T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞULE KAYMAK

BALIKESİR, ARALIK - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ŞULE KAYMAK

BALIKESİR, ARALIK - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

Şule KAYMAK tarafından hazırlanan **"GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI"** adlı tez çalışmasının savunma sınavı 18.12.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Özden KORUOĞLU	....
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Yunus Emre YILDIRIR	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Cihan ÖZGÜR ....

ÖZET

GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI
YÜKSEK LİSANS TEZİ
ŞULE KAYMAK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: DOÇ.DR.ÖZDEN KORUOĞLU)
BALIKESİR, ARALIK - 2013

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır.

İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak tanımlar, örnekler, teoremler ve metodlar verilmiştir.

Üçüncü bölümde, $H_{p,q}$ Genel Hecke Gruplarının kamutatör alt gruplarının grup sunuşları ile $H_{2,q}$ Hecke Gruplarının kamutatör alt grupları arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, $\overline{H}_{p,q}$ Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının kamutatör alt gruplarının grup sunuşları verilmiş ve $\overline{H}_{2,q}$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının kamutatör alt gruplarıyla ilişkisi incelenmiştir.

Beşinci bölümde, tezden elde edilen sonuçlar ve ileride yapılacak çalışmalar için açık problemler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: genel Hecke grupları, genişletilmiş genel Hecke grupları, kamutatör alt gruplar.

ABSTRACT

COMMUTATOR SUBGROUPS OF THE EXTENDED GENERALIZED HECKE GROUPS
MSC THESIS
ŞULE KAYMAK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR: ASSOC. PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)
BALIKESİR, DECEMBER 2013

This thesis consists of five chapters. In the first chapter, the study is introduced.

In the second chapter, it is given that the definitions, examples, theorems and methods which are used in the other chapters are briefly recalled.

In the third chapter, the presentations of the commutator subgroups of the Generalized Hecke Groups $H_{p,q}$ are investigated and some relations between these presentations and commutator subgroups of the Hecke Groups $H_{2,q}$ are given.

In the fourth chapter, the presentations of the commutator subgroups of the Extended Generalized Hecke Groups $\overline{H}_{p,q}$ are given and some relations between these presentations and commutator subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}_{2,q}$ are investigated.

In the fifth chapter, the results obtained from the thesis are summarized and open problems for future studies are given.

KEYWORDS: generalized Hecke groups, extended generalized Hecke groups, commutator subgroups.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	Adı
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{C}_\infty$	Genişletilmiş karmaşık sayılar kümesi
$\boldsymbol{Aut}(\mathbb{C}_\infty)$	$\mathbb{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi
$\boldsymbol{GL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	$\mathbb{C}$ de genel lineer grup
$\boldsymbol{PGL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	Projektif lineer grup
$\boldsymbol{SL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	Özel lineer grup
$\boldsymbol{PSL}(\mathbf{2},\mathbb{C})$	Determinantı 1 olan projektif lineer grup
$\boldsymbol{PSL}(\mathbf{2},\mathbb{Z})$	Modüler grup
$\boldsymbol{PSL}(\mathbf{2},\mathbb{R})$	$\left\{V(z)\middle\vert V(z)=\frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=1\right\}$
$\boldsymbol{U}$	Üst yarı düzlem
$\boldsymbol{G_0}$	$\left\{U(z)\middle\vert U(z)=\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a,b,c,d\in\mathbb{R}, ad-bc=-1\right\}$
$\boldsymbol{H_{2,q}}$	$\lambda=\lambda_q=2cos\frac{\pi}{q}$,$1\leq\lambda<2$ için Hecke grupları
$\boldsymbol{\bar{H}_{2,q}}$	$\lambda=\lambda_q=2cos\frac{\pi}{q}$, $1\leq\lambda<2$ için genişletilmiş Hecke grupları
$\boldsymbol{H_{p,q}}$	Genel Hecke grupları
$\boldsymbol{\bar{H}_{p,q}}$	Genişletilmiş genel Hecke grupları
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{H_{p,q}})$	Genel Hecke gruplarının temel bölgesi
$[\boldsymbol{G}:\boldsymbol{H}]$	İndeks
$\boldsymbol{C_n}$	Devirli grup
$\boldsymbol{D_n}$	Dihedral grup
$\boldsymbol{S_n}$	Simetrik grup
$\boldsymbol{A_n}$	Alterne grup
$\boldsymbol{P}=\langle\boldsymbol{X}\vert\boldsymbol{R}^*\rangle$	Grup sunuşu
$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{X})$	X tabanlı serbest grup
$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$	Direkt çarpım grubu
$\boldsymbol{A}*\boldsymbol{B}$	Serbest çarpım grubu
$\mathbf{A} *_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$	Birleştirilmiş serbest çarpım grubu
$[\boldsymbol{x_1},\boldsymbol{x_2}]$	x_1 ile x_2 elemanlarının kamutatörü
$\boldsymbol{G'}$	Birinci kamutatör alt grup
$\boldsymbol{G}/\boldsymbol{G'}$	G nin G' kamutatör alt grubu ile bölüm grubu
$\boldsymbol{\Sigma}$	Schreier transversali
$\vert\boldsymbol{X}\vert$	$F(X)$ grubunun rankı

ÖNSÖZ

Üniversiteye başladığım günden beri yardımlarını ve çabalarını unutamayacağım, bu çalışmamda büyük emeği olan sayın hocam ve danışmanım Doç. Dr. Özden KORUOĞLU'na ne kadar teşekkür etsem azdır.

Çalışmam boyunca benden yardımlarını esirgemeyen sayın hocalarım Prof. Dr. Recep ŞAHİN, Arş.Gör. Mevhibe KOBAK DEMİR ve Arş. Gör. Bilal DEMİR'e teşekkürler.

Beni yetiştiren, büyük emeklerle bugünlere getiren, her zaman desteklerini yanımda hissettiğim anneme ve babama, canım kardeşime, yüksek lisans hayatım boyunca her zaman yanımda olan ve sonsuza kadar yanımda olmasını istediğim İrfan SARICA'ya sonsuz teşekkürler.

Son olarak bu çalışmamda maddi ve manevi desteğini esirgemeyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

Hecke grupları literatüre, E. Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile girmiştir. $H(\lambda)$ ile gösterilen Hecke grupları, λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere

$$t(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } u(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilir. Ayrıca E. Hecke, $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli şartın

$$\lambda \geq 2 \text{ veya } \lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, (q \geq 3 \text{ bir tamsayı})$$

olması gerektiğini göstermiştir [1].

$s = tu$ denilerek $\lambda = \lambda_q$ değerleri için

$$H(\lambda_q) = \langle \mathrm{t}, \mathrm{s} | \mathrm{t}^2 = \mathrm{s}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I} \rangle \qquad (1.1)$$

Hecke gruplarının sunuşu elde edilir.

$$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, (q \geq 3 \text{ tek tamsayı ve } q = 4{,}6)$$

değerlerine karşılık gelen $H(\lambda_q)$ Hecke grupları ile bunların normal alt grupları Cangül tarafından çalışılmıştır [2]. Hecke grupları ile ilgili ayrıntılı bilgilere [3-11] nolu kaynaklardan ulaşılabilir. En önemli Hecke grubu $q = 3$ değerine karşılık gelen $PSL(2, \mathbb{Z})$ modüler gruptur. Modüler grubun sayılar teorisi, fonksiyonlar teorisi gibi matematiğin birçok dalıyla ilgisi gösterilmiştir [2,12-16].

Lehner [17] nolu makalede,

$$v(z) = z + \lambda_p + \lambda_q \text{ ile } x(z) = -\frac{1}{z - \lambda_p}$$

lineer dönüşümleri yardımıyla üretilen $H_{\mathrm{p},q}$ genel Hecke gruplarını tanıtmıştır. Burada $y = xv$ denilerek

$$H_{\mathrm{p},q} = \langle \mathrm{x}, \mathrm{y} | \mathrm{x}^{\mathrm{p}} = \mathrm{y}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I} \rangle \cong \mathrm{C_p} * \mathrm{C_q} \ (2 \leq \mathrm{p} \leq \mathrm{q} \leq \infty, \mathrm{p} + \mathrm{q} > 4) \qquad (1.2)$$

grup sunuşları elde edilmiştir. Bu gruplarda $\mathrm{p} = 2$ için $H_{2,q} = H(\lambda_q)$ eşitliğinden (1.1) deki Hecke grupları elde edilir. Bu gruplar H_q sembolü ile de gösterilir.

$r(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümünü $H_{2,q}$ Hecke gruplarına katarak elde edilen genişletilmiş Hecke grupları, Bizim ve Şahin tarafından tanıtılmıştır. Bu grup

$$\overline{H}(\lambda_q) = \langle t, s, r | t^2 = s^q = r^2 = I, tr = rt, sr = rs^{-1} \rangle \cong \mathrm{D}_2 *_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{D}_\mathrm{q} \quad (1.3)$$

sunuşuna sahiptir. Genişletilmiş Hecke gruplarının kamutatör alt grupları ve aralarındaki bazı ilişkiler de [16,18-23] nolu kaynaklarda verilmiştir.

$H_{\mathrm{p},q}$ genel Hecke gruplarına $r(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü katılarak

$$\overline{H}_{p,q} = \langle x, y, r | x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1} \rangle \cong \mathrm{D}_\mathrm{p} *_{\mathbb{Z}_2} \mathrm{D}_\mathrm{q} \quad (1.4)$$

genişletilmiş genel Hecke grupları elde edilir. Bu grup D_p ile D_q dihedral gruplarının $\mathbb{Z}_2$ ile birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur [24]. Bu gruplarda $\mathrm{p} = 2$ için $\overline{H}_{2,q} = \overline{H}(\lambda_q)$ eşitliğinden (1.3) teki genişletilmiş Hecke grupları elde edilir.

Bu tezde $H_{p,q}$ genel Hecke grupları ile $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının kamutatör alt grupları incelenmiştir. $p = 2$ değeri için $H'_{p,q}$ birinci kamutatör alt gruplarının, [2] de verilen $H'_{2,q}$ grupları ile çakıştığı görülmüştür. Ayrıca $\overline{H}'_{p,q}$ nun özel durumu olan $p = 2$ yerine yazıldığında [18] ve [19] nolu kaynaklardaki $\overline{H}'_{2,q}$ elde edilmiştir.

Bu çalışmada yapılanları bölümlere ayırarak kısaca tanıtalım.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar, teoremler ve metodlar verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, genel Hecke gruplarının kamutatör alt grupları incelenmiş, üreteçleri bulunmuş ve grup sunuşları verilmiştir.

Dördüncü bölümde, genişletilmiş genel Hecke gruplarının kamutatör alt grupları incelenmiş ve üreteçleri bulunarak grup sunuşları elde edilmiştir.

Beşinci bölümde, elde edilen sonuçlar verilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalar için açık problemlerden bahsedilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kavramlar tanımlanmış, temel teoremler ve metotlar verilmiştir.

2.1 Möbiüs Dönüşümleri

Çalıştığımız Hecke gruplarının elemanları birer möbiüs dönüşümüdür. Bu alt bölümde, bu dönüşümleri tanıtıp, bu dönüşümler ile 2×2 matrisler arasındaki ilişkileri vereceğiz. $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ olmak üzere şu tanımı verelim:

2.1.1 Tanım : $f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ birebir, örten ve meromorf fonksiyonlara $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin bir *otomorfizmi* denir [25].

$\mathbb{C}_\infty$ kümesinin tüm otomorfizmlerinin kümesi $Aut(\mathbb{C}_\infty)$ ile gösterilir. Yani,

$$Aut(\mathbb{C}_\infty) = \{f \mid f: \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty, f \ birebir, \text{ö}rten, meromorf \ fonksiyon\}$$

şeklindedir.

2.1.2 Teorem : $\mathbb{C}_\infty$ kümesinin, tüm otomorfizmlerinin kümesi aşağıdaki gibidir;

$$Aut(\mathbb{C}_\infty) = \left\{V(z) \middle| V(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0\right\} \text{ [25].}$$

2.1.2 Teoremde dikkat edilirse $ad - bc \neq 0$ verilmiştir. Eğer $ad - bc = 0$ olsa, $V(z)$ sabit fonksiyon olur ve birebirlik şartı bozulur.

2.1.3 Tanım: $V(z) = \frac{az+b}{cz+d}$, $(a, b, c, d \in \mathbb{C}, ad - bc \neq 0)$ biçimindeki dönüşümlere, *möbiüs dönüşümleri* (kesirli doğrusal dönüşüm) denir [25].

2.1.4 Teorem : Möbiüs dönüşümleri, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir gruptur [26].

2.1.3 Tanımdaki $ad - bc$ değerine $V(z)$ dönüşümünün determinantı denir ve Δ ile gösterilir. Möbiüs dönüşümleri için verilen $\Delta = ad - bc \neq 0$ koşulu yerine $\Delta = ad - bc = 1$ kullanılabilir. Çünkü pay ve payda $\pm\sqrt{\Delta}$ ile bölünürse, $\Delta = 1$ sonucu bulunur.

Matrislerde çarpma işlemi yapmak, fonksiyonların bileşke işlemine göre daha kolaydır. Bunun için, möbiüs dönüşümleri ile matrisler arasında birebir ilişkiyi inceleyelim. Bu ilişki, $V(z) = \frac{az+b}{cz+d}$ yerine $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisini kullanmak olacaktır. Bunun için bazı tanım ve teoremler verelim.

2.1.5 Tanım: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ biçiminde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $\Delta = ad - bc \neq 0$ koşullarını sağlayan 2×2 matrislerin kümesine $\mathbb{C}$ de *genel lineer grup* denir ve $GL(2, \mathbb{C})$ ile gösterilir.

2.1.6 Teorem : $\theta: GL(2, \mathbb{C}) \to Aut(\mathbb{C}_\infty)$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir epimorfizmdir [25].

Dikkat edilirse 2.1.6 Teoremdeki dönüşüm birebir değildir. Çünkü $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisi $\frac{az+b}{cz+d}$ dönüşümünün yanında, bu dönüşümün k katına da gidebilir. Dolayısıyla birebirlik yoktur. θ dönüşümünün çekirdeğini K ile gösterelim. ($K = çek\ \theta$) Gerekli işlemler yapılırsa $çek\ \theta$ kümesinin $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ koşulu altında $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ biçimindeki matrislerden oluştuğu görülür. Bu elemanları

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda I$$

olarak da ifade edebiliriz. Birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremi verebiliriz.

2.1.7 Teorem : $GL(2, \mathbb{C})/K \cong Aut(\mathbb{C}_\infty)$ [25].

$GL(2,\mathbb{C})/K$ bölüm grubu için $PGL(2,\mathbb{C})$ simgesi kullanılır ve bu grup *projektif genel lineer grup* olarak adlandırılır. $PGL(2,\mathbb{C})$ nin elemanları, $\Delta = ad - bc \neq 0$ koşulunu sağlar ve bu matrislerin k katı da aynı dönüşümü belirler.

Şimdi $GL(2,\mathbb{C})$ kümesinden $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ kümesine şöyle bir dönüşüm tanımlayalım:

$$det: GL(2,\mathbb{C}) \to \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto ad - bc$$

dönüşümü $M, N \in GL(2,\mathbb{C})$ olmak üzere $\det(M.N) = \det(M).\det(N)$ özelliğinden homomorfizmadır. Üstelik örten olduğundan bir epimorfizmdir. Bu epimorfizmin çekirdeği $SL(2,\mathbb{C})$ ile göstereceğimiz, determinantı 1 olan matrislerdir. $SL(2,\mathbb{C})$ kümesine *özel lineer grup* denir. Yine birinci izomorfizma teoreminden aşağıdaki teoremleri verebiliriz.

2.1.8 Teorem : $GL(2,\mathbb{C})/SL(2,\mathbb{C}) \cong \mathbb{C} \setminus \{0\}$ [25].

2.1.9 Teorem : $Aut(\mathbb{C}_\infty) \cong PGL(2,\mathbb{C}) = PSL(2,\mathbb{C})$ [25].

$PSL(2,\mathbb{C})$ nin elemanları, $\Delta = ad - bc = 1$ koşulunu sağlar. Ayrıca bu matrislerin negatifleri de aynı dönüşümü belirler.

Şimdi U , üst yarı düzlemi göstermek üzere, reel katsayılı doğrusal dönüşümlerin kümesi olan,

$$PSL(2,\mathbb{R}) = \left\{ V(z) \middle| V(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = 1 \right\}$$

ile ilgili şu teoremi verelim.

2.1.10 Teorem: $Aut(U) \cong PSL(2,\mathbb{R})$ [25].

2.1.11 Tanım: $G_0 = \left\{ U(z) \middle| U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a,b,c,d \in \mathbb{R}, ad-bc = -1 \right\}$ kümesinin elemanlarına U üst yarı düzlemin *anti-otomorfizmleri* denir.

2.1.12 Teorem: $G = PSL(2,\mathbb{R}) \cup G_0$ bileşke işlemine göre bir gruptur [25].

2.1.13 Teorem: Hecke grupları $PSL(2, \mathbb{R})$ nin alt grubudur. Genişletilmiş Hecke grupları ise G nin bir alt grubudur.

2.2 Hecke Grupları

Erich Hecke, 1936 yılında “Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen” adlı çalışmasında Hecke gruplarını aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

2.2.1 Tanım : λ sabit bir pozitif sayı olmak üzere ,

$$t(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } u(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara *Hecke grupları* denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanımlanan $t(z)$ ve $u(z)$ dönüşümleri yardımıyla $s = t.u$ alınırsa

$$s(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

elde edilir.

2.2.2 Teorem : $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \{z \in U \mid |Re\, z| < \lambda/2\, , |z| > 1\ \}$$

kümesidir [1].

Ayrıca E. Hecke diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. $\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, $PSL(2, \mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur. (Ayrık gruplar ve Fuchsian gruplar için ayrıntılı bilgiler [27,28] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.2.3 Teorem : $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}, (q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır [1].

$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ veya $H_{2,q}$ ile gösterilir. Bazı $H_{2,q}$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları [2] de çalışılmıştır.

2.2.4 Teorem: $H_{2,q}$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H_{2,q} = \langle \mathrm{t}, \mathrm{s} | \mathrm{t}^2 = \mathrm{s}^{\mathrm{q}} = \mathrm{I} \rangle \cong C_2 * C_q$$

şeklinde 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır [2].

$H_{2,q}$ Hecke gruplarında, $q = 3$ değerine karşılık gelen $H_{2,3}$ Hecke grubu daha çok modüler grup olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir. Modüler grup matematikçiler tarafından çok çalışılan bir gruptur. Modüler grubun kendisinin yanı sıra önemli bazı alt grupları çok sayıda çalışmada kullanılmıştır. M. Newman [12,29] nolu makalelerde bu alt grupları incelemiş ve aralarındaki ilişkiyi göstermiştir.

2.3 Genişletilmiş Hecke Grupları

Burada 2.2 Bölümde verilen Hecke gruplarından, $r_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü yardımıyla elde ettiğimiz genişletilmiş Hecke gruplarından kısaca bahsedeceğiz. Genişletilmiş Hecke grupları ile ilgili temel bilgilere [18-20,22,23,30-32] kaynaklarından ulaşılabilir.

Faydalanacağımız $r_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ dönüşümü birim çembere göre yansımadır.

$\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere $\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ değerleri için $H_{2,q}$ ile gösterilen Hecke gruplarından yararlanarak şu tanımı verelim.

2.3.1 Tanım : Hecke gruplarına, $r_1(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruplara *genişletilmiş Hecke grupları* denir.

Genişletilmiş Hecke grupları $\overline{H}(\lambda_q)$ veya $\overline{H}_{2,q}$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş Hecke gruplarının aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım.

$$\lambda = \lambda_q = 2cos\frac{\pi}{q} \text{ },1 \leq \lambda < 2$$

olmak üzere,

$$r_1(z) = \frac{1}{\bar{z}} \text{ }, r_2(z) = -\bar{z} \text{ }, r_3(z) = \frac{-\bar{z}}{\lambda\bar{z} + 1}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu

$$\overline{H}_{2,q} = \langle r_1, r_2, r_3 | {r_1}^2 = {r_2}^2 = {r_3}^2 = (r_1 r_2)^2 = (r_3 r_1)^q = I \rangle$$

yazılabilir [18,31]. Burada $r = r_1$, $t = r_1 r_2 = r_2 r_1$, $s = r_3 r_1$ olarak alınırsa $\overline{H}_{2,q}$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşu,

$$\overline{H}_{2,q} = \langle t, s, r | t^2 = r^2 = s^q = (tr)^2 = (rs)^2 = I \rangle$$

olarak bulunur.

2.3.2 Teorem: $\overline{H}_{2,q}$ genişletilmiş Hecke grupları, D_2 ile D_q nun C_2 ile birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.

İspat : Teoremde yer alan dihedral grupların sunuşları,

$$G_1 = \langle t, r | t^2 = r^2 = (tr)^2 = I \rangle \cong D_2$$

ve

$$G_2 = \langle s, r | s^q = r^2 = (rs)^2 = I \rangle \cong D_q$$

şeklindedir.

$A = \langle r \rangle \leq G_1$ alt grubu için,

$$\phi: A \to G_2$$
$$r \mapsto r$$

birim dönüşümü yardımıyla

$$\overline{H}_{2,q} \cong \mathrm{G}_1 *_{\mathrm{C}_2} \mathrm{G}_2 \quad \text{ve}$$

$$\overline{H}_{2,q} = \langle t, s, r | t^2 = s^q = r^2 = (tr)^2 = (rs)^2 = I \rangle$$

bulunur.

Özel olarak $q = 3$ değeri için elde edilen $\overline{H}_{2,3}$ genişletilmiş modüler grup ve bazı normal alt grupları [16,30,33] nolu kaynaklarda incelenmiştir.

2.4 Kamutatör Alt Grupları

Bu bölümde kamutatör ve kamutatör alt grup kavramları tanıtılacaktır. Ayrıntılı bilgiler [34,35] nolu kaynaklarda bulunabilir.

2.4.1 Tanım: G bir grup olmak üzere $x_1, x_2 \in G$ elemanları için $[x_1, x_2] = x_1^{-1}x_2^{-1}x_1x_2$ eşitliğine x_1 ile x_2 elemanlarının kamutatörü denir. Bunu n elemana genellersek

$$[x_1, x_2, \dots, x_n] = \big[[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n\big]$$

olarak bulunur.

G grubunun boş kümeden farklı X_1 ve X_2 alt gruplarını alalım. X_1 ve X_2 alt gruplarının kamutatör alt grubu,

$$[X_1, X_2] = \langle [x_1, x_2] | x_1 \in X_1, x_2 \in X_2 \rangle$$

olarak tanımlanır. $G' = G^{(1)}$ ile gösterilen birinci kamutatör alt grubu ise

$$G' = [G, G] = \langle [A, B] | A, B \in G \rangle$$

biçiminde tanımlanır. G grubunun kamutatör alt grupları arasında,

$$G = G^{(0)} > G^{(1)} > G^{(2)} > \cdots$$

şeklinde bir ilişki vardır. Herhengi $G^{(n)}$ kamutatör alt grubu,

$$G^{(n)} = \big\langle [A, B] \big| A, B \in G^{(n-1)} \big\rangle$$

biçiminde tanımlanır.

Ayrıca kamutatör alt gruplar tamamen değişmez özelliğe de sahiptirler [35]. Kamutatör alt grupların tanımı ve bu özellikten dolayı normal alt grup oldukları açıktır. Kamutatör alt gruplar için çok önemli olan şu iki teoremi verelim:

2.4.2 Teorem: G grubunun G' ile bölüm grubu G/G' değişmelidir [34].

2.4.3 Teorem : N, G grubunun normal alt grubu ve G/N değişmeli olsun. O halde G/N bölüm grubu G/G' nün bir alt grubudur [34].

2.4.4 Sonuç : G/G' bölüm grubu G grubunun en geniş değişmeli bölüm grubudur.

2.4.5 Sonuç : N , G grubunun normal alt grubu ve G/N değişmeli ise G', N grubunun alt grubudur.

2.5 Grup Sunuşları

Bu bölümde grup sunuşu tanımlanarak bazı grupların grup sunuşları verilmiştir.

2.5.1 Tanım: X bir küme (üreteç sembollerinin kümesi) ve X kümesi üzerinde devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan R* (bağıntı kelimelerinin kümesi) olsun. Bu durumda,

$$P = \langle X | R^* \rangle$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir. X ve R^* kümelerinin her ikisi de sonlu ise P sunuşunun sonlu olduğunu söyleriz .

2.5.2 Tanım: n mertebeli bir eleman tarafından üretilen gruba *n mertebeli devirli grup* denir ve C_n ile gösterilir. C_n grubunun sunuşu,

$$C_n = \langle a | a^n = I \rangle$$

şeklindedir.

2.5.3 Tanım: Bir düzgün n-genin simetrilerinden oluşan gruba n-inci *dihedral grup* denir ve D_n ile gösterilir. D_n grubunun sunuşu;

$$D_n = \langle a, b | a^2 = b^2 = (ab)^n = I \rangle$$

veya

$$D_n = \langle a, b | a^2 = b^n = (ab)^2 = I \rangle$$

veya

$$D_n = \langle a, b | a^n = b^2 = (ab)^2 = I \rangle$$

şeklindedir.

2.5.4 Tanım: n elemanlı bir kümenin bütün permütasyonlarının kümesi, fonksiyonların bileşke işlemine göre bir grup oluşturur. Bu gruba *simetrik grup* denir ve S_n ile gösterilir. Çift permütasyonların kümesi de bu grubun bir alt grubunu oluşturur. Bu gruba *alterne grup* denir ve A_n ile gösterilir.

2.5.1 Serbest Gruplar

Bu bölümde, serbest gruplar tanımlanarak, serbest gruplarla ilgili bazı temel teoremler verilmiştir.

2.5.1.1 Tanım : X bir F grubunun alt kümesi ve G herhangi bir grup olmak üzere,

$$\Phi_0 : X \to G$$

şeklinde herhangi bir dönüşüm için,

$$\Phi : F \to G$$

Φ_0 dönüşümünün uzantısı olan tek bir Φ homomorfizması varsa F grubuna X üzerinde *serbesttir* denir [36].

2.5.1.2 Tanım : $F(X)$ ile gösterilen serbest gruplar için X kümesine $F(X)$ serbest grubunun *tabanı* denir. X kümesinin eleman sayısına $F(X)$ grubunun *rankı* denir ve $|X|$ ile gösterilir.

2.5.1.3 Teorem : X ve Y kümeleri üzerinde tanımlanan serbest gruplar için $|X| = |Y| \Leftrightarrow F(X) \cong F(Y)$ dir [36].

2.5.1.4 Teorem : X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $P = \langle X | \ \rangle$ şeklindedir [36].

2.5.1.5 Teorem : Bir t elemanı tarafından üretilen sonsuz mertebeli devirli grubun sunuşu $P = \langle t | \ \rangle$ şeklindedir.

İspat : Sonsuz mertebeli devirli grupta, sonlu mertebeli bir eleman olmadığından $R^* = \emptyset$ olur.

2.5.1.6 Sonuç: Sonsuz mertebeli devirli gruplar, serbest gruptur.

İspat : 2.5.1.5 Teoremden sonuç görülür.

2.5.1.7 Sonuç : $(\mathbb{Z}, +)$ grubu, rankı 1 olan serbest gruptur.

2.5.1.8 Teorem (Nielsen-Schreier) : Bir serbest grubun her alt grubu da serbest gruptur [36].

2.5.2 Direkt Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup ve G bu iki grubun direkt çarpım grubu olmak üzere G grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.2.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X | R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y | R_2^* \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. Bu iki grubun direkt çarpım grubu olan G nin sunuşu

$$P_G = \langle X, Y | R_1^*, R_2^*, R^* \rangle$$

şeklinde tanımlanır. Burada

$$R^* = \{xyx^{-1}y^{-1} : x \in X, y \in Y\} \text{ dir } [36].$$

2.5.3 Serbest Çarpım Grubu

A ve B herhangi iki grup olmak üzere bu iki grubun serbest çarpım grubunun sunuşu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

2.5.3.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X | R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y | R_2^* \rangle$$

sunuşlarına sahip olsun. Bu durumda A ve B gruplarının serbest çarpımı olan $G = A * B$ grubunun sunuşu,

$$P_G = \langle X, Y | R_1^*, R_2^* \rangle$$

şeklinde tanımlanır [36].

Verilen iki grup için serbest çarpımın sunuşunu verdik. Serbest çarpım grubu keyfi sayıdaki gruplar için de tanımlanabilir :

Eğer $A_\alpha = \langle ür. A_\alpha | bağ. A_\alpha \rangle$ gruplarının bir koleksiyonu ise bu grupların $G = * A_\alpha$ serbest çarpımı, üreteçleri A_α ların üreteçlerinin ayrık birleşimlerinden ve bağıntıları da A_α ların bağıntılarının ayrık birleşimlerinden oluşan gruptur.

2.5.4 Birleştirilmiş Serbest Çarpım

A ve B herhangi iki grup olsun. $C \leq A$ alt grubu verilsin. $\phi: C \rightarrow B$ birebir homomorfizması için A ve B gruplarının C alt grubu ile tanımladıkları birleştirilmiş serbest çarpım grubu ile ilgili ayrıntılı bilgilere [36,37] kaynaklarından ulaşılabilir. Bu grup $\mathrm{G} = \mathrm{A} *_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ ile gösterilir ve sunuşu aşağıdaki gibidir.

2.5.4.1 Teorem : A ve B grupları sırasıyla

$$P_A = \langle X | R_1^* \rangle \text{ ve } P_B = \langle Y | R_2^* \rangle$$

sunuşlarıyla verilsin. $C \leq A$ alt grubunun üreteç kümesi Z olmak üzere $\mathrm{G} = \mathrm{A} *_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ grubunun sunuşu

$$P_G = \langle X, Y | R_1^*, R_2^*, \{\phi(z) z^{-1} | z \in Z\} \rangle$$

şeklinde tanımlanır [36].

2.5.4.2 Örnek: $A = \langle a | a^4 = I \rangle$ ve $B = \langle b | b^6 = I \rangle$ devirli gruplarını alalım. A ile B gruplarının serbest çarpımı

$$A * B = \langle a, b | a^4 = b^6 = I \rangle$$

biçimindedir. $C = \langle a^2 \rangle$ olmak üzere A nın alt grubudur.

$$\phi: C \rightarrow B$$
$$a^2 \mapsto b^3$$

birebir homomorfizması yardımıyla $\mathrm{A} *_{\mathrm{C}} \mathrm{B}$ grubunun sunuşu,

$$\mathrm{A} *_{\mathrm{C}} \mathrm{B} = \langle a, b | a^4 = b^6 = \phi(a^2)(a^2)^{-1} = I \rangle$$

bulunur. Bu sunuşun kısaltılmış hali

$$\mathrm{A} *_{\mathrm{C}} \mathrm{B} = \langle a, b | a^4 = I, a^2 = b^3 \rangle$$

şeklindedir.

2.6 Reidemeister-Schreier Metodu

Bu metod çalışmamızda çok önemli bir yer tutar. Çalıştığımız grupların sonlu indeksli normal alt gruplarının üreteçlerini bularak, grup sunuşlarını bu metod ile belirleyeceğiz.

G, $\{g_i\}$ üreteçleri ile üretilen bir grup ve H, G grubunun sonlu indeksli bir normal alt grubu olsun. Metod önce H için bir Schreier transversali seçmekle ve sonra da bu transversalin, üreteçlerin ve koset gösterimlerinin elemanlarının sıralı çarpımlarının alınmasıyla, aşağıdaki gibi uygulanır.

Bir Σ Schreier transversali aşağıdaki koşulları sağlayan koset gösterimlerinin bir kümesinden oluşur:

(i) $I \in \Sigma$

(ii) Σ sağ sadeleştirme altında kapalıdır. Yani eğer $g_{i_1}.g_{i_2}\ldots g_{i_r} \in \Sigma$ ise $g_{i_1}.g_{i_2}\ldots g_{i_{r-1}}$ elemanı da Σ kümesinde olmalı.

Σ, H için bir Schreier transversali olsun. H nin bir Schreier üreteci aşağıdaki formda olacaktır [2].

(Σ nın bir elemanı)x(G grubunun bir üreteci)x(önceki çarpımın koset gösterimi)$^{-1}$

2.6.1 Örnek: $PSL(2,\mathbb{Z}) = H_{2,3}$ modüler grubun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{2,3}$ grubunun sunuşu

$$H_{2,3} = \langle t, s \mid t^2 = s^3 = I \rangle$$

biçimindedir. $H'_{2,3}$ kamutatör alt grubu $H_{2,3}$ grubunun normal alt grubudur ve bölüm grubu;

$$H_{2,3}/H'_{2,3} = \langle t, s \mid t^2 = s^3 = I, ts = st \rangle \cong C_2 \times C_3$$

sunuşuna sahiptir. $H'_{2,3}$ kamutatör alt grubunun üreteçlerini bulmak için bir Schreier transversali olarak

$$\Sigma = \{I, t, s, s^2, ts, ts^2\}$$

kümesini seçelim. Burada mümkün olan bütün çarpımlar aşağıdaki gibidir.

$$I.t.(t)^{-1} = I, \qquad I.s.(s)^{-1} = I,$$
$$t.t.(I)^{-1} = I, \qquad t.s.(ts)^{-1} = I,$$
$$s.t.(ts)^{-1} = sts^{-1}t^{-1}, \qquad s.s.(s^2)^{-1} = I,$$
$$s^2.t.(ts^2)^{-1} = s^2t(s^2)^{-1}t^{-1}, \qquad s^2.s.(I)^{-1} = I,$$
$$ts.t.(s)^{-1} = tsts^{-1}, \qquad ts.s.(ts^2)^{-1} = I,$$
$$ts^2.t.(s^2)^{-1} = ts^2t(s^2)^{-1}, \qquad ts^2.s.(t)^{-1} = I.$$

Ayrıca $(sts^{-1}t^{-1})^{-1} = tsts^{-1}$ ve $(s^2t(s^2)^{-1}t^{-1})^{-1} = ts^2t(s^2)^{-1}$ olarak yazılabilir.

Böylece $H'_{2,3}$ kamutatör alt grubun grup sunuşu,

$$H'_{2,3} = \langle tsts^2, ts^2ts | \quad \rangle \cong \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$$

olarak bulunur.

3. GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI

Bu bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının tanımı ile bu grupların sunuşları verilmiştir. Reidemeister-Schreier metodu kullanılarak, birinci kamutatör alt gruplarının grup sunuşları bulunmuştur. $H_{2,q}$ Hecke gruplarının kamutatör alt gruplarının grup yapıları [2] de verilmiştir. 3.2.1 Teoremde, $H_{p,q}$ genel Hecke gruplarının birinci kamutatör alt gruplarının grup sunuşları elde edilmiştir. Bu grup sunuşunda $p = 2$ yazıldığında [2] de elde edilen kamutatör alt grubun, grup sunuşu ile çakıştığı görülmüştür. Bu bölümdeki 3.2.1 Teorem ilk defa verilmiştir. Ayrıca bu bölümdeki bazı sonuçlar [38] nolu kaynakta yer almıştır.

3.1 Genel Hecke Grupları

Bu alt bölümde Lehner'in [17] nolu kaynakta tanımladığı genel Hecke grupları tanıtılmış ve grup yapısı verilmiştir.

3.1.1 Tanım: $v(z) = z + \lambda_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{q}}$ ve $x(z) = \frac{-1}{z-\lambda_{\mathrm{p}}}$ kesirli lineer dönüşümlerini alalım. $y = xv$ olmak üzere $H_{p,q}$ genel Hecke grubu aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$H_{p,q} = \langle x, y \mid x^p = y^q = I \rangle \cong C_p * C_q\,, \qquad 2 \le p \le q \le \infty, p + q > 4$$

şeklinde tanımlanan gruplara genel Hecke Grupları denir [17,24].

Şimdi bu grupla ilgili birkaç teorem verelim.

3.1.2 Teorem [17]: $H_{p,p} = \langle x, y \mid x^p = y^p = I \rangle$ genel Hecke grupları $H_p = H_{2,p}$ grupları tarafından içerilir.

3.1.3 Teorem [17]: $H_{p,q}$ genel Hecke grupları için temel bölge

$$F(\, H_{p,q}) = \{x + iy \in U : |x| < (\lambda_{\mathrm{p}} + \lambda_{\mathrm{q}})/2\,, \qquad |z \mp (\lambda_{\mathrm{p}}/2)| = 1\}$$

şeklindedir.

3.2 Genel Hecke Gruplarının Kamutatör Alt Grupları

Bu bölümde genel Hecke gruplarının birinci kamutatör alt grupları, Reidemeister-Schreier yöntemi kullanılarak bulunmuştur. Bu grupların özel hali olan $H_{2,q}$ Hecke gruplarının kamutatör alt grupları, Cangül tarafından [2] de çalışılmıştır. Bu çalışmada $H_{p,q}^{'}$ kamutatör alt gruplarında $p = 2$ yazılarak [2] de geçen $H_{2,q}^{'}$ ile çakıştığı gösterilmiştir. Bu alt bölümde $H_{p,q}$ genel Hecke grupları için $2 \leq p \leq q < \infty$ durumları ele alınmıştır.

3.2.1 Teorem: $H_{p,q} = \langle x, y | x^p = y^q = I \rangle \cong C_p * C_q$ genel Hecke gruplarının birinci kamutatör alt grubu; $(p-1).(q-1)$ üretece sahiptir ve grup sunuşu

$H'_{p,q} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}$, $xy^2xy^{-2}x^{-2}$, ... , $xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}$, $x^2yxy^{-1}x^{-3}$, $x^2y^2xy^{-2}x^{-3}$, ... , $x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}$, ... , $x^{p-2}yxy^{-1}x^{-(p-1)}$, $x^{p-2}y^2xy^{-2}x^{-(p-1)}$, ... , $x^{p-2}y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-(p-1)}$, $x^{p-1}yxy^{-1}$, $x^{p-1}y^2xy^{-2}$, ..., $x^{p-1}y^{q-1}xy^{-(q-1)} | \ \rangle$

şeklindedir.

İspat: Öncelikle $H_{p,q}/H'_{p,q}$ grubunu belirleyelim.

$$H_{p,q}/H_{p,q}^{'} = \langle x, y | x^p = y^q = I, xy = yx \rangle \cong C_p \times C_q$$

kamutatör alt grubunun üreteçlerini bulmada kullanacağımız Reidemeister-Schreier metodu için

$$\Sigma = \{I, x, x^2, x^3, \dots, x^{p-1}, y, y^2, \dots, y^{q-1}, xy, xy^2, \dots, xy^{q-1}, x^2y, x^2y^2, \dots, x^2y^{q-1}, x^3y, x^3y^2, \dots, x^3y^{q-1}, \dots, x^{p-1}y, x^{p-1}y^2, \dots, x^{p-1}y^{q-1}\}$$

transversalini seçelim. Buradan

$$
\begin{array}{cc}
I.x.(x)^{-1} = I, & I.y.(y)^{-1} = I, \\
x.x.(x^2)^{-1} = I, & x.y.(xy)^{-1} = I, \\
x^2.x.(x^3)^{-1} = I, & x^2.y.(x^2y)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
x^{p-1}.x.(I)^{-1} = I, & x^{p-1}.y.(x^{p-1}y)^{-1} = I, \\
y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, & y.y.(y^2)^{-1} = I, \\
y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, & y^2.y.(y^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots
\end{array}
$$

$$y^{q-1}.x.(xy^{q-1})^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}, \qquad y^{q-1}.y.(I)^{-1} = I,$$
$$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}, \qquad xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$$
$$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}, \qquad xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$xy^{q-1}.x.(x^2y^{q-1})^{-1} = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}, \qquad xy^{q-1}.y.(x)^{-1} = I,$$
$$x^2y.x.(x^3y)^{-1} = x^2yxy^{-1}x^{-3}, \qquad x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I,$$
$$x^2y^2.x.(x^3y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, \qquad x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^2y^{q-1}.x.(x^3y^{q-1})^{-1} = x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}, \qquad x^2y^{q-1}.y.(x^2)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^{p-2}y.x.(x^{p-1}y)^{-1} = x^{p-2}yxy^{-1}x^{-(p-1)}, \qquad x^{p-2}y.y.(x^{p-2}y^2)^{-1} = I,$$
$$x^{p-2}y^2.x.(x^{p-1}y^2)^{-1} = x^{p-2}y^2xy^{-2}x^{-(p-1)}, \qquad x^{p-2}y^2.y.(x^{p-2}y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^{p-2}y^{q-1}.x.(x^{p-1}y^{q-1})^{-1} = x^{p-2}y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-(p-1)}, \qquad x^{p-2}y^{q-1}.y.(x^{p-2})^{-1} = I,$$
$$x^{p-1}y.x.(y)^{-1} = x^{p-1}yxy^{-1}, \qquad x^{p-1}y.y.(x^{p-1}y^2)^{-1} = I,$$
$$x^{p-1}y^2.x.(y^2)^{-1} = x^{p-1}y^2xy^{-2}, \qquad x^{p-1}y^2.y.(x^{p-1}y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^{p-1}y^{q-1}.x.(y^{q-1})^{-1} = x^{p-1}y^{q-1}xy^{-(q-1)}, \qquad x^{p-1}y^{q-1}.y.(x^{p-1})^{-1} = I.$$

Yukarıda elde ettiğimiz eşitlikleri aşağıdaki gibi daha sade hale getirebiliriz.

$$\left(xyxy^{-1}x^{-2}.x^2yxy^{-1}x^{-3}\dots x^{p-2}yxy^{-1}x^{-(p-1)}.x^{p-1}yxy^{-1}\right)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$$
$$\left(xy^2xy^{-2}x^{-2}.x^2y^2xy^{-2}x^{-3}\dots x^{p-2}y^2xy^{-2}x^{-(p-1)}.x^{p-1}y^2xy^{-2}\right)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1},$$
$$\vdots$$
$$\left(xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}.x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}\dots x^{p-2}y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-(p-1)}.x^{p-1}y^{q-1}xy^{-(q-1)}\right)^{-1}$$
$$= y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}$$

Buradan $H'_{p,q}$ kamutatör alt grubunun üreteçleri;

$xyxy^{-1}x^{-2}$, $xy^2xy^{-2}x^{-2}$, ... , $xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}$, $x^2yxy^{-1}x^{-3}$, $x^2y^2xy^{-2}x^{-3}$, … , $x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}$, … , $x^{p-2}yxy^{-1}x^{-(p-1)}$, $x^{p-2}y^2xy^{-2}x^{-(p-1)}$, …, $x^{p-2}y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-(p-1)}$, $x^{p-1}yxy^{-1}$, $x^{p-1}y^2xy^{-2}$, … , $x^{p-1}y^{q-1}xy^{-(q-1)}$ olmak üzere $(p-1).(q-1)$ tanedir. Bu üreteçlerden yararlanarak $H'_{p,q}$ kamutatör alt grubunun sunuşu

$H'_{p,q} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}\ ,\ xy^2xy^{-2}x^{-2}\ ,\ \ldots\ ,\ xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}\ ,\ x^2yxy^{-1}x^{-3}\ ,\ x^2y^2xy^{-2}x^{-3}\ ,\ \ldots\ ,\ x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}\ ,\ \ldots\ ,\ x^{p-2}yxy^{-1}x^{-(p-1)}\ ,\ x^{p-2}y^2xy^{-2}x^{-(p-1)},\ \ldots\ ,\ x^{p-2}y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-(p-1)},\ x^{p-1}yxy^{-1}, x^{p-1}y^2xy^{-2}, \ldots, x^{p-1}y^{q-1}xy^{-(q-1)} |\ \ \rangle$

olarak bulunur.

Şimdi de $H_{2,3}$, $H_{2,4}$ ve $H_{2,5}$ gruplarının birinci kamutatör alt gruplarını örnek olarak verelim.

3.2.2 Örnek: $H_{2,3}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{2,3}$ grubunun sunuşu $H_{2,3} = \langle x, y | x^2 = y^3 = I \rangle$ şeklindedir.

$$H_{2,3}/H'_{2,3} = \langle x, y | x^2 = y^3 = I, xy = yx \rangle \cong C_2 \times C_3$$

$\Sigma = \{I, x, y, y^2, xy, xy^2\}$,

$I.x.(x)^{-1} = I,$	$I.y.(y)^{-1} = I,$
$x.x.(I)^{-1} = I,$	$x.y.(xy)^{-1} = I,$
$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$	$y.y.(y^2)^{-1} = I,$
$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1},$	$y^2.y.(I)^{-1} = I,$
$xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1},$	$xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$
$xy^2.x.(y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2},$	$xy^2.y.(x)^{-1} = I.$

Burada, $(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = xyxy^{-1}$ ve

$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = xy^2xy^{-2}$ dir. Böylece grup sunuşu

$$H'_{2,3} = \langle xyxy^{-1}, xy^2xy^{-2} |\ \ \rangle$$

biçimindedir. Üreteç sayısı

$(p-1).(q-1)$, $p = 2$ ve $q = 3$ için $(2-1).(3-1) = 2$ dir.

3.2.3 Örnek: $H_{2,4}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{2,4} = \langle x, y | x^2 = y^4 = I \rangle$ için $H_{2,4}/H'_{2,4}$ bölüm grubu

$$H_{2,4}/H'_{2,4} = \langle x, y | x^2 = y^4 = I, xy = yx \rangle \cong C_2 \times C_4$$

sunuşuna sahiptir.

$\Sigma = \{I, x, y, y^2, y^3, xy, xy^2, xy^3\}$,

$$I.x.(x)^{-1} = I, \qquad I.y.(y)^{-1} = I,$$
$$x.x.(I)^{-1} = I, \qquad x.y.(xy)^{-1} = I,$$
$$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, \qquad y.y.(y^2)^{-1} = I,$$
$$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, \qquad y^2.y.(y^3)^{-1} = I,$$
$$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}, \qquad y^3.y.(I)^{-1} = I,$$
$$xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1}, \qquad xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$$
$$xy^2.x.(y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}, \qquad xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$$
$$xy^3.x.(y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}, \qquad xy^3.y.(x)^{-1} = I.$$

Burada $(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = xyxy^{-1}$,
$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = xy^2xy^{-2}$,
$(y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-1}y^{-3} = xy^3xy^{-3}$ olduğu görülür. O halde kamutatör alt grubun sunuşu

$$H_{2,4}^{'} = \langle xyxy^{-1}, xy^2xy^{-2}, xy^3xy^{-3} | \quad \rangle$$

biçimindedir. Üreteç sayısı

$(p-1).(q-1)$, $p=2$ ve $q=4$ için $(2-1).(4-1)=3$ tür.

3.2.4 Örnek: $H_{2,5}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{2,5}/H_{2,5}^{'}$ bölüm grubunun sunuşu şu şekildedir.

$$H_{2,5}/H_{2,5}^{'} = \langle x, y | x^2 = y^5 = I, xy = yx \rangle \cong C_2 \times C_5$$

$\Sigma = \{I, x, y, y^2, y^3, y^4, xy, xy^2, xy^3, xy^4\}$,

$$I.x.(x)^{-1} = I, \qquad I.y.(y)^{-1} = I,$$
$$x.x.(I)^{-1} = I, \qquad x.y.(xy)^{-1} = I,$$
$$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, \qquad y.y.(y^2)^{-1} = I,$$
$$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, \qquad y^2.y.(y^3)^{-1} = I,$$
$$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}, \qquad y^3.y.(y^4)^{-1} = I,$$
$$y^4.x.(xy^4)^{-1} = y^4xy^{-4}x^{-1}, \qquad y^4.y.(I)^{-1} = I,$$
$$xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1}, \qquad xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$$
$$xy^2.x.(y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}, \qquad xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$$
$$xy^3.x.(y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}, \qquad xy^3.y.(xy^4)^{-1} = I,$$
$$xy^4.x.(y^4)^{-1} = xy^4xy^{-4}, \qquad xy^4.y.(x)^{-1} = I.$$

Dikkat edilirse $(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = xyxy^{-1}$,
$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = xy^2xy^{-2}$,

$(y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-1}y^{-3} = xy^3xy^{-3}$,
$(y^4xy^{-4}x^{-1})^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4} = xy^4xy^{-4}$ olduğu görülür.
Buradan kamutatör alt grup

$$H'_{2,5} = \langle xyxy^{-1}, xy^2xy^{-2}, xy^3xy^{-3}, xy^4xy^{-4} | \quad \rangle$$

olarak bulunur ve üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$, $p = 2$ ve $q = 5$ için $(2-1).(5-1) = 4$ tür.

[2] nolu kaynakta da yer alan $H'_{2,q}$ kamutatör alt grubunun sunuşunu bulalım.

3.2.5 Örnek: $H_{2,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{2,q} = \langle x, y | x^2 = y^q = I \rangle$ Hecke grubudur.

$$H_{2,q}/H'_{2,q} = \langle x, y | x^2 = y^q = I, xy = yx \rangle \cong C_2 \times C_q$$

şeklindedir.

$\Sigma = \{I, x, y, y^2, \ldots, y^{q-1}, xy, xy^2, \ldots, xy^{q-1}\}$,

$$\begin{array}{cc}
I.x.(x)^{-1} = I, & I.y.(y)^{-1} = I, \\
x.x.(I)^{-1} = I, & x.y.(xy)^{-1} = I, \\
y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, & y.y.(y^2)^{-1} = I, \\
y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, & y^2.y.(y^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
y^{q-1}.x.(xy^{q-1})^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}, & y^{q-1}.y.(I)^{-1} = I, \\
xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1}, & xy.y.(xy^2)^{-1} = I, \\
xy^2.x.(y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}, & xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
xy^{q-1}.x.(y^{q-1})^{-1} = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}, & xy^{q-1}.y.(x)^{-1} = I.
\end{array}$$

Burada $(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1} = xyxy^{-1}$,
$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2} = xy^2xy^{-2}$,

$$\vdots$$

$$\left(y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}\right)^{-1} = xy^{q-1}x^{-1}y^{-(q-1)} = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}$$

olarak yazılabilir.

Bu durumda $H'_{2,q}$ grubu

$$H'_{2,q} = \langle xyxy^{-1}, xy^2xy^{-2}, \ldots, xy^{q-1}xy^{-(q-1)} | \quad \rangle$$

şeklindedir. Üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$ genel formülünde, $p=2$ için $(2-1).(q-1)=q-1$ dir.

3.2.6 Uyarı: 3.2.5 Örnekte $p=2$ için bulunan kamutatör alt grubu, [2] de çalışılmıştır ve $H'_{p,q}$ kamutatör alt gruplarında $p=2$ yazıldığında aynı sonuçların elde edildiği görülür.

Şimdi ise $H_{3,3}$, $H_{3,4}$, $H_{3,5}$ ve $H_{3,q}$ gruplarının birinci kamutatör alt gruplarını elde edelim.

3.2.7 Örnek: $H_{3,3}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$H_{3,3}=\langle x,y|x^3=y^3=I\rangle \text{ ve}$$

$$H_{3,3}/H'_{3,3}=\langle x,y|x^3=y^3=I, xy=yx\rangle \cong C_3\times C_3$$

tür.

$\Sigma=\{I,x,x^2,y,y^2,xy,xy^2,x^2y,x^2y^2\}$,

$I.x.(x)^{-1}=I,$	$I.y.(y)^{-1}=I,$
$x.x.(x^2)^{-1}=I,$	$x.y.(xy)^{-1}=I,$
$x^2.x.(I)^{-1}=I,$	$x^2.y.(x^2y)^{-1}=I,$
$y.x.(xy)^{-1}=yxy^{-1}x^{-1},$	$y.y.(y^2)^{-1}=I,$
$y^2.x.(xy^2)^{-1}=y^2xy^{-2}x^{-1},$	$y^2.y.(I)^{-1}=I,$
$xy.x.(x^2y)^{-1}=xyxy^{-1}x^{-2},$	$xy.y.(xy^2)^{-1}=I,$
$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1}=xy^2xy^{-2}x^{-2},$	$xy^2.y.(x)^{-1}=I,$
$x^2y.x.(y)^{-1}=x^2yxy^{-1},$	$x^2y.y.(x^2y^2)^{-1}=I,$
$x^2y^2.x.(y^2)^{-1}=x^2y^2xy^{-2},$	$x^2y^2.y.(x^2)^{-1}=I.$

Burada,

$(x^2yxy^{-1}.yxy^{-1}x^{-1})^{-1}=(x^2yx^2y^{-1}x^{-1})^{-1}=xyx^{-2}y^{-1}x^{-2}=xyxy^{-1}x^{-2}$,

$(x^2y^2xy^{-2}.y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1}=(x^2y^2x^2y^{-2}x^{-1})^{-1}=xy^2x^{-2}y^{-2}x^{-2}=xy^2xy^{-2}x^{-2}$,

$(yxy^{-1}x^{-1})^{-1}=xyx^{-1}y^{-1}$,

$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1}=xy^2x^{-1}y^{-2}$.

olarak yazılabilir. Böylece birinci kamutatör alt grubun sunuşu $H'_{3,3}=\langle xyx^{-1}y^{-1}, xy^2x^{-1}y^{-2}, x^2yx^{-2}y^{-1}, x^2y^2x^{-2}y^{-2}| \ \rangle$ olarak bulunur. Üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$, $p=3$ ve $q=3$ için $(3-1).(3-1)=4$ tür.

3.2.8 Örnek: $H_{3,4}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$H_{3,4} = \langle x, y | x^3 = y^4 = I \rangle \text{ ve}$$

$$H_{3,4}/H_{3,4}' = \langle x, y | x^3 = y^4 = I, xy = yx \rangle \cong C_3 \times C_4$$

biçimindedir.

$\Sigma = \{I, x, x^2, y, y^2, y^3, xy, xy^2, xy^3, x^2y, x^2y^2, x^2y^3\}$,

$I.x.(x)^{-1} = I$,	$I.y.(y)^{-1} = I$,
$x.x.(x^2)^{-1} = I$,	$x.y.(xy)^{-1} = I$,
$x^2.x.(I)^{-1} = I$,	$x^2.y.(x^2y)^{-1} = I$,
$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$,	$y.y.(y^2)^{-1} = I$,
$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}$,	$y^2.y.(y^3)^{-1} = I$,
$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}$,	$y^3.y.(I)^{-1} = I$,
$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}$,	$xy.y.(xy^2)^{-1} = I$,
$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,	$xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I$,
$xy^3.x.(x^2y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}x^{-2}$,	$xy^3.y.(x)^{-1} = I$,
$x^2y.x.(y)^{-1} = x^2yxy^{-1}$,	$x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I$,
$x^2y^2.x.(y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}$,	$x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I$,
$x^2y^3.x.(y^3)^{-1} = x^2y^3xy^{-3}$,	$x^2y^3.y.(x^2)^{-1} = I$.

Burada,

$(x^2yxy^{-1}.yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = (x^2yx^2y^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-2}y^{-1}x^{-2} = xyxy^{-1}x^{-2}$,

$(x^2y^2xy^{-2}.y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = (x^2y^2x^2y^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-2}y^{-2}x^{-2} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,

$(x^2y^3xy^{-3}.y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = (x^2y^3x^2y^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-2}y^{-3}x^{-2} = xy^3xy^{-3}x^{-2}$,

$(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}$,

$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2}$,

$(y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-1}y^{-3}$

yazılırsa kamutatör alt grup

$H_{3,4}' = \langle xyx^{-1}y^{-1}, xy^2x^{-1}y^{-2}, xy^3x^{-1}y^{-3}, x^2yx^{-2}y^{-1}, x^2y^2x^{-2}y^{-2}, x^2y^3xy^{-3} | \ \rangle$

şeklinde bulunur. Üreteç sayısı

$(p-1).(q-1)$, $p = 3$ ve $q = 4$ için $(3-1).(4-1) = 6$ dır.

3.2.9 Örnek: $H_{3,5}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$H_{3,5} = \langle x, y | x^3 = y^5 = I \rangle \text{ ve}$$

$$H_{3,5}/H_{3,5}' = \langle x, y | x^3 = y^5 = I, xy = yx \rangle \cong C_3 \times C_5$$

biçimindedir.

$\Sigma = \{I, x, x^2, y, y^2, y^3, y^4, xy, xy^2, xy^3, xy^4, x^2y, x^2y^2, x^2y^3, x^2y^4\}$,

$I.x.(x)^{-1} = I$,	$I.y.(y)^{-1} = I$,
$x.x.(x^2)^{-1} = I$,	$x.y.(xy)^{-1} = I$,
$x^2.x.(I)^{-1} = I$,	$x^2.y.(x^2y)^{-1} = I$,
$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$,	$y.y.(y^2)^{-1} = I$,
$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}$,	$y^2.y.(y^3)^{-1} = I$,
$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}$,	$y^3.y.(y^4)^{-1} = I$,
$y^4.x.(xy^4)^{-1} = y^4xy^{-4}x^{-1}$,	$y^4.y.(I)^{-1} = I$,
$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}$,	$xy.y.(xy^2)^{-1} = I$,
$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,	$xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I$,
$xy^3.x.(x^2y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}x^{-2}$,	$xy^3.y.(xy^4)^{-1} = I$,
$xy^4.x.(x^2y^4)^{-1} = xy^4xy^{-4}x^{-2}$,	$xy^4.y.(x)^{-1} = I$,
$x^2y.x.(y)^{-1} = x^2yxy^{-1}$,	$x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I$,
$x^2y^2.x.(y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}$,	$x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I$,
$x^2y^3.x.(y^3)^{-1} = x^2y^3xy^{-3}$,	$x^2y^3.y.(x^2y^4)^{-1} = I$,
$x^2y^4.x.(y^4)^{-1} = x^2y^4xy^{-4}$,	$x^2y^4.y.(x^2)^{-1} = I$.

Burada,

$(x^2yxy^{-1}.yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = (x^2yx^2y^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-2}y^{-1}x^{-2} = xyxy^{-1}x^{-2}$,

$(x^2y^2xy^{-2}.y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = (x^2y^2x^2y^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-2}y^{-2}x^{-2} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,

$(x^2y^3xy^{-3}.y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = (x^2y^3x^2y^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-2}y^{-3}x^{-2} = xy^3xy^{-3}x^{-2}$,

$(x^2y^4xy^{-4}.y^4xy^{-4}x^{-1})^{-1} = (x^2y^4x^2y^{-4}x^{-1})^{-1} = xy^4x^{-2}y^{-4}x^{-2} = xy^4xy^{-4}x^{-2}$

yazılabilir. Ayrıca $(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}$

$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2}$,

$(y^3xy^{-3}x^{-1})^{-1} = xy^3x^{-1}y^{-3}$,

$(y^4xy^{-4}x^{-1})^{-1} = xy^4x^{-1}y^{-4}$ tür.

Böylece kamutatör alt grup

$$H'_{3,5} = \langle xyx^{-1}y^{-1}, xy^2x^{-1}y^{-2}, xy^3x^{-1}y^{-3}, xy^4x^{-1}y^{-4}, x^2yxy^{-1}, x^2y^2xy^{-2}, x^2y^3xy^{-3}, x^2y^4xy^{-4} | \ \rangle$$

biçiminde bulunur. Üreteç sayısı

$(p-1).(q-1)$, $p = 3$ ve $q = 5$ için $(3-1).(5-1) = 8$ dir.

3.2.10 Örnek: $H_{3,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{3,q} = \langle x, y | x^3 = y^q = I \rangle$ için $H_{3,q}/H_{3,q}^{'}$ bölüm grubu

$$H_{3,q}/H_{3,q}^{'} = \langle x, y | x^3 = y^q = I, xy = yx \rangle \cong C_3 \times C_q$$

sunuşuna sahiptir.

$\Sigma = \{I, x, x^2, y, y^2, \dots, y^{q-1}, xy, xy^2, \dots, xy^{q-1}, x^2y, x^2y^2, \dots, x^2y^{q-1}\}$,

$$\begin{array}{cc}
I.x.(x)^{-1} = I, & I.y.(y)^{-1} = I, \\
x.x.(x^2)^{-1} = I, & x.y.(xy)^{-1} = I, \\
x^2.x.(I)^{-1} = I, & x^2.y.(x^2y)^{-1} = I, \\
y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, & y.y.(y^2)^{-1} = I, \\
y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, & y^2.y.(y^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
y^{q-1}.x.(xy^{q-1})^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}, & y^{q-1}.y.(I)^{-1} = I, \\
xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}, & xy.y.(xy^2)^{-1} = I, \\
xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}, & xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
xy^{q-1}.x.(x^2y^{q-1})^{-1} = xy^{q-1}xy^{-q-1}x^{-2}, & xy^{q-1}.y.(x)^{-1} = I, \\
x^2y.x.(y)^{-1} = x^2yxy^{-1}, & x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I, \\
x^2y^2.x.(y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}, & x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I, \\
\vdots & \vdots \\
x^2y^{q-1}.x.(y^{q-1})^{-1} = x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}, & x^2y^{q-1}.y.(x^2)^{-1} = I.
\end{array}$$

Burada,

$(x^2yxy^{-1}.yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = (x^2yx^2y^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-2}y^{-1}x^{-2} = xyxy^{-1}x^{-2}$,

$(x^2y^2xy^{-2}.y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = (x^2y^2x^2y^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-2}y^{-2}x^{-2} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,

$$\vdots$$

$\left(x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}.y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}\right)^{-1} = \left(x^2y^{q-1}x^2y^{-(q-1)}x^{-1}\right)^{-1}$

$= xy^{q-1}x^{-2}y^{-(q-1)}x^{-2} \quad = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}$,

$(yxy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}y^{-1}$,

$(y^2xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}y^{-2}$,

$$\vdots$$

$\left(y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}\right)^{-1} = xy^{q-1}x^{-1}y^{-(q-1)}$

eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup

$$H'_{3,q} = \langle xyx^{-1}y^{-1}, xy^2x^{-1}y^{-2}, \ldots, xy^{q-1}x^{-1}y^{-(q-1)}, x^2yxy^{-1}, x^2y^2xy^{-2},$$
$$\ldots, x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)} | \ \rangle$$

biçiminde bulunur. Üreteç sayısı
$(p-1).(q-1)$, $p=3$ için $(3-1).(q-1) = 2(q-1)$ dir.

Aşağıda $H'_{4,4}$ ve $H'_{4,q}$ ile $H'_{5,5}$ ve $H'_{5,q}$ gruplarının grup sunuşları elde edilmiştir.

3.2.11 Örnek: $H_{4,4}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.
$H_{4,4} = \langle x, y | x^4 = y^4 = I \rangle$ için $H_{4,4}/H'_{4,4}$ bölüm grubu

$$H_{4,4}/H'_{4,4} = \langle x, y | x^4 = y^4 = I, xy = yx \rangle \cong C_4 \times C_4$$

sunuşuna sahiptir.
$\Sigma = \{I, x, x^2, x^3, y, y^2, y^3, xy, xy^2, xy^3, x^2y, x^2y^2, x^2y^3, x^3y, x^3y^2, x^3y^3\}$,

$I.x.(x)^{-1} = I,$	$I.y.(y)^{-1} = I,$
$x.x.(x^2)^{-1} = I,$	$x.y.(xy)^{-1} = I,$
$x^2.x.(x^3)^{-1} = I,$	$x^2.y.(x^2y)^{-1} = I,$
$x^3.x.(I)^{-1} = I,$	$x^3.y.(x^3y)^{-1} = I,$
$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$	$y.y.(y^2)^{-1} = I,$
$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1},$	$y^2.y.(y^3)^{-1} = I,$
$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1},$	$y^3.y.(I)^{-1} = I,$
$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2},$	$xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$
$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2},$	$xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$
$xy^3.x.(x^2y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}x^{-2},$	$xy^3.y.(x)^{-1} = I,$
$x^2y.x.(x^3y)^{-1} = x^2yxy^{-1}x^{-3},$	$x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I,$
$x^2y^2.x.(x^3y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}x^{-3},$	$x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I,$
$x^2y^3.x.(x^3y^3)^{-1} = x^2y^3xy^{-3}x^{-3},$	$x^2y^3.y.(x^2)^{-1} = I,$
$x^3y.x.(y)^{-1} = x^3yxy^{-1},$	$x^3y.y.(x^3y^2)^{-1} = I,$
$x^3y^2.x.(y^2)^{-1} = x^3y^2xy^{-2},$	$x^3y^2.y.(x^3y^3)^{-1} = I,$
$x^3y^3.x.(y^3)^{-1} = x^3y^3xy^{-3},$	$x^3y^3.y.(x^3)^{-1} = I.$

Dikkat edilirse,
$(xyxy^{-1}x^{-2}.x^2yxy^{-1}x^{-3}.x^3yxy^{-1})^{-1} = (xyx^3y^{-1})^{-1}.$
$= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$

$(xy^2xy^{-2}x^{-2}.x^2y^2xy^{-2}x^{-3}.x^3y^2xy^{-2})^{-1} = (xy^2x^3y^{-2})^{-1}$
$= (xy^2x^{-1}y^{-2})^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}$,
$(xy^3xy^{-3}x^{-2}.x^2y^3xy^{-3}x^{-3}.x^3y^3xy^{-3})^{-1} = (xy^3x^3y^{-3})^{-1}$
$= (xy^3x^{-1}y^{-3})^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}$
olduğu görülür. Burada kamutatör alt grup;
$H'_{4,4} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}, xy^2xy^{-2}x^{-2}, xy^3xy^{-3}x^{-2}, x^2yxy^{-1}x^{-3}$
$, x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, x^2y^3xy^{-3}x^{-3}, x^3yxy^{-1}, x^3y^2xy^{-2}, x^3y^3xy^{-3} | \ \rangle$
şeklinde bulunur. Üreteç sayısı
$(p-1).(q-1)$, $p = 4$ ve $q = 4$ için $(4-1).(4-1) = 9$ dur.

3.2.12 Örnek: $H_{4,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.
$H_{4,q} = \langle x, y | x^4 = y^q = I \rangle$ için $H_{4,q}/H'_{4,q}$ bölüm grubu

$$H_{4,q}/H'_{4,q} = \langle x, y | x^4 = y^q = I, xy = yx \rangle \cong C_4 \times C_q$$

sunuşuna sahiptir.
$\Sigma = \{I, x, x^2, x^3, y, y^2, \dots, y^{q-1}, xy, xy^2, \dots, xy^{q-1}, x^2y, x^2y^2,$
$\dots, x^2y^{q-1}, x^3y, x^3y^2, \dots, x^3y^{q-1}\}$

$I.x.(x)^{-1} = I$,	$I.y.(y)^{-1} = I$,
$x.x.(x^2)^{-1} = I$,	$x.y.(xy)^{-1} = I$,
$x^2.x.(x^3)^{-1} = I$,	$x^2.y.(x^2y)^{-1} = I$,
$x^3.x.(I)^{-1} = I$,	$x^3.y.(x^3y)^{-1} = I$,
$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$,	$y.y.(y^2)^{-1} = I$,
$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}$,	$y^2.y.(y^3)^{-1} = I$,
$\vdots$	$\vdots$
$y^{q-1}.x.(xy^{q-1})^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}$,	$y^{q-1}.y.(I)^{-1} = I$,
$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}$,	$xy.y.(xy^2)^{-1} = I$,
$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}$,	$xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I$,
$\vdots$	$\vdots$
$xy^{q-1}.x.(x^2y^{q-1})^{-1} = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}$,	$xy^{q-1}.y.(x)^{-1} = I$,
$x^2y.x.(x^3y)^{-1} = x^2yxy^{-1}x^{-3}$,	$x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I$,
$x^2y^2.x.(x^3y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}x^{-3}$,	$x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I$,
$\vdots$	$\vdots$
$x^2y^{q-1}.x.(x^3y^{q-1})^{-1} = x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}$,	$x^2y^{q-1}.y.(x^2)^{-1} = I$,

$$x^3y.x.(y)^{-1} = x^3yxy^{-1}, \qquad x^3y.y.(x^3y^2)^{-1} = I,$$
$$x^3y^2.x.(y^2)^{-1} = x^3y^2xy^{-2}, \qquad x^3y^2.y.(x^3y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^3y^{q-1}.x.(y^{q-1})^{-1} = x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)}, \qquad x^3y^{q-1}.y.(x^3)^{-1} = I.$$

Burada

$(xyxy^{-1}x^{-2}.x^2yxy^{-1}x^{-3}.x^3yxy^{-1})^{-1} = (xyx^3y^{-1})^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$,

$(xy^2xy^{-2}x^{-2}.x^2y^2xy^{-2}x^{-3}.x^3y^2xy^{-2})^{-1} = (xy^2x^3y^{-2})^{-1}$

$= (xy^2x^{-1}y^{-2})^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}$,

$\vdots$

$\left(xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}.x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}.x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)}\right)^{-1} = \left(xy^{q-1}x^3y^{-(q-1)}\right)^{-1}$

$= \left(xy^{q-1}x^{-1}y^{-(q-1)}\right)^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}$

eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup

$H'_{4,q} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}, xy^2xy^{-2}x^{-2}, \dots, xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}, x^2yxy^{-1}x^{-3}$

$, x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, \dots, x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}, x^3yxy^{-1}, x^3y^2xy^{-2}, \dots, x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)} \big| \ \rangle$

şeklinde elde edilir.

Üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$, $p = 4$ için $(4-1).(q-1) = 3(q-1)$ dir.

3.2.13 Örnek: $H_{5,5}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{5,5} = \langle x, y | x^5 = y^5 = I \rangle$ grubunun birinci kamutatör alt grubuyla olan bölüm grubu

$$H_{5,5}/H'_{5,5} = \langle x, y | x^5 = y^5 = I, xy = yx \rangle \cong C_5 \times C_5$$

sunuşuna sahiptir.

$\Sigma = \{I, x, x^2, x^3, x^4, y, y^2, y^3, y^4, xy, xy^2, xy^3, xy^4, x^2y, x^2y^2, x^2y^3, x^2y^4, x^3y$

$, x^3y^2, x^3y^3, x^3y^4, x^4y, x^4y^2, x^4y^3, x^4\, y^4\}$

$$I.x.(x)^{-1} = I, \qquad I.y.(y)^{-1} = I,$$
$$x.x.(x^2)^{-1} = I, \qquad x.y.(xy)^{-1} = I,$$
$$x^2.x.(x^3)^{-1} = I, \qquad x^2.y.(x^2y)^{-1} = I,$$
$$x^3.x.(x^4)^{-1} = I, \qquad x^3.y.(x^3y)^{-1} = I,$$
$$x^4.x.(I)^{-1} = I, \qquad x^4.y.(x^4y)^{-1} = I,$$
$$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, \qquad y.y.(y^2)^{-1} = I,$$
$$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, \qquad y^2.y.(y^3)^{-1} = I,$$
$$y^3.x.(xy^3)^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1}, \qquad y^3.y.(y^4)^{-1} = I,$$

$y^4.x.(xy^4)^{-1} = y^4xy^{-4}x^{-1},$ $\qquad$ $y^4.y.(I)^{-1} = I,$

$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2},$ $\qquad$ $xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$

$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2},$ $\qquad$ $xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$

$xy^3.x.(x^2y^3)^{-1} = xy^3xy^{-3}x^{-2},$ $\qquad$ $xy^3.y.(xy^4)^{-1} = I,$

$xy^4.x.(x^2y^4)^{-1} = xy^4xy^{-4}x^{-2},$ $\qquad$ $xy^4.y.(x)^{-1} = I,$

$x^2y.x.(x^3y)^{-1} = x^2yxy^{-1}x^{-3},$ $\qquad$ $x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I,$

$x^2y^2.x.(x^3y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}x^{-3},$ $\qquad$ $x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I,$

$x^2y^3.x.(x^3y^3)^{-1} = x^2y^3xy^{-3}x^{-3},$ $\qquad$ $x^2y^3.y.(x^2y^4)^{-1} = I,$

$x^2y^4.x.(x^3y^4)^{-1} = x^2y^4xy^{-4}x^{-3},$ $\qquad$ $x^2y^4.y.(x^2)^{-1} = I,$

$x^3y.x.(x^4y)^{-1} = x^3yxy^{-1}x^{-4},$ $\qquad$ $x^3y.y.(x^3y^2)^{-1} = I,$

$x^3y^2.x.(x^4y^2)^{-1} = x^3y^2xy^{-2}x^{-4},$ $\qquad$ $x^3y^2.y.(x^3y^3)^{-1} = I,$

$x^3y^3.x.(x^4y^3)^{-1} = x^3y^3xy^{-3}x^{-4},$ $\qquad$ $x^3y^3.y.(x^3y^4)^{-1} = I,$

$x^3y^4.x.(x^4y^4)^{-1} = x^3y^4xy^{-4}x^{-4},$ $\qquad$ $x^3y^4.y.(x^3)^{-1} = I,$

$x^4y.x.(y)^{-1} = x^4yxy^{-1},$ $\qquad$ $x^4y.y.(x^4y^2)^{-1} = I,$

$x^4y^2.x.(y^2)^{-1} = x^4y^2xy^{-2},$ $\qquad$ $x^4y^2.y.(x^4y^3)^{-1} = I,$

$x^4y^3.x.(y^3)^{-1} = x^4y^3xy^{-3},$ $\qquad$ $x^4y^3.y.(x^4y^4)^{-1} = I,$

$x^4y^4.x.(y^4)^{-1} = x^4y^4xy^{-4},$ $\qquad$ $x^4y^4.y.(x^4)^{-1} = I.$

Burada

$(xyxy^{-1}x^{-2}.x^2yxy^{-1}x^{-3}.x^3yxy^{-1}x^{-4}.x^4yxy^{-1})^{-1} = (xyx^4y^{-1})^{-1}$
$= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$

$(xy^2xy^{-2}x^{-2}.x^2y^2xy^{-2}x^{-3}.x^3y^2xy^{-2}x^{-4}.x^4y^2xy^{-2})^{-1} = (xy^2x^4y^{-2})^{-1}$
$= (xy^2x^{-1}y^{-2})^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1},$

$(xy^3xy^{-3}x^{-2}.x^2y^3xy^{-3}x^{-3}.x^3y^3xy^{-3}x^{-4}.x^4y^3xy^{-3})^{-1} = (xy^3x^4y^{-3})^{-1}$
$= (xy^3x^{-1}y^{-3})^{-1} = y^3xy^{-3}x^{-1},$

$(xy^4xy^{-4}x^{-2}.x^2y^4xy^{-4}x^{-3}.x^3y^4xy^{-4}x^{-4}.x^4y^4xy^{-4})^{-1} = (xy^4x^4y^{-4})^{-1}$
$= (xy^4x^{-1}y^{-4})^{-1} = y^4xy^{-4}x^{-1}$

eşitlikleri vardır böylece kamutatör alt grup

$H'_{5,5} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}, xy^2xy^{-2}x^{-2}, xy^3xy^{-3}x^{-2}, xy^4xy^{-4}x^{-2}, x^2yxy^{-1}x^{-3},$
$x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, x^2y^3xy^{-3}x^{-3}, x^2y^4xy^{-4}x^{-3}, x^3yxy^{-1}x^{-4}, x^3y^2xy^{-2}x^{-4},$
$x^3y^3xy^{-3}x^{-4}, x^3y^4xy^{-4}x^{-4},\ x^4yxy^{-1},\ x^4y^2xy^{-2}, x^4y^3xy^{-3}, x^4y^4xy^{-4} \mid\ \rangle$

biçimindedir.

Üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$, $p = 5$ ve $q = 5$ için $(5-1).(5-1) = 16$ dır.

3.2.14 Örnek: $H_{5,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$H_{5,q} = \langle x, y | x^5 = y^q = I \rangle$ grubunun birinci kamutatör alt grubuyla bölüm grubunu oluşturalım. Bu grup

$$H_{5,q}/H'_{5,q} = \langle x, y | x^5 = y^q = I, xy = yx \rangle \cong C_5 \times C_q$$

sunuşuna sahiptir.

$\Sigma = \{I, x, x^2, x^3, x^4, y, y^2, \dots, y^{q-1}, xy, xy^2, \dots, xy^{q-1}, x^2y, x^2y^2, \dots, x^2y^{q-1}, x^3y, x^3y^2, \dots, x^3y^{q-1}, x^4y, x^4y^2, \dots, x^4\, y^{q-1}\}$

$$I.x.(x)^{-1} = I, \qquad I.y.(y)^{-1} = I,$$
$$x.x.(x^2)^{-1} = I, \qquad x.y.(xy)^{-1} = I,$$
$$x^2.x.(x^3)^{-1} = I, \qquad x^2.y.(x^2y)^{-1} = I,$$
$$x^3.x.(x^4)^{-1} = I, \qquad x^3.y.(x^3y)^{-1} = I,$$
$$x^4.x.(I)^{-1} = I, \qquad x^4.y.(x^4y)^{-1} = I,$$
$$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, \qquad y.y.(y^2)^{-1} = I,$$
$$y^2.x.(xy^2)^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1}, \qquad y^2.y.(y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$y^{q-1}.x.(xy^{q-1})^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}, \qquad y^{q-1}.y.(I)^{-1} = I,$$
$$xy.x.(x^2y)^{-1} = xyxy^{-1}x^{-2}, \qquad xy.y.(xy^2)^{-1} = I,$$
$$xy^2.x.(x^2y^2)^{-1} = xy^2xy^{-2}x^{-2}, \qquad xy^2.y.(xy^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$xy^{q-1}.x.(x^2y^{q-1})^{-1} = xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}, \qquad xy^{q-1}.y.(x)^{-1} = I,$$
$$x^2y.x.(x^3y)^{-1} = x^2yxy^{-1}x^{-3}, \qquad x^2y.y.(x^2y^2)^{-1} = I,$$
$$x^2y^2.x.(x^3y^2)^{-1} = x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, \qquad x^2y^2.y.(x^2y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^2y^{q-1}.x.(x^3y^{q-1})^{-1} = x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}, \qquad x^2y^{q-1}.y.(x^2)^{-1} = I,$$
$$x^3y.x.(x^4y)^{-1} = x^3yxy^{-1}x^{-4}, \qquad x^3y.y.(x^3y^2)^{-1} = I,$$
$$x^3y^2.x.(x^4y^2)^{-1} = x^3y^2xy^{-2}x^{-4}, \qquad x^3y^2.y.(x^3y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^3y^{q-1}.x.(x^4y^{q-1})^{-1} = x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-4}, \qquad x^3y^{q-1}.y.(x^3)^{-1} = I,$$
$$x^4y.x.(y)^{-1} = x^4yxy^{-1}, \qquad x^4y.y.(x^4y^2)^{-1} = I,$$
$$x^4y^2.x.(y^2)^{-1} = x^4y^2xy^{-2}, \qquad x^4y^2.y.(x^4y^3)^{-1} = I,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x^4y^{q-1}.x.(y^{q-1})^{-1} = x^4y^{q-1}xy^{-(q-1)}, \qquad x^4y^{q-1}.y.(x^4)^{-1} = I.$$

Burada,

$(xyxy^{-1}x^{-2}.x^2yxy^{-1}x^{-3}.x^3yxy^{-1}x^{-4}.x^4yxy^{-1})^{-1} = (xyx^4y^{-1})^{-1}$
$= (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$
$(xy^2xy^{-2}x^{-2}.x^2y^2xy^{-2}x^{-3}.x^3y^2xy^{-2}x^{-4}.x^4y^2xy^{-2})^{-1} = (xy^2x^4y^{-2})^{-1}$
$= (xy^2x^{-1}y^{-2})^{-1} = y^2xy^{-2}x^{-1},$

$$\vdots$$

$\left(xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}.x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}.x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-4}.x^4y^{q-1}xy^{-(q-1)}\right)^{-1}$
$= \left(xy^{q-1}x^4y^{-(q-1)}\right)^{-1} = \left(xy^{q-1}x^{-1}y^{-(q-1)}\right)^{-1} = y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-1}$

eşitlikleri dikkate alındığında $H'_{5,q}$ kamutatör alt grubu

$$H'_{5,q} = \langle xyxy^{-1}x^{-2}, xy^2xy^{-2}x^{-2}, \dots, xy^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-2}, x^2yxy^{-1}x^{-3},$$
$$x^2y^2xy^{-2}x^{-3}, \dots, x^2y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-3}, x^3yxy^{-1}x^{-4}, x^3y^2xy^{-2}x^{-4},$$
$$\dots, x^3y^{q-1}xy^{-(q-1)}x^{-4},\ x^4yxy^{-1},\ x^4y^2xy^{-2}, \dots, x^4y^{q-1}xy^{-(q-1)} \mid \ \rangle$$

şeklinde bulunur. Üreteç sayısı $(p-1).(q-1)$, $p=5$ için
$(5-1).(q-1) = 4(q-1)$ dir.

4. GENİŞLETİLMİŞ GENEL HECKE GRUPLARININ KAMUTATÖR ALT GRUPLARI

Bu bölümde genişletilmiş genel Hecke grupları tanıtılmış ve Reidemeister-Schreier metoduyla kamutatör alt gruplarının sunuşları bulunmuştur. 4.2.1, 4.2.4, 4.2.6, 4.2.9 Teoremleri ilk defa verilmiş olup, bu bölümdeki bazı sonuçlar, [38] nolu kaynakta yer almıştır.

4.1 Genişletilmiş Genel Hecke Grupları

Bu bölümde genel Hecke gruplarına $r(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansıma dönüşümü eklenerek $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke grupları tanımlanmıştır.

4.1.1 Tanım : Genel Hecke gruplarına, $r(z) = \frac{1}{\bar{z}}$ yansımalarını ekleyerek elde edilen gruplara genişletilmiş genel Hecke grupları denir ve

$$\overline{H}_{p,q} = \langle x, y, r | x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1} \rangle \cong D_p *_{C_2} D_q$$

sunuşuna sahiptir.

4.1.2 Teorem: $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş Hecke grupları, D_p ile D_q nin C_2 ile birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.

İspat : Teoremde yer alan dihedral grupların sunuşları,

$$G_1 = \langle t, r | t^p = r^2 = (tr)^2 = I \rangle \cong D_p$$

ve

$$G_2 = \langle s, r | s^q = r^2 = (rs)^2 = I \rangle \cong D_q$$

şeklindedir.

$A = \langle r \rangle \leq G_1$ alt grubu için,

$$\phi : A \to G_2$$
$$r \mapsto r$$

birim dönüşümü ve 2.5.4.1 Teoremi yardımıyla

$$\overline{H}_{p,q} \cong \mathrm{G}_1 *_{\mathrm{C}_2} \mathrm{G}_2 \quad \text{ve}$$

$$\overline{H}_{p,q} = \langle t,s,r \mid t^p = s^q = r^2 = (tr)^2 = (rs)^2 = I \rangle$$

bulunur.

4.1.3 Örnek: $H_{2,q}$ Hecke grubuna r elemanı eklenerek $\overline{H}_{2,q}$ genişletilmiş Hecke gruplarının sunuşları,

$$\overline{H}_{2,q} = \langle x,y,r \mid x^2 = y^q = r^2 = I, xr = rx, yr = ry^{-1} \rangle$$

şeklindedir.

4.2 Genişletilmiş Genel Hecke Gruplarının Kamutatör Alt Grupları

Bu bölümde genişletilmiş genel Hecke gruplarının, p ve q tamsayılarının durumlarına göre kamutatör alt grupları incelenmiştir. p tek ve q tek durumunda $\overline{H}'_{p,q}$ nun $H_{p,q}$ olduğu gösterilmiştir. Ayrıca $\overline{H}'_{p,q}$ kamutatör alt gruplarında $p = 2$ özel durumu olan grupların sunuşlarının [19] nolu kaynakta elde edilenlerle aynı olduğu görülmüştür.

İlk olarak p ve q tamsayılarının tek olma durumunu inceleyelim.

4.2.1 Teorem: $\overline{H}_{p,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubu, p tek ve q tek ise,

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x,y \mid x^p = y^q = I \rangle \cong C_p * C_q$$

sunuşuna sahiptir.

İspat: Öncelikle bölüm grubunu oluşturalım,

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle x,y,r \mid x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1},$$
$$xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle \text{ tir.}$$

$xr = rx^{p-1} \Rightarrow x^{-1} = rxr$ ve $xr = rx \Rightarrow x = rxr$ olduğundan $x^{-1} = x \Rightarrow x^2 = I$ bulunur. Böylece,

$x^2 = I$ ve $x^p = I$ olduğundan $x = I$ dir.

$yr = ry^{q-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y^{-1} = y \Rightarrow y^2 = I$ ve buradan

$y^2 = I$ ve $y^q = I$ olduğundan $y = I$ dir. Böylece bölüm grubu,

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle r | r^2 = I \rangle \cong C_2$$

$\Sigma = \{I, r\}$,

$$I.x.(I)^{-1} = x, \qquad I.y.(I)^{-1} = y, \qquad I.r.(r)^{-1} = I,$$

$$r.x.(r)^{-1} = rxr^{-1}, \qquad r.y.(r)^{-1} = ryr^{-1}, \qquad r.r.(I)^{-1} = I.$$

Burada $rxr^{-1} = x^{-1}$ ve $ryr^{-1} = y^{-1}$ eşitlikleri dikkate alındığında,

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y | x^p = y^q = I \rangle \cong C_p * C_q$$

bulunur.

4.2.2 Uyarı: 4.2.1 Teoremden p tek ve q tek durumu için

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y | x^p = y^q = I \rangle = H_{p,q}$$

olduğu görülür.

4.2.3 Örnek: $\overline{H}_{3,5}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$\overline{H}_{3,5} = \langle x, y, r | x^3 = y^5 = r^2 = I, xr = rx^{-1}, yr = ry^{-1} \rangle$$

dir. Buna göre bölüm grubu

$$\overline{H}_{3,5}/\overline{H}'_{3,5} = \langle x, y, r | x^3 = y^5 = r^2 = I, xr = rx^{-1}, yr = ry^{-1},$$
$$xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle$$

şeklinde oluşturulur.

$xr = rx^{-1} \Rightarrow x^{-1} = rxr$ ve $xr = rx \Rightarrow x = rxr$ olduğundan $x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = I$ olur ve

$x^2 = I$ ve $x^3 = I$ olduğundan $x = I$ dir.

$yr = ry^{-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y = y^{-1} \Rightarrow y^2 = I$ bulunur. Böylece

$y^2 = I$ ve $y^5 = I$ olduğundan $y = I$ dir. Böylece bölüm grubu,

$$\overline{H}_{3,5}/\overline{H}'_{3,5} = \langle r | r^2 = I \rangle \cong C_2$$

olarak bulunur.

$\Sigma = \{I, r\}$,

$$I.x.(I)^{-1} = x, \qquad I.y.(I)^{-1} = y, \qquad I.r.(r)^{-1} = I,$$

$$r.x.(r)^{-1} = rxr^{-1}, \qquad r.y.(r)^{-1} = ryr^{-1}, \qquad r.r.(I)^{-1} = I.$$

Burada $rxr^{-1} = x^{-1}$ ve $ryr^{-1} = y^{-1}$ eşitlikleri dikkate alındığında,

$$\overline{H}'_{3,5} = \langle x, y | x^3 = y^5 = I \rangle = H_{3,5}$$

bulunur.

Şimdi p tek ve q çift olma durumunu inceleyelim.

4.2.4 Teorem: $\overline{H}'_{p,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubu, p tek ve q çift ise,

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y^2, yxy^{-1} | x^p = (y^2)^{q/2} = (yxy^{-1})^p = I \rangle \cong C_p * C_{q/2} * C_p$$

sunuşuna sahiptir.

İspat: Öncelikle bölüm grubunu oluşturalım.

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y, r | x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1},$$
$$xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle$$

bölüm grubu,

$xr = rx^{-1} \Rightarrow x^{-1} = rxr$ ve $xr = rx \Rightarrow x = rxr$ olduğundan $x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = I$,
$x^2 = x^p = I \Rightarrow x = I$ ve
$yr = ry^{-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y = y^{-1} \Rightarrow y^2 = I$,
$y^2 = y^q = I \Rightarrow y^2 = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle y, r | y^2 = r^2 = I, yr = ry \rangle \cong C_2 \times C_2$$

olarak bulunur.

$\Sigma = \{I, y, r, yr\}$,

$I.x.(I)^{-1} = x,$	$I.y.(y)^{-1} = I,$	$I.r.(r)^{-1} = I,$
$y.x.(y)^{-1} = yxy^{-1},$	$y.y.(I)^{-1} = y^2,$	$y.r.(yr)^{-1} = I,$
$r.x.(r)^{-1} = rxr^{-1},$	$r.y.(yr)^{-1} = ryr^{-1}y^{-1},$	$r.r.(I)^{-1} = I,$
$yr.x.(yr)^{-1} = yrxr^{-1}y^{-1},$	$yr.y.(r)^{-1} = yryr^{-1},$	$yr.r.(y)^{-1} = I.$

Burada, $(yrxr^{-1}y^{-1})^{-1} = (yx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}$, $rxr^{-1} = x^{-1}$, $ryr^{-1}y^{-1} = y^{-2}$, $yryr^{-1} = I$ eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup,

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y^2, yxy^{-1} | x^p = (y^2)^{q/2} = (yxy^{-1})^p = I \rangle \cong C_p * C_{q/2} * C_p$$

olarak elde edilir.

4.2.5 Örnek: $\overline{H}_{3,4}$ grubunun birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$\overline{H}_{3,4} = \langle x, y, r | x^3 = y^4 = r^2 = I, xr = rx^{-1}, yr = ry^{-1} \rangle$,

$\overline{H}_{3,4}/\overline{H}'_{3,4} = \langle x, y, r | x^3 = y^4 = r^2 = I, xr = rx^{-1}, yr = ry^{-1}, xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle$

bölüm grubu, $xr = rx^{-1} \Rightarrow x^{-1} = rxr$ ve $xr = rx \Rightarrow x = rxr$ olduğundan
$x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = I$, $x^2 = x^3 = I \Rightarrow x = I$ ve
$yr = ry^{-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y = y^{-1} \Rightarrow y^2 = I$,
$y^2 = y^4 = I \Rightarrow y^2 = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{3,4}/\overline{H}'_{3,4} = \langle y, r | y^2 = r^2 = I, yr = ry \rangle \cong C_2 \times C_2$$

şeklinde elde edilir.

$\Sigma = \{I, y, r, yr\}$,

$I.x.(I)^{-1} = x,$ $\quad I.y.(y)^{-1} = I,$ $\quad I.r.(r)^{-1} = I,$

$y.x.(y)^{-1} = yxy^{-1},$ $\quad y.y.(I)^{-1} = y^2,$ $\quad y.r.(yr)^{-1} = I,$

$r.x.(r)^{-1} = rxr^{-1},$ $\quad r.y.(yr)^{-1} = ryr^{-1}y^{-1},$ $\quad r.r.(I)^{-1} = I,$

$yr.x.(yr)^{-1} = yrxr^{-1}y^{-1},$ $\quad yr.y.(r)^{-1} = yryr^{-1},$ $\quad yr.r.(y)^{-1} = I.$

Burada, $(yrxr^{-1}y^{-1})^{-1} = (yx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}$, $rxr^{-1} = x^{-1}$, $ryr^{-1}y^{-1} = y^{-2}$, $yryr^{-1} = I$ eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup,

$$\overline{H}'_{3,4} = \langle x, y^2, yxy^{-1} | x^3 = (y^2)^2 = (yxy^{-1})^3 = I \rangle$$

olarak bulunur.

Şimdi p çift ve q tek olma durumunu inceleyelim.

4.2.6 Teorem: $\overline{H}_{p,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubu, p çift ve q tek ise,

$$\overline{H}'_{p,q} = \left\langle x^2, y, xyx^{-1} \middle| (x^2)^{p/2} = y^q = (xyx^{-1})^q = I \right\rangle \cong C_{p/2} * C_q * C_q$$

sunuşuna sahiptir.

İspat:

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle x, y, r | x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1},$$
$$xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle$$

bölüm grubu, $xr = rx^{-1} \Rightarrow x^{-1} = rxr$ ve $xr = rx \Rightarrow x = rxr$ olduğundan $x = x^{-1} \Rightarrow x^2 = I$, $x^2 = x^p = I \Rightarrow x^2 = I$ ve $yr = ry^{-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y = y^{-1} \Rightarrow y^2 = I$, $y^2 = y^q = I \Rightarrow y = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{p,q}/\overline{H}'_{p,q} = \langle x, r | x^2 = r^2 = I, xr = rx \rangle \cong C_2 \times C_2$$

biçiminde bulunur.

Schreier transversali olarak $\Sigma = \{I, x, r, xr\}$ kümesini seçelim.

$I.x.(x)^{-1} = I,$ $\quad I.y.(I)^{-1} = y,$ $\quad I.r.(r)^{-1} = I,$

$x.x.(I)^{-1} = x^2,$ $\quad x.y.(x)^{-1} = xyx^{-1},$ $\quad x.r.(xr)^{-1} = I,$

$r.x.(xr)^{-1} = rxr^{-1}x^{-1},$ $\quad r.y.(r)^{-1} = ryr^{-1},$ $\quad r.r.(I)^{-1} = I,$

$xr.x.(r)^{-1} = xrxr^{-1},$ $\quad xr.y.(xr)^{-1} = xryr^{-1}x^{-1},$ $\quad xr.r.(x)^{-1} = I.$

Burada $rxr^{-1}x^{-1} = rxrx^{-1} = x^{-2}$, $xrxr^{-1} = rr^{-1} = I$, $ryr^{-1} = y^{-1}$, $(xryr^{-1}x^{-1})^{-1} = (xy^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1}$ eşitlikleri dikkate alındığında, kamutatör alt grup

$$\overline{H}'_{p,q} = \left\langle x^2, y, xyx^{-1} \middle| (x^2)^{p/2} = y^q = (xyx^{-1})^q = I \right\rangle \cong C_{p/2} * C_q * C_q$$

olarak bulunur.

4.2.7 Örnek: $\overline{H}_{2,q}$ grubunun q tek değerleri için birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$\overline{H}_{2,q} = \langle x, y, r | x^2 = y^q = r^2 = I, xr = rx^{-1}, yr = ry^{-1} \rangle$$

grubu için kamutatör alt grupla oluşturulan bölüm grubu şu şekildedir;

$$\overline{H}_{2,\mathrm{q}}/\overline{H}'_{2,\mathrm{q}} = \langle x, y, r | x^2 = y^{\mathrm{q}} = r^2 = I, xr = r\mathrm{x}, yr = ry^{-1}, yr = ry, xy = yx \rangle$$

bölüm grubu, $yr = ry^{-1} \Rightarrow y^{-1} = ryr$ ve $yr = ry \Rightarrow y = ryr$ olduğundan $y = y^{-1} \Rightarrow y^2 = I$, $y^2 = y^q = I \Rightarrow y = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{2,q}/\overline{H}'_{2,q} = \langle x, r | x^2 = r^2 = I, xr = rx \rangle \cong C_2 \times C_2$$

grubu elde edilir.

$\Sigma = \{I, x, r, xr\}$,

$I.x.(x)^{-1} = I$,	$I.y.(I)^{-1} = y$,	$I.r.(r)^{-1} = I$,
$x.x.(I)^{-1} = I$,	$x.y.(x)^{-1} = xyx^{-1}$,	$x.r.(xr)^{-1} = I$,
$r.x.(xr)^{-1} = rxr^{-1}x^{-1}$,	$r.y.(r)^{-1} = ryr^{-1}$,	$r.r.(I)^{-1} = I$,
$xr.x.(r)^{-1} = xrxr^{-1}$,	$xr.y.(xr)^{-1} = xryr^{-1}x^{-1}$,	$xr.r.(x)^{-1} = I$.

Burada, , $xrxr^{-1} = I$, $ryr^{-1} = y^{-1}$, $(xryr^{-1}x^{-1})^{-1} = xyx^{-1} = xyx$, $rxr^{-1}x^{-1} = rxrx = I$ eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup,

$$\overline{H}'_{2,q} = \langle y, xyx | y^q = (xyx)^q = I \rangle \cong C_q * C_q$$

olarak bulunur.

4.2.8 Uyarı: $\overline{H}'_{p,q}$ kamutatör alt gruplarının sunuşunda $p = 2$ ve q tek tamsayıları için [19] da verilen $\overline{H}_{2,q}$ nun birinci kamutatör alt gruplarının sunuşu ile çakışmaktadır.

Şimdi p ve q tamsayılarının çift olma durumunu inceleyelim.

4.2.9 Teorem: $\overline{H}_{p,q}$ grubunun birinci kamutatör alt grubu, p çift ve q çift ise,

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x^2, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}, yx^2y^{-1} | (x^2)^{p/2} = (y^2)^{q/2} = (xy^2x^{-1})^{q/2}$$
$$= (yx^2y^{-1})^{p/2} = I \rangle \cong C_{p/2} * C_{q/2} * C_{q/2} * C_{p/2} * \mathbb{Z}$$

sunuşuna sahiptir.

İspat: Bölüm grubu şu şekilde oluşturulur:

$$\overline{H}_{p,q} / \overline{H}'_{p,q} = \langle x, y, r | x^p = y^q = r^2 = I, xr = rx^{p-1}, yr = ry^{q-1},$$
$$xr = rx, yr = ry, xy = yx \rangle$$

Bölüm grubu, $x^2 = x^p = I \Rightarrow x^2 = I$ ve $y^2 = y^q = I \Rightarrow y^2 = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{p,q} / \overline{H}'_{p,q} = \langle x, y, r | x^2 = y^2 = r^2 = I, xr = rx, xy = yx, yr = ry \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

şeklinde bulunur.

$\Sigma = \{I, x, y, r, xy, xr, yr, xyr\}$ Schreier transversalini seçelim.

$$I.x.(x)^{-1} = I, \quad I.y.(y)^{-1} = I, \quad I.r.(r)^{-1} = I,$$
$$x.x.(I)^{-1} = x^2, \quad x.y.(xy)^{-1} = I, \quad x.r.(xr)^{-1} = I,$$
$$y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, \quad y.y.(I)^{-1} = y^2, \quad y.r.(yr)^{-1} = I,$$
$$r.x.(xr)^{-1} = rxr^{-1}x^{-1}, \quad r.y.(yr)^{-1} = ryr^{-1}y^{-1}, \quad r.r.(I)^{-1} = I,$$
$$xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1}, \quad xy.y.(x)^{-1} = xy^2x^{-1}, \quad xy.r.(xyr)^{-1} = I,$$
$$xr.x.(r)^{-1} = xrxr^{-1}, \quad xr.y.(xyr)^{-1} = xryr^{-1}y^{-1}x^{-1}, \quad xr.r.(x)^{-1} = I,$$
$$yr.x.(xyr)^{-1} = yrxr^{-1}y^{-1}x^{-1}, \quad yr.y.(r)^{-1} = yryr^{-1}, \quad yr.r.(y)^{-1} = I,$$
$$xyr.x.(yr)^{-1} = xyrxr^{-1}y^{-1}, \quad xyr.y.(xr)^{-1} = xyryr^{-1}x^{-1}, \quad xyr.r.(xy)^{-1} = I.$$

Burada $rxr^{-1}x^{-1} = x^{-2}, xrxr^{-1} = I, ryr^{-1}y^{-1} = y^{-2}, yryr^{-1} = I,$

$yxy^{-1}x^{-1}.xyxy^{-1} = yx^2y^{-1},$

$(xyrxr^{-1}y^{-1})^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1},$

$(yrxr^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = (yx^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = xyxy^{-1},$

$(xryr^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = (xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1}$

eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup

$$\overline{H}'_{p,q} = \langle x^2, y^2, xyxy^{-1}, xy^2x^{-1}, yx^2y^{-1} | (x^2)^{p/2} = (y^2)^{q/2} = (xy^2x^{-1})^{q/2}$$
$$= (yx^2y^{-1})^{p/2} = I \rangle \cong C_{p/2} * C_{q/2} * C_{q/2} * C_{p/2} * \mathbb{Z}$$

biçiminde bulunur.

4.2.10 Örnek: $\overline{H}_{2,q}$ grubunun q çift değerleri için birinci kamutatör alt grubunu bulalım.

$$\overline{H}_{2,q}/\overline{H}'_{2,q} = \langle x,y,r | x^2 = y^q = r^2 = I, xr = rx, yr = ry^{q-1}, yr = ry, xy = yx \rangle$$

bölüm grubu, $x^2 = x^p = I \Rightarrow x^2 = I$ ve $y^2 = y^q = I \Rightarrow y^2 = I$ eşitliklerine göre düzenlendiğinde,

$$\overline{H}_{2,q}/\overline{H}'_{2,q} = \langle x,y,r | x^2 = y^2 = r^2 = I, xr = rx, xy = yx, yr = ry \rangle \cong C_2 \times C_2 \times C_2$$

grubu elde edilir.

$\Sigma = \{I, x, y, r, xy, xr, yr, xyr\}$,

$$\begin{array}{ccc}
I.x.(x)^{-1} = I, & I.y.(y)^{-1} = I, & I.r.(r)^{-1} = I, \\
x.x.(I)^{-1} = I, & x.y.(xy)^{-1} = I, & x.r.(xr)^{-1} = I, \\
y.x.(xy)^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}, & y.y.(I)^{-1} = y^2, & y.r.(yr)^{-1} = I, \\
r.x.(xr)^{-1} = rxr^{-1}x^{-1}, & r.y.(yr)^{-1} = ryr^{-1}y^{-1}, & r.r.(I)^{-1} = I, \\
xy.x.(y)^{-1} = xyxy^{-1}, & xy.y.(x)^{-1} = xy^2x^{-1}, & xy.r.(xyr)^{-1} = I, \\
xr.x.(r)^{-1} = xrxr^{-1}, & xr.y.(xyr)^{-1} = xryr^{-1}y^{-1}x^{-1}, & xr.r.(x)^{-1} = I, \\
yr.x.(xyr)^{-1} = yrxr^{-1}y^{-1}x^{-1}, & yr.y.(r)^{-1} = yryr^{-1}, & yr.r.(y)^{-1} = I, \\
xyr.x.(yr)^{-1} = xyrxr^{-1}y^{-1}, & xyr.y.(xr)^{-1} = xyryr^{-1}x^{-1}, & xyr.r.(xy)^{-1} = I.
\end{array}$$

Burada

$rxr^{-1}x^{-1} = I$, $xrxr^{-1} = I$, $ryr^{-1}y^{-1} = y^{-2}$, $yryr^{-1} = I$,

$(xyrxr^{-1}y^{-1})^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1}$,

$(yrxr^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = (yx^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = xyxy^{-1}$,

$(xryr^{-1}y^{-1}x^{-1})^{-1} = (xy^{-2}x^{-1})^{-1} = xy^2x^{-1} = xy^2x$

eşitlikleri vardır. Böylece kamutatör alt grup

$$\overline{H}'_{2,q} = \left\langle xyxy^{-1}, y^2, xy^2x \middle| (y^2)^{q/2} = (xy^2x^{-1})^{q/2} = I \right\rangle \cong C_{q/2} * C_{q/2} * \mathbb{Z}$$

şeklinde elde edilir.

4.2.11 Uyarı: $\overline{H}'_{p,q}$ kamutatör alt grubunda $p = 2$ ve q çift tamsayı özel durumu [19] nolu kaynakta elde edilen durum ile çakışmaktadır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde $H_{p,q}$ genel Hecke grupları ile $\overline{H}_{p,q}$ genişletilmiş genel Hecke gruplarının birinci kamutatör alt grupları incelenmiş ve grup sunuşları elde edilmiştir. Çalışmada yer alan 3.2.1, 4.2.1, 4.2.4, 4.2.6, 4.2.9 Teoremleri ilk defa gösterilmiştir.

İleride yapılacak çalışmalar için bu grupların kuvvet alt gruplarının grup sunuşları ve grup simgeleri incelenebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Hecke, E., "Über die Bestimmung Dirichletscher Reichen durch ihre Funktionalgleichungen", *Math. Ann.,*112, 664-699, (1936).

[2] Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Groups", Ph.D. Thesis, *Southampton University,* (1993).

[3] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "On the Group Structure and Parabolic Points of the Hecke Group H(λ)", *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51, 35-46, (2002).

[4] İkikardeş, S., Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., "Power Subgroups of Some Hecke Groups", *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 497-508, (2006).

[5] Cangül, İ. N. and Singerman, D., "Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps", *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.,* 59-74, (1998).

[6] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "Power Subgroups of Hecke Groups $H(\sqrt{n})$", *Int. J. Math. Sci*., 11, 703-708, (2001).

[7] Cangül, İ. N., Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "Power Subgroups of Some Hecke Groups II" *Houston J. Math.,* 33, 33-42, (2007).

[8] Schmidt, T. A. and Sheingorn, M., "Length spectra of the triangle Hecke Groups", *Math. Z.* 220, 369-397, (1995).

[9] Schmidt, T. A. and Sheingorn, M., "Covering the Hecke Triangle Surfaces", *The Ramanujan Journal*, 1, 155-163, (1997).

[10] Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of the Hecke Group $H(\sqrt{2})^*$ ", *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 43, 129-135, (1994).

[11] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., "Normal Subgroups of Hecke Group $(\sqrt{5})$ ", *Bull. Inst.Math. Acad. Sinica*, 28, 4, 277-283, (2000).

[12] Newman, M., "The Structure of Some Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, (1962).

[13] Koruoğlu, Ö., "The images under the modular group and extended modular group", *Hacet. J. Math. Stat*., 40, 15-20, (2011).

[14] Koruoğlu, Ö., "The determination of parabolic points in modular and extended modular groups by continued fractions", *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 2, 33, 439-445, (2010).

[15] Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., "Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group", *Turkish J. Math.,* 34, 325-332, (2010).

[16] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "On the Power Subgroups of the Extended Modular Group $\overline{\Gamma}$ ", *Turk. J. Math.* ,28, 143-151, (2004).

[17] Lehner, J., "Uniqueness of a class of fuchsian groups" *III. J. Math. Surveys,8, A.M.S. Providence,R.L.,* (1964)

[18] Şahin, R., "Genişletilmiş Hecke Grupları", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).

[19] Şahin, R., Bizim, O. and Cangül, İ. N., "Commutator Subgroups of the Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_q)$ " *Czechoslovak Mathematical Journal,* 54, 253-259, (2004).

[20] Şahin, R., Koruoğlu, Ö. and İkikardeş, S., "On the Extended Hecke Group $\overline{H}(\lambda_5)$ ", *Algebra Colloquium.,* 13, 17-23, (2006).

[21] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., "Some Normal Subgroups of The Extended Hecke Groups $\overline{H}(\lambda_p)$", *Rocky Mountain J. Math.,* 36, 1033-1048, (2006).

[22] Özgür, N. Y. and Şahin, R., "On The Extended Hecke Groups", *Turk. J. Math.,* 27, 473-480, (2003).

[23] Koruoğlu, Ö., "$\overline{H}(\lambda)$ ile $\overline{H}(\lambda_q)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları ve Sürekli Kesirler", Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).

[24] Huang, S., "Generalized Hecke groups and Hecke polygons, *Annales Academia Scientiarum Fennica Matematica,* 24, 187-214, (1999).

[25] Jones, G. A. and Singerman, D., *Complex Functions,* Cambridge University Press, 17-19, 221-267, (1987).

[26] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi,* Bursa: Vipaş, 318-324, (2001).

[27] Başkan, T., *Ayrık Gruplar,* Beytepe, Ankara: H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 1-29, (1980).

[28] Ford, L. R., *Automorphic Functions,* New York: Chelsea Publishing Company, 66-82, (1951).

[29] Newman, M., "Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group", *Illionis J. Math.,* 8, 262-265, (1964).

[30] Jones, G. A. and Thornton, J. S., “Automorphisms and Congrunce Subgroups of The Extended Modular Group”, *J. London Math. Soc.*, (2), 34, 26-40, (1986).

[31] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., *Generators and Relations For Discrete Groups*, second ed., Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 35-38, (1965).

[32] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., “The Normal Subgroup Structure of the Extended Hecke Groups”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.),* 38, 51-65, (2007).

[33] Bizim, O., “Genişletilmiş Modüler Grup”, Doktora Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1995).

[34] Fraleigh, J. B., *A First Course in Abstract Algebra*, sixth edition, Addison-Wesley Pub. Comp., 85, 105, 157, 181-189, 224-231, (1974).

[35] Robinson, D. J. S., *A Course in the Theory of Groups*, New York-Heidelberg-Berlin: Springer-Verlag, 28, 119-120, 167, (2001).

[36] Johnson, D. L., *Presentation of Groups*, Cambridge University Press, 1-17, 41-45, (1990).

[37] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., *Combinatorial Group Theory*, Inc. New York: Dover Publications, (1976).

[38] Kaymak, Ş., Demir, B., Koruoğlu, Ö. and Şahin, R., “Commutator Subgroups of Generalized Hecke and Extended Generalized Hecke Groups”, yayına sunuldu.