyonundaki devirlerin sayısı $\delta(\gamma)$ olmak üzere;

$$s' = \sum_{k=1}^{s} \delta(p_k); \quad t' = \sum_{k=1}^{t} h_1$$

eşitlikleri sağlanır

2) $2\pi\mu(\Gamma)$ hiperbolik alan olmak üzere, $\frac{\mu(\Gamma)}{\mu(\Gamma_1)} = N$ dir.

□

2.9.2 Sonuç : [39] Γ; $(g;\ m_1, m_2, \dots m_k)$ simgesine sahip bir Fuchsian grup ve Γ_1, Γ içinde N indeksli bir normal alt grup olsun.

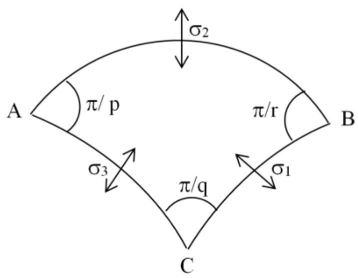
x_i $(i = 1,2, \dots k)$ üreteçlerinin bölüm grubundaki mertebe karşılıkları l_i olmak üzere Γ_1 grubunun simgesi;

$$\left(g';\ \left(\frac{m_1}{l_1}\right)^{N/l_1}, \left(\frac{m_2}{l_2}\right)^{N/l_2}, \dots, \left(\frac{m_k}{l_k}\right)^{N/l_k}\right)$$

şeklindedir. Buradaki g' sayısı Riemann-Hurtwitz formülü ile hesaplanır.□

2.10 Üçgen Gruplar

Bu kesimde Hecke ve genel Hecke gruplarının da içinde bulunduğu üçgen grup sınıfından bahsedilecektir. Her biri 2 den büyük eşit olan p, q ve r tamsayıları için açıları $\frac{\pi}{p}, \frac{\pi}{q}, \frac{\pi}{r}$ olan hiperbolik üçgen ve bu üçgenin kenarlarına göre yansımalar aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.



Şekil 2.3: Hiperbolik üçgen.

Yukarıdaki şekilde yer alan σ_1, σ_2 ve σ_3 yansımaları iki mertebelidir. Bu üç yansıma dönüşümünün ürettiği grup;

$$\Gamma^* =< \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \,|\, (\sigma_1)^2 = (\sigma_2)^2 = (\sigma_3)^2 = (\sigma_2\sigma_3)^p = (\sigma_3\sigma_1)^q = (\sigma_1\sigma_2)^r = I >$$

şeklinde bir sunuşa sahiptir. Γ^* grubu bünyesinde hem yön koruyan hem de yön korumayan dönüşümler bulundurur. Sadece yön koruyan dönüşümler kendi aralarında bir alt grup oluştururlar. Bu alt grup Γ ile temsil edilsin. O halde $\sigma_2\sigma_3 = a$, $\sigma_3\sigma_1 = b$ ve $\sigma_1\sigma_2 = c$ değişken atamaları yapılırsa;

$$\Gamma =< a, b, c \mid a^p = b^q = c^r = I >$$

alt grubun sunuşu elde edilir. Bu grubun (p, q, r) şeklinde bir temsili vardır. Bu şekilde temsil edilen gruplara üçgen grup denir.

Hecke grupları $(2, q, \infty)$ üçgen gösterimine sahip iken genel Hecke grupları (p, q, ∞) gösterimine sahiptir.

2.10.1 Teorem : [44] (p, q, r) bir üçgen grup olmak üzere;

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

eşitsizliği sağlanıyorsa grup sonlu mertebelidir. □

Çalışmanın ilerleyen bölümlerde sık bahsedilecek olan sonlu üçgen grupları inceleyelim:

1) Devirli Gruplar : Sonlu mertebeli tek bir eleman tarafından üretilen gruplardır. $\mathbb{Z}_n$ sembolü ile gösterilirler. Grup sunuşları;

$$\mathbb{Z}_n = < x | x^n = I >$$

olarak gösterilebilir. Grubun üretecinin tersi de bir üreteçtir. Bu bağlamda devirli grupların üçgen gösterimleri $(1, n, n)$, $(n, 1, n)$ veya $(n, 1, n)$ şeklindedir.

2) Dihedral Gruplar : İki mertebeli ve n mertebeli iki eleman tarafından üretilen sonlu üçgen gruplardır. Bu grupların grup temsilleri;

$$D_n = < x, y | x^n = y^2 = (xy)^2 = I > \cong (n, 2, 2)$$

$$D_n = < x, y | x^2 = y^n = (xy)^2 = I > \cong (2, n, 2)$$

$$D_n = < x, y | x^2 = y^2 = (xy)^n = I > \cong (2, 2, n)$$

şeklindedir. D_n dihedral grubunun mertebesi $2n$ dir.

3) Simetrik ve Alterne Gruplar : Sonlu elemanlı bir kümenin kendi üzerine birebir ve örten tüm fonksiyonlarının kümesi, bileşke işlemi altında bir gruptur. Bu sonlu küme n elemanlı ise S_n ile gösterilen bu grup simetrik grup olarak isimlendirilir ve mertebesi $n!$ dir. Simetrik bir grubun elemanlarına birer permütasyon denir. Permütasyonlar transpozisyonların sayısına göre tek veya çift olarak adlandırılır. Çift permütasyonlar kendi aralarında bir grup oluştururlar. Bu gruba alterne grup denir. Alterne grubun mertebesi $n!/2$ dir. Çalışmada adı geçen üçgen gösterimli bazı simetrik ve alterne grup sunuşları aşağıda verilmiştir.

$$A_4 =< a,b|\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = I >\cong (2,3,3) \cong (3,2,3) \cong (3,3,2)$$

$$S_4 =< a,b|\ a^3 = b^2 = (ab)^4 = I >\cong (3,2,4) \cong (2,3,4) \cong (4,3,2) \cong (2,4,3) \cong (4,2,3) \cong (3,4,2)$$

$$\mathrm{A}_5 =< a,b|\ a^3 = b^2 = (ab)^5 = I >\cong (3,2,5) \cong (3,5,2) \cong (2,5,3) \cong (2,3,5) \cong (5,2,3) \cong (5,3,2)$$

2.11 Direkt Çarpım Grubu

İki grubun direkt çarpımı $G = A \times B$ şeklinde tanımlanır. Burada sıralı ikililerin arasındaki işlem ikiliyi oluşturan elemanların bulundukları grupta tanımlanmış işlemdir. Ayrıntılı bilgi için [45] kaynağı incelenebilir.

2.11.1 Teorem : [45] $A =< X|\ R_1 >$ ve $B =< Y|\ R_2 >$ sunuşuna sahip iki grup olsun. R_1 ve R_2 üreteçlere ait bağıntı kümeleridir. O halde A ile B nin direkt çarpım grubu;

$$A \times B =< X, Y\ |R_1, R_2, R_3 >$$

sunuşuna sahiptir. Buradaki $R_3 = \{aba^{-1}b^{-1} : a \in X\ ve\ b \in Y\}$ şeklindedir.□

2.12 Serbest Çarpım Grubu

Herhangi iki grubun serbest çarpımı üreteçlerinin ve bağıntılarının ayrık birleşimi olarak tanımlanır. Şöyle ki;

2.12.1 Tanım : [45] $A =< X|\ R_1 >$ ve $B =< Y|\ R_2 >$ sunuşuna sahip iki grup olsun. A ile B gruplarının $A * B$ şeklinde gösterilen serbest çarpımı;

$$A * B =< X, Y\ |R_1, R_2 >$$

şeklinde tanımlanır. Tüme varım ile sayılabilir adet grubun serbest çarpımı da tanımlanabilir.□

2.13 Karışımlı Serbest Çarpım Grubu

A ile B herhangi iki grup ve $C \leq A$ olmak üzere $\varphi: C \to B$ monomorfizması yardımıyla karışımlı serbest çarpım grubu tanımlanabilir.

2.13.1 Tanım : [45, 46] $A =< X |\, R_1 >$ ve $B =< Y |\, R_2 >$ sunuşuna sahip iki grup olsun. A ile B gruplarının $A *_C B$ şeklinde gösterilen serbest çarpımı;

$$A *_C B =< X, Y \,| R_1, R_2, R_3 >$$

olarak tanımlanır. Burada R_3 bağıntı kümesi;

$$R_3 = \{\varphi(x)x^{-1} | x, C \text{ altgrubunun üreteci } \}$$

şeklindedir. □

2.14 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu kesimde, bir grubun sonlu indeksli bir normal alt grubunun üreteçlerini ve dolayısıyla grup sunuşunu elde etmek için kullanılacak olan Reidemeister-Schreier metodu tanıtılacaktır.

Bir G grubunun üreteçleri $\{g_i\}$ ailesi olsun. H grubu G nin sonlu indeksli bir normal alt grubu olmak üzere Reidemeister-Schreier metodu $G/_H$ bölüm grubunun temsili üzerinden ilerler. Öncelikle $G/_H$ bölüm grubuna ait Σ Schreier transversali aşağıdaki özellikleri sağlayacak biçimde seçilir.

i) $I \in \Sigma$

ii) Σ sağdan sadeleştirme işlemine göre kapalıdır. Başka bir deyişle $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1} \cdot g_{i_2} \dots g_{i_{r-1}} \in \Sigma$ dır.

Transversal kümesi, bu şekilde oluşturulduktan sonra H grubunu üreten elemanlar aşağıdaki algoritma ile hesaplanır [3].

$$(\Sigma \text{ nın bir elemanı}).(\text{G nin bir üreteci}).(\text{önceki çarpımın koset gösterimi})^{-1}$$

$a\epsilon\Sigma$ ve b de G grubunun bir üreteci olmak üzere yukarıdaki çarpım S_{ab} ile gösterilir. H alt grubunun üreteçlerini bulduktan sonra bu üreteçler arasındaki bağıntıları bulmak için τ fonksiyonu şu şekilde tanımlanır:

$G \cong < a_1, a_2, \ldots, a_n \mid R_1, R_2, \ldots, R_k >$ ile temsil edilen bir grup ve $e_i = \pm 1$ için $W = a_{v_1}^{e_1}.a_{v_2}^{e_2} \ldots a_{v_j}^{e_j}$ olmak üzere;

$$\tau(W) = S_{t_1 a_{v_1}}^{e_1}.S_{t_2 a_{v_2}}^{e_2} \ldots S_{t_j a_{v_j}}^{e_j}$$

biçimindedir. Bu eşitlikte $e_i = 1$ iken t_i değeri W elemanında a_{v_i} den önceki parçanın bölüm grubundaki temsilcisidir. Eğer $e_i = -1$ ise t_i değeri W elemanının $a_{v_i}^{-1}$ dahil $a_{v_i}^{-1}$ den önceki parçasının bölüm grubundaki temsilcisidir. Şu halde H alt grubunun elde edilen üreteçleri arasındaki bağıntılar;

$$\tau(tR_i t^{-1})$$

görüntülerinin hesaplanmasıyla elde edilir. Burada t, Σ nın tüm elemanlarını tararken R_i, G grubundaki tüm bağıntılar üzerinde değer alır [8].

2.15 Kuvvet Alt Gruplar

Bir G grubunun, $m \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere gruptaki tüm elemanların m. kuvvetleri ile üretilen alt gruba kuvvet alt grup denir. Bu grup G^m sembolü ile gösterilir.

$$G^m = < x_1^m, x_2^m, \ldots >$$

Kuvvet alt grubu bu şekilde tanımladıktan sonra, bu alt grupların bazı özelliklerini inceleyelim.

2.15.1 Teorem : [47] G bir grup m, n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$G^{m.n} \subset G^m.$$

İspat : $G^{m.n}$ grubunda bulunan her bir $x^{m.n}$ elemanı $(x^n)^m$ biçiminde yazılabilir. Buradaki x^n elemanı G grubunun da bir elemanı olduğu için G^m grubu oluşturulurken bu elemanın da $m.$ kuvveti hesaplanacaktır. Yani $(x^n)^m \in G^m$ olur ki ispat biter. □

2.15.2 Sonuç : [47] G bir grup m, n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$G^{m.n} \subset (G^m)^n.$$

□

Kuvvet alt gruplarının normal alt grup olduklarını söyleyebilmek için aşağıdaki tanım gereklidir.

2.15.3 Tanım : [48] G bir grup H de G nin bir alt grubu olsun. Şayet $f: G \to G$ tanımlanabilecek her endomorfizması için $f(H) \subset H$ oluyorsa H alt grubuna tamamen değişmez özelliğe sahiptir denir. □

Bir G grubunun G^m kuvvet alt grubunu ve G nin kendi üzerine tanımlanan herhangi bir f endomorfizmasını göz önüne alalım.

$$\forall f(x^m) \in f(G^m)$$
$$f(x^m) = f(x)^m \in G^m$$

Yukarıda yazılan önermeler f bir endomorfizma olduğu için doğrudur. Buradan;

$$f(G^m) \subset G^m$$

elde edilir. Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.15.4 Teorem : [49] Kuvvet alt grupları tamamen değişmez özelliğe sahiptir.

□

2.15.5 Teorem : [49] Tamamen değişmez özelliğe sahip bir alt grup normal alt gruptur. □

2.15.6 Sonuç : Kuvvet alt grupları normal alt gruptur. □

Genel Hecke ve genişletilmiş genel Hecke gruplarının $m.$ derece kuvvet alt gruplarının sunuşlarını elde ederken Reidemeister-Schreier metodu kullanılacaktır. Öncelikle bölüm grubu oluşturulacaktır. Bunun için ana grubun sunuşuna tüm elemanların $m.$ derecelerini birime eşitleyen bağıntılar eklenir. Ardından bölüm grubu elemanlarının temsilcilerinden oluşan transversal seçilerek algoritma uygulanır.

2.15.7 Örnek : Reidemeister-Schreier metodunu kullanarak D_4 dihedral grubunun ikinci derece, kuvvet alt grubunun sunuşunu elde edelim.

$$D_4 =< a, b \mid a^2 = b^4 = (ab)^2 = I >$$

Tüm elemanların karelerini birim elemana eşitleyerek bölüm grubu aşağıdaki gibi elde edilir.

$$D_4 / D_4^2 =< a, b \mid a^2 = b^4 = (ab)^2 = b^2 = I >$$

Burada $b^4 = b^2 = I$ bağıntısından $b^2 = I$ elde edilir. Daha sade olarak;

$$D_4 / D_4^2 =< a, b \mid a^2 = b^2 = (ab)^2 = I >\cong D_2$$

yazabiliriz. Bu haliyle 4 mertebeli bölüm grubu için Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, a, b, ab\}$$

seçebiliriz. Dört mertebeli dihedral grup, Klein-4 grubudur ve değişme özelliği vardır. Ardından Reidemeister-Schreier metoduna göre aşağıdaki üreteçler elde edilir.

$$I.a.(a)^{-1} = I \qquad I.b.(b)^{-1} = I$$

$$a.a.(I)^{-1} = I \qquad a.b.(ab)^{-1} = I$$

$$b.a.(ab)^{-1} = bab^3a = baab = b^2 \qquad b.b.(I)^{-1} = b^2$$

$$ab.a.(b)^{-1} = abab^3 = b^3aab^3 = b^2 \qquad ab.b.(a)^{-1} = abba = b^2$$

Sonuç olarak D_4^2 kuvvet alt grubu iki mertebeli bir devirli grup olup;

$$D_4^2 =< b^2 \mid (b^2)^2 = I >\cong \mathbb{Z}_2$$

yapısındadır.□

2.16 Komütatör Alt Gruplar

Bir G grubunda bulunan x_1 ve x_2 gibi iki elemanın komütatörü,

$$[x_1, x_2] = x_1 x_2 x_1^{-1} x_2^{-1}$$

şeklinde tanımlanır. İki eleman için verilen bu tanım tümevarım ile sayılabilir sayıda elemana genellenebilir.

2.16.1 Tanım : Bir G grubunda tüm elemanların komütatörlerinin ürettiği alt gruba komütatör alt grup denir. Komütatör alt grup G' sembolüyle gösterilir.□

2.16.1 Tanımda elde edilen birinci komütatör alt gruptur. Aynı işlemi tekrarlayarak ikinci, üçüncü vs. komütatör alt gruplar elde edilebilir. Bu şekilde elde edilen grup dizisi için;

$$G^{(n+1)} \leq G^{(n)} \leq \cdots \leq G'' \leq G' \leq G$$

sağlanır. Komütatör alt grup tamamen değişmez özelliğe sahip alt gruptur. Bu sebeple normal alt grup olur [49].

2.16.2 Teorem : [50] G bir grup G' de birinci komütatör alt grup olsun. Bu durumda bölüm grubu olan $G/_{G'}$ değişmeli bir gruptur. □

2.16.3 Sonuç : [50] G bir grup H de G nin bir normal alt grubu olsun. Eğer $G/_{H}$ değişmeli ise $G' \leq H$ dir.□

Komütatör alt grupların bu özelliklerini dikkate alarak, genel Hecke ve genişletilmiş genel Hecke gruplarının komütatör alt grupları çalışmanın altıncı bölümünde incelenecektir. Bunun için Reidemeister-Schreier metodu kullanılacaktır. Öncelikle bölüm grubu oluşturulacaktır. Komütatör alt grup ile elde edilen bölüm grubu değişmeli olduğu için bölüm grubunun sunuşu, ana gruba değişmelilik özelliği eklenerek elde edilir. Ardından bölüm grubu elemanlarının temsilcilerinden oluşan bir transversal seçilerek algoritma uygulanacaktır.

2.16.4 Örnek : Reidemeister-Schreier metodunu kullanarak A_4 alterne grubunun birinci komütatör alt grubunun sunuşunu elde edelim.

$$A_4 =< a, b |\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = I >$$

A_4 / A_4' bölüm grubunun elde etmek için yukarıdaki bağıntılara ek olarak değişme özelliğini eklemek yeterlidir.

$$A_4 / A_4' =< a, b \mid a^2 = b^3 = (ab)^3 = I, ab = ba >$$

Burada $I = (ab)^3 = ababab$ ve değişme özelliğinden $a = I$ elde edilir. Böylece bölüm grubunun sade hali aşağıdaki gibidir.

$$A_4 / A_4' =< b \mid b^3 = I > \cong \mathbb{Z}_3$$

Şimdi bölüm grubu temsilcilerinden oluşan Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, b, b^2\}$$

şeklinde seçebiliriz. Ardından A_4' grubunun üreteçleri aşağıdaki gibidir.

$$S_{Ia} = I.a.(I)^{-1} = a \qquad S_{Ib} = I.b.(b)^{-1} = I$$
$$S_{ba} = b.a.(b)^{-1} = bab^2 \qquad S_{bb} = b.b.(b^2)^{-1} = I$$
$$S_{b^2a} = b^2.a.(b^2)^{-1} = b^2ab \qquad S_{b^2b} = b^2.b.(I)^{-1} = I$$

Elde edilen bu üreteçler arasındaki bağıntılar aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\tau(IaaI) = S_{Ia}S_{Ia} = a^2$$
$$\tau(IabababI) = S_{Ia}S_{Ib}S_{ba}S_{bb}S_{b^2a}S_{b^2b} = a.bab^2.b^2ab = (ab)^3$$
$$\tau(baab^{-1}) = S_{Ib}S_{ba}S_{ba}S_{b^2b}^{-1} = (bab^2)^2$$
$$\tau(bbaab^{-1}b^{-1}) = S_{Ib}S_{bb}S_{b^2a}S_{b^2a}S_{Ib}^{-1}S_{bb}^{-1} = (b^2ab)^2$$

Diğer tüm bağıntılar bilinen bağıntılar olup $a.bab^2 = b^2ab$ eşitliği elde edilir. Sonuç olarak A_4' komütatör alt grubun sunuşunu aşağıdaki gibi elde ederiz.

$$A_4' =< a, bab^2 \mid a^2 = (bab^2)^2 = (a.bab^2)^2 = I > \cong D_2$$

□

3. GENEL HECKE VE GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARINDA KONJUGE SINIFLARI

Bu bölümde ön bilgiler bölümünde tanıtılan $H_{p,q}$ genel Hecke ve $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların, konjuge sınıfları çalışılacaktır. Elde edilen sonuçlardan hareketle bu grupların burulmalı normal alt grupları ile ilgili bir uygulamaya da yer verilecektir.

Bir grup üzerinde tanımlanan konjuge olma bağıntısının bir denklik bağıntısı olmasından dolayı genel Hecke ve genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanlar için bir parçalanış elde edilmiş olacaktır. Burada 3.3 ve 3.4 bölümlerindeki sonuçlar ilk defa verilmiş olup [51] yayına sunulmuştur.

Öncelikle bu bölümle ilgili yapılmış çalışmalara yer verilecektir.

3.1 Genişletilmiş Hecke Gruplarında Sonlu Mertebeden Elemanların Konjuge Sınıfları

$\overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke grupları 2 mertebeli ve q mertebeli iki dihedral grubun 2 mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorftur [2].

$$\overline{H}_q =< T,S,R \mid T^2 = S^q = R^2 = (TR)^2 = (SR)^2 = I >\cong D_2 *_{\mathbb{Z}_2} D_q \quad (3.1)$$

Yılmaz Özgür ve Şahin [52] nolu çalışmalarında, genişletilmiş Hecke gruplarında bulunan sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarını elde etmişlerdir. Ardından bu ayrışımın burulmalı normal alt gruplarla ilişkisini içeren bir uygulamaya da yer vermişlerdir.

3.1.1 Teorem : [52] $q \geq 3$ bir asal sayı olmak üzere $\overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke grubundaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları toplam $\frac{q+5}{2}$ tanedir. Bunlardan üç tanesi 2 mertebeli ve $\frac{q-1}{2}$ tanesi q mertebelidir. İki mertebeli olanlardan eliptik dönüşümler T elemanına; yansıma dönüşümleri ise R veya

TR elemanlarından birine konjugedir. Mertebesi q olan eliptik dönüşümler $S, S^2, \ldots, S^{\frac{q-1}{2}}$ elemanlarından birine konjugedir. □

Asal olmayan q değerleri için daha farklı konjuge sınıflarının elde edileceği teorem aşağıda verilmiştir.

3.1.2 Teorem : [52] Asal olmayan q değerleri için $\overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke gruplarındaki konjuge sınıfları q sayısının tek veya çift olma durumu için aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 3.1: Genişletilmiş Hecke gruplarında konjuge sınıfları.

<table>
<tr><th>q</th><th>Konjuge Sınıfının Cinsi</th><th>Mertebe</th><th>Adet</th><th colspan="2">Temsilciler</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Tek</td><td rowspan="3">Eliptik</td><td>q</td><td>$\frac{\varphi(q)}{2}$</td><td>$S^{r_1}, S^{r_2}, \ldots, S^{r_{\varphi(q)/2}}$</td><td>$1 \le i \le \frac{\varphi(q)}{2}$; $(r_i, q) = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1</td><td colspan="2">T</td></tr>
<tr><td>t_i
$(t_i \mid q)$</td><td>$\frac{q-1}{2} - \frac{\varphi(q)}{2}$</td><td colspan="2">$S^{q/t_i}$</td></tr>
<tr><td>Yansıma</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">R, TR</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Çift</td><td rowspan="3">Eliptik</td><td>q</td><td>$\frac{\varphi(q)}{2}$</td><td>$S^{r_1}, S^{r_2}, \ldots, S^{r_{\varphi(q)/2}}$</td><td>$1 \le i \le \frac{\varphi(q)}{2}$; $(r_i, q) = 1$</td></tr>
<tr><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">$T, S^{q/2}$</td></tr>
<tr><td>t_i
$(t_i \mid q)$</td><td>$\frac{q}{2} - \frac{\varphi(q)}{2} - 1$</td><td colspan="2">$S^{q/t_i}$</td></tr>
<tr><td>Yansıma</td><td>2</td><td>2</td><td colspan="2">R, TR</td></tr>
</table>

□

[52] nolu çalışmada ayrıca, H_q Hecke grupları için de sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları elde edilmiştir.

3.1.3 Teorem : [52] q asal bir sayı olmak üzere $\overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke grubunun burulmalı her bir alt grubu sonlu indekslidir. □

3.1.4 Sonuç : $G \lhd \overline{H}_q$ olmak üzere G bünyesinde en az bir eliptik eleman veya yansıma dönüşümü bulunduran bir normal alt grup ise $\left|\overline{H}_q : G\right| \mid 4q$ dur. □

3.2 Hecke Gruplarında Eliptik Olmayan Elemanların Konjuge Sınıfları

Hecke grupları arasında literatürde en sık karşımıza çıkan $q = 3$ değerine karşılık elde edilen $H_3 = \Gamma$ modüler gruptur. Modüler grup;

$$T(z) = -\frac{1}{z} \quad ve \quad S(z) = -\frac{1}{z+1}$$

kesirli lineer dönüşümleri tarafından üretilir. Böylelikle modüler grup 2 mertebeli ve 3 mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur [53].

$$\Gamma =< T, S \mid T^2 = S^3 = I >\cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$$

Fine [53] çalışmasında modüler gruptaki her elemanın TS ve TS^2 blokları ile yazılabildiğini göstermiştir. Bir elemanın bu blokların kuvvetlerinin çarpımı olarak ifade edilmiş halini "İndirgenmiş Blok Form (BRF)" olarak tanımlamıştır. BRF yardımıyla izi verilen bir sayıdan daha küçük olan tüm konjuge sınıflarını elde etmek için bir algoritma geliştirmiştir. Böylelikle Γ grubundaki her bir elemanın $T,\ S,\ S^2$ veya bir BRF ye konjuge olduğunu ifade etmiştir.

Schmidt ve Sheingorn, Hecke gruplarının;

$$U(z) = ST(z) = \frac{\lambda_q z - 1}{z}$$

olmak üzere;

$$V_j(z) = U^{j-1}S(z); \quad 1 \leq j \leq q-1$$

elemanları ile de üretilebileceği fikriyle Fine' ın kullandığı algoritmayı Hecke grupları için genellemişlerdir [54].

Hoang ve Ressler [55] bu algoritmayı kullanarak Hecke gruplarındaki eliptik olmayan elemanların konjuge sınıflarını elde etmişlerdir. Her bir konjuge sınıfının temsilcisini karakterize eden aşağıdaki lemmayı vermişlerdir.

3.2.1 Lemma : [55] $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere H_q Hecke grubundaki her bir eliptik olmayan M elemanı V_j üreteçlerinin bir çarpımına konjugedir. Yani; $1 \leq j_k \leq p-1$; $1 \leq k \leq t$; $t \epsilon \mathbb{Z}^+$ olmak üzere;

$$M \sim W = V_{j_1} . V_{j_2} \dots V_{j_t}$$

Dahası bu çapım devirsel permütasyonlar dışında tek türlüdür. □

Ayrıca belirli bir ize sahip sonlu çoklukta konjuge sınıfının bulunduğunu ispatlamışlardır. Böylelikle konjuge sınıflarının kuadratik formlar ile ilişkilerini ortaya koymuşlardır.

3.3 $H_{p,q}$ Genel Hecke Gruplarında Sonlu Mertebeli Elemanların Konjuge Sınıfları

Bu bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları elde edilecektir. $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının p mertebeli ve q mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorf olduğunu biliyoruz. Bununla birlikte genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanlar hakkında yorum yapabilmek için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulacaktır.

3.3.1 Teorem : [46] A ve B birer grup olmak üzere $A * B$ grubundaki sonlu mertebeli bir eleman A veya B gruplarından birindeki sonlu mertebeli bir elemana konjugedir.

İspat : Sonlu mertebeli bir $g \epsilon A * B$ eleman olsun. Bu durumda g elemanı $A * B$ grubunun üreteçlerinin bir kombinasyonu olarak yazılabilir. Dahası bu kombinasyonun bir indirgenmiş formu da vardır. İspatı bu indirgenmiş formun uzunluğu üzerinden tümevarım ile yapalım.

g elemanının indirgenmiş formunun uzunluğu 0 ise g birim elemana eşit olacağından ispat açıktır. Şayet uzunluk 1 olsaydı bu durumda g elemanı bünyesinde tek çarpan içerip o çarpanın bulunduğu gruba dahil olacaktı. r bir doğal sayı olmak üzere teoremin $r-1$ uzunluklu g elemanı için geçerli olacağını kabul edelim. Ardından r uzunluklu bir g elemanı için ispata devam edelim.

$$g = g_1 g_2 \cdots g_r$$

Varsayalım g_1 ve g_r farklı grupların elemanı olsunlar. Bunun sonucunda $k \epsilon \mathbb{Z}^+$ için

$$g^k = (g_1 g_2 \dots g_r)(g_1 g_2 \dots g_r) \dots (g_1 g_2 \dots g_r)$$

şeklinde olup $g$nin sonlu mertebeli olması ile çelişir. Dolayısıyla g_1 ve g_r aynı grubun elemanı olmak zorundadır. Böylece g nin bir konjugesini;

$$g \sim g_1^{-1} g g_1 = g_2 \dots (g_{\mathrm{r}} g_1)$$

elde edebiliriz. Burada g_1 ve g_{r} aynı gruptan olduğu için bu çarpımın sonucunu tek bir eleman ile göstermek mümkündür. Yani $g_1^{-1} g g_1$ elemanının indirgenmiş formunun uzunluğu r den küçüktür. İndüksiyon hipotezi gereği $g_1^{-1} g g_1$ elemanı çarpımı oluşturan gruplardan yalnızca birindeki sonlu mertebeli bir elemana konjuge olup konjugelik bağıntısının geçişlilik özelliğinden ispat sona erer.□

3.3.1 Teorem $H_{p,q}$ genel Hecke grubundaki sonlu mertebeden konjuge sınıflarını elde etmek için kullanılacaktır. Şöyle ki;

$$H_{p,q} =< X, Y \mid X^p = Y^q = I >\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_q$$

sunuşunu göz önüne alırsak bu gruba dahil olan sonlu mertebeli bir eleman ya;

$$G_1 =< X \mid X^p = I >\cong \mathbb{Z}_p$$

grubundaki bir elemana ya da;

$$G_2 =< Y \mid Y^q = I >\cong \mathbb{Z}_q$$

grubundaki bir elemana konjuge olmalıdır.

Şimdi $H_{p,q}$ genel Hecke grubunda sonlu mertebeli bir g elemanını göz önüne alalım. g sonlu mertebeli olduğu için $g$elemanının indirgenmiş biçiminde X ve Y üreteçlerinin her ikisi de bulunamaz. Bu durumda $g = X^a,\ \ 1 \le a \le p-1$ veya $g = Y^b,\ \ 1 \le b \le q-1$ durumlarından yalnızca biri geçerlidir. Şimdi bu sınıfları detaylı olarak inceleyelim:

G_1 grubundaki p mertebeli konjuge sınıfları $1 \le i \le \varphi(p)$, $(r_i, p) = 1$ olmak üzere;

$$X^{r_1}, X^{r_2}, \dots , X^{r_{\varphi(p)}}$$

şeklinde olacaktır. Geriye kalan kuvvetler ise $t_i | p$ olmak üzere;

$$X^{k\frac{p}{t_i}}\left(1 < t_i < p,\ \ k\frac{p}{t_i} < p\right)$$

şeklinde t_i mertebeli konjuge sınıflarıdır. Böylelikle G_1 grubunda $p-1$ adet sonlu mertebeli konjuge sınıfı mevcuttur.

Benzer olarak G_2 grubundaki konjuge sınıflarını da inceleyelim. q mertebeli konjuge sınıfları $1 \le i \le \varphi(q)$, $(s_i, q) = 1$ olmak üzere;

$$Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\varphi(q)}}$$

şeklindedir. Son olarak q sayısının her bir m_i böleni için m_i mertebeli;

$$Y^{k\frac{q}{m_i}}\left(1 < m_i < q,\ \ k\frac{q}{m_i} < q\right)$$

şeklinde konjuge sınıfları vardır. Böylelikle aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.3.2 Teorem : $H_{p,q}$ genel Hecke grubunda $p+q-2$ tane sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır.□

3.3.3 Sonuç : p ve q asal sayılar olmak üzere $H_{p,q}$ genel Hecke grubunda sadece p mertebeli ve q mertebeli konjuge sınıfları mevcuttur. □

3.3.4 Sonuç : $H_{p,q}$ grubunda 2 mertebeli bir konjuge sınıfının olması için p veya q sayılarından en az birinin çift sayı olması gerekir.

3.4 $\overline{H}_{p,q}$ Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarında Sonlu Mertebeli Elemanların Konjuge Sınıfları

Bu kısımda 3.1 kesimde verilen sonuçları, $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarına genelleyen sonuçlar elde edilecektir. $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşundan hareketle bu bölümde ihtiyaç duyacağımız iki lemmayı verelim.

3.4.1 Lemma : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarında

$$X^t R = R X^{p-t}$$

$$Y^m R = R Y^{q-m}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $1 \leq t \leq p-1$ ve $1 \leq m \leq q-1$ dir.

İspat : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun;

$$\overline{H}_{p,q} = < X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >$$

grup sunuşundaki bağıntılardan kolaylıkla elde edilebilir. □

3.4.2 Lemma : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarında $1 \leq t \leq p-1$ ve $1 \leq m \leq q-1$ olmak üzere aşağıdaki önermeler sağlanır.

1) p çift ve t tek bir tamsayı olduğu durumda $X^t R \sim XR$ aksi durumlarda ise $X^t R \sim R$,

2) $1 \leq u \leq \frac{p-1}{2}$ olmak üzere $X^u \sim X^{p-u}$,

3) q çift ve m tek bir tamsayı olduğu durumda $Y^m R \sim YR$ aksi durumlarda ise $Y^m T \sim R$;

4) $1 \leq n \leq \frac{q-1}{2}$ olmak üzere $Y^n \sim Y^{q-n}$.

İspat : 1) p çift ve t tek bir tamsayı olsun. $w = \frac{pk+t+1}{2}$ ve k değeri de w sayısının tamsayı olmasını sağlayan bir tamsayı olmak üzere;

$$X^t R \sim (X^w R).X^t R.(X^w R)^{-1}$$

konjugeliğinde 3.4.1 Lemmadaki eşitlikler yardımıyla;

$$\begin{aligned}(X^w R).X^t R.(X^w R)^{-1} &= X^w R.X^t R.R X^{p-w}\\ &= X^w R.X^{t+p-w}\\ &= X^{w+p-t-p+w} R\\ &= X^{2w-t} R\\ &= X^{2\frac{pk+t+1}{2}-t} R\\ &= XR\end{aligned}$$

elde edilir. p çift ve t tek bir tamsayı olmadığı durumlarda ise $w=\frac{pk+t}{2}$ ve k sayısı da w değerinin tamsayı olmasını sağlayan bir tamsayı olmak üzere X^tR elemanını soldan X^wR ve sağdan $(X^wR)^{-1}$ ile çarparak elde edilen konjuge eleman R olacaktır.

2) $1\le u\le\frac{p-1}{2}$ olmak üzere X^u elemanını soldan ve sağdan R ile çarpalım.

$$X^u\sim RX^uR$$

Buradan 3.4.1 Lemma yardımıyla;

$$X^u\sim X^{p-u}$$

elde edilir.

3) q çift ve m tek bir tamsayı olduğu durumda $v=\frac{qk+m+1}{2}$ ve k sayısı da v değerinin tamsayı olmasını sağlayan bir tamsayı seçilerek 1) dekine benzer olarak ispat yapılır. Aksi takdirde $v=\frac{qk+m}{2}$ alınmalıdır.

4) $1\le n\le\frac{q-1}{2}$ olmak üzere Y^n elemanını sağdan ve soldan R ile çarparak 2) dekine benzer olarak ispat elde edilebilir. □

3.4.1 Lemma ve 3.4.2 Lemma $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının sonlu mertebeli konjuge sınıflarının elde edilmesinde büyük kolaylık sağlayacaktır. İlk önce p ve q sayılarının asal olduğu durumu inceleyeceğiz.

3.4.3 Teorem : p ve q; $2\le p\le q,\ p+q>4$ şartlarını sağlayan asal sayılar olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubundaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları aşağıdaki tablodaki gibidir;

Tablo 3.2: Asal p ve q değerleri için $\overline{H}_{p,q}$ gruplarında konjuge sınıfları.

Konjuge Sınıfın Cinsi	Mertebesi	Sınıf Temsilcileri
Eliptik	p	$X,X^2,\dots,X^{\frac{p-1}{2}}$
Eliptik	q	$Y,Y^2,\dots,Y^{\frac{q-1}{2}}$
Yansıma	2	$R\,,X^{(p,2)-1}R$

İspat : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun p mertebeli ve q mertebeli iki dihedral grubun, iki mertebeli devirli grup altında karışımlı serbest çarpımına izomorf olduğunu biliyoruz. O halde;

$$G_1 =< X, R \mid X^p = R^2 = (XR)^2 = I >\cong D_p$$
$$G_2 =< Y, R \mid Y^q = R^2 = (YR)^2 = I >\cong D_q$$

olmak üzere $\overline{H}_{p,q} \cong G_1 *_{\mathbb{Z}_2} G_2$ düşünebiliriz. Bu durumda 3.3.1 Teoreme göre $G_1 *_{\mathbb{Z}_2} G_2$ grubundaki her bir sonlu mertebeli eleman G_1 veya G_2 gruplarından birindeki tek bir elemana konjuge olmak durumundadır. Şimdi G_1 ve G_2 gruplarındaki muhtemel sonlu mertebeli konjuge sınıflarını inceleyelim.

Bir $g \epsilon G_1 *_{\mathbb{Z}_2} G_2$ sonlu mertebeli eliptik eleman olsun. g elemanının üreteçlerin kuvvetlerinin çarpımı formundaki yazılışını göz önüne alalım. Bu formda X veya Y den sadece biri bulunmalıdır. Yani

$$g = X^t \ , \qquad 1 \leq t \leq p-1$$

veya

$$g = Y^m \ , \qquad 1 \leq m \leq q-1$$

olmalıdır. Aksi takdirde g nin indirgenmiş formunda hem X hem de Y olsaydı bu durum g elemanının sonlu mertebeli olmasıyla çelişirdi. Şayet $g = X^t$ için G_1 grubundaki sonlu mertebeli eliptik elemanların muhtemel konjuge sınıfları $X, X^2, \dots, X^{p-1}$ olur. 3.4.2 Lemmaya göre bu sınıfların sayısı yarıya düşer ve temsilcileri $X, X^2, \dots, X^{\frac{p-1}{2}}$ şeklindedir. Benzer şekilde $g = Y^m$ olması durumunda G_2 grubundaki sonlu mertebeli eliptik elemanların konjuge sınıfları

$$Y, Y^2, \dots, Y^{\frac{q-1}{2}}$$

şeklinde elde edilir.

Eğer g sonlu mertebeli bir yansıma dönüşümü olsaydı g elemanının indirgenmiş formunda R elemanı sonda bulunurdu. Bu şekildeki bir eleman da G_1 grubundaki

$$R, XR, X^2R, \dots, X^{\frac{p-1}{2}}R$$

elemanlarından birine veya G_2 grubundaki

$$R, YR, Y^2R, \dots, Y^{\frac{q-1}{2}}R$$

elemanlarından birine konjuge olur. 3.4.2 Lemmaya göre bu sınıfların tamamı $p \neq 2$ durumunda R elemanına konjuge olur.

$p = 2$ durumunda XR şeklinde fazladan bir yansıma konjuge sınıfı daha elde edilir.□

3.4.4 Örnek : $\overline{H}_{3,5} =< X, Y, R \mid X^3 = Y^5 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >$ grubundaki tüm sonlu mertebeli konjuge sınıfları R, X, Y, Y^2 şeklindedir. Yani $\overline{H}_{3,5}$ grubundaki her bir sonlu mertebeli eliptik eleman X, Y, Y^2 elemanlarından birine; her bir sonlu mertebeli yansıma elemanı ise R ye konjugedir. Buradan $\overline{H}_{3,5}$ grubundaki sonlu mertebeli elemanların izleri hakkında yorum yapmak da mümkündür. Aynı konjuge sınıfındaki elemanların izi eşit olacağından $\overline{H}_{3,5}$ her bir sonlu mertebeli eliptik elemanın izi -1, λ_5 veya ${\lambda_5}^2 - 2$ olur. Benzer olarak her sonlu mertebeli yansıma dönüşümünün izi de 0 olacaktır.□

p ve q sayılarının asal olmadığı durumlarda 3.4.3 Teoremdeki durumlardan farklı mertebeli konjuge sınıfları olacaktır. Bu durumları p ve q nun tek veya çift olma durumlarına göre ayrı ayrı inceleyeceğiz.

1. **Durum :** p ve q tek sayı ise:

$\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubundaki sonlu mertebeli bir g elemanı indirgenmiş biçiminde hem X hem de Y üretecini bulunduramaz. Eğer g elemanının mertebesi p ise; g, 3.4.1 Lemma ve 3.4.2 Lemmadan dolayı $1 \leq i \leq \frac{\varphi(p)}{2}$, $(r_i, p) = 1$ olmak üzere $X^{r_1}, X^{r_2}, \dots, X^{r_{\varphi(p)/2}}$ elemanlarından birine konjuge olmak durumundadır. Benzer şekilde şayet g elemanının mertebesi q ise; g indirgenmiş biçiminde sadece Y üretecini bulunduracağından g nin konjuge olabileceği elemanlar; $1 \leq j \leq \frac{\varphi(q)}{2}$, $(s_j, q) = 1$ olmak üzere $Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\varphi(q)/2}}$ olacaktır.

Eğer g elemanı bir yansıma dönüşümü ise $g = RX^t$ veya $g = RY^m$ şeklinde bir indirgenmiş biçime sahip olacağından $g \sim R$ olacaktır.

p ve q tek sayı olduğundan, $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunda farklı mertebeli elemanlar da vardır. Dolayısıyla bu elemanların konjuge sınıfları farklı olacaktır. $\forall a_i | p$ için temsilcisi $X^{k\frac{p}{a_i}}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{p}{a_i} < p$ olan a_i mertebeli bir konjuge sınıfı vardır. 3.4.2 Lemmadan dolayı bu şekildeki konjuge sınıflarının sayısı yarıya düşecektir. Başka bir deyişle a_i mertebeli konjuge sınıflarının sayısı $\frac{p-1-\varphi(p)}{2}$ olur.

Ayrıca $\forall b_i | q$ için temsilcisi $Y^{k\frac{q}{b_i}}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{q}{b_i} < q$ olan b_i mertebeli bir konjuge sınıfı vardır. Bu şekildeki sınıfların sayısı ise $\frac{q-1-\varphi(q)}{2}$ olup toplamda $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunda $\frac{p+q}{2}$ adet sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır.

2. Durum : p ve q çift sayı ise:

p ve q mertebeli eliptik elemanların konjuge sınıfları 1. durum ile aynı olacaktır. Bu durumda yansıma dönüşümlerinin temsilcileri R, XR ve YR olan 3 adet konjuge sınıfı vardır. Ayrıca 1. durumdan farklı olarak eliptik elemanların $X^{\frac{p}{2}}$ ve $Y^{\frac{q}{2}}$ şeklinde iki adet konjuge sınıfı elde edilir. Ek olarak p nin 2 den farklı her bir a_i böleni için temsilcisi $X^{k\frac{p}{a_i}}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{p}{a_i} < p$ olan a_i mertebeli bir konjuge sınıfı vardır. Bu sınıfların sayısı ise $\frac{p-2-\varphi(p)}{2}$ adettir. Yine q nun 2 den farklı her bir b_i böleni için temsilcisi $Y^{k\frac{q}{b_i}}$; $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{q}{b_i} < q$ olan b_i mertebeli $\frac{q-2-\varphi(q)}{2}$ adet eliptik elemanların konjuge sınıfları vardır. Böylelikle toplamda p ve q çift sayı iken $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunda $\frac{p+q+6}{2}$ adet sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır.

3. Durum : p çift ve q tek sayı ise;

Bu durumda q tek sayı olduğundan 2 mertebeli eliptik elemanların, temsilcisi $X^{\frac{p}{2}}$ olmak üzere tek bir konjuge sınıfı vardır. Ayrıca 2. durumdan farklı olarak herhangi bir sonlu mertebeden yansıma dönüşümünün dahil olabileceği 2 farklı konjuge sınıfı olup temsilcileri R ve XR dir. Diğer konjuge sınıfları ise ikinci durum ile aynıdır. Yani toplamda $\frac{p+q+3}{2}$ adet sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır.

NOT : Üçüncü durumda $p = 2$ ve q asal bir tamsayı seçilirse $\overline{H}_{2,q} = \overline{H}_q$ genişletilmiş Hecke grubu elde edilir. 2 asal bir tamsayı olduğundan 3.4.3 Teoremin ispatına benzer olarak $\overline{H}_q$ grubundaki herhangi bir sonlu mertebeli elemanın konjuge olabileceği;

$$R, XR, YR, Y^2R, Y^3, \dots, Y^{q-1}R$$

yansıma elemanları veya;

$$X, Y, Y^2, Y^3, \dots, Y^{q-1}$$

eliptik elemanları vardır. 3.4.2 Lemmadaki $Y^mR \sim R$ ve $Y^m \sim Y^{q-m}$ bağıntıları kullanılırsa $\frac{q+5}{2}$ adet konjuge sınıfı elde edilir. Bu sınıfların temsilcileri;

$$X, Y, Y^2, Y^3, \dots, Y^{\frac{q-1}{2}}, R, XR$$

şeklindedir. Bu sonuç 3.1.1 Teorem ile aynıdır.

Son olarak p nin tek ve q nun çift sayı olduğu durumu inceleyelim.

4. Durum : p tek ve q çift sayı ise;

Bu durumda üçüncü durumdaki sonuçlara benzer sonuçlar elde ederiz. Farklı olarak 2 mertebeli eliptik elemanların konjuge sınıfı $Y^{\frac{q}{2}}$ ile temsil edilir. Sonuç olarak $\frac{p+q+3}{2}$ adet sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır.

Şimdi bu dört durumu özetleyen aşağıdaki teoremi verebiliriz.

3.4.5 Teorem : $2 \leq p \leq q$ ve $p + q > 4$ olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubundaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.3: $\overline{\boldsymbol{H}}_{p,q}$ gruplarındaki sonlu mertebeli konjuge sınıfları.

p	q	Konjuge Sınıfının Cinsi	Mertebesi	Konjuge Sınıf Temsilcileri	Konjuge Sınıf Sayısı
Tek	Tek	Eliptik	p	$X^{r_1}, X^{r_2}, \dots, X^{r_{\frac{\varphi(p)}{2}}}$	$\frac{\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	a_i	$X^{k\frac{p}{a_i}}$	$\frac{p-1-\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	q	$Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\frac{\varphi(q)}{2}}}$	$\frac{\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	b_i	$Y^{k\frac{q}{b_i}}$	$\frac{q-1-\varphi(q)}{2}$
		Yansıma	2	R	1
Çift	Çift	Eliptik	p	$X^{r_1}, X^{r_2}, \dots, X^{r_{\frac{\varphi(p)}{2}}}$	$\frac{\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	a_i	$X^{k\frac{p}{a_i}}$	$\frac{p-2-\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	q	$Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\frac{\varphi(q)}{2}}}$	$\frac{\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	b_i	$Y^{k\frac{q}{b_i}}$	$\frac{q-2-\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	2	$X^{p/2}, Y^{q/2}$	2
		Yansıma	2	R, XR, YR	3
Çift	Tek	Eliptik	p	$X^{r_1}, X^{r_2}, \dots, X^{r_{\frac{\varphi(p)}{2}}}$	$\frac{\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	a_i	$X^{k\frac{p}{a_i}}$	$\frac{p-2-\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	q	$Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\frac{\varphi(q)}{2}}}$	$\frac{\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	b_i	$Y^{k\frac{q}{b_i}}$	$\frac{q-1-\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	2	$X^{p/2}$	1
		Yansıma	2	R, XR	2
Tek	Çift	Eliptik	p	$X^{r_1}, X^{r_2}, \dots, X^{r_{\frac{\varphi(p)}{2}}}$	$\frac{\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	a_i	$X^{k\frac{p}{a_i}}$	$\frac{p-1-\varphi(p)}{2}$
		Eliptik	q	$Y^{s_1}, Y^{s_2}, \dots, Y^{s_{\frac{\varphi(q)}{2}}}$	$\frac{\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	b_i	$Y^{k\frac{q}{b_i}}$	$\frac{q-2-\varphi(q)}{2}$
		Eliptik	2	$Y^{q/2}$	1
		Yansıma	2	R, YR	2

Burada $1 \leq i \leq \frac{\varphi(p)}{2}$, $(r_i, p) = 1, 1 \leq j \leq \frac{\varphi(q)}{2}$, $(s_j, q) = 1$, $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{p}{a_i} < p$ ve $k\epsilon\mathbb{Z}$, $k\frac{q}{b_i} < q$ şeklinde tanımlanmıştır.□

3.4.5 Teorem, $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarını ve cinslerini ifade eder. Tüm durumlardaki toplam konjuge sınıf sayısını aşağıdaki sonuçta görebiliriz.

3.4.6 Sonuç : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarında;

$$\left[\!\left[\frac{p}{2}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{q}{2}\right]\!\right] + (2,p) + (2,q) - 1$$

adet sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfı vardır.□

3.4.7 Örnek : $p = 5$ ve $q = 9$ için elde edilen $\overline{H}_{5,9}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun sunuşu;

$$\overline{H}_{5,9} =< X, Y, R \mid X^5 = Y^9 = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >$$

şeklindedir. 3.4.6 Sonuca göre $\overline{H}_{5,9}$ grubunda;

$$\left[\!\left[\frac{5}{2}\right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{9}{2}\right]\!\right] + (2,5) + (2,9) - 1 = 7$$

tane sonlu mertebeli konjuge sınıfı vardır. 3.4.5 Teoreme göre bu gruptaki herhangi bir g sonlu mertebeli elemanın mertebesi 2, 3, 5 veya 9 olabilir. $o(g) = 2$ ise g bir yansıma dönüşümü olup R elemanına konjugedir. Şayet g nin mertebesi 3 ise g bir eliptik eleman olup Y^3 elemanına konjugedir. g nin mertebesinin 5 olduğu durumda g nin dahil olabileceği 2 farklı konjuge sınıfı vardır. Bu sınıfların temsilcileri $X \; ve \; X^2$ dir. Son olarak $o(g) = 9$ ise g elemanı Y, Y^2, Y^4 elemanlarından birine konjugedir.

Bu ve benzeri birkaç örnek aşağıdaki tabloda verilmiştir:

Tablo 3.4: $\overline{\boldsymbol{H}}_{p,q}$ gruplarındaki sonlu mertebeli konjuge sınıfları için örnekler.

Grup	Elemanın Tipi	Mertebesi	Sınıf Temsilcisi	Sınıf Sayısı
$\overline{\boldsymbol{H}}_{5,9}$	Eliptik	5	X	$[\![\frac{5}{2}]\!]+[\![\frac{9}{2}]\!]+(2,5)+(2,9)-1=7$
			X^2	
	Eliptik	9	Y	
			Y^2	
			Y^4	
	Eliptik	3	Y^3	
	Yansıma	2	R	
$\overline{\boldsymbol{H}}_{4,6}$	Eliptik	4	X	$[\![\frac{4}{2}]\!]+[\![\frac{6}{2}]\!]+(2,4)+(2,6)-1=8$
	Eliptik	6	Y	
	Eliptik	3	Y^2	
	Eliptik	2	X^2	
			Y^3	
	Yansıma	2	R	
			XR	
			YR	
$\overline{\boldsymbol{H}}_{15,8}$	Eliptik	15	X	$[\![\frac{15}{2}]\!]+[\![\frac{8}{2}]\!]+(2,15)+(2,8)-1=13$
			X^2	
			X^4	
			X^7	
	Eliptik	3	X^5	
	Eliptik	5	X^3	
			X^6	
	Eliptik	8	Y	
			Y^3	
	Eliptik	4	Y^2	
	Eliptik	2	Y^4	
	Yansıma	2	R	
			YR	
$\overline{\boldsymbol{H}}_{6}$	Eliptik	2	X	$[\![\frac{2}{2}]\!]+[\![\frac{6}{2}]\!]+(2,2)+(2,6)-1=7$
	Eliptik	6	Y	
	Eliptik	2	Y^3	
	Eliptik	3	Y^2	
	Eliptik	2	R	
			XR	
			YR	

Şimdi $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarının bir uygulamasını vereceğiz.

3.4.8 Teorem : p ve q asal sayıları olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun her burulmalı normal alt grubu sonlu indekslidir.

İspat : $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun burulmalı bir normal alt grubu G olsun. Bu durumda G, içinde en az bir tane sonlu mertebeli eleman bulundurmalıdır. Bu elemana g diyelim. Şimdi g nin normal kapanış kümesi olan $N(g)$ yi oluşturalım. $N(g)$; $\overline{H}_{p,q}$ içinde g yi içeren normal alt grupların en küçüğüdür. Başka bir deyişle g yi içeren tüm normal alt grupların ara kesitidir.

$$N(g) = \{x^{-1}gx \mid x \epsilon \overline{H}_{p,q}\}$$

Normal kapanış tanımına göre $N(g) \subseteq G$ olup $|\overline{H}_{p,q} : G| \mid |\overline{H}_{p,q} : N(g)|$ sağlanır.

g^* eleman g nin herhangi bir konjugesi olmak üzere $|\overline{H}_{p,q} : N(g)| = |\overline{H}_{p,q} : N(g^*)|$ olduğunu biliyoruz. O halde ispatı tamamlamak için $|\overline{H}_{p,q} : N(g^*)|$ indeksinin sonlu olduğunu göstermek yeterlidir. 3.4.3 Teoremden tüm sonlu mertebeli elemanların $X, X^2, \dots, X^{\frac{p-1}{2}}, Y, Y^2, \dots, Y^{\frac{q-1}{2}}, R$ olduğunu biliyoruz. Şimdi g^*elemanının tüm durumları için $\overline{H}_{p,q} / N(g^*)$ bölüm grubunu inceleyelim.

Bölüm grubunun sunuşunu elde etmek için $\overline{H}_{p,q}$ grubunun bağıntılarına $g^* = I$ eklemek yeterlidir.

$g^* = R$ olduğu durumda;

$$\overline{H}_{p,q} / N(R) = < X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = R = I >$$

sunuşu elde edilir. $R = I$ ve p ile q nun asal oluşu göz önüne alınırsa $X^p = Y^q = (X)^2 = (Y)^2 = I$ bağıntılarından tüm üreteçlerin birim eleman olduğu görülebilir. Bu durumda bölüm grubu $\overline{H}_{p,q}/_{N(R)} \cong \{I\}$ olacaktır. Yani $\left|\overline{H}_{p,q} : N(R)\right|$ indeksi sonludur.

$g^* = X^a$, $1 \leq a \leq \frac{p-1}{2}$ ise;

$$\overline{H}_{p,q}/_{N(X^a)} =< X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = X^a = I >$$

sunuşunda $(a,p) = 1$ olduğu dikkate alınırsa $X = I$ elde edilir. Böylelikle;

$$\overline{H}_{p,q}/_{N(X^a)} =< Y, R \mid Y^q = R^2 = (YR)^2 = I > \cong D_q$$

elde edilir. Bu durumda da bölüm grubunun mertebesinin sonlu olduğu görülür.

$g^* = Y^b$, $1 \leq b \leq \frac{q-1}{2}$ ise;

$$\overline{H}_{p,q}/_{N(Y^b)} =< X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = Y^b = I >$$

sunuşundaki bağıntılarda q sayısının b ile aralarında asal olduğuna dikkat edilirse $Y = I$ elde edilir. Buradan bölüm grubunun $2p$ mertebeli dihedral gruba izomorf olduğu elde edilir.

$$\overline{H}_{p,q}/_{N(Y^b)} =< X, R \mid X^p = R^2 = (XR)^2 = I > \cong D_p$$

Sonuç olarak g^* elemanının tüm durumları için $N(g^*)$; $\overline{H}_{p,q}$ içinde sonlu indekse sahip olur ki ispat sona erer.□

3.4.9 Sonuç : p ve q birer asal sayı ve G de $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun burulmalı bir normal alt grubu olsun. O zaman $\left|\overline{H}_{p,q} : G\right| \mid 2pq$ dur.□

Sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarının burulmalı normal alt gruplarla olan ilişkisi $H_{p,q}$ grupları için de kurulabilir.

3.4.10 Sonuç : p ve q birer asal sayı ve G de $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun burulmalı bir normal alt grubu olsun. O zaman $\left|H_{p,q} : G\right| \mid pq$ dur.□

4. GENEL HECKE GRUPLARININ CİNSİ SIFIR OLAN NORMAL ALT GRUPLARI

Çalışmanın bu bölümünde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının 0 cinsli ve sonlu indeksli normal alt gruplarının cebirsel yapıları incelenecektir. Ön bilgiler bölümünde de bahsedildiği üzere her bir Γ Fuchsian grubunun bir simgesi vardır. Permütasyon metodu ile bir Γ Fuchsian grubunun sonlu indeksli alt gruplarının simgesi hesaplanabilir.

Öncelikle Hecke grupları için bu konuyla ilgili yapılmış çalışmalardan kısaca bahsedeceğiz.

4.1 H_q Hecke Gruplarının Cinsi Sıfır olan Normal Alt Grupları

Hecke gruplarının 0 cinsli normal alt grupları [3, 6, 8] nolu çalışmalarda incelenmiştir. Öncelikle $q \geq 3$ tamsayı değerlerine karşılık H_q Hecke gruplarının 0 cinsli normal alt gruplarına ilişkin sonuçları verelim. Bu sonuçlar hakkında detaylı bilgilere [3, 10, 56] nolu çalışmalardan ulaşılabilir.

Hecke grupları $(2, q, \infty)$ şeklinde üçgen gruplardır. H_q Hecke grubunun 0 cinsli bir normal alt grubu N ise ${}^{H_q}/_{N}$ bölüm grubu sonlu üçgen gruplar olan $\mathbb{Z}_n, D_n, A_4, S_4, A_5$ gruplarından birine izomorftur.

4.1.1 Teorem : [3] H_q Hecke gruplarının 0 cinsli alt gruplarının simgeleri aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 4.1: Hecke gruplarının cinsi sıfır olan alt grupları.

q	**Homomorfik görüntü**	**Normal Alt Grubun Simgesi**
$3\|q$	$A_4 \cong (2,3,3)$	$T_1(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(4)})$
	$S_4 \cong (2,3,4)$	$T_2(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(6)})$
	$A_5 \cong (2,3,5)$	$T_3(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(12)})$
$4\|q$	$S_4 \cong (2,4,3)$	$T_4(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(8)})$
$5\|q$	$A_5 \cong (2,5,3)$	$T_5(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(20)})$
$n\|q$	$\mathbb{Z}_n \cong (1,n,n)$	$Y_n(\lambda_q) = (0; 2^{(n)}, \frac{q}{n}, \infty)$
	$D_n \cong (2,n,2)$	$S_n(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)})$
$2\|q$	$D_n \cong (2,2,n)$	$W_n(\lambda_q) = (0; \left(\frac{q}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(2)})$

□

Yukarıdaki teoremde q sayısının çift olduğu durumda H_q Hecke grubundan $D_n \cong (2,2,n)$ dihedral grubuna daima bir homomorfizma tanımlanabileceğinden $W_n(\lambda_q)$ tipinde sonsuz adet 0 cinsli normal alt grup vardır. Aşağıdaki teorem bu durum dışında, q sayısının durumuna göre H_q Hecke grubundaki 0 cinsli normal alt grupların sayısını ifade etmektedir.

4.1.2 Teorem: [3] q sayısının pozitif bölenlerinin sayısı $d(q)$ olmak üzere q sayısının durumlarına göre H_q Hecke grubunun 0 cinsli alt gruplarının sayısı aşağıdaki tabloda ifade edilmiştir.

Tablo 4.2: Hecke gruplarında sıfır cinsli normal alt grup sayısı.

q Sayısının Durumu	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q, 60) = 1$	$2d(q)$
$(q, 60) = 2$	
$(q, 20) = 1 \;\; ve \;\; 3 \mid q$	$3 + 2d(q)$
$(q, 20) = 2 \;\; ve \;\; 3 \mid q$	
$(q, 15) = 1 \;\; ve \;\; 4 \mid q$	$1 + 2d(q)$
$(q, 12) = 1 \;\; ve \;\; 5 \mid q$	
$(q, 5) = 1 \;\; ve \;\; 12 \mid q$	$4 + 2d(q)$
$(q, 4) = 1 \;\; ve \;\; 15 \mid q$	
$(q, 3) = 1 \;\; ve \;\; 20 \mid q$	$2 + 2d(q)$
$60 \mid q$	$5 + 2d(q)$

4.2 $H(\lambda)$ Hecke Gruplarının Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

$\lambda \geq 2$ değerlerine karşılık elde edilen Hecke gruplarının simgesi $(2, \infty, \infty)$ şeklindedir. Bu tip Hecke gruplarının 0 cinsli normal alt grupları ile ilgili bazı sonuçlar [6, 8] nolu çalışmalarda bulunabilir.

Yılmaz Özgür [8] nolu çalışmasında $\lambda = \sqrt{5}$ değerine karşılık elde edilen $H(\sqrt{5}\,)$ Hecke gruplarının 0 cinsli normal alt gruplarının simgelerini permütasyon metodu ile aşağıdaki teoremde verildiği gibi elde etmiştir.

4.2.1 Teorem : [8] $H(\sqrt{5}\,)$ Hecke grubunun cinsi 0 olan tüm normal alt grupları aşağıda yer alan tablodaki gibidir.

Tablo 4.3: $H(\sqrt{5})$ grubunun sıfır cinsli alt grupları.

Homomorfik Görüntü	Normal Alt Grubun Simgesi
$\mathbb{Z}_n \cong (1,n,n)$	$(0;2^{(n)},\infty^{(2)})$
$D_n \cong (2,2,n)$	$(0;\infty^{(n+2)})$
$D_n \cong (2,n,2)$	
$A_4 \cong (2,3,3)$	$(0;\infty^{(8)})$
$S_4 \cong (2,4,3)$	$(0;\infty^{(14)})$
$S_4 \cong (2,3,4)$	
$A_5 \cong (2,3,5)$	$(0;\infty^{(32)})$
$A_5 \cong (2,5,3)$	

□

4.2.2 Sonuç : [8] $H(\sqrt{5})$ grubunun sonsuz çoklukta sıfır cinsli normal alt grubu vardır. □

Koruoğlu [6] çalışmasında genel olarak $\lambda \geq 2$ değerlerine karşılık Hecke gruplarının 0 cinsli normal alt gruplarını incelemiştir. $\lambda = 2$ için $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$ üreteci parabolik eleman olduğu için bu iki durumu ayrı ayrı çalışılmıştır.

4.2.3 Teorem : [6] $\lambda > 2$ bir reel sayı olmak üzere $H(\lambda)$ Hecke gruplarının tüm sıfır cinsli normal alt grupları aşağıdaki gibidir.

Tablo 4.4: $H(\lambda)$ Hecke gruplarının sıfır cinsli normal alt grupları.

Homomorfik Görüntü	Normal Alt Grubun Simgesi
$\mathbb{Z}_n \cong (1,n,n)$	$Y_n(\lambda) = (0;2^{(n)},\infty;1)$
$D_n \cong (2,2,n)$	$W_n(\lambda) = (0;\infty^{(n)};2)$
$D_n \cong (2,n,2)$	$S_n(\lambda) = (0;\infty^{(2)};n)$
$A_4 \cong (2,3,3)$	$T_1(\lambda) = (0;\infty^{(4)};4)$
$S_4 \cong (2,4,3)$	$T_3(\lambda) = (0;\infty^{(6)};8)$
$S_4 \cong (2,3,4)$	$T_2(\lambda) = (0;\infty^{(8)};6)$
$A_5 \cong (2,3,5)$	$T_4(\lambda) = (0;\infty^{(20)};12)$
$A_5 \cong (2,5,3)$	$T_5(\lambda) = (0;\infty^{(12)};20)$

□

4.2.4 Teorem : [6] $\lambda = 2$ durumundaki $H(2)$ Hecke grubunun tüm sıfır cinsli normal alt grupları $Y_n(2)$ ve $S_n(2)$ biçimindedir.□

4.2.5 Sonuç : [6] $\lambda \geq 2$ için $H(\lambda)$ grubunun sonsuz çoklukta sıfır cinsli normal alt grubu vardır.□

Uyarı : $\lambda \geq 2$ için $H(\lambda)$ Hecke grupları birbirine izomorf olduklarından normal alt grupları da çakışacaktır. Ancak $\lambda = 2$ olduğu durumda $H(2)$ grubunun $S(z) = -\frac{1}{z+2}$ üreteci parabolik bir eleman iken $\lambda > 2$ durumundaki $H(\lambda)$ Hecke grubunun $S(z) = -\frac{1}{z+\lambda}$ üreteci hiperbolik bir eleman olacaktır.

4.3 $H_{p,q}$ Genel Hecke Gruplarının Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

$H_{p,q}$ genel Hecke grupları (p,q,∞) biçimli üçgen gruplardır. 4.1 ve 4.2 bölümünde kullanılan yöntemle bu grupların 0 cinsli sonlu indeksli normal alt gruplarının yapısı incelenecektir.

4.3.1 Teorem : p ve q ; $2 \leq p \leq q$ ve $p + q > 4$ şartlarını sağlayan iki tamsayı olmak üzere $H_{p,q}$ genel Hecke grubundan $\mathbb{Z}_n$ devirli grubuna tanımlanan homomorfizma ile elde edilen 0 cinsli normal alt grupları aşağıda ifade edilmiştir. Bu normal alt gruplar için Y_{n_k} gösterimi kullanılmıştır.

1) q nun her bir n böleni için $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun $H_{p,q}/Y_{n_1} \cong \mathbb{Z}_n \cong (1,n,n)$ olacak biçimde $Y_{n_1} \cong \left(0; p^{(n)}, \frac{q}{n}, \infty\right)$ simgeli normal alt grubu vardır.

2) p nin her bir n böleni için $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun $H_{p,q}/Y_{n_2} \cong \mathbb{Z}_n \cong (n,1,n)$ olacak biçimde $Y_{n_2} \cong \left(0; \frac{p}{n}, q^{(n)}, \infty\right)$ simgeli normal alt grubu vardır.

3) p ve q nun her bir n ortak böleni için $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun $H_{p,q}/Y_{n_3} \cong \mathbb{Z}_n \cong (n,n,1)$ olacak biçimde $\left(0;\frac{p}{n},\frac{q}{n},\infty^{(n)}\right)$ simgeli normal alt grubu vardır.

İspat : $n|q$ bir tamsayı olsun. Bu takdirde $H_{p,q} \to \mathbb{Z}_n \cong (1,n,n)$ devirli grubuna X üretecini birim elemana ve Y üretecini de $\mathbb{Z}_n$ devirli grubunun üretecine resmetmek suretiyle bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu homomorfizmanın çekirdeği $H_{p,q}$ grubunun bir normal alt grubudur. Permütasyon metodu ile simgesi $Y_{n_1} \cong \left(0;p^{(n)},\frac{q}{n},\infty\right)$ elde edilir.

$n|p$ tamsayısı için $\mathbb{Z}_n$ devirli grubunun üçgen gösterimini $(n,1,n)$ şeklinde alıp X elemanını n mertebeli üretece ve Y elemanını birim elemana resmederek elde edilen normal alt grubun simgesi $Y_{n_2} \cong \left(0;\frac{p}{n},q^{(n)},\infty\right)$ olur.

Benzer olarak $\mathbb{Z}_n \cong (n,n,1)$ düşünülerek ve X elemanını n mertebeli üretece, Y elemanını da X in görüntüsünün tersine eşleştirerek $Y_{n_3} \cong \left(0;\frac{p}{n},\frac{q}{n},\infty^{(n)}\right)$ normal alt grubu elde edilir. Bölüm grubu birim eleman olacak şekildeki sıfır cinsli alt grubun her üç öncülde de aynı olduğuna dikkat edilmelidir. □

4.3.2 Sonuç : $d(x)$, x tamsayısının 1 hariç pozitif bölenlerinin sayısını ve N_0 da $H_{p,q}$ grubunun 0 cinsli alt gruplarının sayısı temsil etmek üzere;

$$N_0 \geq d(p) + d(q) + d[(p,q)] + 1$$

eşitsizliği gerçeklenir. □

4.3.3 Teorem : p ve q tamsayılarından en az biri çift tam sayı olmak üzere $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun $H_{p,q}/N_{n_k} \cong D_n$ olacak biçimde 0 cinsli N normal alt grubu için;

1. p çift ve $n|q$ için $N_{n_1} \cong \left(0;\left(\frac{p}{2}\right)^{(n)},\left(\frac{q}{n}\right)^{(2)},\infty^{(n)}\right)$.
2. q çift ve $n|p$ için $N_{n_2} \cong \left(0;\left(\frac{p}{n}\right)^{(2)},\left(\frac{q}{2}\right)^{(n)},\infty^{(n)}\right)$.

3. p ve q çift tamsayıları için $N_{n_3} \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(2)}\right)$.

İspat : Hipotezde verildiği üzere p ve q tamsayılarından en az biri çift olduğu takdirde $2n$ mertebeli D_n dihedral grubu $H_{p,q}$ grubunun homomorfik resmi olarak düşünülebilir. Şayet p çift ve $n|q$ ise X elemanını 2 mertebeli üretece ve Y elemanını n mertebeli üretece eşlemek suretiyle $H_{p,q} \to D_n \cong (2, n, 2)$ homomorfizması oluşturulabilir. Böylelikle $N_{n_1} \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{q}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)}\right)$ normal alt grubu elde edilir. Teoremin 2. ve 3. öncüllerinin ispatı $D_n \cong (n, 2{,}2) \cong (2{,}2, n)$ göz önüne alarak elde edilebilir.□

NOT : Yukarıdaki teoremin 3 öncülünde sunulan 0 cinsli alt gruplardan sonsuz tanedir. Bu alt gruplar bu çalışmada elde edilen sonuçların dışında tutulacaktır. Ayrıca p ve q sayılarının her ikisi de çift iken bölüm grubu $D_2 \cong (2{,}2{,}2)$ olacak şekildeki sıfır cinsli alt grubun her üç öncülde de aynı olduğuna dikkat edilmelidir.

4.3.1 Teorem ve 4.3.3 Teoremde $H_{p,q}$ grubunda varlığından söz edilen 0 cinsli normal alt gruplardan başka 0 cinsli normal alt gruplar da vardır. Bu alt grupların yapısını elde etmek için A_4, S_4 ve A_5 sonlu üçgen gruplarını $H_{p,q}$ grubunun birer homomorfik görüntüsü olarak düşünmek gereklidir. Şimdi bu alt grupları inceleyelim:

İlk olarak p çift bir tamsayı ise $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun en fazla 5 tane daha 0 cinsli alt grubu vardır.

1) Şayet $3|q$ ise A_4, S_4 ve A_5 grupları $H_{p,q}$ grubunun homomorfik görüntüsü olurlar. $A_4 =< a, b|\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = I >\cong (2{,}3{,}3)$ grubu için $X \to a$ ve $Y \to b$ eşlemesi ile elde edilen homomorfizmanın çekirdeği $(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(4)})$ simgesine sahip olur. Bu alt grubu T_1 ile göstereceğiz. Ayrıca $H_{p,q}$ grubundan $S_4 = (2{,}3{,}4)$ simetrik grubuna, X üretecini 2 mertebeli elemana ve Y üretecini de 3 mertebeli elemana eşleyerek elde edilen homomorfizmanın çekirdeği $T_2 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(6)})$ simgeli bir normal alt grup verir. Benzer olarak $T_3 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(12)})$ simgeli bir normal alt grup da $H_{p,q} \rightarrow A_5 \cong (2,3,5)$ homomorfizması ile elde edilir.

2) Eğer $4\,|q$ ise $H_{p,q}$ grubundan sadece $S_4 = (2,4,3)$ simetrik grubuna örten bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu durumdaki normal alt grup ise $T_4 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(8)})$ yapısındadır.

3) Eğer $5\,|q$ ise $H_{p,q}$ grubundan sadece $A_5 = (2,5,3)$ alterne grubuna örten bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu durumdaki normal alt grup ise $T_5 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{q}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(20)})$ yapısındadır.

İkinci olarak p, 3 ile bölünebilen bir tamsayı olduğunda 4 farklı durum vardır:

1) q çift sayı iken $H_{p,q}$ grubundan $A_4 =< a,b|\ a^3 = b^2 = (ab)^3 = I >$ $\cong (3,2,3)$ alterne grubuna, $S_4 =< a,b|\ a^3 = b^2 = (ab)^4 = I > \cong (3,2,4)$ simetrik grubuna ve $A_5 =< a,b|\ a^3 = b^2 = (ab)^5 = I > \cong (3,2,5)$ alterne grubuna $X \rightarrow a$ ve $Y \rightarrow b$ eşlemeleri ile birer homomorfizma tanımlanabilir. Böylelikle sırasıyla $T_6 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(6)}, \infty^{(4)})$, $T_7 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(6)})$ ve son olarak $T_8 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(12)})$ simgeli normal alt grupları elde edilir.

2) Eğer $3|q$ ise $H_{p,q} \rightarrow A_4 \cong (3,3,2)$ homomorfizması X ve Y elemanlarını 3 er mertebeli üreteçlere resmederek kurulabilir. Bu homomorfizma $T_9 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(6)})$ normal alt grubunu verir.

3) Eğer $4|q$ ise $H_{p,q} \rightarrow S_4 \cong (3,4,2)$ homomorfizması benzer şekilde oluşturularak $T_{10} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{q}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(12)})$ normal alt grubu elde edilir.

4) Şayet $5|q$ ise; $A_5 = (3,5,2)$ grundaki 3 mertebeli eleman X in; 5 mertebeli eleman da Y nin görüntüsü olarak düşünüldüğünde A_5 alterne grubu $H_{p,q}$ grubunun bir homomorfik görüntüsü olur ve $T_{11} \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{q}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(30)}\right)$ simgeli normal alt grubu elde edilir.

Üçüncü olarak p nin 4 ile bölünebildiği durumda 2 farklı durumla karşılaşılır:

1) q nun çift olduğu durumda $H_{p,q}$ grubunun üreteçlerini sırasıyla $S_4 \cong (4,2,3)$ simetrik grubunun 4 ve 2 mertebeli üreteçlerine resmederek elde edilen homomorfizma vasıtasıyla $T_{12} \cong \left(0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(8)}\right)$ normal alt grubu elde edilir.

2) q nun 3 ün bir katı olduğu durumda yukarıdakine benzer olarak $S_4 \cong (4,3,2)$ grubuna tanımlanabilecek örten bir homomorfizma ile $T_{13} \cong \left(0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(12)}\right)$ normal alt grubu elde edilmiş olur.

Son olarak p nin 5 ile bölünebildiği durumda sadece A_5, $H_{p,q}$ grubunun bir homomorfik görüntüsü olur ve iki farklı durum ortaya çıkar:

1) q çift ise $A_5 \cong (5,2,3)$ ile $T_{14} \cong \left(0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(20)}\right)$ ve

2) $3|q$ ise $A_5 \cong (5,3,2)$ ile $T_{15} \cong \left(0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(30)}\right)$ simgeli normal alt grupları elde edilir.

Böylelikle mümkün olan tüm durumlar incelenmiş olup tüm bu normal alt grupların listesi aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.5: Genel Hecke gruplarında sıfır cinsli olası tüm normal alt gruplar.

Normal Alt Grup Simgesi	Bölüm Grubu
$Y_{n_1} \cong \left(0; p^{(n)}, \frac{q}{n}, \infty\right)$	$\mathbb{Z}_n \cong (1, n, n)$
$Y_{n_2} \cong \left(0; \frac{p}{n}, q^{(n)}, \infty\right)$	$\mathbb{Z}_n \cong (n, 1, n)$
$Y_{n_3} \cong \left(0; \frac{p}{n}, \frac{q}{n}, \infty^{(n)}\right)$	$\mathbb{Z}_n \cong (n, n, 1)$
$N_{n_1} \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \left(\frac{q}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)}\right)$	$D_n \cong (2, n, 2)$
$N_{n_2} \cong \left(0; \left(\frac{p}{n}\right)^{(2)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(n)}\right)$	$D_n \cong (n, 2,2)$
$T_1 \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}\right)$	$A_4 = (2,3,3)$
$T_2 \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(6)}\right)$	$S_4 = (2,3,4)$
$T_3 \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(12)}\right)$	$A_5 \cong (2,3,5)$
$T_4 \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(8)}\right)$	$S_4 = (2,4,3)$
$T_5 \cong \left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \left(\frac{q}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(20)}\right)$	$A_5 \cong (2,5,3)$
$\mathrm{T}_6 \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(6)}, \infty^{(4)}\right)$	$\mathrm{A}_4 \cong (3,2,3)$
$T_7 \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(6)}\right)$	$S_4 \cong (3,2,4)$
$T_8 \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(12)}\right)$	$A_5 \cong (3,2,5)$
$T_9 \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(6)}\right)$	$A_4 \cong (3,3,2)$
$T_{10} \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \left(\frac{q}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(12)}\right)$	$S_4 \cong (3,4,2)$
$T_{11} \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \left(\frac{q}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(30)}\right)$	$A_5 \cong (3,5,2)$
$T_{12} \cong \left(0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(8)}\right)$	$S_4 \cong (4,2,3)$
$T_{13} \cong \left(0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(12)}\right)$	$S_4 = (4,3,2)$
$T_{14} \cong \left(0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(20)}\right)$	$A_5 \cong (5,2,3)$
$T_{15} \cong \left(0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \left(\frac{q}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(30)}\right)$	$A_5 \cong (5,3,2)$

4.3.4 Teorem : p ve q; $2 \leq p \leq q,\ p+q > 4$ şartlarını sağlayan iki tamsayı olmak üzere; $H_{p,q}$ grubunun daima en az $d(p) + d(q) + d[(p,q)] + 1$ tane 0 cinsli normal alt grubu vardır. Dahası p ve q nun durumlarına göre diğer 0 cinsli alt grupların sayısı aşağıdaki tablolarda verilmiştir.

Tablo 4.6: (p,60)=1 durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	-	0
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$		
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$		
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$		
$(q,60)=2$	N_{n_2}	$d(p)$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$		
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$		
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$		
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$		
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$		
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$		
$60\|q$		

Tablo 4.7: (p,60)=2 durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	N_{n_1}, N_{n_2}	$d(p)+d(q)-1$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	N_{n_1}, T_1, T_2, T_3	$d(q)+3$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3$	$d(p)+d(q)+2$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	N_{n_1}, N_{n_2}, T_4	$d(p)+d(q)$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, N_{n_2}, T_5	
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5	$d(q)+1$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4$	$d(p)+d(q)+3$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5$	$d(q)+4$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5$	$d(p)+d(q)+1$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$	$d(p)+d(q)+4$

Tablo 4.8: (p,20)=1 ve 3|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	-	0
$(q,60)=2$	N_{n_2}, T_6, T_7, T_8	$d(p)+3$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	T_9	1
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	T_{11}	
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9$	$d(p)+4$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{10}$	
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{11}$	
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}$	$d(p)+5$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{11}$	
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	T_9, T_{11}	2
$60\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}$	$d(p)+6$

Tablo 4.9: (p,20)=2 ve 3|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_6, T_7, T_8$	$d(p)+d(q)+2$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_9$	$d(q)+4$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_9, T_6, T_7, T_8$	$d(p)+d(q)+6$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}$	
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_6, T_7, T_8, T_{10}$	$d(p)+d(q)+4$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{11}$	
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5, T_{11}	$d(q)+2$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}$	$d(p)+d(q)+8$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{11}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_9, T_{11}$	$d(q)+6$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6,$ $T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}$	$d(p)+d(q)+10$

Tablo 4.10: (p,15)=1 ve 4|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	**0 Cinsli Alt Grup**	**0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı**
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	N_{n_1}, N_{n_2}, T_{12}	$d(p)+d(q)$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_{13}$	$d(q)+4$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_{12}, T_{13}$	$d(p)+d(q)+4$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_{12}$	$d(p)+d(q)+1$
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5	$d(q)+1$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_{12}$	$d(p)+d(q)+1$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_{12}$	$d(p)+d(q)+2$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_{12}, T_{13}$	$d(p)+d(q)+5$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{12}, T_{13}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{13}$	$d(q)+5$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{12}, T_{13}$	$d(p)+d(q)+6$

Tablo 4.11: (p,12)=1 ve 5|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	**0 Cinsli Alt Grup**	**0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı**
$(q,60) = 1$	-	0
$(q,12) = 1\ ve\ 5\|q$	-	
$(q,60) = 2$	N_{n_2}, T_{14}	$d(p) + 1$
$(q,15) = 1\ ve\ 4\|q$		
$(q,12) = 2\ ve\ 5\|q$		
$(q,3) = 1\ ve\ 20\|q$		
$(q,20) = 1\ ve\ 3\|q$	T_{15}	1
$(q,4) = 1\ ve\ 15\|q$		
$(q,20) = 2\ ve\ 3\|q$	N_{n_2}, T_{14}, T_{15}	$d(p) + 2$
$(q,5) = 1\ ve\ 12\|q$		
$(q,4) = 2\ ve\ 15\|q$		
$60\|q$		

Tablo 4.12: (p,12)=2 ve 5|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	**0 Cinsli Alt Grup**	**0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı**
$(q,60) = 1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60) = 2$	N_{n_1}, N_{n_2}, T_{14}	$d(p) + d(q)$
$(q,15) = 1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_{14}$	$d(p) + d(q) + 1$
$(q,20) = 1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_{15}$	$d(q) + 4$
$(q,20) = 2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_{14}, T_{15}$	$d(p) + d(q) + 4$
$(q,12) = 1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5	$d(q) + 1$
$(q,12) = 2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_{14}$	$d(p) + d(q) + 1$
$(q,5) = 1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_{14}, T_{15}$	$d(p) + d(q) + 5$
$(q,4) = 2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{14}, T_{15}$	
$(q,4) = 1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{15}$	$d(q) + 5$
$(q,3) = 1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_{14}$	$d(p) + d(q) + 2$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{14}, T_{15}$	$d(p) + d(q) + 6$

Tablo 4.13: (p,5)=1 ve 12|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	**0 Cinsli Alt Grup**	**0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı**
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{12}$	$d(p)+d(q)+3$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_9, T_{13}$	$d(q)+5$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{12}, T_{13},$	$d(p)+d(q)+8$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{12}$	$d(p)+d(q)+5$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{12}, T_{11}$	
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5, T_{11}	$d(q)+2$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_6,$ $T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{12}, T_{13}$	$d(p)+d(q)+10$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_{13},$ $T_5, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{11}, T_{12}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_9, T_{11}, T_{13}$	$d(q)+7$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}, T_{12}$	$d(p)+d(q)+7$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7,$ $T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}$	$d(p)+d(q)+12$

Tablo 4.14: (p,4)=1 ve 15|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	**0 Cinsli Alt Grup**	**0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı**
$(q,60)=1$	-	0
$(q,60)=2$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{14}$	$d(p)+4$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	T_9, T_{15}	2
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+6$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}, T_{14}$	
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{14}$	$d(p)+5$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{11}, T_{14}$	
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	T_{11}	1
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+7$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{11}, T_{14}, T_{15}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	T_9, T_{11}, T_{15}	3
$60\|q$	$N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+8$

Tablo 4.15: (p,4)=2 ve 15|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{14}$	$d(p)+d(q)+3$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_9, T_{15}$	$d(q)+5$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+8$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+7$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+5$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{11}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+5$
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5, T_{11}	$d(q)+2$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4,$ $T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+10$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_6,$ $T_7, T_8, T_9, T_{11}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+10$
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_9, T_{11}, T_{15}$	$d(q)+7$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7$ $T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+12$

Tablo 4.16: (p,3)=1 ve 20|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+1$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_{13}, T_{15}$	$d(q)+5$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+6$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+3$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+2$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+2$
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5	$d(q)+1$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+7$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+7$
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_{13}, T_{15}$	$d(q)+6$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4,$ $T_5, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+8$

Tablo 4.17: 60|p durumundaki 0 cinsli normal alt gruplar.

q	0 Cinsli Alt Grup	0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı
$(q,60)=1$	N_{n_1}	$d(q)$
$(q,60)=2$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_6, T_7, T_8, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+4$
$(q,20)=1\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_9, T_{13}, T_{15}$	$d(q)+6$
$(q,20)=2\ ve\ 3\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_6, T_7, T_8$ $T_9, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+10$
$(q,15)=1\ ve\ 4\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+6$
$(q,12)=2\ ve\ 5\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{11}, T_{12}, T_{14}$	
$(q,12)=1\ ve\ 5\|q$	N_{n_1}, T_5, T_{11}	$d(q)+2$
$(q,5)=1\ ve\ 12\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_6, T_7, T_8$ $, T_9, T_{10}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+12$
$(q,4)=2\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_6, T_7, T_8$ $T_9, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	
$(q,4)=1\ ve\ 15\|q$	$N_{n_1}, T_1, T_2, T_3, T_5, T_9, T_{11}, T_{13}, T_{15}$	$d(q)+8$
$(q,3)=1\ ve\ 20\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{14}$	$d(p)+d(q)+8$
$60\|q$	$N_{n_1}, N_{n_2}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_6, T_7, T_8, T_9$ $T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$	$d(p)+d(q)+14$

□

4.4 $H_{p,q}$ Genel Hecke Gruplarının Cinsi Sıfır Olan Burulmasız Normal Alt Grupları

Önceki bölümde p ve q sayılarının aldığı değerlere göre $H_{p,q}$ grubunun sıfır cinsli alt gruplarının simgelerini elde ettik. Bu sonuçları dikkate alarak hangi p ve q değerleri için $H_{p,q}$ grubunun sonlu mertebeli eleman barındırmayan 0 cinsli normal alt grupları içerdiği hesaplanabilir.

4.4.1 Teorem : $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun burulmasız 0 cinsli normal alt gruplarının indeksi ve yapısı p ve q nun değerlerine göre aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 4.18 : $\boldsymbol{H_{p,q}}$ gruplarının cinsi sıfır olan burulmasız normal alt grupları.

Normal Alt Grubun Simgesi		$\boldsymbol{H_{p,q}}$	İndeks
$(0;\infty^{(4)})$	$\lhd$	$H_{2,3}$	12
$(0;\infty^{(6)})$	$\lhd$	$H_{2,3}$	24
$(0;\infty^{(12)})$	$\lhd$	$H_{2,3}$	60
$(0;\infty^{(8)})$	$\lhd$	$H_{2,4}$	24
$(0;\infty^{(20)})$	$\lhd$	$H_{2,5}$	60
$(0;\infty^{(q)})$	$\lhd$	$H_{2,q}$	2q
$(0;\infty^{(6)})$	$\lhd$	$H_{3,3}$	12
$(0;\infty^{(12)})$	$\lhd$	$H_{3,4}$	24
$(0;\infty^{(30)})$	$\lhd$	$H_{3,5}$	60
$(0;\infty^{(p)})$	$\lhd$	$H_{p,p}$	p

□

4.4.2 Sonuç : $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun burulmasız 0 cinsli normal alt gruplarının sayısı;

Tablo 4.19 : $\boldsymbol{H_{p,q}}$ gruplarının 0 cinsli burulmasız normal alt gruplarının sayısı.

$\boldsymbol{H_{p,q}}$	0 Cinsli Burulmasız Alt Grup Sayısı
$H_{2,3}$	4
$H_{2,4}$	2
$H_{2,5}$	
$H_{2,q}$ $(q>5)$	1
$H_{3,3}$	2
$H_{3,4}$	1
$H_{3,5}$	
$H_{p,p}$ $(p=q>3)$	1

4.5 $H_{p,\infty}(\lambda)$ Genel Hecke Gruplarının Sıfır Cinsli Olan Normal Alt Grupları

Bu kesimde $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke gruplarının 0 cinsli sonlu indeksli normal alt gruplarının simgeleri elde edilecektir. Bu gruplar p mertebeli ve sonsuz mertebeli iki devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Kesim 4.3 de iki sonlu mertebeli eliptik eleman tarafından üretilen (p, q, ∞) üçgen gösterimine sahip $H_{p,q}$ grupları için 0 cinsli alt gruplar incelenmişti. Şimdi incelenecek olan genel Hecke grupları ise bir adet sonlu ve bir adet sonsuz mertebeli iki eleman tarafından üretilen gruplardır. Sonsuz mertebeli elemanın cinsi λ sayısının durumuna göre değişecektir. Şayet Lehner' in tanımladığı gibi $\lambda = 2$ ise parabolik, $\lambda > 2$ ise hiperbolik eleman olacaktır. Tüm durumlarda elde edilen genel Hecke gruplarının birbirine izomorf oldukları ancak farklı elemanlara sahip olduklarını tekrar hatırlatmakta fayda vardır.

$H_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının 0 cinsli sonlu indeksli normal at gruplarının simgeleri permütasyon metodu ile elde edilecektir. Eğer N böyle bir normal alt grup ise $H_{p,\infty}(\lambda)/N$ kürenin otomorfizmaları grubuna izomorf olacağından bölüm grubu sonlu üçgen gruplardan birine izomorf olmalıdır. Başka bir ifadeyle $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubundan sonlu üçgen gruplara tanımlanabilecek her bir epimorfizma ile bir 0 cinsli normal alt grup elde edilir.

$H_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının üçgen gösterimi (p, ∞, ∞) şeklindedir. Öncelikle bu grup ile $\mathbb{Z}_n$ devirli grupları arasındaki homomorfizmalar incelenecektir. Ancak iki mertebeli devirli gruplar iki mertebeli dihedral gruba izomorf oldukları için bu durum daha sonra incelenecektir.

4.5.1 Teorem : $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubundan $\mathbb{Z}_n$ devirli grubuna tanımlanabilecek homomorfizma ile elde edilen 0 cinsli normal alt gruplar aşağıda belirtilmiştir. Bu alt gruplar Y_{n_k} ile sembolize edilmiştir.

1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $H_{p,\infty}(\lambda)/Y_{n_1} \cong \mathbb{Z}_n \cong (1, n, n)$ olacak biçimde $Y_{n_1} \cong (0; p^{(n)}, \infty, \infty)$ simgeli bir normal alt grup vardır. Bu biçimdeki normal alt gruplar sonsuz adettir.

2) $\forall n|p$ için $H_{p,\infty}(\lambda)/Y_{n_2} \cong \mathbb{Z}_n \cong (n,1,n)$ olacak biçimde $Y_{n_2} \cong (0;\frac{p}{n},\infty^{(n)},\infty)$ simgeli bir normal alt grup vardır.

3) Yukarıdaki 2) öncüle ek olarak yine $\forall n|p$ için $H_{p,\infty}(\lambda)/Y_{n_3} \cong \mathbb{Z}_n \cong (n,n,1)$ olacak biçimde $Y_{n_3} \cong (0;\frac{p}{n},\infty,\infty^{(n)})$ simgeli bir normal alt grup vardır.

İspat : 1) Genel Hecke grubundaki sonlu mertebeli üreteci devirli grubun birim elemanına sonsuz mertebeli üreteci de devirli grubun üretecine resmetmek suretiyle bir homomorfizma elde edilebilir. Permütasyon metodu ile elde edilen bu alt grup 0 cinsli bir normal alt grup olup simgesi $Y_{n_1} \cong (0;p^{(n)},\infty,\infty)$ şeklindedir.

2) $\forall n|p$ tamsayısı için $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun p mertebeli elemanı devirli grubun üretecine, diğer üreteç de birim elemana eşlenirse elde edilen homomorfizmanın çekirdeği $Y_{n_2} \cong (0;\frac{p}{n},\infty^{(n)},\infty)$ simgeli bir normal alt grup olur. Böylece izomorfizma teoreminden bölüm grubu $\mathbb{Z}_n \cong (n,1,n)$ devirli grubuna izomorf olacaktır.

3) İspat 2) ye benzer olarak $H_{p,\infty}(\lambda) \to \mathbb{Z}_n \cong (n,n,1)$ homomorfizması ise elde edilir. □

Genel Hecke grubu $H_{p,\infty}(\lambda)$ ile D_n dihedral grupları arasında elde edilebilecek homomorfizmalar yardımıyla da 0 cinsli normal alt gruplar elde edilebilir. Bunun için D_n dihedral gruplarının $(2,n,2)$, $(n,2,2)$ ve $(2,2,n)$ şeklindeki üçgen gösterimleri ile permütasyon metodu uygulanabilir.

Öncelikle p sayısının çift olduğu durumda $D_n =< a,b \mid a^2 = b^n = (ab)^2 = I >$ grubuna; $X \to a$ ve $Y \to b$ şeklinde oluşturulan dönüşüm bir homomorfizmadır. Bu homomorfizma örten bir homomorfizma olacağından bölüm grubu D_n grubuna izomorf olacak şekilde bir normal alt grup elde edilir. Bu alt grubu N_{n_1} ile temsil edelim. Permütasyon metodu ile $N_{n_1} \cong (0;\left(\frac{p}{2}\right)^{(n)},\infty^{(2)},\infty^{(n)})$ simgesi hesaplanır. p sayısı çift olduğu için D_n grubunun bir diğer üçgen gösterimi olan $(2,2,n)$ ile benzer bir homomorfizma tanımlanabilir. Bu durumdaki 0 cinsli normal alt grubun simgesini $N_{n_2} \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(n)}, \infty^{(2)})$ şeklinde elde edebiliriz. Bu biçimdeki N_{n_1} ve N_{n_2} normal alt gruplarının sonsuz çoklukta olduğuna dikkat edilmelidir.

$H_{p,\infty}(\lambda)$ ile D_n dihedral grubu arasında farklı bir diğer homomorfizma elde etmek için n sayısının p sayısını bölmesi gerekir. Bu durumda $H_{p,\infty}(\lambda) \rightarrow (n, 2,2)$ eşlemesi sonucu $N_{n_3} \cong (0; \left(\frac{p}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)}, \infty^{(n)})$ simgeli bir normal alt grup elde edilir.

4.5.2 Teorem : $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun bölüm grubu dihedral gruba izomorf olacak şekildeki 0 cinsli normal alt grupları aşağıdaki gibidir.

1) p çift bir tamsayı ise $H_{p,\infty}(\lambda)/N_{n_1} \cong D_n \cong (2, n, 2)$ olacak biçimdeki alt grubun simgesi $N_{n_1} \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(2)}, \infty^{(n)})$ şeklindedir. Ayrıca $H_{p,\infty}(\lambda)/N_{n_2} \cong D_n \cong (2,2, n)$ olacak biçimde $N_{n_2} \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(n)}, \infty^{(2)})$ simgeli bir normal alt grup da vardır.

2) $\forall n|p$ tamsayısı için $H_{p,\infty}(\lambda)/N_{n_3} \cong D_n \cong (n, 2,2)$ olacak biçimdeki alt grubun simgesi $N_{n_3} \cong (0; \left(\frac{p}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)}, \infty^{(n)})$ şeklindedir.□

Bu kesimin amaçlarından biri de p tamsayısının durumlarına göre $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun sahip olduğu 0 cinsli sonlu indeksli normal alt grupların toplam sayısını belirlemektir. Yukarıdaki iki teoremden hareketle aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.5.3 Sonuç : $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun Y_{n_1}, N_{n_1} ve N_{n_2} alt grupları haricindeki 0 cinsli normal alt gruplarının sayısı N_0 olmak üzere;

$$N_0 \geq 3d(p) + 1$$

eşitsizliği sağlanır.□

Buraya kadar sadece $\mathbb{Z}_n$ ve D_n gruplarını $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun birer homomorfik görüntüsü olarak düşünülerek işlem yapılmıştır. Bunun dışında p sayısının aldığı değere göre diğer sonlu üçgen gruplar olan A_4, S_4 ve A_5 gruplarını inceleyelim.

1. Durum : Eğer p çift bir tamsayı ise;

Bu durumda yukarıda bahsi geçen tüm üçgen gruplarda iki mertebeli bir üreteç bulunduğundan A_4, S_4 ve A_5 grupları birer homomorfik görüntü olarak düşünülebilir. İlk olarak $A_4 =< a,b|\ a^2 = b^3 = (ab)^3 = I >$ grubu için $H_{p,\infty}(\lambda) \to A_4$ homomorfizması $X \to a$ ve $Y \to b$ şeklinde tanımlanırsa bu homomorfizmanın çekirdeği bir 0 cinsli normal alt grup verir. Bu alt grubu T_1 ile gösterirsek A_4 grubunun üçgen gösteriminin $(2,3,3)$ oluşundan hareketle permütasyon metodunu da kullanarak $T_1 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(6)}, \infty^{(4)}, \infty^{(4)})$ simgesi elde edilir.

Benzer şekilde $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubundan $(2,3,4)$ ve $(2,4,3)$ üçgen gösterimine sahip S_4 simetrik grubuna tanımlanabilecek homomorfizmalar ile $T_2 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(8)}, \infty^{(6)})$ ve $T_3 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(6)}, \infty^{(8)})$ normal alt grupları elde edilir.

Ayrıca bölüm grubu $A_5 \cong (2,5,3) \cong (2,3,5)$ alterne grubuna izomorf olacak şekilde $T_4 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(12)}, \infty^{(20)})$ ve $T_5 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(20)}, \infty^{(12)})$ simgeli 0 cinsli normal alt gruplar elde edilir.

2. Durum : Eğer $3|p$ ise;

Bu durumda elde edilebilecek normal alt gruplar ile bölüm grupları $A_4 \cong (3,2,3) \cong (3,3,2)$ alterne grubuna, $S_4 \cong (3,2,4) \cong (3,4,2)$ simetrik grubuna veya $A_5 \cong (3,2,5) \cong (3,5,2)$ alterne grubuna izomorf olur. Böylelikle permütasyon metodu kullanarak bu alt grupların simgeleri sırasıyla $T_6 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(6)}, \infty^{(4)})$, $T_7 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}, \infty^{(6)})$, $T_8 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(12)}, \infty^{(6)})$, $T_9 \cong \left(0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(6)}, \infty^{(12)}\right)$, $T_{10} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(30)}, \infty^{(12)})$ ve son olarak $T_{11} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(12)}, \infty^{(30)})$ normal alt grupları elde edilir.

3. Durum : Eğer $4|p$ ise;

Sadece S_4 simetrik grubu 4 mertebeli üretece sahip olduğu için $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubundan $S_4 \cong (4,2,3) \cong (4,3,2)$ grubuna epimorfizma tanımlanabilir. Böylece elde edilecek iki normal alt grubun simgesi $T_{12} \cong (0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(12)}, \infty^{(8)})$ ve $T_{13} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(6)}, \infty^{(8)}, \infty^{(12)})$ şeklinde elde edilir.

4. Durum : Eğer $5|p$ ise;

Bu durumda sadece $A_5 \cong (5,2,3) \cong (5,3,2)$ alterne grubu $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun bir homomorfik görüntüsü olabilir. Dolayısıyla elde edilecek 0 cinsli normal alt grupların simgeleri $T_{14} \cong (0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(30)}, \infty^{(20)})$ ve $T_{15} \cong (0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(20)}, \infty^{(30)})$ olacaktır.

Böylece tüm durumlar incelenmiş olup mümkün olabilecek 0 cinsli normal alt gruplar ile bölüm gruplarının yapısı aşağıdaki tabloda özetlenmiştir.

Tablo 4.20: $\boldsymbol{H_{p,\infty}(\lambda)}$ grubunun 0 cinsli normal alt grupları.

Normal Alt Grup Simgesi	**Bölüm Grubu**
$Y_{n_1} \cong (0; p^{(n)}, \infty, \infty)$	$\mathbb{Z}_n \cong (1, n, n)$
$Y_{n_2} \cong (0; \frac{p}{n}, \infty^{(n)}, \infty)$	$\mathbb{Z}_n \cong (n, 1, n)$
$Y_{n_3} \cong (0; \frac{p}{n}, \infty, \infty^{(n)})$	$\mathbb{Z}_n \cong (n, n, 1)$
$N_{n_1} \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(2)}, \infty^{(n)})$	$D_n \cong (2, n, 2)$
$N_{n_2} \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(n)}, \infty^{(n)}, \infty^{(2)})$	$D_n \cong (2,2, n)$
$N_{n_3} \cong (0; \left(\frac{p}{n}\right)^{(2)}, \infty^{(n)}, \infty^{(n)})$	$D_n \cong (n, 2,2)$
$T_1 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(6)}, \infty^{(4)}, \infty^{(4)})$	$A_4 \cong (2,3,3)$
$T_2 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(8)}, \infty^{(6)})$	$A_4 \cong (2,3,4)$
$T_3 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(12)}, \infty^{(6)}, \infty^{(8)})$	$A_4 \cong (2,4,3)$
$T_4 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(12)}, \infty^{(20)})$	$A_5 \cong (2,5,3)$
$T_5 \cong (0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(30)}, \infty^{(20)}, \infty^{(12)})$	$A_5 \cong (2,3,5)$
$T_6 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(6)}, \infty^{(4)})$	$A_4 \cong (3,2,3)$
$T_7 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(4)}, \infty^{(4)}, \infty^{(6)})$	$A_4 \cong (3,3,2)$
$T_8 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(12)}, \infty^{(6)})$	$S_4 \cong (3,2,4)$
$T_9 \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(8)}, \infty^{(6)}, \infty^{(12)})$	$S_4 \cong (3,4,2)$
$T_{10} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(30)}, \infty^{(12)})$	$A_5 \cong (3,2,5)$
$T_{11} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(20)}, \infty^{(12)}, \infty^{(30)})$	$A_5 \cong (3,5,2)$
$T_{12} \cong (0; \left(\frac{p}{4}\right)^{(6)}, \infty^{(12)}, \infty^{(8)})$	$S_4 \cong (4,2,3)$
$T_{13} \cong (0; \left(\frac{p}{3}\right)^{(6)}, \infty^{(8)}, \infty^{(12)})$	$S_4 \cong (4,3,2)$
$T_{14} \cong (0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(30)}, \infty^{(20)})$	$A_5 \cong (5,2,3)$
$T_{15} \cong (0; \left(\frac{p}{5}\right)^{(12)}, \infty^{(20)}, \infty^{(30)})$	$A_5 \cong (5,3,2)$

4.5.4 Teorem : $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun Y_{n_1} , N_{n_1} ve N_{n_2} normal alt grupları dışındaki aşikar olmayan sıfır cinsli normal alt gruplarının sayısı p sayısının durumuna göre aşağıda verilmiştir.

Tablo 4.21: $\boldsymbol{H_{p,\infty}}(\lambda)$ grubunun 0 cinsli normal alt gruplarının sayısı.

<table>
<tr><th>p</th><th>0 Cinsli Alt Grup</th><th>0 Cinsli Normal Alt Grup Sayısı</th></tr>
<tr><td>$(p,60)=1$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}$</td><td>$3d(p)$</td></tr>
<tr><td>$(p,60)=2$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5$</td><td>$3d(p)+5$</td></tr>
<tr><td>$(p,20)=1\ ve\ 3|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}$</td><td>$3d(p)+6$</td></tr>
<tr><td>$(p,20)=2\ ve\ 3|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5,$
$T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}$</td><td>$3d(p)+11$</td></tr>
<tr><td>$(p,15)=1\ ve\ 4|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{12}, T_{13}$</td><td rowspan="2">$3d(p)+7$</td></tr>
<tr><td>$(p,12)=2\ ve\ 5|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{14}, T_{15}$</td></tr>
<tr><td>$(p,12)=1\ ve\ 5|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_{14}, T_{15}$</td><td>$3d(p)+2$</td></tr>
<tr><td>$(p,5)=1\ ve\ 12|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5,$
$T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}$</td><td rowspan="2">$3d(p)+13$</td></tr>
<tr><td>$(p,4)=2\ ve\ 15|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5,$
$T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{14}, T_{15}$</td></tr>
<tr><td>$(p,4)=1\ ve\ 15|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{14}, T_{15}$</td><td>$3d(p)+8$</td></tr>
<tr><td>$(p,3)=1\ ve\ 20|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5, T_{12}, T_{13} T_{14}, T_{15}$</td><td>$3d(p)+9$</td></tr>
<tr><td>$60|p$</td><td>$Y_{n_2}, Y_{n_3}, N_{n_3}, T_1, T_2, T_3, T_4, T_5,$
$T_6, T_7, T_8, T_9, T_{10}, T_{11}, T_{12}, T_{13}, T_{14}, T_{15}$</td><td>$3d(p)+15$</td></tr>
</table>

□

5. GENEL HECKE VE GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ ÇİFT ALT GRUPLARI

Bu bölümde $H_{p,q}$ ve $\overline{H}_{p,q}$ gruplarının önemli bir alt grubu olan çift alt gruplarının yapısı elde edilecektir. Ardından çift alt grup ile komütatör alt grup arasındaki ilişki incelenecektir. Bu bölüm boyunca $\frac{az+b}{cz+d}$ kesirli lineer dönüşümü yerine onun matris temsilcisi olan $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ kullanılacaktır. Ana sonuçlara geçmeden önce bu bölümün çalışılmasında esin kaynağı olan çalışmalara ait bilgiler ile başlayalım:

$$T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \; ve \; S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & \lambda_q \end{pmatrix}$$

elemanları tarafından üretilen

$$H_q = < T, S \mid T^2 = S^q = I >$$

Hecke grubunun katsayıları $\mathbb{Z}[\lambda_q]$ halkasına aittir. Bu durumda H_q Hecke grubunun elemanları iki sınıfta incelenebilir.

5.1 Tanım : H_q Hecke grubunun elemanları aşağıdaki iki formdan birisi biçimindedir.

$$\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} \; ad - bc{\lambda_q}^2 = 1$$

$$\begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} \; ad{\lambda_q}^2 - bc = 1$$

Bu temsillerden ilki çift ikincisi ise tek eleman olarak isimlendirilir. Bu iki tip elemanın birbirleriyle işlemi tamsayılardaki toplama işlemine benzer. Yani;

$$tek.tek = çift.çift = çift$$

$$çift.tek = tek.çift = tek$$

□

Dikkat edilecek olursa Hecke grubunu üreten iki eliptik üretecin de tek eleman olduğu görülebilir. Dolayısıyla H_q Hecke grubunun tüm elemanları üreteçlerin kuvvetlerinin bir kombinasyonu olarak yazılabileceğinden bu iki formdan biri biçimindedir. Ancak bu iki formdan birinden olan bir matris (matrisin temsil ettiği dönüşüm) bu gruba ait olmayabilir.

5.2 Teorem : [3] Genel olarak $q \geq 3$ bir tamsayı için $H_q \subseteq PSL(2,\mathbb{Z}[\lambda_q])$ sağlanır. $q=3$ için bu eşitsizlik çift taraflıdır. □

5.3 Tanım : [3] $q \geq 3$ çift bir tamsayı iken H_q Hecke grubundaki çift elemanların kümesi;

$$H_{E_q} = \left\{ E = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : E \epsilon H_q \right\}$$

bir alt gruptur. Bu alt gruba çift alt grup ismi verilir. □

5.4 Teorem : [3] Yukarıda tanımlanan çift alt grup H_{E_q} sayesinde H_q grubu ayrık iki kosetin birleşimi şeklinde;

$$H_q = H_{E_q} \cup T.H_{E_q}$$

yazılabilir. Böylece $\left[H_q : H_{E_q}\right] = 2$ olur ki çift alt grup bir normal alt gruptur. □

H_q Hecke gruplarının çift alt grupları ve H_q' arasındaki ilişkilere dair detaylı bilgilere [56] numaralı kaynaktan erişilebilir.

5.1 $H_{p,q}$ Genel Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları

Bu bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının elemanları için Calta ve Schmidt tarafından [25] numaralı kaynakta tanımlanan tek ve çift eleman tanımlarını kullanarak çift alt grubu tanımlayıp yapısını inceleyeceğiz.

5.1.1 Tanım : [25] $K_{p,q} = \mathbb{Q}[{}^{\lambda_p}/_2, {}^{\lambda_q}/_2]$ genişletilmiş cismi $H_{p,q}$ grubunun izlerinin cismi olarak adlandırılır (trace field). $a, b, c, d \epsilon K_{p,q}$ olmak üzere;

$$\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} \quad ad - bc{\lambda_q}^2 = 1$$

tipindeki elemanlara çift eleman,

$$\begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} \quad ad{\lambda_q}^2 - bc = 1$$

tipindeki elemanlar ise tek eleman denir.□

Tek ve çift elemanlar arasındaki çarpma işlemi H_q Hecke gruplarında olduğu gibidir.

$a, b, c, d \epsilon K_{p,q}$ ve $b = \frac{\lambda_p + \lambda_q}{\lambda_q}$ olmak üzere $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının üreteçlerini;

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & (1-b)\lambda_q \end{pmatrix} \; ve \; Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -\lambda_q \end{pmatrix}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Bu halde iki üreteç de tek elemandır. $\forall W \epsilon H_{p,q}$ için $W = X^{a_1} Y^{b_1} \dots X^{a_n} Y^{b_n}$ $(0 \le a_i \le p-1 \; ve \; 0 \le b_i \le q-1; i = 1,2, \dots, n)$ formunda olacağından aşağıdaki Lemmayı ifade edebiliriz.

5.1.2 Lemma : [25] $\forall W \epsilon H_{p,q}$ ya tek ya da çift elemandır.□

5.1.3 Tanım : p ve q çift sayı olduklarında $H_{p,q}$ grubundaki çift elemanlar;

$$H_{E_{p,q}} = \left\{ E = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : E \epsilon \mathrm{H_{p,q}} \right\}$$

bir alt gruptır. Bu alt gruba çift alt grup denir. □

5.1.4 Teorem : p ve q çift sayı olmak üzere $H_{E_{p,q}}$ çift alt grubunun $H_{p,q}$ grubu içindeki kosetleri $H_{E_{p,q}}$ ve $X.H_{E_{p,q}}$ olur ki;

$$H_{p,q} = H_{E_{p,q}} \cup X.H_{E_{p,q}}$$

Ayrıca indeksin 2 olmasından dolayı çift alt grup bir normal alt gruptur. □

p ve q sayılarından en az biri tek olduğunda çift alt gruptan söz etmek mümkün değildir. Şimdi çift alt grubun yapısını ifade eden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

5.1.5 Teorem : p ve q sayılarının çift sayı olduğu durumda $H_{p,q}$ genel Hecke grubunun çift alt grubu olan $H_{E_{p,q}}$ grubu $p/2$ ve $q/2$ mertebeli iki devirli grup ile sonsuz devirli bir grubun serbest çarpımına izomorftur.

$$H_{E_{p,q}} = < X^2 > * < Y^2 > * < XY >$$

Ve çift alt grubun simgesi $(0; p/2, q/2, \infty^{(2)})$ şeklindedir.

İspat : $H_{E_{p,q}}$ çift alt grubu $H_{p,q}$ genel Hecke grubu içinde iki indeksli olduğu için $H_{p,q}/H_{E_{p,q}}$ bölüm grubu $\mathbb{Z}_2 \cong (2,2,1)$ devirli grubuna izomorftur. X üretecini 2 mertebeli elemana ve Y üretecini de bu elemanın tersine resmettiğimiz takdirde XY çarpımının görüntüsü de birim eleman olacaktır. Bu homomorfizmanın çekirdeği çift alt grup olup simgesi permütasyon metodu ile $(0; p/2, q/2, \infty^{(2)})$ şeklinde hesaplanabilir. Çift alt grubun grup sunuşunu elde etmek için Reidemeister-Schreier metodunu kullanabiliriz. Bunun için;

$$H_{p,q}/H_{E_{p,q}} = < X, Y \mid X^2 = Y^2 = XY = I >$$

bölüm grubuna ait Schreier transverselini;

$$\Sigma = \{I, X\}$$

şeklinde seçelim. Böylelikle mümkün olabilen tüm üreteçler;

$$S_{IX} = I.X.(X)^{-1} = I \qquad S_{IY} = I.Y.(X)^{-1} = YX^{p-1}$$
$$S_{XX} = X.X.(I)^{-1} = X^2 \qquad S_{XY} = X.Y.(I)^{-1} = XY$$

şeklindedir. Burada $x_1 = X^2$, $x_2 = YX^{p-1}$, $x_3 = XY$ şeklinde üreteçler elde edilir. Bu üreteçler için $x_2 x_3 = YX^{p-1}.XY = Y^2$ elde edilir. Ardından Reidemeister-Schreier yöntemi ile bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau(IX^pI) = \tau\left(\underbrace{XX\ldots X}_{p\ tane}\right) = S_{IX}S_{XX}\ldots S_{IX}S_{XX} = x_1^{p/2}$$

$$\tau(IY^qI) = \tau\left(\underbrace{YY\ldots Y}_{q\ tane}\right) = S_{IY}S_{XY}\ldots S_{IY}S_{XY} = (x_2x_3)^{q/2}$$

$$\tau(XX^pX^{-1}) = \tau\left(X\underbrace{XX\ldots X}_{p\ tane}X^{-1}\right) = S_{IX}S_{XX}\ldots S_{IX}S_{IX}^{-1} = x_1^{p/2}$$

$$\tau(XY^qX^{-1}) = \tau\left(X\underbrace{YY\ldots Y}_{q\ tane}X^{-1}\right) = S_{IX}S_{XY}S_{IY}S_{XY}S_{IY}\ldots S_{IY}S_{IX}^{-1} = (x_3x_2)^{q/2}$$

Burada bilinen bağıntıların dışında bir bağıntı elde edilemez. Böylelikle çift alt grubun sunuşu;

$$H_{E_{p,q}} =< X^2, Y^2, XY \mid (X^2)^{p/2} = (Y^2)^{q/2} = (XY)^\infty = I >\cong \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z}_{q/2} * \mathbb{Z}$$

şeklindedir.□

Bir G grubunda A ve B gibi iki elemanının komütatörünün $[A, B] = A.B.A^{-1}.B^{-1}$ şeklinde tanımlandığını biliyoruz. Böylelikle $H_{p,q}$ genel Hecke grubundaki herhangi iki elemanın komütatörü daima çift bir eleman olacaktır. Yani $H_{p,q}$ grubunun birinci komütatörü olan $H'_{p,q}$ grubu çift alt grup içinde kapsanır.

[57] nolu çalışmadan $H'_{p,q}$ birinci komütatör alt grubun $H_{p,q}$ içinde $p.q$ indeksli olduğunu biliyoruz. Çift alt grup da iki indeksli bir alt grup olduğu için

$$\left[H_{E_{p,q}} : H'_{p,q}\right] = \frac{p.q}{2}$$

olacaktır. Böylece aşağıdaki teoremin ispatını elde etmiş olduk.

5.1.6 Teorem : p ve q çift tamsayılar olmak üzere $H_{p,q}$ grubunun birinci komütatör alt grubu olan $H'_{p,q}$, $H_{E_{p,q}}$ çift alt grubu içinde $\frac{p.q}{2}$ indeksli bir normal alt gruptur.□

5.1.7 Sonuç : $H'_{p,q}$ komütatör alt grubun herhangi bir alt grubu sadece çift elemanlardan oluşur.□

5.2 $\overline{H}_{p,q}$ Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının Çift Alt Grupları

Genişletilmiş genel Hecke gruplarını daha önceki bölümlerde tanıtmıştık.

$$\overline{H}_{p,q} =< X, Y, R \mid X^p = Y^q = R^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >\cong D_p *_{\mathbb{Z}_2} D_q$$

Burada $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ şeklinde bir yansıma dönüşümü idi. Böylece $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun elemanlarının determinantlarının ± 1 olduğu görülür. Ayrıca $T \epsilon \overline{H}_{p,q}$ -1 determinantlı bir eleman olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ grubunun sunuşundan hareketle uygun bir $S \epsilon H_{p,q}$ için $T = RS$ biçiminde yazılabilir.

5.2.1 Tanım : $H_{p,q}$ grubunun elemanları için verilen çift ve tek eleman tanımları $\overline{H}_{p,q}$ için de tanımlanabilir.

$$\begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} \; ad - bc{\lambda_q}^2 = \mp 1$$

tipindeki elemanlara çift eleman,

$$\begin{pmatrix} a\lambda_q & b \\ c & d\lambda_q \end{pmatrix} \; ad{\lambda_q}^2 - bc = \mp 1$$

tipindeki elemanlara da tek eleman diyeceğiz. □

Dikkat edilecek olursa $\overline{H}_{p,q}$ grubunun tüm üreteçleri tek elemanlardır. Ve $\forall T \epsilon \overline{H}_{p,q}$ için $T = R^a S,\ a = 1{,}0$ ve $S \epsilon H_{p,q}$ olacağını biliyoruz. Sonuç olarak $\forall T \epsilon \overline{H}_{p,q}$ için T ya tek ya da çift olacaktır.

p ve q sayılarının çift tamsayı olduğu durumlarda $\overline{H}_{p,q}$ grubunun çift alt grubundan söz edebiliriz.

5.2.2 Teorem : p ve q çift birer sayı olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun çift alt grubu;

$$\overline{H}_{E_{p,q}} = \left\{ E = \begin{pmatrix} a & b\lambda_q \\ c\lambda_q & d \end{pmatrix} : E \epsilon \overline{\mathrm{H}}_{\mathrm{p,q}} \right\}$$

$\overline{H}_{p,q}$ grubunun 2 indeksli normal alt grubudur. Bu durumda

$$\overline{H}_{p,q} = \overline{H}_{E_{p,q}} \cup X.\overline{H}_{E_{p,q}}$$

eşitliği sağlanır ve çift alt grup $x_1 = X^2, x_2 = XY, x_3 = XR, x_4 = YX^{p-1}$ elemanları tarafından üretilir.

İspat : Tek ve çift elemanların tanımlanış biçiminden çift alt grubun iki indeksli bir alt grup olduğu dolayısıyla bir normal alt grup olduğu kolaylıkla görülebilir. X tek bir eleman olduğundan dolayı aranan diğer koset $X.\overline{H}_{E_{p,q}}$ dur. Şimdi amacımız çift alt grubun üreteçlerini bulmaktır. Bunun için iki mertebeli bölüm grubuna ait Schreier transverselini;

$$\Sigma = \{I, X\}$$

şeklinde seçelim. Böylelikle mümkün olabilen tüm üreteçler;

$$S_{IX} = I.X.(X)^{-1} = I \qquad S_{XX} = X.X.(I)^{-1} = X^2 = x_1$$

$$S_{IY} = I.Y.(I)^{-1} = YX^{p-1} = x_4 \qquad S_{XY} = X.Y.(I)^{-1} = XY = x_2$$

$$S_{IR} = I.R.(X)^{-1} = RX^{p-1} \qquad S_{XR} = X.R.(I)^{-1} = XR = x_3$$

$XR = RX^{p-1}$ eşitliği göz önüne alarak $\overline{H}_{E_{p,q}}$ çift alt grubundaki bağıntılar aşağıdaki gibidir.

$$\tau(IX^pI) = S_{IX}S_{XX}S_{IX}S_{XX} \dots S_{XX} = (X^2)^{\frac{p}{2}} = (x_1)^{p/2}$$

$$\tau(IY^qI) = S_{IY}S_{XY}S_{IY}S_{XY} \dots S_{XY} = (Y^2)^{\frac{q}{2}} = (x_4x_2)^{q/2}$$

$$\tau(IXRXRI) = S_{IX}S_{XR}S_{IX}S_{XR} = (XR)^2 = (x_3)^2$$

$$\tau(IYRYRI) = S_{IY}S_{XR}S_{IY}S_{XR} = (YR)^2 = (x_4x_3)^2$$

$$\tau(XX^pX^{-1}) = S_{IX}S_{XX}S_{IX}S_{XX} \dots S_{XX}S_{IX}^{-1} = (X^2)^{p/2} = (x_1)^{p/2}$$

$$\tau(XY^qX^{-1}) = S_{IX}S_{XY}S_{IY}S_{XY}S_{IY}S_{XY} \dots S_{IY}S_{IX}^{-1} = (XY^2X^{p-1})^{q/2} = (x_2x_4)^{q/2}$$

$$\tau(XXRXRX^{-1}) = S_{IX}S_{XX}S_{IR}S_{XX}S_{IR}S_{IX}^{-1} = I$$

$$\tau(XYRYRX^{-1}) = S_{IX}S_{XY}S_{IR}S_{XY}S_{IR}S_{IX}^{-1} = I$$

□

5.2.3 Teorem : p ve q çift tamsayılar olmak üzere $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grubunun birinci komütatör alt grubu $\overline{H}'_{p,q}$, $\overline{H}_{E_{p,q}}$ çift alt grubun 4 indeksli bir normal alt grubudur.

İspat : Komütatör elemanlar çift eleman olduğundan komütatör alt grubun çift alt grup içinde kapsandığı açıktır. Ayrıca [57] nolu çalışmadan $[\overline{H}_{p,q}:\overline{H}'_{p,q}] = 8$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda gerekli indeks 4 olur. □

5.2.4 Sonuç : $\overline{H}'_{p,q}$ komütatör alt grubun herhangi bir alt grubu sadece çift elemanlardan oluşur. □

6. GENEL HECKE VE GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KOMÜTATÖR VE KUVVET ALT GRUPLARI

Bu bölümde ön bilgilerde tanıtılan $q = \infty$ değerine karşılık elde edilen $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının komütatör ve kuvvet alt grupları incelenecektir.

$p = 2$ ve $q = \infty$ değerlerine karşılık elde edilen $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının komütatör ve kuvvet alt grupları [6, 7, 12, 19, 20] nolu çalışmalarda incelenmiştir. Biz de bu bölümde [6] nolu çalışmada elde edilen sonuçları genişletilmiş genel Hecke grupları için elde etmeye çalışacağız.

6.1 $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının Komütatör Alt Grupları

$H_{p,q}$ ve $\overline{H}_{p,q}$ gruplarının komütatör alt gruplarının yapısı [57] nolu çalışmada elde edilmiştir. Bu gruplar sonlu mertebeli elemanlar tarafından üretilmiştir. Bu bölümde çalışılacak grupların üreteçlerinden biri sonsuz mertebelidir. Bu sebeple bulunan sonuçlar [57] nolu çalışmadaki elde edilenlerden farklıdır. Bu bölümdeki sonuçlara [41] nolu kaynaktan da ulaşılabilir.

6.1.1 Teorem : $p \geq 3$ tek bir tam sayı ve $\lambda \geq 2$ sabit bir reel sayı olmak üzere $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun birinci komütatör alt grubu olan $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$, p mertebeli iki devirli grup ile sonsuz mertebeli devirli grubun serbest çarpımına izomorftur. Ayrıca $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ komütatör alt grubu $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ içinde 4 indekslidir. Komütatör alt grubun sunuşu ise;

$$\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2 | \; X^p = (YXY^{-1})^p = (Y^2)^\infty = I > \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

biçimindedir.

İspat : Öncelikle $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) \big/ \overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ bölüm grubunu oluşturalım. Bunun için $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ grup sunuşuna tüm üreteçler için değişmelilik koşulunu eklemeliyiz.

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) \big/ \overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y, R \mid X^p = Y^\infty = R^2 = I, RX = X^{p-1}R, RY = Y^{p-1}R,$$

$$XR = RX, YR = RY, XY = YX >$$

Yukarıdaki ilişkilerden $RX = X^{p-1}R$ ve $XR = RX$ bağıntıları elde edilir. Ek olarak p sayısının tek olduğu da göz önüne alınırsa $X = I$ elde edilir. Ayrıca $RY = Y^{p-1}R$ ve $YR = RY$ bağıntılarından da $Y^2 = I$ elde edilir. öylece;

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) \big/ \overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< Y, R \mid Y^2 = R^2 = (YR)^2 = I > \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

elde edilir. Yani $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ birinci komütatör alt grup $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ grubu içinde 4 indekslidir. Ayrıca bölüm grubunun elemanları dikkate alınarak,

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) = \overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) \cup Y.\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) \cup R.\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) \cup YR.\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$$

parçalanışı yazılabilir.

Şimdi $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ alt grubunun sunuşunu bulmak için Reidemeister-Schreier metodunu kullanalım. Bunun için bölüm grubunun bir Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, Y, R, YR\}$$

şeklinde seçelim. Böylece mümkün olabilen tüm çapmalar;

$$\begin{array}{ccc}
S_{IX} = I.X.(I)^{-1} = X & S_{IY} = I.Y.(Y)^{-1} = I & S_{IR} = I.R.(R)^{-1} = I \\
S_{YX} = Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1} & S_{YY} = Y.Y.(I)^{-1} = Y^2 & S_{YR} = Y.R.(YR)^{-1} = I \\
S_{RX} = R.X.(R)^{-1} = X^{p-1} & S_{RY} = R.Y.(YR)^{-1} = Y^{-2} & S_{RR} = R.R.(I)^{-1} = I \\
S_{YRX} = YR.X.(YR)^{-1} = YX^{p-1}Y^{-1} & S_{YRY} = YR.Y.(R)^{-1} = I & S_{YRR} = YR.R.(Y)^{-1} = I
\end{array}$$

şeklinde elde edilir. Burada; $X^{-1} = X^{p-1}$; $(YXY^{-1})^{-1} = YX^{p-1}Y^{-1}$ ve $(Y^2)^{-1} = Y^{-2}$ ilişkilerine dikkat edilirse komütatör alt grubun üreteçlerinin X, YXY^{-1} ve Y^2 den ibaret olduğu görülebilir. Ayrıca bu üreteçler arasındaki bağıntılar;

$$\tau(IX^pI) = \tau(X^p) = \underbrace{S_{IX}S_{IX}\dots S_{IX}}_{p\ tane} = X^p$$

$$\tau(IY^\infty I) = \tau(Y^\infty) = S_{IY}S_{YY}S_{IY}S_{YY}\dots = (Y^2)^\infty$$

$$\tau(YX^pY^{-1}) = S_{IY}\underbrace{S_{YX}S_{YX}S_{YX}\dots S_{YX}}_{p\ tane}S_{IY}^{-1} = (YXY^{-1})^p$$

şeklindedir. Reidemeister-Schreier yeniden yazma yöntemine göre elde edilebilecek diğer tüm bağıntılar aşikar bağıntılardır. Sonuç olarak;

$$\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2 |\ X^p = (YXY^{-1})^p = (Y^2)^\infty = I >\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

elde edilir.□

6.1.2 Teorem : $p \geq 2$ çift bir tamsayı ve $\lambda \geq 2$ sabit bir reel sayı olmak üzere $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun birinci komütatör alt grubu $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$, 8 indeksli bir normal alt grup olup;

$$\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X^2, YX^2Y^{-1}, XYXY^{-1}, Y^2, XY^2X^{-1}\ |\ (X^2)^{p/2} = (YX^2Y^{-1})^{p/2}$$
$$= (XYXY^{-1})^\infty = (Y^2)^\infty = (XY^2X^{-1})^\infty = I >$$
$$\cong \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

yapısındadır.

İspat : Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak öncelikle bölüm grubunu oluşturalım.

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)\Big/\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y, R \mid X^p = Y^\infty = R^2 = I, RX = X^{p-1}R, RY = Y^{-1}R,$$
$$XR = RX, YR = RY, XY = YX >$$

Yukarıdaki bağıntılarda p nin çift bir tamsayı olduğu göz önüne alınarak; $RX = X^{p-1}R$ ve $XR = RX$ bağıntılarından $X^2 = I$; aynı şekilde $RY = Y^{-1}R$ ve $YR = RY$ bağıntıları ile de $Y^2 = I$ elde edilir. Bu iki bağıntıyı kullanarak bölüm grubunun en sade sunuşunu;

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)\Big/\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y, R \mid X^2 = Y^2 = R^2 = (XY)^2 = (XR)^2 = (YR)^2 = I >$$
$$\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$$

yazabiliriz. Şimdi bölüm grubuna dair Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, X, Y, R, XR, YR, XY, XYR\}$$

şeklinde oluşturabiliriz. Böylelikle Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olabilen tüm çarpanlar;

$$\begin{array}{ccc}
S_{IX} = I.X.(X)^{-1} = I & S_{IY} = I.Y.(Y)^{-1} = I & S_{IR} = I.R.(R)^{-1} = I \\
S_{XX} = X.X.(I)^{-1} = X^2 & S_{XY} = X.Y.(XY)^{-1} = I & S_{XR} = X.R.(XR)^{-1} = I \\
S_{YX} = Y.X.(XY)^{-1} = YXY^{-1}X^{p-1} & S_{YY} = Y.Y.(I)^{-1} = Y^2 & S_{YR} = Y.R.(YR)^{-1} = I \\
S_{RX} = R.X.(XR)^{-1} = X^{p-2} & S_{RY} = R.Y.(YR)^{-1} = Y^{-2} & S_{RR} = R.R.(I)^{-1} = I \\
S_{XRX} = XR.X.(R)^{-1} = I & S_{XRY} = XR.Y.(XYR)^{-1} = XY^{-2}X^{-1} & S_{XRR} = XR.R.(X)^{-1} = I \\
S_{YRX} = YR.X.(XYR)^{-1} = YX^{-1}Y^{-1}X^{-1} & S_{YRY} = YR.Y.(R)^{-1} = I & S_{YRR} = YR.R.(Y)^{-1} = I \\
S_{XYX} = XY.X.(Y)^{-1} = XYXY^{-1} & S_{XYY} = XY.Y.(X)^{-1} = XY^2X^{-1} & S_{XYR} = XY.R.(XYR)^{-1} = I \\
S_{XYRX} = XYR.X.(YR)^{-1} = XYX^{-1}Y^{-1} & S_{XYRY} = XYR.Y.(XR)^{-1} = I & S_{XYRR} = XYR.R.(XY)^{-1} = I
\end{array}$$

Yukarıdaki çarpanlarda $(X^2)^{-1} = X^{p-2}$, $(YXY^{-1}X^{p-1})^{-1} = XYX^{p-1}Y^{-1}$, $(YX^{-1}Y^{-1}X^{-1})^{-1} = XYXY^{-1}$, $(Y^2)^{-1} = Y^{-2}$, $(XY^2X^{-1})^{-1} = XY^{-2}X^{-1}$ ve $(YXY^{-1}X^{-1})(XYXY^{-1}) = YX^2Y^{-1}$ ilişkileri dikkate alınırsa diğer bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau(IX^pI) = \tau\left(\underbrace{XX \dots X}_{p\ tane}\right) = \underbrace{S_{IX}S_{XX}S_{IX}S_{XX} \dots S_{xx}}_{p\ tane} = (X^2)^{p/2}$$

$$\tau(IY^{\infty}I) = \tau(YY \dots) = S_{IY}S_{YY}S_{IY}S_{YY} \dots = (Y^2)^{\infty}$$

$$\tau(YX^pY^{-1}) = \tau\left(Y\underbrace{XX \dots X}_{p\ tane}Y^{-1}\right) = S_{IY}S_{YX}S_{XYX}S_{YX} \dots S_{xyx}S_{IY}^{-1} = (YX^2Y^{-1})^{p/2}$$

$$\tau(XY^{\infty}X^{-1}) = \tau(XYY \dots X^{-1}) = S_{IX}S_{XY}S_{XYY}S_{XY}S_{XYY} \dots = (XY^2X^{-1})^{\infty}$$

Diğer elde edilebilecek bağıntılar aşikar olduğu için $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ birinci komütatör alt grubunun grup sunuşunu;

$$\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda) =< X^2, YX^2Y^{-1}, XYXY^{-1}, Y^2, XY^2X^{-1} \mid (X^2)^{p/2}, (YX^2Y^{-1})^{p/2}, (XYXY^{-1})^{\infty}, (Y^2)^{\infty}, (XY^2X^{-1})^{\infty} = I > \cong \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

şeklinde elde ederiz. □

6.2 Genel Hecke ve Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının Kuvvet Alt Grupları

Bu bölümde $q = \infty$ değerine karşılık elde edilen genel Hecke ve genişletilmiş genel Hecke gruplarının sonlu indeksli kuvvet alt grupları incelenecektir. Kuvvet alt gruplarına ilişkin temel tanımlar ön bilgiler bölümünde verilmiştir.

Hecke ve genişletilmiş Hecke gruplarının kuvvet alt gruplarının cebirsel yapıları [3, 6, 7, 9, 11-13, 19] nolu çalışmalarında incelenmiştir. Bu kısımda [6, 12] nolu çalışmalarında $H(\lambda)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ gruplarının kuvvet alt gruplarına dair verilen sonuçları $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarına genellemeye çalışacağız.

Öncelikle $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grupları ile başlayalım. Burada 2. derece kuvvet alt gruplarının komütatör alt gruplarla ilişkili sonuçlar elde edildiği için öncelikle bu durumu inceleyelim.

6.2.1 Teorem : $p > 2$ tek bir tamsayı olmak üzere $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun 2. derece kuvvet alt grubu olan $H^2_{p,\infty}(\lambda)$; 2 indeksli bir normal alt grup olup;

$$H^2_{p,\infty}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2 \mid X^p = (YXY^{-1})^p = (Y^2)^\infty = I >\cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

sunuşuna sahiptir.

İspat : İspatı Reidemeister-Schreier metodunu kullanarak yapalım. Öncelikle bölüm grubunu oluşturmalıyız. Bunun için $H_{p,\infty}(\lambda)$ grup sunuşundaki bağıntılara ek olarak tüm elemanların 2. kuvvetlerini birime eşitlemeliyiz.

$$H_{p,\infty}(\lambda) / H^2_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y \mid X^p = Y^\infty = X^2 = Y^2 = (XY)^2 = \cdots = I >$$

Yukarıdaki sunuşta p nin tek sayı oluşu ve $X^p = X^2 = I$ eşitliğinden $X = I$ elde edilir. Ayrıca $Y^\infty = Y^2 = I$ eşitlik takımından $Y^2 = I$ olduğu görülür. Tüm bu elde edilenleri bölüm grubu sunuşunda düzenlersek;

$$H_{p,\infty}(\lambda) / H^2_{p,\infty}(\lambda) =< Y \mid Y^2 = I >\cong \mathbb{Z}_2$$

şeklinde 2 mertebeli devirli gruba izomorf bir bölüm grubu elde ederiz. Böylelikle $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ grubu 2 indeksli bir normal gruptur. Ayrıca bölüm grubu elemanları yardımıyla $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun bir parçalanışını;

$$H_{p,\infty}(\lambda) = H^2_{p,\infty}(\lambda) \cup Y.H^2_{p,\infty}(\lambda)$$

şeklinde yazabiliriz. Şimdi bölüm grubuna ait Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, Y\}$$

olarak seçelim. Böylelikle muhtemel tüm üreteçler aşağıdaki gibidir;

$$I.X.(I)^{-1} = X \qquad I.Y.(Y)^{-1} = I$$
$$Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1} \qquad Y.Y.(I)^{-1} = Y^2$$

Ayrıca bölüm grubunun $\mathbb{Z}_2 \cong (1,2,2)$ olmasından hareketle permütasyon metodu ile $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ alt grubunun simge gösterimini $(0; p^{(2)}, \infty, \infty)$ şeklinde elde ederiz. Böylelikle yukarıda elde edilen tüm üreteçler birbirinden farklı olduğu için $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun sunuşu;

$$H^2_{p,\infty}(\lambda) = < X, YXY^{-1}, Y^2 \mid X^p = (YXY^{-1})^p = (Y^2)^\infty = I > \cong \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}$$

şeklinde elde edilir.□

6.2.2 Teorem : $p \geq 2$ çift bir tamsayı olmak üzere $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun 2. derece kuvvet alt grubu $H^2_{p,\infty}(\lambda)$; $H_{p,\infty}(\lambda)$ içinde 4 indeksli bir normal alt grup olup, grup sunuşu;

$$H^2_{p,\infty}(\lambda) = < X^2, YX^2Y^{-1}, XYXY^{-1}, Y^2, XY^2X^{-1} \mid (X^2)^{p/2} = (YX^2Y^{-1})^{p/2} = (XYXY^{-1})^\infty$$
$$= (Y^2)^\infty = (XY^2X^{-1})^\infty = I > \cong \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

şeklindedir.

İspat : Reidemeister-Schreier metodunu uygulamak için bölüm grubunu oluşturalım.

$$H_{p,\infty}(\lambda) / H^2_{p,\infty}(\lambda) = < X, Y \mid X^p = Y^\infty = X^2 = Y^2 = (XY)^2 = \cdots = I >$$

p nin çift bir tamsayı oluşundan hareketle $X^p = X^2 = I$ ve $Y^\infty = Y^2 = I$ eşitlikleri kullanılarak $X^2 = Y^2 = I$ elde ederiz. Böylece;

$$H_{p,\infty}(\lambda) \big/ H^2_{p,\infty}(\lambda) =< X, Y \mid X^2 = Y^2 = (XY)^2 = I >\cong D_2$$

şeklinde bölüm grubunun en sade sunuşunu buluruz. Şimdi Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, X, Y, XY\}$$

olarak seçelim. Ardından mümkün olabilen tüm çarpanlar;

$$\begin{array}{cc} I.X.(X)^{-1} = I & I.Y.(Y)^{-1} = I \\ X.X.(I)^{-1} = X^2 & X.Y.(XY)^{-1} = I \\ Y.X.(XY)^{-1} = YXY^{-1}X^{-1} & Y.Y.(I)^{-1} = Y^2 \\ XY.X.(Y)^{-1} = XYXY^{-1} & XY.Y.(X)^{-1} = XY^2X^{-1} \end{array}$$

şeklinde olur. Ayrıca permütasyon metodu ile $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun simge gösterimi $\left(0; \left(\frac{p}{2}\right)^{(2)}, \infty^{(2)}, \infty^{(2)}\right)$ olarak elde edilir. Yukarıdaki tüm üreteçler birbirinden farklı olduğu için $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ grup sunuşunu;

$$\begin{aligned} H^2_{p,\infty}(\lambda) &=< X^2, YX^2Y^{-1}, XYXY^{-1}, Y^2, XY^2X^{-1} \mid (X^2)^{p/2} = (YX^2Y^{-1})^{p/2} \\ &= (XYXY^{-1})^\infty = (Y^2)^\infty = (XY^2X^{-1})^\infty = I > \\ &\cong \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z}_{p/2} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \mathbb{Z} \end{aligned}$$

şeklinde elde ederiz.□

**6.2.3 Sonuç : ** $p \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun ikinci derece kuvvet alt grubu $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ ile $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun birinci komütatör alt grubu $\overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$ çakışır. Yani $H^2_{p,\infty}(\lambda) = \overline{H}'_{p,\infty}(\lambda)$.□

6.2.4 Teorem : $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun $m \epsilon \mathbb{Z}^+$ ve $(m, p) = 1$ olmak üzere $H^m_{p,\infty}(\lambda)$ kuvvet alt grubu m tane p mertebeli devirli grup ile sonsuz mertebeli bir devirli grubun serbest çarpımıdır.

$$H_{p,\infty}^{m}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^{2}XY^{-2}, Y^{3}XY^{-3}, \dots, Y^{m-1}XY^{1-m}, Y^{m} \mid (X)^{p} = (YXY^{-1})^{p} = (Y^{2}XY^{-2})^{p} = \dots = (Y^{m-1}XY^{1-m})^{p} = (Y^{m})^{\infty} = I > \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \dots * \mathbb{Z}_p}_{m\ tane} * \mathbb{Z}$$

İspat : $H_{p,\infty}(\lambda) / H_{p,\infty}^{m}(\lambda)$ bölüm grubunu aşağıdaki gibi oluşturalım;

$$H_{p,\infty}(\lambda) / H_{p,\infty}^{m}(\lambda) < X, Y \mid X^{p} = Y^{\infty} = X^{m} = Y^{m} = (XY)^{m} = \cdots = I >$$

Yukarıdaki bağıntılarda m ile p sayılarının aralarında asal oluşu dikkate alınırsa, $X^{p} = X^{m} = I$ eşitliğinden $X = I$ elde edilir. Böylelikle bölüm grubunun m mertebeli devirli grup olduğu görülür.

$$H_{p,\infty}(\lambda) / H_{p,\infty}^{m}(\lambda) =< Y \mid Y^{m} = I > \cong \mathbb{Z}_m$$

Şimdi ise bölüm grubunun Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, Y, Y^{2}, Y^{3}, \dots, Y^{m-1}\}$$

olarak oluşturduktan sonra Reidemeister-Schreier metoduna göre mümkün olan tüm üreteçler aşağıdaki gibi karşımıza çıkar.

$$\begin{array}{cc}
I.X.(I)^{-1} = X & I.Y.(Y)^{-1} = I \\
Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1} & Y.Y.(Y^{2})^{-1} = I \\
Y^{2}.X.(Y^{2})^{-1} = Y^{2}XY^{-2} & Y^{2}.Y.(Y^{3})^{-1} = I \\
Y^{3}.X.(Y^{3})^{-1} = Y^{3}XY^{-3} & Y^{3}.Y.(Y^{4})^{-1} = I \\
\vdots & \vdots \\
Y^{m-1}.X.(Y^{m-1})^{-1} = Y^{m-1}XY^{1-m} & Y^{m-1}.Y.(I)^{-1} = Y^{m}
\end{array}$$

Sonuç olarak m. derece kuvvet alt grubun grup sunuşu;

$$H_{p,\infty}^{m}(\lambda) =< X > * < YXY^{-1} > * < Y^{2}XY^{-2} > * < Y^{3}XY^{-3} > * \dots * < Y^{m-1}XY^{1-m} > * < Y^{m} > \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \dots * \mathbb{Z}_p}_{m\ tane} * \mathbb{Z}$$

olarak elde edilir. Ayrıca;

$$H_{p,\infty}(\lambda) \cong (p,\infty,\infty)$$

$$H_{p,\infty}(\lambda) \Big/ H_{p,\infty}^{m}(\lambda) \cong \mathbb{Z}_m \cong (1,m,m)$$

sonuçlarını permütasyon metodunda kullanırsak $H_{p,\infty}^{m}(\lambda)$ alt grubunun simgesini $(g;p^{(m)},\infty,\infty)$ şeklinde elde ederiz. Ardından g sayısını bulmak için Riemann-Hurtwitz formülünü kullanalım:

$$\left| H_{p,\infty}(\lambda) \Big/ H_{p,\infty}^{m}(\lambda) \right| = \frac{\mu(H_{p,\infty}^{m}(\lambda))}{\mu(H_{p,\infty}(\lambda))},$$

$$m = \frac{(2g-2) + m\left(1-\frac{1}{p}\right) + 2}{(2.0-2) + \left(1-\frac{1}{p}\right) + 1 + 1}$$

eşitliğinden $g = 0$ elde edilir. Sonuç olarak $H_{p,\infty}^{m}(\lambda)$ kuvvet alt grubunun simgesi $(0;p^{(m)},\infty,\infty)$ biçimindedir.□

6.2.5 Örnek : Yukarıdaki teoreme göre $H_{3,\infty}^{5}(\lambda)$ kuvvet alt grubunun sunuşunu elde edelim. Bu normal alt grup ile elde edilen bölüm grubu;

$$H_{3,\infty}(\lambda) \Big/ H_{3,\infty}^{5}(\lambda) < X, Y \mid X^3 = Y^\infty = X^5 = Y^5 = (XY)^5 = \cdots = I >$$

biçimindedir. Burada $X^3 = X^5 = I$ eşitliğinden $X = I$ elde edilir. Böylece bölüm grubu daha sade olarak;

$$H_{3,\infty}(\lambda) \Big/ H_{3,\infty}^{5}(\lambda) =< Y \mid Y^5 = I > \cong \mathbb{Z}_5$$

şeklinde elde edilir. Bölüm grubu için Schreier transversalini aşağıdaki gibi oluşturalım.

$$\Sigma = \{I, Y, Y^2, Y^3, Y^4\}$$

Artık Reidemeister-Schreier metodunu uygulayabiliriz.

$I.X.(I)^{-1} = X$ $\qquad\qquad$ $I.Y.(Y)^{-1} = I$

$$Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1} \qquad Y.Y.(Y^2)^{-1} = I$$
$$Y^2.X.(Y^2)^{-1} = Y^2XY^{-2} \qquad Y^2.Y.(Y^3)^{-1} = I$$
$$Y^3.X.(Y^3)^{-1} = Y^3XY^{-3} \qquad Y^3.Y.(Y^4)^{-1} = I$$
$$Y^4.X.(Y^4)^{-1} = Y^4XY^{-4} \qquad Y^4.Y.(I)^{-1} = Y^5$$

Yukarıda elde edilen üreteçler ile birlikte $H^5_{3,\infty}(\lambda)$ grubunun sunuşu;

$$H^5_{3,\infty}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2XY^{-2}, Y^3XY^{-3}, Y^4XY^{-4}, Y^5 \mid X^3 = (YXY^{-1})^3$$
$$= (Y^2XY^{-2})^3 = (Y^3XY^{-3})^3 = (Y^4XY^{-4})^3 = (Y^5)^\infty = I >$$

biçimde elde edilir.□

Şimdiye dek $m = 2$ için ve $m > 2$, $(m,p) = 1$ durumları için $H^m_{p,\infty}(\lambda)$ kuvvet alt gruplarının yapısını inceledik. $(m,p) = d > 1$ durumu için $H_{p,\infty}(\lambda) / H^m_{p,\infty}(\lambda)$ bölüm grubunun yapısı bilinemediğinden kuvvet alt gruplarının yapısı hakkında bir sonuç elde edilememiştir. Aynı durum $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) / \overline{H}^m_{p,\infty}(\lambda)$ bölüm grubu için de geçerlidir. Bu sebeple $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının kuvvet alt grupları $(m,p) = 1$ durumu için incelenmiştir.

6.2.6 Teorem : $m \epsilon \mathbb{Z}^+$ çift sayı ve $(m,p) = 1$ olmak üzere $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun m. kuvvet alt grubu $\overline{H}^m_{p,\infty}(\lambda)$, 2m indeksli bir normal alt grup olup grup sunuşu;

$$\overline{H}^m_{p,\infty}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2XY^{-2}, Y^3XY^{-3}, \ldots, Y^{m-1}XY^{1-m}, Y^m \mid (X)^p = (YXY^{-1})^p$$
$$= (Y^2XY^{-2})^p = \ldots = (Y^{m-1}XY^{1-m})^p = (Y^m)^\infty = I >$$
$$\cong \underbrace{\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \ldots * \mathbb{Z}_p}_{m\ tane} * \mathbb{Z}$$

biçimindedir.

İspat : Bölüm grubunun sunuşunda tüm elemanların m. kuvvetleri birim elemana eşit olacağından ve $(m,p) = 1$ olduğundan $X = I$ bağıntısı elde edilir. Böylece bölüm grubu;

$$\overline{H}_{p,\infty}(\lambda) \Big/ \overline{H}^{m}_{p,\infty}(\lambda) =< Y, R \mid Y^m = R^2 = (YR)^2 = I >\cong D_m$$

şeklinde elde edilir. Ardından bu bölüm grubu için Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, Y, Y^2, Y^3, \ldots, Y^{m-1}, R, YR, Y^2R, Y^3R, \ldots, Y^{m-1}R\}$$

olarak seçtikten sonra Reidemeister-Schreier metoduna göre tüm çarpanlar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{array}{cc}
S_{IX} = I.X.(I)^{-1} = X & S_{IY} = I.Y.(Y)^{-1} = I \\
S_{YX} = Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1} & S_{YY} = Y.Y.(Y^2)^{-1} = I \\
S_{Y^2X} = Y^2.X.(Y^2)^{-1} = Y^2XY^{-2} & S_{Y^2.Y} = Y^2.Y.(Y^3)^{-1} = I \\
\vdots & \vdots \\
S_{Y^{m-1}X} = Y^{m-1}.X.(Y^{m-1})^{-1} = Y^{m-1}XY^{1-m} & S_{Y^{m-1}.Y} = Y^{m-1}.Y.(I)^{-1} = Y^m \\
S_{RX} = R.X.(R)^{-1} = X^{p-1} & S_{RY} = R.Y.(RY)^{-1} = I \\
S_{YRX} = YR.X.(YR)^{-1} = YX^{p-1}Y^{-1} & S_{YRY} = YR.Y.(R)^{-1} = I \\
S_{Y^2RX} = Y^2R.X.(Y^2R)^{-1} = Y^2X^{p-1}Y^{-2} & S_{Y^2RY} = Y^2R.Y.(YR)^{-1} = I \\
\vdots & \vdots \\
S_{Y^{m-1}R.X} = Y^{m-1}R.X.(Y^{m-1}R)^{-1} = Y^{m-1}X^{p-1}Y^{1-m} & S_{Y^{m-1}R.Y} = Y^{m-1}R.Y.(Y^{m-2}R)^{-1} = I
\end{array}$$

$$\begin{gathered}
S_{IR} = I.R.(R)^{-1} = I \\
S_{YR} = Y.R.(YR)^{-1} = I \\
S_{Y^2R} = Y^2.R.(Y^2R)^{-1} = I \\
\vdots \\
S_{Y^{m-1}R} = Y^{m-1}.R.(Y^{m-1}.R)^{-1} = I \\
S_{RR} = R.R.(I)^{-1} = I \\
S_{YRR} = YR.R.(Y)^{-1} = I \\
S_{Y^2RR} = Y^2R.R.(Y^2)^{-1} = I \\
\vdots \\
S_{Y^{m-1}RR} = Y^{m-1}R.R.(Y^{m-1})^{-1} = I
\end{gathered}$$

Yukarıda 3 sütun halinde gerçekleşen adımlardan X üretecinin sütununa dikkat edersek toplam 2m adet satır vardır. Dahası her bir satırda elde edilen üretecin tersi alttan aynı sıradaki satırda bulunmaktadır. Ayrıca Reidemeister-Schreier yeniden yazma yöntemine göre bağıntılar aşağıdaki gibi elde edilir.

$$\tau(IX^pI) = \underbrace{S_{IX}S_{IX}\ldots S_{IX}}_{p\ tane} = X^p$$

$$\tau(IY^\infty I) = S_{IY}S_{YY}S_{Y^2Y}\ldots S_{Y^{m-1}Y}S_{IY}\ldots = (Y^m)^\infty$$

$$\tau(YX^pY^{-1}) = S_{IY}\underbrace{S_{YX}\ldots S_{YX}}_{p\ tane}S_{Y^2Y}^{-1} = (YXY^{-1})^p$$

$$\tau(Y^2X^pY^{-2}) = S_{IY}S_{YY}\underbrace{S_{Y^2X}\ldots S_{Y^2X}}_{p\ tane}S_{Y^3Y}^{-1}S_{Y^4Y}^{-1} = (Y^2XY^{-2})^p$$

Algoritma bu şekilde devam ettirilirse sadece bilinen bağıntılarla karşılaşılır. Sonuç olarak;

$$\begin{aligned}\bar{H}_{p,\infty}^{m}(\lambda) =&< X, YXY^{-1}, Y^2XY^{-2}, Y^3XY^{-3}, \ldots, Y^{m-1}XY^{1-m}, Y^m \mid (X)^p \\ &= (YXY^{-1})^p = (Y^2XY^{-2})^p = \ldots = (Y^{m-1}XY^{1-m})^p = (Y^m)^\infty = I \\ &> \cong \underbrace{\mathbb{Z}_p * \mathbb{Z}_p * \ldots * \mathbb{Z}_p}_{m\ tane} * \mathbb{Z}\end{aligned}$$

elde edilir. □

6.2.7 Örnek : $\bar{H}_{3,\infty}^{4}(\lambda)$ kuvvet alt grubunun yapısını inceleyelim. Bölüm grubunu tüm elemanların 4. kuvvetlerini birim elemana eşitleyerek aşağıdaki gibi oluşturabiliriz.

$$\left.\bar{H}_{3,\infty}(\lambda)\middle/\bar{H}_{3,\infty}^{4}(\lambda)\right. =< X, Y, R \mid X^3 = X^4 = Y^\infty = Y^4 = R^2 = R^4 = (YR)^2 = (YR)^4$$

$$= (XR)^2 = (XR)^4 = I >$$

Burada $X^3 = X^4 = I$ eşitliğinden $X = I$ elde edilir. Böylelikle 8 mertebeli dihedral grup yapısındaki bölüm grubu;

$$\left.\bar{H}_{3,\infty}(\lambda)\middle/\bar{H}_{3,\infty}^{4}(\lambda)\right. =< Y, R \mid Y^4 = R^2 = (YR)^2 = I > \cong D_4$$

şeklindedir. Bölüm grubu için Schreier transversalini;

$$\Sigma = \{I, Y, Y^2, Y^3, R, YR, Y^2R, Y^3R\}$$

olarak seçtikten sonra Reidemeister-Schreier metoduna göre üreteçler aşağıdaki gibi elde edilir.

$I.X.(I)^{-1} = X$	$I.Y.(Y)^{-1} = I$	$I.R.(R)^{-1} = I$
$Y.X.(Y)^{-1} = YXY^{-1}$	$Y.Y.(Y^2)^{-1} = I$	$Y.R.(YR)^{-1} = I$
$Y^2.X.(Y^2)^{-1} = Y^2XY^{-2}$	$Y^2.Y.(Y^3)^{-1} = I$	$Y^2.R.(Y^2R)^{-1} = I$
$Y^3.X.(Y^3)^{-1} = Y^3XY^{-3}$	$Y^3.Y.(I)^{-1} = Y^4$	$Y^3.R.(Y^3R)^{-1} = I$
$R.X.(R)^{-1} = X^2$	$R.Y.(RY)^{-1} = I$	$R.R.(I)^{-1} = I$

$$YR.X.(YR)^{-1} = YX^2Y^{-1} \qquad YR.Y.(R)^{-1} = I \qquad YR.R.(Y)^{-1} = I$$
$$Y^2R.X.(Y^2R)^{-1} = Y^2X^2Y^{-2} \qquad Y^2R.Y.(YR)^{-1} = I \qquad Y^2R.R.(Y^2)^{-1} = I$$
$$Y^3R.X.(Y^3R)^{-1} = Y^3X^2Y^{-3} \qquad Y^3R.Y.(Y^2R)^{-1} = I \qquad Y^3R.R.(Y^3)^{-1} = I$$

Yukarıda en solda 8 basamakta gerçekleşen işlemlerde üstten ve alttan aynı satırda bulunan üreteçler birbirlerinin tersidir. Böylece $\overline{H}_{3,\infty}^{4}(\lambda)$ kuvvet alt grubunun sunuşunu;

$$\overline{H}_{3,\infty}^{4}(\lambda) =< X, YXY^{-1}, Y^2XY^{-2}, Y^3XY^{-3}, Y^4 \mid (X)^3 = (YXY^{-1})^3 = (Y^2XY^{-2})^3$$
$$= (Y^3XY^{-3})^3 = (Y^4)^\infty = I >$$

şeklinde elde ederiz.□

6.2.8 Sonuç : $m\epsilon\mathbb{Z}^+$ çift sayı ve $(m,p) = 1$ olmak üzere $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun m. kuvvet alt grubu $\overline{H}_{p,\infty}^{m}(\lambda)$; $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke grubunun m. kuvvet alt grubu olan $H_{p,\infty}^{m}(\lambda)$ ile çakışır. Yani; $\overline{H}_{p,\infty}^{m}(\lambda) \cong H_{p,\infty}^{m}(\lambda)$ dır.□

$m\epsilon\mathbb{Z}^+$ tek sayı olduğu durumda bölüm grubu bağıntıları arasında $Y^m = (YR)^2 = I$, $R^2 = R^m = I$ ve $X^m = X^p = I$ bulunacaktır. Bu eşitliklerden $X = Y = R = I$ elde edilir. Bu ise bölüm grubunun sadece birim elemandan ibaret olduğuna işaret eder ki aşağıdaki teoremi elde etmiş oluruz.

6.2.9 Teorem : $\mathbb{Z}^+$ tek sayı ve $(m,p) = 1$ olmak üzere $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun m. kuvvet alt grubu $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun kendisidir. Yani $\overline{H}_{p,\infty}^{m}(\lambda) \cong \overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ dır.□

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu bölümde çalışma boyunca elde edilen sonuçlar özetlenecek ve literatürdeki çalışmalarla tartışılacaktır.

Genel Hecke grupları, Hecke gruplarını da kapsayan Fuchsian grupların bir sınıfıdır. Dolayısıyla bu çalışmada elde edilen sonuçlar, Hecke grupları için de geçerlidir.

Tezin üçüncü bölümünde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarında ve $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarındaki sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıfları elde edilmiştir. Ön bilgiler bölümünde detaylı bir şekilde açıklandığı üzere bir gruptaki konjuge sınıflarını belirlemek grubu tanımak açısından oldukça önemlidir. Söz gelimi Möbius dönüşümlerinin herhangi bir alt grubunda aynı konjuge sınıfında bulunan elemanların sabit bıraktığı nokta sayıları aynıdır. Bu sebeple üçüncü bölümde, bahsi geçen gruplardaki sonlu mertebeden elemanlar için bir parçalanış elde edilmiştir. Ayrıca belirlenen bu konjuge sınıfları sayesinde burulmalı normal alt grupların indeksleri hakkında yorumlar da yapılabileceği aynı bölümde gösterilmiştir.

Yılmaz Özgür ve Şahin [52] nolu çalışmasında Hecke ve genişletilmiş Hecke grupları için sonlu mertebeli elemanların konjuge sınıflarını çalışmışlardır. Üçüncü bölümde verilen sonuçlar $p = 2$ değeri için [52] nolu çalışmadaki sonuçlar ile çakışmaktadır.

Tezin dördüncü bölümünde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının cinsi 0 olan sonlu indeksli normal alt gruplarının simgeleri incelenmiştir. Böyle bir normal alt grup ile oluşturulan bölüm grubu kürenin otomorfizmaları grubu olacaktır. Bu sebeple bölüm grubu sonlu üçgen gruplar olan $\mathbb{Z}_n, D_n, A_4, S_4$ ve A_5 gruplarından birine izomorf olacaktır. Dolayısıyla cinsi sıfır olan normal alt grupların simgeleri $H_{p,q}$ grubundan bu sonlu üçgen gruplara birer örten homomorfizma tanımlayarak elde edilmiştir. Ardından p ve q çift sayılarına karşılık gelen genel Hecke gruplarının, bölüm grubu $D_n \cong (2,2,n)$ olacak biçimdeki 0 cinsli normal alt gruplarının sonsuz sayıda olduğu belirtilmiştir. Bu alt gruplar haricindeki 0 cinsli normal alt grupların sayısı da hesaplanmıştır. Cinsi 0 olan normal alt grupların simgeleri sayesinde hangi genel Hecke gruplarının kaç tane cinsi 0 olan burulmasız alt grubu olduğu hesaplanmıştır. Bu bölümdeki sonuçlar [3] nolu çalışmalarında H_q Hecke grupları için verilen sonuçların genel halidir.

Yine dördüncü bölümde p mertebeli ve sonsuz mertebeli iki eleman tarafından üretilen $H_{p,\infty}(\lambda)$ genel Hecke gruplarının cinsi 0 olan normal alt gruplarının simgeleriyle de ilgilenilmiştir. Bu bölümdeki sonuçlar için $p = 2$ seçildiği takdirde [6] ve [8] çalışmadaki sonuçlar elde edilir.

Hecke gruplarının elemanları tek ve çift elemanlar olmak üzere iki sınıfta incelenebilir. Çift elemanlar kendi aralarında 2 indeksli bir normal alt grup oluştururlar. Bu alt grup çift alt grup olarak isimlendirilir. H_q Hecke gruplarının çift alt gruplarının yapısı [3] nolu çalışmasında incelenmiştir. Calta ve Schmidt [25] nolu çalışmalarında genel Hecke grupları için tek ve çift eleman tanımlarını vermişlerdir. Bu bağlamda tezin beşinci bölümünde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının çift alt gruplarının cebirsel yapıları elde edilmiştir. Ayrıca çift alt grubun komütatör alt gruplarla ilişkisine dair sonuçlar da elde edilmiştir.

Tezin altıncı bölümü $H(\lambda)$ ikinci tip Hecke gruplarının genellemesi olan $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının komütatör ve kuvvet alt grupları ile ilgilidir. Öncelikle $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının komütatör alt gruplarının grup sunuşları elde edilmiştir. Bu sonuçlar p sayısının tek ve çift oluşuna göre farklı bölüm grupları elde edildiği için ayrı ayrı ele alınmıştır. Buraya kadar elde edilen sonuçlar $p = 2$ değeri için [6] nolu kaynakta elde edilen $\overline{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke grupları için elde edilen sonuçlarla çakışmaktadır.

Çalışmanın altıncı bölümünün devamında $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının kuvvet alt grupları incelenmiştir. Öncelikle p sayısının tek ve çift olma durumuna göre $H^2_{p,\infty}(\lambda)$ ikinci derece kuvvet alt gruplarının sunuşu elde edilmiştir. $H_{p,\infty}(\lambda)$ grubunun ikinci derece kuvvet alt grubu $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ genişletilmiş genel Hecke grubunun birinci komütatör alt grubu ile çakıştığı için bu durum ayrı olarak incelenmiştir. Daha sonra $(m,p) = 1$ durumu için $H_{p,\infty}(\lambda)$ ve $\overline{H}_{p,\infty}(\lambda)$ gruplarının

m. derece kuvvet alt gruplarının grup sunuşları ve simgeleri elde edilmiştir. Kuvvet alt gruplar ile ilgili verilen sonuçlar $p = 2$ değeri için [6] nolu kaynakta $H(\lambda)$ ve $\overline{H}(\lambda)$ gruplarının kuvvet alt gruplarıyla ilgili verilen sonuçlar ile çakışmaktadır.

Tezde elde edilen bulgular literatürdeki çalışmalarla birlikte tartışıldıktan sonra ileride yapılacak olan çalışmalar için bazı öneri ve açık problemler aşağıda yer almaktadır.

Bir grubu tanımak için grubun elemanlarını bilmek gereklidir. Hecke grupları için $H_q \subseteq PSL(2,\mathbb{Z}[\lambda_q])$ kapsaması geçerlidir. Tersine $PSL(2,\mathbb{Z}[\lambda_q])$ halkasının hangi elemanlarının H_q grubuna ait olduğuna dair karakterizasyon sürekli kesirler yardımıyla Rosen tarafından [58] nolu çalışmada incelenmiştir. Genel Hecke gruplarının elemanlarını belirlemek adına buna benzer çalışmalar yapılabilir.

Hecke gruplarının bazı özellikleri kuadratik formlar yardımıyla [53-55, 59] nolu çalışmalarda incelenmiştir. Genel Hecke grupları ile kuadratik formlar arasında bir ilişki kurmak mümkün olabilir.

Tezin üçüncü bölümünde elde edilen genel Hecke gruplarının sonlu mertebeli konjuge sınıflarına ek olarak eliptik olmayan elemanların konjuge sınıfları da belirlenebilir. Böylelikle hiperbolik ve parabolik elemanlar için de bir parçalanış elde edilebilir.

Tezin dördüncü bölümünde genel Hecke gruplarının cinsi sıfır olan sonlu indeksli normal alt grupları incelenmişti. Buraya ek olarak cinsi sıfırdan farklı olan normal alt grupların yapısı çalışılabilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., "Über die bestimmung dirichletscher reichen durch ihre funktionalgleichungen", *Math. Ann.*, 112, 664-699, (1936).

[2] Şahin, R. and Bizim, O., "Some subgroups of extended Hecke groups $\bar{H}(\lambda_q)$", *Actua Math. Sci.*, 23, 497-502, (2003).

[3] Cangül, İ. N., "Normal subgroups of Hecke groups", Ph.D. Thesis, *Southampton University,* Southampton, (1993).

[4] Newman, M., "The structure of some subgroups of the modular group", *Illionis J. Math.*,8, 480-487, (1962).

[5] Newman, M., "Free subgroups and normal subgroups of the modular group", *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).

[6] Koruoğlu, Ö., "$\bar{H}(\lambda_p)$ ve $\bar{H}(\lambda)$ genişletilmiş Hecke gruplarının bazı normal alt grupları ve sürekli kesirler", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[7] Şahin, R., "Genişletilmiş Hecke grupları", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[8] Yılmaz, N., "Picard grubu ve $H(\sqrt{n})$ Hecke gruplarının bazı normal alt grupları", Doktora Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1999).

[9] İkikardeş, S., Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups", *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 497-508, (2006).

[10] Cangül, İ. N. and Singerman, D., "Normal subgroups of Hecke groups and regular maps", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 123, 59-74, (1998).

[11] Cangül, İ. N., Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "Power subgroups of some Hecke groups II" *Houston Journal of Mathematics*, 33, 33-42, (2007).

[12] Koruoğlu, Ö., Şahin, R., İkikardeş, S. and Cangul, İ.N., "Normal subgroups of Hecke groups $H(\lambda)$", *Algebras and Representation Theory*, 13, 219-230, (2010).

[13] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "On the power subgroups of the extended modular group $\overline{\Gamma}$", *Turk. J. Math.* , 28, 143-151, (2004).

[14] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "Some normal subgroups of the Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 3, 1033-1048, (2006).

[15] Şahin, R., Koruoğlu, Ö. and İkikardeş, S., "On the extended Hecke group $H(\lambda_5)$", *Algebra Colloquium*, 13, 1, 17-23, (2006).

[16] Şahin, R., Bizim, O. and Cangul, İ.N., "Commutator subgroups of the extended Hecke groups $\overline{H}(\lambda_q)$", *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, 129, 253-259, (2004).

[17] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of some Hecke groups", *Ramanujan J.*, 24, 151-159, (2011).

[18] Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Commutator subgroups of the power subgroups of Hecke groups II", *C.R. Math. Acad. Sci. Paris*, 349, 3, 4, 127-130, (2011).

[19] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "Power subgroups of Hecke groups $H\sqrt{n}$", *Int. J. Math. Sci.*, 11, 703-708, (2001).

[20] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "Normal subgroups of Hecke group $\sqrt{5}$", *Bull. Inst.Math. Acad. Sinica*, 28, 4, 277-283, (2000).

[21] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., "The normal subgroup structure of the extended Hecke groups", *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38, 51-65, (2007).

[22] Lehner, J. and Newman, M., "Real two-dimensional representations of the modular group and related groups", *Amer. J. Math.*, 87, 945-954, (1965).

[23] Lehner, J. and Newman, M., "Real two-dimensional representations of the free product of two finite cyclic groups", *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 62 135-141, (1966).

[24] Lehner, J., "Uniqueness of a class of Fuchsian groups" *Illinois J. Math.*, 19, 2, 308-315, (1975).

[25] Calta, K. and Schmidt, T.A., "Infinitely many lattice surfaces with special pseudo-anasov maps", *J. Mod. Dyn.*, 7, 2, 239-254, (2013).

[26] Beardon, A.F., *Algebra and geometry*, New York: Cambridge University Press, (2005).

[27] Jones, G. A. and Singerman, D., *Complex functions*, Cambridge: Cambridge University Press, (1987).

[28] Başkan, T., *Kompleks fonksiyonlar teorisi*, Bursa: Dora Yayıncılık, (2010).

[29] Beardon, A.F., *The geometry of discrete groups*, Graduate Texts in Mathematics 91, New York: Springer-Verlag, (1983).

[30] Ford, L. R., *Automorphic functions*, New York: Chelsea Publishing Company, (1951).

[31] Başkan, T., *Ayrık gruplar*, Ankara: H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, (1980).

[32] Shimura, G., *Introduction to the Arithmetic Theory of automorphic functions*, New Jersey: Princeton University Press, (1971).

[33] Katok, S., *Fuchsian groups*, Chicago: The University of Chicago Press, (1992).

[34] Bujalance, E., Costa, A.F. and Martinez, E., *Topics on Riemann surfaces and Fuchsian groups*, London Mathematical Society Lecture Note Series 287, Cambridge: Cambridge University Press, (2001).

[35] Walkden, C., "Hyperbolic geometry lecture notes [online]", (10 March 2014), http://www.maths.manchester.ac.uk/~cwalkden/hyperbolic-geometry/hyperbolic_geometry.pdf, (2013).

[36] Lehner, J., *A Short course in automorphic functions*, New York: Dover Publications Inc, (1966).

[37] Lehner, J., *Discontinious groups and automorphic functions*, Math. Surveys 8, Rhode Island: American Mathematical Society Providence, (1964).

[38] Singerman, D., "Subgroups of Fuchsian groups and finite permutation groups", *Bull. London Math. Soc.*, 2, 319-323, (1970).

[39] Singerman, D., "Finitely maximal Fuchsian groups", *J. London Math. Soc.*, 2,6, 29-38, (1972).

[40] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "On the group structure and parabolic points of the Hecke group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51, 35-46, (2002).

[41] Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Some normal subgroups of extended generalized Hecke groups", Yayına Sunuldu.

[42] Knopp, M.I. and Newman, M., "On groups related to The Hecke Groups", *Proc. American Math. Soc.*, 119,1, 77-80, (1993).

[43] Tsanov, V.V., "Triangle groups, automorphic forms and torus knots" , *Enseign. Math.*, 59, 77-113, (2013).

[44] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., *Generators and relations for discrete groups*, second ed., Berlin: Springer-Verlag, (1965).

[45] Johnson, D. L., *Presentation of groups*, Cambridge: Cambridge University Press, (1990).

[46] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., *Combinatorial group theory*, New York: Dover Publications, (1976).

[47] Akdemirci, Z. "Modüler grubun normal ve serbest alt grupları", Yüksek Lisans Tezi, *Karadeniz Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Trabzon, (2012).

[48] Hungerford, T. W., *Algebra*, New York: Springer-Verlag, (1974).

[49] Robinson, D. J. S., *A Course in the theory of groups*, New York: Springer-Verlag, (2001).

[50] Fraleigh, J. B., *A first course in abstract algebra*, 6, New York: Addison-Wesley Pub. Comp., (1974).

[51] Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Conjugacy classes of extended generalized Hecke groups", Yayına Sunuldu.

[52] Özgür, N. Y. and Şahin, R., "On the extended Hecke groups", *Turk. J. Math.*, 27, 473-480, (2003).

[53] Fine, B., "Trace classes and quadratic forms in the modular group", *Canad. Math. Bull.*, 37, 2, 202-212, (1994).

[54] Schmidt, T. A. and Sheingorn, M., "Length spectra of the triangle Hecke groups", *Math. Z.*, 220, 369-397, (1995).

[55] Hoang, G. and Ressler, W., "Conjugacy classes and binary quadratic forms for the Hecke groups", *Canad. Math. Bull.*, 56, 570-583, (2013).

[56] Cangül, İ.N., "Normal subgroups and elements of $H'(\lambda_q)$", *Tr. J. of Mathematics*, 23, 251-256, (1999).

[57] Kaymak, Ş., Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Commutator subgroups of generalized Hecke and extended generalized Hecke groups", Yayına Sunuldu.

[58] Rosen, D., "A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups", *Duke Math. J.* 21, 549-564, (1954).

[59] Ressler, W., "On binary quadratic forms and the Hecke groups", *Int. J. Number Theory*, 05, 1401-1418, (2009).

EKLER

9. EKLER

EK A $H_{3,4}$ Genel Hecke Grubunun Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

Bölüm Grubu	Normal Alt Grup
$\{I\}$	$H_{3,4}$
$\mathbb{Z}_2 \cong (1,2,2)$	$\left(0; 3^{(2)}, 2, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_4 \cong (1,4,4)$	$\left(0; 3^{(4)}, 2, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,1,3)$	$\left(0; 4^{(3)}, \infty\right)$
$D_3 \cong (3,2,2)$	$\left(0; 2^{(3)}, \infty^{(3)}\right)$
$A_4 \cong (3,2,3)$	$\left(0; 2^{(6)}, \infty^{(4)}\right)$
$S_4 \cong (3,2,4)$	$\left(0; 2^{(12)}, \infty^{(6)}\right)$
$A_5 \cong (3,2,5)$	$\left(0; 2^{(30)}, \infty^{(12)}\right)$
$S_4 \cong (3,4,2)$	$\left(0; \infty^{(12)}\right)$

EK B $H_{6,8}$ Genel Hecke Grubunun Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

Bölüm Grubu	Normal Alt Grup
$\{I\}$	$H_{6,8}$
$\mathbb{Z}_2 \cong (2,1,2)$	$(0; 3, 8^{(2)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_2 \cong (2,2,1)$	$(0; 3,4, \infty^{(12)})$
$\mathbb{Z}_2 \cong (1,2,2)$	$(0; 6^{(2)}, 4, \infty)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,1,3)$	$(0; 2, 8^{(3)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_4 \cong (1,4,4)$	$(0; 6^{(4)}, 2, \infty)$
$\mathbb{Z}_6 \cong (6,1,6)$	$(0; 8^{(6)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_8 \cong (1,8,8)$	$(0; 6^{(8)}, \infty)$
$D_2 \cong (2,2,2)$	$(0; 3^{(2)}, 4^{(2)}, \infty^{(2)})$
$D_3 \cong (3,2,2)$	$(0; 2^{(2)}, 4^{(3)}, \infty^{(3)})$
$D_4 \cong (2,4,2)$	$(0; 3^{(4)}, 2^{(2)}, \infty^{(4)})$
$D_6 \cong (6,2,2)$	$(0; 4^{(6)}, \infty^{(6)})$
$D_8 \cong (2,8,2)$	$(0; 3^{(2)}, \infty^{(8)})$
$S_4 \cong (2,4,3)$	$(0; 3^{(12)}, 2^{(6)}, \infty^{(8)})$
$A_4 \cong (3,2,3)$	$(0; 2^{(4)}, 4^{(6)}, \infty^{(4)})$
$S_4 \cong (3,2,4)$	$(0; 2^{(8)}, 4^{(12)}, \infty^{(6)})$
$A_5 \cong (3,2,5)$	$(0; 2^{(20)}, 4^{(30)}, \infty^{(12)})$
$S_4 \cong (3,4,2)$	$(0; 2^{(8)}, 2^{(6)}, \infty^{(12)})$

EK C $H_{9,12}$ Genel Hecke Grubunun Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

Bölüm Grubu	**Normal Alt Grup**
$\{I\}$	$H_{9,12}$
$\mathbb{Z}_2 \cong (1,2,2)$	$\left(0; 9^{(2)}, 6, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (1,3,3)$	$\left(0; 9^{(3)}, 4, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,1,3)$	$\left(0; 3, 12^{(3)}, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,3,1)$	$\left(0; 3,4, \infty^{(3)}\right)$
$\mathbb{Z}_4 \cong (1,4,4)$	$\left(0; 9^{(4)}, 3, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_6 \cong (1,6,6)$	$\left(0; 9^{(6)}, 2, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_9 \cong (9,1,9)$	$\left(0; 12^{(9)}, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_{12} \cong (1,12,12)$	$\left(0; 9^{(12)}, \infty\right)$
$D_3 \cong (3,2,2)$	$\left(0; 3^{(2)}, 6^{(3)}, \infty^{(3)}\right)$
$D_9 \cong (9,2,2)$	$\left(0; 6^{(9)}, \infty^{(9)}\right)$
$A_4 \cong (3,2,3)$	$\left(0; 3^{(4)}, 6^{(6)}, \infty^{(4)}\right)$
$S_4 \cong (3,2,4)$	$\left(0; 3^{(8)}, 6^{(12)}, \infty^{(6)}\right)$
$A_5 \cong (3,2,5)$	$\left(0; 3^{(20)}, 6^{(30)}, \infty^{(12)}\right)$
$A_4 \cong (3,3,2)$	$\left(0; 3^{(4)}, 4^{(4)}, \infty^{(6)}\right)$
$S_4 \cong (3,4,2)$	$\left(0; 3^{(4)}, 3^{(3)}, \infty^{(6)}\right)$

EK D $H_{3,\infty}(\lambda)$ Genel Hecke Grubunun Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

Bölüm Grubu	Normal Alt Grup
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,1,3)$	$\left(0; \infty^{(3)}, \infty\right)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,3,1)$	$\left(0; \infty, \infty^{(3)}\right)$
$D_3 \cong (3,2,2)$	$\left(0; \infty^{(3)}, \infty^{(3)}\right)$
$A_4 \cong (3,2,3)$	$\left(0; \infty^{(6)}, \infty^{(4)}\right)$
$A_4 \cong (3,3,2)$	$\left(0; \infty^{(4)}, \infty^{(6)}\right)$
$S_4 \cong (3,2,4)$	$\left(0; \infty^{(12)}, \infty^{(6)}\right)$
$S_4 \cong (3,4,2)$	$\left(0; \infty^{(6)}, \infty^{(12)}\right)$
$A_5 \cong (3,2,5)$	$\left(0; \infty^{(30)}, \infty^{(12)}\right)$
$A_5 \cong (3,5,2)$	$\left(0; \infty^{(12)}, \infty^{(30)}\right)$

EK E $H_{15,\infty}(\lambda)$ Genel Hecke Grubunun Cinsi Sıfır Olan Normal Alt Grupları

Bölüm Grubu	Normal Alt Grup
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,1,3)$	$(0; 5, \infty^{(3)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_3 \cong (3,3,1)$	$(0; 5, \infty, \infty^{(3)})$
$\mathbb{Z}_5 \cong (5,1,5)$	$(0; 3, \infty^{(5)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_5 \cong (5,5,1)$	$(0; 3, \infty, \infty^{(5)})$
$\mathbb{Z}_{15} \cong (15,1,15)$	$(0; \infty^{(15)}, \infty)$
$\mathbb{Z}_{15} \cong (15,15,1)$	$(0; \infty, \infty^{(15)})$
$D_3 \cong (3,2,2)$	$(0; 5^{(2)}, \infty^{(3)}, \infty^{(3)})$
$D_5 \cong (5,2,2)$	$(0; 3^{(2)}, \infty^{(5)}, \infty^{(5)})$
$D_{15} \cong (15,2,2)$	$(0; \infty^{(15)}, \infty^{(15)})$
$A_4 \cong (3,2,3)$	$(0; 5^{(4)}, \infty^{(6)}, \infty^{(4)})$
$A_4 \cong (3,3,2)$	$(0; 5^{(4)}, \infty^{(4)}, \infty^{(6)})$
$S_4 \cong (3,2,4)$	$(0; 5^{(8)}, \infty^{(12)}, \infty^{(6)})$
$S_4 \cong (3,4,2)$	$(0; 5^{(8)}, \infty^{(6)}, \infty^{(12)})$
$A_5 \cong (3,2,5)$	$(0; 5^{(20)}, \infty^{(30)}, \infty^{(12)})$
$A_5 \cong (3,5,2)$	$(0; 5^{(20)}, \infty^{(12)}, \infty^{(30)})$
$A_5 \cong (5,2,3)$	$(0; 3^{(12)}, \infty^{(30)}, \infty^{(20)})$
$A_5 \cong (5,3,2)$	$(0; 3^{(12)}, \infty^{(20)}, \infty^{(30)})$