T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEOMETRİK METOTLAR ALTINDA KELİME PROBLEMİ VE SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Eylem GÜZEL KARPUZ

Balıkesir, Ekim - 2009

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

GEOMETRİK METOTLAR ALTINDA KELİME PROBLEMİ VE SONUÇLARI

DOKTORA TEZİ

Eylem GÜZEL KARPUZ

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK

Sınav Tarihi : 26. 10. 2009

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. İsmail Naci CANGÜL (UÜ)
Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK (Danışman, SÜ)
Doç. Dr. Recep ŞAHİN (BAÜ)
Yrd. Doç. Dr. Ayşe Dilek GÜNGÖR (SÜ)
Yrd. Doç. Dr. Fırat ATEŞ (BAÜ)

Balıkesir, Ekim - 2009

ÖZET

GEOMETRİK METOTLAR ALTINDA KELİME PROBLEMİ VE SONUÇLARI

Eylem GÜZEL KARPUZ
Balıkesir Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,
Matematik Anabilim Dalı

(Doktora Tezi / Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balıkesir, 2009

Bu tez birinci bölüm olan giriş kısmı dışında altı bölümden oluşmaktadır. İkinci bölümde, grup, monoid ve yarı grupların sunuşları ile ilgili hatırlatmalar yapılmış ve karar verme problemlerinden olan kelime problemi hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca yeniden yazma sistemi ile ilgili hatırlatmalar yapılıp sonlu türetilmiş tip kavramı tanıtılmıştır. Son olarak ise, monoidlerin Cayley grafı ile ilgili kısa bilgi verilmiştir.

Üçüncü bölümde, homotopik sonluluk durumu olan sonlu türetilmiş tip özelliği monoidlerin Schützenberger çarpımı üzerinde incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, diğer önemli bir çarpım olan graf çarpım incelenmiş ve monoidlerin graf çarpımının sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip olması için gerek koşul verilmiştir.

Beşinci bölümde, monoidlerin kısıtlanmış wreath çarpımı üzerinde *p*-Cockcroft ve alt monoid ayrıştırılabilirlik özellikleri incelenmiş ve bazı özel monoidlerin wreath çarpımının kelime probleminin çözülebilir olup olmadığına yer verilmiştir. Bunun için ilk olarak, Cayley graf kullanılarak wreath çarpımın sunuşu elde edilmiştir. Daha sonra bölümün sonuçları verilmiştir.

Altıncı bölümde, yarı gruplar üzerinde wreath çarpım tanımlanmış ve bu çarpımın çözülebilir kelime problemine sahip olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Ayrıca bazı özel yarı grupların wreath çarpımı üzerinde genelleştirilmiş kelime probleminin çözülebilirliği çalışılmıştır.

Son bölümde, önceki bölümlerde elde edilen sonuçların bir değerlendirmesi yapılmıştır.

ANAHTAR SÖZCÜKLER: Cayley Graf, Graf Çarpım, Kelime Problemi, Schützenberger Çarpım, Sonlu Türetilmiş Tip, Sunuş, Wreath Çarpım.

ABSTRACT

THE WORD PROBLEM AND ITS RESULTS UNDER GEOMETRIC METHODS

Eylem GÜZEL KARPUZ
Balikesir University, Institute of Science,
Department of Mathematics

(Ph.D. Thesis / Supervisor: Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK)

Balikesir-Turkey, 2009

This thesis consists of six chapters except introduction part. In the second chapter, it was recalled group, monoid and semigroup presentations and then informed on word problem which is one of the decision problems. Moreover, it was reminded rewriting system and then defined concept of finite derivation type property. Finally, it was given some information about Cayley graph of monoids.

In the third chapter, the finite derivation type property that is one of the homotopical finiteness conditions has been investigated on Schützenberger product of monoids.

In Chapter 4, the graph product of monoids has been studied and it has been given necessary condition for graph products of monoids to have finite derivation type property.

In Chapter 5, by considering the restricted wreath product of monoids it has been studied *p*-Cockcroft and submonoid separability properties on this product. Then it has been investigated the solvability of the word problem of wreath product of some specific monoids. To do that it has been obtained a presentation for wreath product of monoids in terms of Cayley graphs. Then it has been proved main results of this chapter.

In Chapter 6, by considering wreath products of semigroups, it was given necessary and sufficient conditions to have solvable word problem for this kind of semigroups. Moreover, the solvability of the generalized word problem of wreath product of some specific semigroups was studied in this chapter.

In the last chapter, the results which are obtained from previous chapters have been summarized.

KEY WORDS: Cayley Graph, Graph Product, Word Problem, Schützenberger Product, Finite Derivation Type, Presentation, Wreath Product.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

Simge	**Tanımı**
$\imath(w)$	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	w kelimesinin bitiş harfi
1_w	Boş kelime
l(w)	w kelimesinin uzunluğu
$l_x(w)$	w kelimesindeki herhangi bir x harfinin uzunluğu
$\approx$	Serbest olarak iki kelimenin denkliği
$[w]$	w kelimesinin denklik sınıfı
$F(X)$	X kümesi üzerindeki serbest grup
$\|X\|$	X kümesinin eleman sayısı
$\wp=\langle X;R\rangle$	Grup sunuşu
$w_1 \approx_{\wp} w_2$	w_1 ve w_2 kelimeleri $\wp$ sunuşuna bağlı olarak denktir
$[w]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı olarak w kelimesinin denklik sınıfları
$[1]_{\wp}$	$\wp$ sunuşuna bağlı grubun birimi
$G(\wp)$	$\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup
N	Normal kapanış
$\wp_M$	M monoidin sunuşu
$\wp_S$	S yarı grubunun sunuşu
A^+	A kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az bir uzunluklu kelimelerin kümesi
A^*	$A^+ \cup \{1\}$
λ	Boş kelime
$l \to r$	l kelimesinin r kelimesine indirgenmesi
$\to^*_R$	R tarafından üretilen indirgeme bağıntısı
$\leftrightarrow^*_R$	R tarafından üretilen Thue kongrüans
$[X\ ;\ \mathbf{r}]$	Monoid sunuşu

$\Gamma = \Gamma(X;\mathbf{r})$	$[X\ ;\ \mathbf{r}]$ sunuşunun belirttiği graf
$P(\Gamma)$	Γ grafındaki bütün yolların kümesi
$P^{(2)}(\Gamma)$	Γ grafındaki başlangıç ve bitiş noktaları aynı olan yolların kümesi
$\simeq$	Homotopi bağıntısı
FDT	Sonlu türetilmiş tip özelliği
$A \Diamond B$	*A* ve *B* monoidlerinin Schützenberger çarpımı
$P(A \times B)$	$A \times B$ kümesinin kuvvet kümesi
Γ_A	$\wp_A$ sunuşu ile ilişkili graf
$p \mapsto q$	*p* ve *q* yolları için $p \cong p_+ q p_-$ denkliğinin sağlanması
A	Atomik monoid resmi
$\mathbb{P}$	$\wp$ sunuşu üzerinde resim
$D(\wp)$	$\wp$ sunuşunun Squier kompleksi
X	Küresel monoid resimlerinin kümesi
$exp_R(\mathbb{P})$	*R* bağıntısının $\mathbb{P}$ monoid resmindeki üstler toplamı
BWrA	*B* ve *A* monoidlerinin kısıtlanmamış wreath çarpımı
BwrA	*B* ve *A* monoidlerinin kısıtlanmış wreath çarpımı
$S \rtimes_\theta T$	*S* yarı grubunun *T* yarı grubu ile yarıdirekt çarpımı
S^X	*X* kümesinden *S* yarı grubuna tanımlanan bütün dönüşümlerin kümesi
e	Idempotent eleman
$supp_e(f)$	$f \in S^X$ in desteği
$S(\wp_{k+1,l})$	$\wp_{k+1,l}$ sunuşu ile tanımlanan yarı grup

ŞEKİL LİSTESİ

TABLO LİSTESİ

ÖNSÖZ

Tezimi hazırladığım yoğun çalışma sürecinde tecrübe ve bilgileriyle desteğini esirgemeyen, çalışmaya olan motivasyonumu ve ilgimi yüksek tutmak için her türlü gayreti gösteren, doktora dönemimde yurt dışında çalışmam için beni cesaretlendiren, her zaman örnek alacağım değerli hocam ve danışmanım Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK'e içtenlikle teşekkür ederim.

Öğrenim hayatım boyunca emeği geçen tüm hocalarıma ve dostluklarını hissettiğim arkadaşlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Bu yola başlamamda en büyük katkısı olan ve beni en sıkıntılı anlarımda destekleyen eşime teşekkür ederim.

Yaşamımın her anının ortağı olan, sevgileriyle ve destekleriyle yürüdüğüm her yolda başarılarımın sebebi olan, maddi ve manevi olarak her zaman beni destekleyen, sevgi ve saygımın daimi olduğu aileme teşekkürlerimle…

Balıkesir, 2009 **Eylem GÜZEL KARPUZ**

1. GİRİŞ

Bu tezin ana konusunu oluşturan *kelime problemi*, geçmişi 20. yüzyılın başlarına dayanan ve Alman matematikçi Max Dehn tarafından literatüre kazandırılan üç temel karar verme probleminden birisidir. Bu problem, üzerinde çalışılan cebirsel yapının üreteç elemanlarıyla oluşturulan iki kelimenin birbirine eşit olup olmadığını araştıran bir algoritmanın varlığı problemidir. Bu tip bir algoritmanın bulunması bu problemin çözülebilir olması anlamına gelmekle beraber, Novikov ve Boone bu problemin çözülemez olduğu sonlu sunumlu grupların var olduğunu ispatlamışlardır [1, 2]. Birleştirilmiş Grup ve Yarı Grup Teoride oldukça önemli bir çalışma alanı oluşturan bu problemin hangi grup, monoid ve yarı grup sınıfları için çözülebilir, hangileri için çözülemez olduğu yönündeki çalışmalar oldukça önemlidir. En fazla bir bağıntısı bulunan ve her üreteç elemanı için değişmeli bağıntıların olduğu sunuşların temsil ettikleri grupların kelime probleminin çözülebilir olduğu bilinen en temel örneklerdir.

Ayrıca bu karar verme probleminin, Geometrik Grup Teori ve son yıllarda da Teorik Bilgisayar Bilimi ve Formal Dil Teorisi ile olan ilişkileri de önem kazanan konular arasındadır [44, 55, 63].

Sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoid için kelime problemi çözülebilirdir. Bu durumun tersinin araştırılması, homotopik sonluluk durumu olan sonlu türetilmiş tip (*FDT*) özelliğinin doğmasına imkân vermiştir. Diğer bir deyişle, bu özellik, yıllardır çözülemeyen ve sonunda 1987 yılında Squier'in bir çalışmasında ([68]) olumsuz olarak yanıtlanan aşağıdaki problem ile ortaya çıkmıştır.

Problem: "Çözülebilir kelime problemine sahip her sonlu sunumlu monoid sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip midir? "

Bilindiği üzere Grup ve Yarı Grup Teoride önemli olan noktalardan biri de verilen bir grup, monoid veya yarı gruptan yeni bir cebirsel yapı elde etmektir. Bu ise, çalışılan yapının alt grubunu, alt monoidini incelemekle veya yeni çarpımlar tanımlayarak var olan yapıyı yeni yapılara genişletmekle mümkün olmaktadır. Dolayısıyla bu tezin genel amacını, kelime probleminin ve onunla ilişkili olan sonlu türetilmiş tip özelliğinin hangi çarpımlar altında kapalı olduğu oluşturmaktadır. Bu sonlu türetilmiş tip özelliği, ilk olarak 1998 yılında Wang tarafından monoidlerin yarı direkt çarpımı için çalışılmış, daha sonra ise monoidlerin serbest çarpımına ve bazı yarı grup yapılarına genişletilmiştir. Tezimizde ise bu homotopik sonluluk özelliği, monoidlerin Schützenberger ve graf çarpımı üzerinde incelenmiştir. Tezin diğer bölümleri ise Grup ve Yarı Grup Teoride önemli bir yer teşkil eden wreath çarpım ([53]) üzerine inşa edilmiş olup, bu çarpım altında kelime probleminin çözülebilirliği araştırılmıştır.

2. TEMEL BİLGİLER

2.1 Giriş

Bu bölüm tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan temel materyallerin incelenmesi için oluşturulmuştur. Bu materyaller ile ilgili daha detaylı bilgiler [1, 2, 11, 12, 13, 15, 45, 62] gibi kaynaklardan elde edilebilir.

2.2 Sunuşlar

Birleştirilmiş grup ve yarı grup teoride önemli bir yere sahip olan sunuşlar, birçok cebirsel problemin çözümünde kolaylık sağlamaktadır. Tezin bu alt bölümünde diğer bölümlere hazırlık sağlaması açısından öncelikle grup ve monoid sunuşları daha sonra ise yarı grup sunuşu hakkında bilgi verilmiştir.

2.2.1 Serbest Grup

X boş olmayan bir küme olsun. Bu küme ile $x \leftrightarrow x^{-1}$ $(x \in X)$ eşlemesinden yararlanarak X^{-1} kümesini tanımlayalım ve de $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına *harf* denir. Burada $n \in \mathbb{N}$, $x_i \in X$, $\varepsilon_i = \pm 1$ ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere,

$$x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \cdots x_n^{\varepsilon_n} \tag{2.1}$$

ifadesine X üzerinde bir *kelime* denir ve w ile gösterilir. w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w)$ ile gösterilip, burada $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ dir. Benzer şekilde bitiş harfi $\tau(w)$ ile gösterilip, (2.1) deki kelimenin bitiş harfi $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ dir. Özel olarak $n = 0$ ise *boş kelime* elde edilir ve 1_w ile gösterilir. (2.1) deki gibi boş olmayan bir kelime (n>0) için her

ε_i = +1 oluyorsa *w* kelimesine *pozitif kelime* denir. Ayrıca (2.1) deki *w* kelimesinin tersi $x_n^{-\varepsilon_n} x_{n-1}^{-\varepsilon_{n-1}} \cdots x_1^{-\varepsilon_1}$ kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} olarak gösterilir.

(2.1) de verilen *w* kelimesinin uzunluğu, *w* içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır, ayrıca *w* kelimesindeki herhangi bir *x* harfinin uzunluğu da $\sum_{x_i = x} |\varepsilon_i|$ olarak hesaplanır ve bunlar sırasıyla l(w) ve $l_x(w)$ ile gösterilir.

X kümesi üzerinde verilen iki kelime *w* ve *u* olsun. *w* ve *u* kelimelerinin çarpımını, *w* kelimesinin arkasına *u* kelimesini getirip yan yana yazarak elde ederiz ve bu çarpım *wu* ile ifade edilir. Verilen bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir.

(I) $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelime içinde $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ çiftleri varsa, bu çiftler silinir. Yapılan bu işleme *indirgeme işlemi* denir.

(I)$^{-1}$ $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, herhangi bir kelimeye $x^{\varepsilon}x^{-\varepsilon}$ şeklindeki ters harf çiftleri eklenebilir. Bu işleme de kelime üzerinde *ekleme işlemi* denir.

X kümesi üzerindeki iki kelime *w* ve *w'* olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerine yukarıdaki (I) ve (I)$^{-1}$ işlemlerinin sonlu sayıdaki uygulamasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye *serbest olarak eşit* denir ve bu $w \approx w'$ ile gösterilir. Aslında $\approx$ olarak gösterilen serbest olarak eşitlik, bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla herhangi bir *w* kelimesini içeren serbest denklik sınıfı [*w*] ile gösterilir. Eğer *X* kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesini *F*(*X*) ile gösterirsek, *F*(*X*) üzerindeki çarpma işlemi

$$[w][u] = [wu] \tag{2.2}$$

olarak tanımlanır ve bu çarpma işlemi iyi tanımlıdır. Bu çarpma işlemi altında *F*(*X*) bir grup oluşturur ve oluşan bu gruba *X* kümesi üzerindeki *serbest grup* denir.

X kümesi üzerinde alınan *u*, *v* ve *w* kelimeleri için *w'*=*uwv* eşitliği varsa bu durumda *w* kelimesine *w'* kelimesinin *alt kelimesi* denir. *X* kümesi üzerindeki bir kelime, $x_i^{\varepsilon_i} x_i^{-\varepsilon_i}$ $(x_i \in X, \varepsilon_i = \pm 1)$ harf çiftini içermiyorsa bu kelimeye *indirgenmiş kelime* denir. Buna ek olarak, (2.1) deki gibi bir kelime için $x_1^{\varepsilon_1} \neq x_n^{-\varepsilon_n}$ ise bu kelimeye *devirsel indirgenmiş kelime* denir.

Aşağıdaki sonuç grup sunuşlarının oluşturulmasında önemli bir yer teşkil etmektedir.

2.2.1 Teorem (Normal Form Teoremi) [15]: Her bir denklik sınıfı tek bir indirgenmiş kelime içerir.

2.2.2 Grup Sunuşları

X bir küme (*üreteç sembollerinin kümesi*) ve *R* de *X* kümesi üzerindeki devirsel indirgenmiş kelimelerden oluşan boştan farklı bir küme (*bağıntı kelimelerinin kümesi*) olsun. Bu durumda,

$$\wp = \langle X ; R \rangle$$

ikilisine bir *grup sunuşu* denir [45]. *X* ve *R* kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp$ sunuşu *sonludur* denir.

X kümesindeki kelimeler üzerinde, yukarıdaki (I) ve $(\mathrm{I})^{-1}$ işlemlerine ek olarak aşağıdaki işlemleri kullanarak, $\wp$ sunuşu ile bir grup tanımlarız. Bunun için *X* kümesi üzerinde bir kelime *w* olsun.

(II) *w* kelimesi r^{ε} $(r \in R,\ \varepsilon = \pm 1)$ şeklinde bir alt kelime içeriyorsa bu alt kelimeyi sileriz.

$(\mathrm{II})^{-1}$ *w* kelimesi içinde herhangi bir yere r^{ε} $(r \in R,\ \varepsilon = \pm 1)$ alt kelimesini ekleriz.

X kümesi üzerinde iki kelime w_1 ve w_2 olsun. Eğer w_1 kelimesinden w_2 kelimesine sonlu sayıda $(\mathrm{I})^{\pm 1}$, $(\mathrm{II})^{\pm 1}$ işlemleri ile ulaşılabiliyorsa, w_1 ve w_2

kelimelerine $\wp$ sunuşuna bağlı olarak *denk kelimeler* denir ve bu denklik $w_1 \approx_{\wp} w_2$ ile gösterilir. Buradaki $\approx_{\wp}$ bağıntısı X üzerindeki bütün kelimelerin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Ayrıca w kelimesini içeren denklik sınıfını $[w]_{\wp}$ ile gösterirsek, bu denklik sınıfı üzerindeki çarpma işlemi

$$[w_1]_{\wp}[w_2]_{\wp} = [w_1 w_2]_{\wp}$$

şeklinde tanımlanır ve bu çarpma işleminin iyi tanımlı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu çarpma işlemi altında, tüm denklik sınıflarının kümesi bir grup olur. Bu grup $G(\wp)$ ile gösterilip, $G(\wp)$ grubunun birim elemanı $[1]_{\wp}$ ile ifade edilir.

Eğer $G \cong G(\wp)$ ise G grubu $\wp$ ile *sunuluyor* (ya da $\wp$ sunuşunun temsil ettiği grup G dir) denir. Şimdi $N = \{[r] : r \in R\}$ kümesini grubun normal kapanışı olarak tanımlarsak, aşağıdaki teorem elde edilir.

2.2.2 Teorem:

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

dir.

İspat: $\wp$ sunuşunun temsil ettiği $G(\wp)$ grubu ve X kümesi için,

$$\psi_0 : X \to G(\wp)$$
$$x \mapsto [x]_{\wp}$$

dönüşümünü tanımlayalım. Evrensel Dönüşüm Özelliği ([15, 35]) gereği, bu dönüşümün genişlemesi olan

$$\psi : F(X) \to G(\wp)$$
$$[w] \mapsto [w]_{\wp}$$

biçiminde bir tek homomorfizma vardır ve de $\psi_{|X} = \psi_0$ (ψ nin X üzerindeki kısıtlanışı) dır. Burada ψ homomorfizması örtendir. Ayrıca $Çek\psi = N$ dir. Dolayısıyla 1. İzomorfizma Teoremi gereği

$$G(\wp) \cong F(X)/N$$

bulunur. □

2.2.3 Örnek: X kümesi üzerindeki serbest grubun sunuşu $\wp = \langle X; \ \rangle$ şeklindedir. Burada dikkat edilirse bağıntı kelimelerinin kümesi R boş kümedir.

2.2.3 Monoid Sunuşları

M bir monoid ve A da bu monoidin üreteç kümesi olmak üzere, A^+ kümesi A üreteç kümesindeki elemanlarla oluşturulan en az *bir* uzunluklu kelimelerin kümesi olarak tanımlanır. Bununla beraber monoidler için tanımlanan kelimeler ise $A^* = A^+ \cup \{1\}$ kümesinden alınır.

2.2.4 Tanım: A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi) ve $U \subseteq A^* \times A^*$ olacak şekilde U alt kümesi, bağıntı kelimelerinin bir kümesi olsun. Bu durumda

$$\wp_M = [\, A \,;\, U \,]$$

ikilisine bir *monoid sunuşu* denir. Gruplarda olduğu gibi A ve U kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_M$ sunuşu da sonludur.

Aşağıdaki verilecek teoremlerde önemli bir yer oluşturan "*kongrüans*" terimini açıklayalım:

M bir monoid (S bir yarı grup) ve ρ, M üzerindeki (veya S) bir denklik bağıntısı olsun. Her x, y, $s \in M$ (veya S) için $(x, y) \in \rho \Rightarrow (xs, ys) \in \rho$ oluyor ise ρ bağıntısına bir *sağ kongrüans* bağıntısı denir. Benzer olarak, her x, y, $s \in M$ için, $(x, y) \in \rho \Rightarrow (sx, sy) \in \rho$ oluyor ise bu ρ bağıntısına bir *sol kongrüans* bağıntısı denir. Eğer ρ bağıntısı hem *sağ* hem de *sol kongrüans* oluyor ise bu ρ bağıntısına *kongrüans* bağıntısı denir. (Yada her $(x_i, y_i) \in \rho$ $(i = 1, 2)$ için,
$(x_1, y_1).(x_2, y_2) = (x_1x_2, y_1y_2) \in \rho$ ise ρ bağıntısına *kongrüans* bağıntısı denir).

2.2.5 Teorem: M bir monoid, A da M için bir üreteç kümesi ve ρ, A^* kümesi üzerinde U bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$M \cong A^* / \rho$$

dir.

2.2.4 Yarı Grup Sunuşları

Yarı grup ve yarı grup sunuşları, grup ve monoid cebirsel yapılarına göre çalışılması daha zor yapılardır. Yarı grup sunuşlarında genel olarak iki tip problem vardır. Birincisi verilen bir yarı grubun sunuşunu bulmak, diğeri ise verilen bir sunuş tarafından temsil edilen yarı grubu bulmaktır. Bu yarı grubun belirlenmesinden sonra bu yarı grubun birçok cebirsel özelliğe sahip olup olmaması da yarı grup teoride çalışılan önemli bir konudur.

2.2.6 Tanım: A boştan farklı bir küme (*üreteç kümesi*) ve $R \subseteq A^+ \times A^+$ kümesi, $u, v \in A^+$ için $(u,v) \in R$ (ki bu genellikle $u = v$ şeklinde gösterilir) elemanlarından oluşan bir *bağıntı kümesi* olsun. Bu durumda $A = \{a_1, a_2, ..., a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, ..., u_n = v_n\}$ için,

$$\wp_S = [A; R] = [a_1, ..., a_m \ ; u_1 = v_1, ..., u_n = v_n]$$

ikilisine bir *yarı grup sunuşu* denir. Eğer A kümesi sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarı gruba *sonlu üreteçlidir*, A ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise $\wp_S$ sunuşunun temsil ettiği yarı gruba *sonlu sunumludur* denir.

2.2.7 Tanım: $\wp_S = [A; R]$ bir yarı grup sunuşu ve $w_1, w_2 \in A^+$ olsun. Eğer $\alpha, \beta \in A^+$ ve $(u,v) \in R$ (ya da $(v,u) \in R$) için $w_1 = \alpha u \beta$ ve $w_2 = \alpha v \beta$ oluyorsa, w_2 *kelimesi* w_1 *kelimesinden elde ediliyor* denir. Ayrıca w_1 ve w_2 kelimeleri arasında, $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n \in A^+$ olmak üzere, $w_1 = \gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_n = w_2$ şeklinde sonlu bir dizi varsa (ki burada her bir γ_{i+1} , γ_i ' den R bağıntısı ile elde edilir), $w_1 = w_2$ bağıntısı R bağıntısının (veya alternatif olarak $\wp_S$ sunuşunun) bir *sonucudur* denir.

Herhangi bir w kelimesinin $\wp_S$ sunuşuna bağlı olarak denklik sınıfı $[w]_{\wp_S}$ biçimindedir.

2.2.8 Teorem: S bir yarı grup, A kümesi S için bir üreteç kümesi ve ρ , A^+ kümesi üzerinde R bağıntı kümesini içeren en küçük kongrüans olsun. Bu durumda

$$S \cong A^+/\rho$$

dir.

Sunuş ve onun temsil ettiği yarı grup çalışılırken aşağıdaki sonucu kullanmak gerekir.

2.2.9 Teorem: $\wp_S = [A; R]$ bir yarı grup sunuşu ve $S \cong A^+/\rho$ ise bu sunuşun temsil ettiği yarı grup olsun. $w_1, w_2 \in A^+$ için, $w_1 = w_2$ bağıntısının S içinde sağlanması için gerek ve yeter koşul onun $\wp_S$ nin bir sonucu olmasıdır.

2.2.10 Örnek: (a) [a ; $a^2 = a$] sunuşunun temsil ettiği yarı grup $\{a\}$ ile üretilen tekil yarı gruptur.

(b) [a ; $a^{n+r} = a^r$] sunuşunun temsil ettiği yarı gruba n+r-1 mertebeli *devirli* (monojenik) *yarı grup* denir.

Not: Her yarı grup sunuşu aynı zamanda bir monoid sunuşu haline getirilebilir. Örneğin [A ; R] sunuşunun temsil ettiği yarı grup S olsun. Bu yarı gruba birim eleman eklenerek [A ; R] sunuşunun temsil ettiği bir monoid elde edilir. Eğer S yarı grubu $e \in A^+$ ile temsil edilen bir birim eleman içeriyorsa bu durumda [A ; R , e = 1] sunuşu S için bir monoid sunuşu olacaktır.

Şimdi $[B\ ;\ Q]$ sunuşunun temsil ettiği monoidi M olarak alalım. O halde

$$[B, e\ ;\ Q', e^2 = e, eb = be = b\ (b \in B)]$$

sunuşu M için bir yarı grup sunuşudur. (Burada Q' bağıntı kümesi Q bağıntı kümesindeki $w = 1$ formundaki her bir bağıntının $w = e$ bağıntısıyla yer değiştirildiği bir kümedir).

Bununla birlikte $< A\ ;\ R >$ sunuşunun temsil ettiği grup G iken,

$$[A, A^{-1}\ ;\ R, aa^{-1} = a^{-1}a = 1\ (a \in A)]$$

sunuşu G için bir monoid sunuşudur. (Burada $A^{-1} = \{a^{-1};\ a \in A\}$ kümesi A dan farklı ama A nın elemanları ile bire-bir eşlemeli yeni bir kümedir).

2.2.5 Tietze Dönüşümleri

$\wp = [A;R]$ bir yarı grup sunuşu olmak üzere, bu sunuş üzerinde aşağıda verilen maddeler Tietze dönüşümlerini oluşturur [64].

(T1) $u = v$ bağıntısı $[A;R]$ sunuşunun bir sonucu ise (diğer bir deyişle R bağıntı kümesindeki bağıntılardan elde edilebiliyorsa), bu bağıntı $[A;R]$ sunuşuna eklenir.

(T2) (T1) dönüşümünün tersi uygulanır.

(T3) Herhangi bir $w \in A^+$ için, $[A;R]$ sunuşuna yeni bir b üreteç elemanı ve $b = w$ bağıntısı eklenir.

(T4) (T3) dönüşümünün tersi uygulanır.

Aşağıda verilen teoremin ispatı Ruškuc tarafından [64] de ispatlanmıştır.

2.2.11 Teorem (Tietze Teoremi): İki sonlu sunuşun aynı yarı gruba ait olabilmeleri için gerek ve yeter koşul bunlardan birine sonlu sayıda (T1), (T2), (T3) ve (T4) dönüşümlerinin uygulanmasıyla diğerinin elde edilmesidir.

Yarı gruplar için verilen bu dönüşümler monoid yapısı üzerinde de aynı şekilde uygulanır. Grup yapısı için ise [35] kaynağına bakılabilir.

2.3 Karar Verme Problemleri

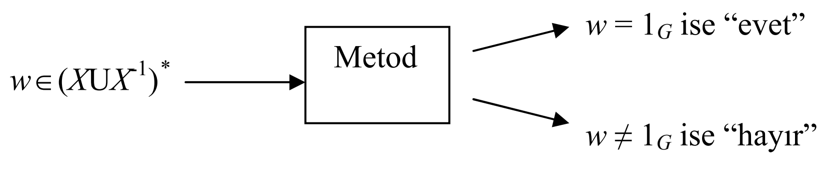
Grup, monoid ve yarı gruplar için tanımlanan sunuşlarının kullanım amaçları, sadece ait oldukları cebirsel yapıların mertebelerini bulmak veya bu cebirsel yapıların genel bir karakterizasyonunu yapmak için değildir. Özellikle son çeyrek yüzyıl içerisinde, cebirsel yapıların sahip oldukları sunuşlar kullanılarak bu yapılar üzerinde tanımlanan bazı özel *problemlerin* çözümleri için de geniş çalışma alanları oluşturulmuştur.

Problem, ele alınan bir soruya karşılık bu sorunun cevabını veren bir algoritmanın (veya metodun) bulunup bulunmamasıdır.

Cevabı "evet" veya "hayır" olan problemlere *karar verme problemleri* denir. Eğer verilen bir problemi çözmek için bir algoritma (veya metod) varsa bu karar verme problemine *çözülebilir*, böyle bir algoritma yoksa o zaman da bu karar verme problemine *çözülemez* denir.

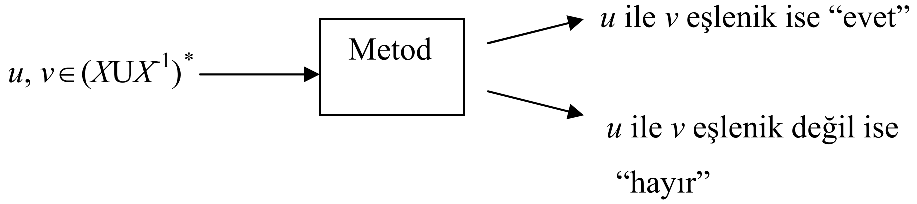
Aşağıdaki üç temel karar verme problemi 1911 yılında Max Dehn tarafından ortaya atılmıştır [1, 2].

- **<u>Kelime Problemi</u>:** G sonlu sunuşlu bir grup olsun. G nin üreteçleri ile oluşturulan keyfi bir w kelimesinin bu grubun birimine eşit olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir.

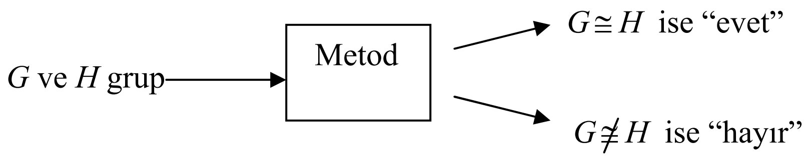


Burada w sembolü ile X üreteç kümesindeki elemanlar ve bunların terslerinden de oluşan bir kelimeyi gösterelim. Eğer w kelimesi grubun birimini veriyorsa cevabımız "evet", grubun birimini vermiyorsa cevabımız "hayır" dır. İşte bu şekilde bir metod veya algoritma bulunabilirse bu sonlu sunumlu G grubu için kelime problemi çözülebilirdir denir. Örneğin [62] de Rotman serbest grupların kelime probleminin çözülebilirliğini gösteren güzel bir algoritma vermiştir.

- **<u>Eşlenik Problemi</u>:** G sonlu sunuşlu bir grup olsun. G nin üreteçleri ile oluşturulan keyfi u ve v kelimelerinin G nin eşlenik elemanları olup olmadığına karar veren bir algoritmanın varlığının araştırılması problemidir.



- **<u>İzomorfizma Problemi</u>:** Sonlu sunuşa sahip herhangi iki grubun birbirine izomorf olup olmadığına karar veren bir algoritmanın var olup olmaması problemidir.



Birleştirilmiş grup ve yarı grup teori konusunda çalışan birçok matematikçi, bu problemlerin her birisiyle ayrı ayrı ilgilenip bazılarının yeni uzantılarını (genelleştirilmiş kelime problemi veya üyelik problemi) elde etmişlerdir. Ayrıca gruplar üzerideki *kuvvet* ve *mertebe* problemleri de son yıllarda önem kazanan yapılar arasındadır. Bu problemlerin özellikle kelime ve eşlenik problemleriyle olan ilişkileri literatürde mevcuttur.

Kelime problemi birçok grup sunuşu için çözülebilirdir. Örneğin en fazla bir bağıntısı olan sunuşlar ve her bir a ve b üreteç elemanı için, $ab = ba$ bağıntısını içeren sunuşlar için kelime problemi çözülebilirdir. Ayrıca kelime problemi çözülebilen gruplara bir başka örnek olarak basit gruplar verilebilir. Bilindiği gibi sonlu sunuşlu herhangi bir grup için eşlenik probleminin çözülebilirliği kelime probleminin çözülebilirliğini gerektirmektedir. Ancak bu durumun tersi doğru değildir. Yani kelime problemi çözülebilen fakat eşlenik problemi çözülemeyen grup örnekleri mevcuttur.

Kelime probleminin *Formal Dil Teorisi* ile olan ilişkisi de son yıllarda çalışılan konular arasındadır. Bununla ilgili bilgilere [55, 63] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

2.4 Yeniden Yazma Sistemi

Bu yapı her ne kadar matematiğin cebirsel kısmında çalışılan bir konu olsa da, anlamı aynı fakat dili farklı olan değişik başlıklar altında birçok bilim dalında da bulunabilir. Biz ise genel bir tabirle, bu *yeniden yazma sistemi* ile verilen yapıyı (bizim için bu yapılar kelimelerdir) belli kurallar çerçevesinde başka yapılara dönüştüreceğiz (yani verilen yapıyı yeniden yazacağız).

Yeniden yazma sistemi, özellikle monoid ve yarı gruplardaki kelime problemleri için temel bir metottur. Çünkü bu tip yapılar gruplara göre biraz daha genel oldukları için (yani monoidler için bir elemanın tersinin ve yarı gruplar için de buna ek olarak birim elemanının bulunmaması) bu cebirsel yapılar üzerinde tanımlanacak kelime probleminin çözülebilirliği için gruplara göre başka özelliklerin de aranmasını gerektirmektedir. Örneğin, gruplarda elemanların temsilci kümesini oluşturarak verilen bir kelimenin bu kümedeki grubun birimine eşit olup olmadığını araştırıyorduk. Ancak monoidlerde, bu temsilci kümesini oluşturabilmek için verilen bir kelimenin indirgendiği tek bir kelime bulmamız gerekmektedir. Eğer indirgenen kelime tek değil ise temsilci kümesinden alınan iki eleman aynı kelimeyi temsil edeceğinden, ki bu da temsilci kümesinin özelliğine uymaz, bu durumda monoid için kelime problemi çözülemezdir. Bu durumu daha ayrıntılı incelemek için ilk olarak temel tanımları verelim.

Sonlu bir X alfabesi için, X^* bu alfabedeki harflerden oluşan bütün kelimelerin kümesi ve λ boş kelime olsun. X üzerindeki yeniden yazma kuralı aslında

$(l, r) \in X^* \times X^*$ şeklindeki sıralı çiftlerdir. Bu kural ($l \rightarrow r$) şeklinde gösterilir. Buradaki l kelimesi *sol yan*, r kelimesi ise *sağ yan* diye adlandırılır. *Yeniden yazma sistemi X üzerindeki yeniden yazma kurallarının bir kümesidir* ve bu sistem R ile gösterilir. X^* kümesindeki kelimeler arasındaki bu bağıntı ($\rightarrow_R$) için aşağıdaki kural tanımlanır:

X üzerindeki u ve v *pozitif kelimeler* olmak üzere, $u \rightarrow_R v$ olması için gerek ve yeter koşul $x, y \in X^*$ ve $(l \rightarrow r) \in R$ için $u = xly$ ve $v = xry$ olmasıdır.

2.4.1 Tanım: Bir $u \in X^*$ kelimesi için $u \rightarrow_R v$ olacak şekilde bir $v \in X^*$ kelimesi varsa bu u kelimesine *indirgenir kelime* denir. Aksi durumda ise (yani $u \rightarrow_R v$ olacak biçimde bir v kelimesi yoksa) bu u kelimesine *indirgenemez kelime* denir.

2.4.2 Önerme [12, 13]: Tanımlanan bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı, geçişmeli kapanışı olan $\rightarrow^*_R$ kuralı, aslında R tarafından üretilen bir indirgeme bağıntısıdır.

2.4.3 Tanım: $u, v \in X^*$ için eğer $u \rightarrow^*_R v$ bağıntısı varsa ve v kelimesi indirgenemez ise, bu v kelimesine u kelimesinin *normal formu* denir.

2.4.4 Tanım: Bu $\rightarrow_R$ bağıntısının yansımalı, simetrik ve geçişmeli kapanışı, ki bunu $\leftrightarrow^*_R$ ile gösterelim, R tarafından üretilen bir *Thue kongrüans*tır [12]. Bir $w \in X^*$ kelimesi için w nin kongrüans sınıfı $\{u \in X^* \mid u \leftrightarrow^*_R w\}$ olup, bu denklik sınıfı $[w]_R$ ile gösterilir. Ayrıca $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bütün kongrüans sınıflarının kümesini gösterir. u ve v kelimelerinin kongrüans sınıflarının çarpımı

$$[u]_R[v]_R = [uv]_R$$

şeklindedir. Bu çarpma işlemi birleşme özelliğini sağlar ve $[\lambda]_R$ birim elemandır. Böylece $X^* / \leftrightarrow^*_R$ bir monoiddir ve $[X ; R]$ çifti bir *monoid sunuşu*dur. Bu sunuştaki üreteç kümesi X sonlu ise bu monoide sonlu üreteçli monoid, hem X hem de R sonlu ise o zaman bu monoide *sonlu sunumlu monoid* denir.

Bir R yeniden yazma sistemi için kelime problemi, *verilen iki u ve v kelimeleri için* $u \leftrightarrow^{*}_{R} v$ *nin sağlanıp-sağlanmamasıdır*. Yani bu iki kelimenin, belli bir kural altında birbirine denk olup olmamasının incelenmesidir. Bunun için öncelikle bazı tanımları verelim.

R yeniden yazma sistemi olmak üzere,

2.4.5 Tanım:

I) R sistemi için kelimeler arasında

$$u_1 \rightarrow_R u_2 \rightarrow_R u_3 \rightarrow_R \ldots$$

şeklinde sonsuz bir zincir yoksa, bu yeniden yazma sistemine *Noetherian* ya da *sona ermiş* denir.

II) R sisteminden alınacak bütün u, v, $w \in X^{*}$ kelimeleri için,

$$u \rightarrow^{*}_{R} v \;\text{ ve }\; u \rightarrow^{*}_{R} w \;\text{ iken }\; v \rightarrow^{*}_{R} z \;\text{ ve }\; w \rightarrow^{*}_{R} z$$

olacak şekilde bir $z \in X^{*}$ kelimesi varsa, bu yeniden yazma sistemine *elmas kuralı* (*confluent*) denir. Bu durum şekilsel olarak aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{tikzcd} & v \arrow[dr, "*_R"] & \\ u \arrow[ur, "*_R"] \arrow[dr, "*_R"'] & & z \\ & w \arrow[ur, "*_R"'] & \end{tikzcd}$$

Şekil 2.1

2.4.5 Tanım'a ek olarak, verilen bir sistemden yeni özellikler de türetilebilir.

2.4.6 Tanım: Hem Noetherian hem de confluent özelliklerini sağlayan yeniden yazma sistemine *tam* (*complete* ya da *convergent*) denir.

Tam sistemler kullanılarak aşağıdaki önemli sonuç elde edilir:

2.4.7 Teorem [12]: Eğer R yeniden yazma sistemi tam ise, bu sistem içindeki her bir kelime tek bir normal forma sahip olduğundan, bu R yeniden yazma sistemi *çözülebilir kelime problemine* sahiptir.

2.4.7 Teorem'in ispatında düşünce tarzımız, verilen sistem tam olduğu için kelimelerin sonlu sayıda adımla başka kelimelere indirgendiği ve indirgenen bu kelimelerin de birbirine eşit olduğu şeklindedir. Eğer indirgenen bu kelimeler birbirine eşit olmasaydı, bu durumda bir kelime farklı iki şekilde ifade edilemeyeceğinden, bu sistem için kelime problemi çözülemez olurdu.

Bir $[X\,;R]$ sunuşunun yeniden yazma sisteminin tam olduğunu göstermek için iki adım uygulanır. Bunlardan ilki bu sistemin sona ermiş olduğunu göstermektir. Bunun için X^* daki kelimeler arasında bir takım indirgeme sıralaması olması gerekir (uzunluk, ağırlık, soldan sözlük sıralama, uzunluk ve soldan sözlük sıralaması gibi). İkinci adım ise bu yeniden yazma sisteminin confluent olduğunu göstermektir. Bunun için ise bütün *kritik çiftlerin* çözülebilmesi gerekir. Buradaki *kritik çift* ile anlatılmak istenen; u, v, w, p ve q kelimeleri X^* da olmak üzere $uv = p$ ve $vw = q$ (v boş kelimeden farklı) bağıntılarından elde edilen $\{pw,\ uq\}$ kelime çiftleridir. Bu $\{pw,\ uq\}$ *kritik çiftin çözülebilir olması* demek ise,

$$pw \rightarrow^{*}_{R} z \quad \text{ve} \quad uq \rightarrow^{*}_{R} z$$

olacak şekilde bir $z \in X^*$ kelimesinin elde edilebilir olması demektir.

Bir sistem ilk incelendiğinde confluent değil ise bu durumda bu sisteme Knuth-Bendix algoritması uygulanarak sistemin confluent haline getirilmesi sağlanır ([13]). Bu yeniden yazma sistemi sadece Birleştirilmiş Grup ve Yarı Grup Teoride değil aynı zamanda Halka Teoride de önemli bir yere sahiptir. Örneğin tam yeniden yazma sisteminin değişmeli olamayan Gröbner taban teorisiyle olan ilişkisi son yıllarda çalışılan konular arasındadır. Bu ilişkiye örnek olarak [23] ve [31] kaynakları verilebilir.

2.5 Sonlu Türetilmiş Tip Özelliği

2.5.1 Özelliğin Tanıtımı

Tam yeniden yazma sistemine sahip sonlu sunumlu bir monoid için kelime probleminin çözülebilir olduğu bir önceki alt bölümde anlatılmıştı. Bilindiği gibi bu sonuç, alınan keyfi iki kelimenin sonlu adımda tek bir indirgenmiş kelimeye sahip olması gerçeği ile mümkündür. Ancak bu sonucun tersi yıllardır çözülemeyen bir problem olarak kalmıştır.

Problem: "Çözülebilir kelime problemine sahip her sonlu sunumlu monoid sonlu ve tam yeniden yazma sistemi ile ifade edilen bir sunuşa sahip midir? "

Bu problem sonunda 1987 yılında Squier tarafından negatif olarak yanıtlandı [68]. Squier bu çalışmasında çözülebilir kelime problemine sahip öyle sonlu sunumlu monoidler vardır ki bu monoidlerin sunuşları sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip olmadığını göstermiştir. Bu çalışmadaki yaklaşım homolojik cebire dayanmaktadır ve gösterilmiştir ki sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoid aynı zamanda homolojik sonluluk durumu olan FP_3 (bu ve diğer homolojik sonluluk durumlarına bu tezde yer verilmemiş olup ancak bu alanda çalışan diğer matematikçiler için oldukça önemli yapılardır) özelliğini de sağlamaktadır. Bu gereklilik ise aşağıdaki problemi ortaya çıkarmıştır.

"Acaba FP_3 özelliği, çözülebilir kelime problemine sahip sonlu sunumlu bir monoidin sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için sadece gerekli değil aynı zamanda yeterli midir?"

Bu problem için de hala çözüm aranırken Kobayashi, Squier'in [68] deki çalışmasını FP_3 özelliğine göre daha güçlü bir sonluluk durumu olan FP_∞ özelliği için geliştirmiş olup, sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin FP_∞ homolojik özelliğini sağladığını ispatlamıştır [40]. Bu sonuç da doğal olarak bu ilişkinin tersinin doğru olup olmadığını doğurmuştur. Bu durumun sağlanmadığı [67] de, sonlu türetilmiş tip özelliğinden yararlanılarak gösterilmiştir. Squier [67] deki bu çalışmasında *sonlu türetilmiş tip* özelliğini literatüre kazandırmış; sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip bir monoidin bu özelliği sağlaması gerektiği gibi önemli bir sonucu ispatlamıştır.

Bu sonlu türetilmiş tip özelliğinin altında iki ana fikir yatmaktadır. Bunlardan ilki, her bir monoid sunuşuna bir grafın ilişkilendirilmiş olmasıdır. İkinci ana fikir ise, bu graftaki bütün yolların kümesi üzerindeki denklik bağıntılarının özel bir sınıfını (koleksiyonunu) belirlemeye dayanmaktadır. Bu denklik bağıntıları; 2.5.2 Alt Bölüm'de ayrıntılı olarak açıklanacak olan "homotopi bağıntıları" olarak adlandırılır.

Ayrıca Squier [68] deki çalışmasında,

üreteç elemanları: $a, b, t, x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_k$;

bağıntıları :
$$
\begin{aligned}
& at^n b = \lambda, \ (n \geq 0) \quad (P_n) \\
& x_i a = atx_i, \quad (A_i) \\
& x_i t = tx_i, \quad (T_i) \\
& x_i b = bx_i, \quad (B_i) \\
& x_i y_i = \lambda, \quad (Q_i) \ (1 \leq i \leq k)
\end{aligned}
$$

biçiminde olan sonlu sunumlu $S_i \ (i \geq 1)$ monoidleri tanımlamıştır ve göstermiştir ki

- her bir $S_i \ (i \geq 1)$ monoidi için kelime problemi çözülebilirdir,
- her bir $i \geq 2$ için, S_i monoidleri *FP₃* homolojik sonluluk durumunu sağlamaktadır.

Dolayısıyla $S_i \ (i \geq 2)$ monoidlerinin hiçbiri sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip değildir. Oysa ki S_1 monoidi FP_3 özelliğini hatta FP_∞ homolojik sonluluk durumunu sağlamasına rağmen bu monoid için sonlu ve tam yeniden yazma sitemine sahip bir sunuş oluşturulamamıştır. S_1 sonlu sunumlu monoidi için elde edilen bu sonuçları aşağıdaki gibi özetleyebilirz:

- Çözülebilir kelime problemine sahiptir.
- FP_∞ homolojik sonluluk durumunu sağlamaktadır.
- Sonlu ve tam bir sunuşa sahip değildir.

Sonlu türetilmiş tip özelliğinin homolojik ve topolojik sonluluk durumlarıyla olan ilişkileri [16, 18, 19, 41, 42, 43, 52, 58] kaynaklarında ayrıntılı olarak çalışılmıştır.

2.5.2 Temel Tanım ve Sonuçlar

$[X\ ;\ \mathbf{r}]$ bir monoid sunuşu olsun. Her bir $R \in \mathbf{r}$ elemanı $R_{+1} = R_{-1}$ biçimindedir. $[X\ ;\ \mathbf{r}]$ ile tanımlanan monoid X^* ın $\mathbf{r}$ ile üretilen en küçük kongrüans ile olan bölümüdür.

$[X\ ;\ \mathbf{r}]$ in belirttiği graf $\Gamma = \Gamma(X;\mathbf{r})$ olmak üzere, bu grafın köşeleri X^* ın elemanları ve kenarları $e = (U, R, \varepsilon, V)$ $(U, V \in X^*, R \in \mathbf{r}, \varepsilon = \pm 1)$ biçimindeki dörtlülerdir. Bir e kenarının başlangıcı, bitişi ve tersi sırasıyla $\iota(e) = UR_{\varepsilon}V$, $\tau(e) = UR_{-\varepsilon}V$ ve $e^{-1} = (U, R, -\varepsilon, V)$ şeklinde tanımlanır. Ayrıca X^* ın Γ üzerindeki iki-yanlı hareketi şu şekilde tanımlanır. Eğer $W, W' \in X^*$ ise bu durumda Γ' nın herhangi bir V köşesi için, $W.V.W' = WVW'$ (X^* içindeki çarpım) ve Γ' nın herhangi bir $e = (U, R, \varepsilon, V)$ kenarı için $W.e.W' = (WU, R, \varepsilon, VW')$ dir. Bu hareket Γ daki yollara da genişletilebilir.

$P(\Gamma)$ kümesi Γ daki bütün yolların kümesi ve

$$P^{(2)}(\Gamma) = \{(p, q) : p, q \in P(\Gamma),\ \iota(p) = \iota(q),\ \tau(p) = \tau(q)\}$$

olsun.

2.5.1 Tanım: Aşağıdaki şartları sağlayan $\simeq \subset P^{(2)}(\Gamma)$ denklik bağıntısına *homotopi bağıntısı* denir:

a) Γ nın e_1 ve e_2 kenarları için

$$(e_1.\iota(e_2))(\tau(e_1).e_2) \simeq (\iota(e_1).e_2)(e_1.\tau(e_2))$$

dir.

b) Eğer $p \simeq q$ $(p, q \in P(\Gamma))$ ise bu durumda her $U, V \in X^*$ için $U.p.V \simeq U.q.V$ dir.

c) Eğer $p, q_1, q_2, r \in P(\Gamma)$ yolları $\tau(p) = \iota(q_1) = \iota(q_2)$, $\tau(q_1) = \tau(q_2) = \iota(r)$ ve $q_1 \simeq q_2$ yi sağlarsa bu durumda $pq_1r \simeq pq_2r$ dir.

d) Eğer $p \in P(\Gamma)$ ise bu durumda $pp^{-1} \simeq 1$ dir. (Burada 1 ile $\iota(p)$ köşesindeki boş yol ifade edilir).

$P(\Gamma)$ üzerindeki bütün homotopi bağıntıların bir topluluğu keyfi kesişim altında kapalıdır. Buradan $P^{(2)}(\Gamma)$ nın bir homotopi bağıntısı olduğu anlaşılır. Böylece $C \subset P^{(2)}(\Gamma)$ ise bu durumda $P(\Gamma)$ üzerinde C yi içeren bir tek *en küçük* homotopi bağıntısı $\simeq_C$ vardır.

2.5.2 Tanım: $[X\ ;\ \mathbf{r}]$ bir monoid sunuşu ve Γ ilgili graf olsun. $P^{(2)}(\Gamma)$ yı bir homotopi bağıntısı olarak üreten sonlu bir $C \subset P^{(2)}(\Gamma)$ alt kümesi varsa bu durumda $[X\ ;\ \mathbf{r}]$ sunuşu *sonlu türetilmiş tipe* (*FDT*) sahiptir denir. Bu durum $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma)$ şeklinde ifade edilir.

Eğer sonlu sunuşlu bir *M* monoidinin herhangi bir sonlu sunuşu *FDT* ye sahipse bu *M* monoidi *FDT* ye sahiptir.

2.5.3 Sonlu Türetilmiş Tip Özelliğinin Çalışıldığı Yapılar

Sonlu türetilmiş tip özelliği monoidin sonlu sunuşundan bağımsız olduğundan hangi tip monoid yapılarının bu özelliği koruduğu önemlidir. Bu yöndeki çalışmalar özet olarak aşağıda verilmiştir.

- *A* ve *B* sonlu sunuşlu monoidler olmak üzere *A*B* nin *FDT* ye sahip olması için gerek ve yeter koşul hem *A* hem de *B* nin *FDT* ye sahip olmasıdır [54].
- *FDT* özelliği monoidlerin yarı direkt çarpımı altında kapalıdır [69].
- *FDT* ye sahip monoidlerin küçük genişlemesi de *FDT* ye sahiptir [70].
- Tamamlayıcısı *FDT* ye sahip bir monoidin ideali olan bir alt monoid *FDT* ye sahiptir [59].
- Sonlu sunumlu Rees matrix yarı grubu $M[S;I,J,P]$ *FDT* ye sahip ise bu durumda *S* yarı grubu da *FDT* ye sahiptir. Eğer *S* bir monoid ve *S* nin bir ideali (*P* nin elemanlarıyla üretilen) *FDT* ye sahip ise bu durumda $M[S;I,J,P]$ Rees matrix yarı grubu da *FDT* ye sahiptir [49].

- S yarı grubu üzerinde bir kongrüans ρ olmak üzere ($S \times S$ nin bir alt yarı grubu olarak), eğer ρ *FDT* ye sahip ise bu durumda *S* de *FDT* ye sahiptir [71].
- *FDT* ye sahip bir *S* yarı grubunun bir büyük ideali de *FDT* özelliğine sahiptir [48].

2.6 Cayley Graflar

Cayley graflar grup ve yarı grup teoride üzerinde en çok çalışılan geometrik bir yapıdır. Bu yapı, gruplar üzerinde çalışılan ve birçok problemin çözümünde kullanılan iyi bir metot olmasının yanı sıra monoid ve yarı gruplar çalışıldığında da başvurulan bir metottur. Cayley grafların gruplar üzerinde çalışıldığı kaynaklar olarak [45, 47] verilebilir. Bu graflar, tezin 5. Bölümü için temel yapı taşlarından biridir. Çünkü Cayley graflar yardımıyla monoidlerin wreath çarpımının sunuşu elde edilmiş ve bu sunuş üzerinde, maksimal ağaç kavramı kullanılarak, üreteç ve bağıntı kümesindeki elemanlar arasında silme işlemi yapılmıştır. Bu ise bize, bu sunuşun minimal üreteç elemanına sahip olması imkânını vermiştir. Cayley graf ile ilgili ayrıntılı bilgilere [7] ve [44] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.6.1 Tanım: $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{e}$ birbirinden farklı iki küme ve bu kümeler arasında

$$\iota : \boldsymbol{e} \to \boldsymbol{v}, \qquad \tau : \boldsymbol{e} \to \boldsymbol{v} \quad \text{ve} \quad {}^{-1} : \boldsymbol{e} \to \boldsymbol{e}$$

şeklinde her $e \in \boldsymbol{e}$ için, $\iota(e) = \tau(e^{-1})$, $(e^{-1})^{-1} = e$ ve $e \neq e^{-1}$ koşullarını sağlayan fonksiyonlar olsun. $\boldsymbol{v}$ ve $\boldsymbol{e}$ kümelerinden ve $\iota, \tau, {}^{-1}$ fonksiyonlarından oluşan ($\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{e}$, $\iota, \tau, {}^{-1}$) yapısına *graf* denir ve Γ notasyonu ile gösterilir. Burada $\boldsymbol{v}$ kümesine *köşe kümesi*, $\boldsymbol{e}$ kümesine *kenar kümesi*, $\iota, \tau, {}^{-1}$ fonksiyonlarına da sırasıyla *başlangıç*, *bitiş* ve *ters fonksiyon* denir. Bir Γ grafında $\boldsymbol{e}$ kanar kümesindeki e, e^{-1} kenar çiftlerinden sadece birinin seçilmesiyle oluşturulan kümeye Γ grafının *yönlendirilmiş kenar kümesi* denir ve $\boldsymbol{e}^{+}$ ile gösterilir. Kenar kümesi $\boldsymbol{e}^{+}$ olan grafa ise *yönlendirilmiş graf* denir. $e_1, e_2, ..., e_n$ kenarların sonlu bir dizisi olmak üzere, $1 \leq i \leq n-1$ için, $\tau(e_i) = \iota(e_{i+1})$ oluyorsa, bu diziye Γ grafı içinde bir *yol* denir. Verilen bir $e_1 e_2 ... e_n$

yolu için, $\iota(e_1) = \tau(e_n)$ oluyor ise bu yola *kapalı yol* denir. Ayrıca bir Γ grafının içindeki herhangi iki köşeyi birleştiren bir yol var ise bu Γ grafına *bağlantılı graf* denir.

v kümesinin bir alt kümesi $\boldsymbol{v_1}$ ve ***e*** kümesinin bir alt kümesi de $\boldsymbol{e_1}$ olsun. Herhangi bir $e' \in \boldsymbol{e_1}$ elemanı için,

i) $\iota(e'), \tau(e') \in \boldsymbol{v_1}$ ve **ii)** $(e')^{-1} \in \boldsymbol{e_1}$

şartları sağlanıyorsa, $\boldsymbol{e_1}$ kenar kümesi ve $\boldsymbol{v_1}$ köşe kümesinden oluşan Γ' grafına Γ grafının *alt grafı* denir. Bağlantılı olan ve içinde boştan farklı basit kapalı yolu bulunmayan bir Γ grafına *ağaç* denir. Ayrıca bağlantılı bir Γ grafının ***T*** gibi bir alt grafı,

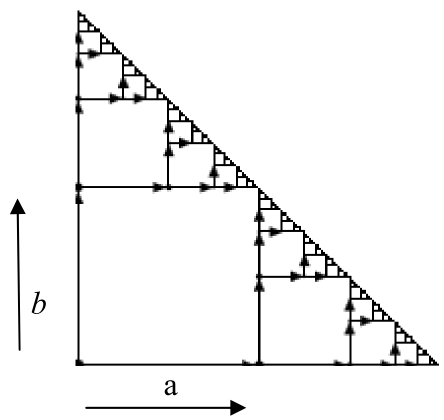
i) ***T*** bir ağaç,

ii) ***T*** nin köşe kümesiyle Γ grafının köşe kümesi aynı,

koşullarını sağlıyor ise, bu ***T*** ağacına *maksimal ağaç* denir.

2.6.2 Tanım: *M* bir monoid ve *A* kümesi de bu monoid için sonlu bir üreteç kümesi olsun. *M* monoidinin *A* üreteç kümesine göre Cayley grafı, köşe kümesi *M* ve kenarları bütün $m \in M$ ve $a \in A$ için, *m* köşesinden *ma* köşesine *a* ile etiketlenen yönlendirilmiş bir graftır.

2.6.3 Örnek: $\{a,b\}^*$ serbest monoidinin Cayley grafı



Şekil 2.2

biçimindedir. Burada yatay kenarlar *a* ve dikey kenarlar *b* ile etiketlenmiştir.

3. MONOİDLERİN SCHÜTZENBERGER ÇARPIMI İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

3.1 Giriş

Yeniden Yazma Sistemleri, 2.4 Alt Bölüm'de belirtildiği üzere, son yıllarda Matematik ve Teorik Bilgisayar alanında dikkat çeken konular arasında yer almaktadır [12]. Özellikle sonlu ve tam (*Noetherian* + *Confluent*) yeniden yazma sistemleri, karar verme problemlerinden üzerinde en çok çalışılanı olan kelime probleminin çözümünde kullanılan bir sistemdir. Diğer bir deyişle, yeniden yazma sistemi sonlu ve tam ise, bu sisteme sahip olan monoid için kelime problemi de *çözülebilirdir*. Ancak kelime problemi çözülebilir olan sonlu sunumlu bir monoidin, tam yeniden yazma sistemine sahip olup olmadığı, 2.5 Alt Bölüm'de belirtildiği gibi, Squier'in 1987 yılındaki çalışmasına kadar açık bir problemdi. Squier belirtilen bu çalışmasında bu problemi olumsuz olarak cevaplamıştır ve *çözülebilir kelime problemine sahip ancak sonlu ve tam yeniden yazma sistemine sahip olmayan sonlu sunuşlu monoidlerin varlığını göstermiştir* [67].

Ayrıca Kapur ve Narendran 1985 yılında,

$$\wp_1 = [a,b;aba = bab] \quad \text{ve} \quad \wp_2 = [a,b,c;ab = c, ca = bc, bcb = cc, ccb = acc]$$

sunuşlarının

- aynı monoidi temsil ettiğini,
- $\wp_2$ sunuşunun sonlu ve tam sunuşa sahip olduğunu,
- $\wp_1$ sunuşuna bağıntılar eklense bile bu sunuşun sonlu ve tam bir sunuşa sahip olamayacağını

göstermişlerdir [36].

Dolayısıyla, 2.5 Alt Bölüm'de bahsedildiği gibi, sonlu ve tam yeniden yazma sisteminin sağladığı çözülebilir kelime problemine sahip sonlu sunumlu monoidlerin hangi özellikleri sağladığı ve bunların belli bir takım problemler etrafında incelenmesi işlemi, çalıştığımız ana bilim dalı içerisinde önemli bir yer oluşturmaktadır. Bu yöndeki ilk adım olan ve tezin iki bölümünün temel taşı olan *sonlu türetilmiş tip* özelliği bir monoidin sonlu sunuşundan bağımsız olduğundan hangi tip monoid yapılarının bu özelliği koruduğu önemlidir. Bu yöndeki çalışmalar 2.5.3 Alt Bölüm'de özet olarak verilmiştir. Bu bölümde ise, belirtilen bu sonluluk özelliğinin, monoidlerin Schützenberger çarpımı altında kapalı olduğu gösterilmiştir.

3.2 Monoidlerin Schützenberger Çarpımı

Bu kısımda monoidler için önemli bir çarpım olan Schützenberger çarpımın tanımı ve daha sonra da bu çarpımın sunuşu verilmiştir. Bu çarpım ile ilgili bilgilere ve sonuçlara [8, 28, 29, 33] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.2.1 Tanım: A ve B iki monoid olmak üzere, $F \subseteq A \times B$, $a \in A$ ve $b \in B$ için,

$$aF = \{(ac, d) : (c, d) \in F\} \quad \text{ve} \quad Fb = \{(c, db) : (c, d) \in F\}$$

biçiminde iki küme tanımlayalım. Bu durumda A ve B nin *Schützenberger çarpımı*, $A \Diamond B$ ile gösterilip,

$$(a_1, F_1, b_1)(a_2, F_2, b_2) = (a_1 a_2, F_1 b_2 \cup a_1 F_2, b_1 b_2)$$

çarpımı ile tanımlanan $A \times P(A \times B) \times B$ kümesidir. (Buradaki $P(A \times B)$ kümesi $A \times B$ kümesinin kuvvet kümesini göstermektedir). Bu çarpım altında $A \Diamond B$, birimi $(1_A, \varnothing, 1_B)$ olan bir monoid oluşturur.

A ve B monoidlerinin sunuşları sırasıyla $\wp_A = [X\ ;\ \mathbf{s}]$ ve $\wp_B = [Y\ ;\ \mathbf{r}]$ olmak üzere $A \Diamond B$ nin sunuşu aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

3.2.2 Teorem [33]: A ve B monoidlerinin Schützenberger çarpımının sunuşunun üreteç kümesi

$$Z = X \cup Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$$

ve bağıntı kümesi

$$\begin{aligned}
&\mathbf{s},\ \mathbf{r};\\
&z_{a,b}^2 = z_{a,b}, \qquad z_{a,b}z_{c,d} = z_{c,d}z_{a,b};\\
&xz_{a,b} = z_{xa,b}x;\\
&z_{a,b}y = yz_{a,by};\\
&yx = xy,
\end{aligned}$$

$(x \in X,\ y \in Y,\ a,c \in A,\ b,d \in B)$ biçiminde tanımlanır.

$A \Diamond B$ nin yukarıdaki sonuçla verilen sunuşunu $\wp$ ile gösterelim. Bu bölümde $A \Diamond B$ nin sonlu üreteçliliğini korumak için A ve B sonlu monoid kabul edilmiştir.

3.3 Ana Teorem

Ana teoremin ifadesi ve ispatı için gerekli bazı notasyonları tanımlayalım.

Γ_A, Γ_B ve Γ grafları sırasıyla $\wp_A, \wp_B$ ve $\wp$ sunuşları ile ilişkili graflar ve Γ nın alt grafı olan Γ_{T_0} grafı da

$$T_0^1 : z_{a,b}^2 = z_{a,b} \qquad \text{ve} \qquad T_0^2 : z_{a,b}z_{c,d} = z_{c,d}z_{a,b}$$

bağıntıları ile ilişkili graf olsun. Ayrıca $\Gamma_{T_1}, \Gamma_{T_2}$ ve Γ_{T_3} grafları sırasıyla

$$T_1 : xz_{a,b} = z_{xa,b}x, \quad T_2 : z_{a,b}y = yz_{a,by} \quad \text{ve} \quad T_3 : yx = xy,$$

bağıntıları ile ilişkili olan ve Γ nın sırasıyla sadece $(U_1, T_1, \varepsilon_1, V_1), (U_2, T_2, \varepsilon_2, V_2)$ ve $(U_3, T_3, \varepsilon_3, V_3)$ kenarlarını içeren graflar olsun. Burada $U_1, V_1 \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $U_2, V_2 \in (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $U_3, V_3 \in (X \cup Y)^*$ ve $\varepsilon_i = \pm 1 (1 \le i \le 3)$ dir.

Bunlara ek olarak kabul edelim ki $\Gamma_{A,T_0}, \Gamma_{B,T_0}$ ve $\Gamma_{A,B}$ grafları Γ nın alt grafları olsun. Dolayısıyla

- Γ_{A,T_0} grafının kenarları $\Gamma_{T_0}, \Gamma_{T_1}$ ve Γ_A graflarının kenarlarının birleşimi,
- Γ_{B,T_0} grafının kenarları $\Gamma_{T_0}, \Gamma_{T_2}$ ve Γ_B graflarının kenarlarının birleşimi,
- $\Gamma_{A,B}$ grafının kenarları Γ_A, Γ_B ve Γ_{T_3} graflarının kenarlarının birleşimidir.

Bu bölümde elde edilen ana sonuç aşağıda verilmiştir.

3.3.1 Teorem (*Ana Teorem*): *A* ve *B* monoidlerinin Schützenberger çarpımı, $P^{(2)}(\Gamma)$ yı bir homotopi bağıntısı olarak üreten $C = C_A \cup C_B \cup C_{T_0} \cup (\bigcup_{l=1}^{6} C_l)$ kümesi ile sonlu türetilmiş tipe sahiptir. Burada

$$C_A \subset P^{(2)}(\Gamma_A), \quad C_B \subset P^{(2)}(\Gamma_B), \quad C_{T_0} \subset P^{(2)}(\Gamma_{T_0}),$$
$$C_1, C_2 \subset P^{(2)}(\Gamma_{A,T_0}), \quad C_3, C_4 \subset P^{(2)}(\Gamma_{B,T_0}) \quad \text{ve} \quad C_5, C_6 \subset P^{(2)}(\Gamma_{A,B})$$

dir.

3.4 Ana Teoremin İspatı

Bu alt bölümde ilk olarak ana sonucun ispatı için gerekli olan yardımcı teoremler verilmiş daha sonra ispat yapılmıştır. Bunun için $l \in \{1,2,3\}$ olmak üzere,

$P_+(\Gamma_{T_l})$ (ve $P_-(\Gamma_{T_l})$) ile Γ_{T_l} grafı içinde sadece $(U_l, T_l, +1, V_l)$ (ve $(U_l, T_l, -1, V_l)$) formundaki kenarları içeren yolların kümesi gösterilsin. Ayrıca $\simeq$ bağıntısı $P(\Gamma)$ üzerinde keyfi bir homotopi bağıntısı olarak verilsin.

3.4.1 Yardımcı Teorem: $1 \le l \le 3$ için, $p \in P(\Gamma_{T_l})$ olsun. Bu durumda $p \simeq p_+ p_-$ sağlanacak şekilde $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_l})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_l})$ yolları vardır.

İspat: İspat sadece $l = 1$ durumu için yapılmıştır. l nin diğer durumları da benzer şekilde yapılabilir. $e_1, e_2, ..., e_m$ kenarları Γ_{T_1} de kenarlar olmak üzere, $p = e_1 e_2 ... e_m$ olsun. Ayrıca $e_i \in P_-(\Gamma_{T_1})$ ve $e_{i+1} \in P_+(\Gamma_{T_1})$ olacak şekilde i indeksi var olsun. Bu şekilde en küçük bir i seçelim ve

$$e_i = (U_i, T_{1_i}, -1, V_i), \qquad T_{1_i} : x_i z_{a_i, b_i} = z_{x_i a_i, b_i} x_i,$$
$$e_{i+1} = (U_{i+1}, T_{1_{i+1}}, +1, V_{i+1}), \qquad T_{1_{i+1}} : x_{i+1} z_{a_{i+1}, b_{i+1}} = z_{x_{i+1} a_{i+1}, b_{i+1}} x_{i+1}$$

olsun. Burada $U_i = U_{i+1}$ olması durumunda, $x_i = x_{i+1}$, $z_{a_i, b_i} = z_{a_{i+1}, b_{i+1}}$ ve $V_i = V_{i+1}$ elde edilir. Böylece $e_{i+1} = e_i^{-1}$ ve dolayısıyla da $p \simeq e_1 ... e_{i-1} e_{i+2} ... e_m$ olur. Eğer $U_i \ne U_{i+1}$ ise bu durumda $U_i x_i z_{a_i, b_i} V_i = U_{i+1} x_{i+1} z_{a_{i+1}, b_{i+1}} V_{i+1}$ eşitliği kenarların bağıntıların farklı uygulamalarını içermesini sağlar. Ayrıca $U_i = U_{i+1} x_{i+1} z_{a_{i+1}, b_{i+1}} W_{i+1}$ ve $V_{i+1} = W_{i+1} x_i z_{a_i, b_i} V_i$ ise, 2.5.1 Tanım (a) ile

$$\begin{aligned}
e_i e_{i+1} &= (U_{i+1} x_{i+1} z_{a_{i+1}, b_{i+1}} W_{i+1}, T_{1_i}, -1, V_i)(U_{i+1}, T_{1_{i+1}}, +1, W_{i+1} x_i z_{a_i, b_i} V_i) \\
&\simeq (U_{i+1}, T_{1_{i+1}}, +1, W_{i+1} z_{x_i a_i, b_i} x_i V_i)(U_{i+1} z_{x_{i+1} a_{i+1}, b_{i+1}} x_{i+1} W_{i+1}, T_{1_i}, -1, V_i) \\
&= e_i' e_{i+1}'
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $e_i' \in P_+(\Gamma_{T_1})$ ve $e_{i+1}' \in P_-(\Gamma_{T_1})$ dir. Böylece

$$p \simeq e_1 ... e_{i-1} e_i' e_{i+1}' e_{i+2} ... e_m$$

(2.5.1 Tanım (c) ile) elde edilir ki, bu durumda p yolu istenen formdaki yol haline dönüşür. l nin diğer iki durmunun ispatı

$$T_{2_i} : z_{a_i,b_i} y_i = y_i z_{a_i,b_i y_i}, \qquad T_{3_i} : y_i x_i = x_i y_i$$

biçiminde alınarak benzer olarak yapılır. □

3.4.2 Yardımcı Teorem: $p \in P(\Gamma_{T_1})$ olsun. $U, U' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ ve $V, V' \in X^*$ olmak üzere, $\iota(p) = UV$ ve $\tau(p) = U'V'$ ise $U = U'$, $V = V'$ ve $p \simeq 1$ dir.

İspat: 3.4.1 Yardımcı Teorem ile $p \simeq p_+ p_-$ olacak şekilde $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_1})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_1})$ yolları vardır. $\iota(p_+) = \iota(p) = UV$ ve $\tau(p_+) = \tau(p) = U'V'$ olduğu için, $p_+ = 1$ ve $p_- = 1$ elde edilir. Böylece $p \simeq 1$ ve $U = U'$, $V = V'$ olur. □

Şimdi $f_1(z_{a,b}) = 1$ ve $f_1(x) = x$ $(x \in X)$ olacak şekilde bir

$$f_1 : (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^* \to X^*$$

homomorfizması tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.3 Yardımcı Teorem: $W \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ olsun. Bu durumda, bazı $V \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için, W köşesinden $Vf_1(W)$ köşesine tanımlanan bir $p_W \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu vardır. Eğer bazı $V' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için W den $V' f_1(W)$ ye bir $p \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu varsa, bu durumda $V = V'$ ve $p_W \simeq p$ dir.

İspat: Bir $W = W_0 z_{a_1,b_1} W_1 z_{a_2,b_2} ... z_{a_m,b_m} W_m$ kelimesi alalım. Burada $W_0, W_1, ..., W_m \in X^*$ olduğundan f_1 in tanımı gereği $f_1(W) = W_0 W_1 ... W_m$ olur. Ayrıca $W_0 = x_1 x_2 ... x_k$ $(x_i \in X, 1 \le i \le k)$ olmak üzere,

$$T_{1_i} : x_i z_{x_{i+1} x_{i+2} ... x_k a_1, b_1} = z_{x_i x_{i+1} ... x_k a_1, b_1} x_i \quad \text{ve} \quad T_{1_k} : x_k z_{a_1,b_1} = z_{x_k a_1, b_1} x_k$$

$(1 \le i \le k-1)$ dır. Diğer taraftan $W' = W_1 z_{a_2,b_2} W_2 z_{a_3,b_3} \ldots z_{a_m,b_m} W_m$ kelimesini alalım. Bu durumda $P_+(\Gamma_{T_1})$ deki

$$(x_1 x_2 \ldots x_{k-1}, T_{1_k}, +1, W')(x_1 x_2 \ldots x_{k-2}, T_{1_{k-1}}, +1, x_k W') \ldots (1, T_{1_1}, +1, x_2 \ldots x_k W')$$

yolu, $W = W_0 z_{a_1,b_1} W'$ den $z_{W_0 a_1,b_1} W_0 W'$ ne doğru bir yoldur. Bu şekilde devam edilirse, bazı $V \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi için, W köşesinden $Vf_1(W)$ köşesine tanımlanan bir $p_w \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu elde edilir. Eğer bazı $V' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi için, $p \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu da W köşesinden $V' f_1(W)$ köşesine bir yol ise, bu durumda $p^{-1} p_w \in P(\Gamma_{T_1})$ yolu da $V' f_1(W)$ den $Vf_1(W)$ ye bir yoldur. Dolayısıyla 3.4.2 Yardımcı Teorem ile, $p^{-1} p_W \simeq 1$ ve $p_W \simeq p$ (2.5.1 Tanım (c), (d) ile) olup, bunlar bize $V = V'$ sonucunu verir. □

Aşağıdaki yardımcı teorem T_2 bağıntısı düşünülerek 3.4.2 Yardımcı Teorem'e benzer şekilde yapılır.

3.4.4 Yardımcı Teorem: $p \in P(\Gamma_{T_2})$ ve $U, U' \in Y^*$, $V, V' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ olsun. Eğer $\iota(p) = UV$ ve $\tau(p) = U'V'$ ise, bu durumda $U = U'$, $V = V'$ ve $p \simeq 1$ dir.

Şimdi $f_2(y) = y$ $(y \in Y)$ ve $f_2(z_{a,b}) = 1$ olacak biçimde bir

$$f_2 : (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^* \to Y^*$$

homomorfizması tanımlayalım. Bu homomorfizma ile ilgili olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.5 Yardımcı Teorem: $W \in (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ olsun. Bu durumda bazı $V \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için W köşesinden $f_2(W)V$ köşesine bir $p_W \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu vardır. Eğer bazı $V \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için W den $f_2(W)V'$ ye bir $p \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu varsa, bu durumda $V = V'$ ve $p_W \simeq p$ dir.

İspat: $y_i \in Y$ ve $W_0, W_1, ..., W_m \in (\{z_{a,b} \ : \ a \in A, b \in B\})^*$ olmak üzere, bir W kelimesini $W = W_0 y_1 W_1 y_2 ... y_m W_m$ biçiminde alalım. Bu durumda $f_2(W) = y_0 y_1 ... y_m$ olur. Ayrıca $W_0 = z_{a_1,b_1} ... z_{a_k,b_k}$ $(z_{a_i,b_i} \in \{z_{a,b} \ : \ a \in A, b \in B\},\ 1 \le i \le k)$ ve

$$T_{2_i} : z_{a_i,b_i} y_1 = y_1 z_{a_i,b_i y_1} \quad (1 \le i \le k-1)$$

olsun. Buradan $W' = W_1 y_2 W_2 y_3 ... y_m W_m$ kelimesi için,

$$(z_{a_1,b_1} z_{a_2,b_2} ... z_{a_{k-1},b_{k-1}}, T_{2_k}, +1, W')(z_{a_1,b_1} z_{a_2,b_2} ... z_{a_{k-2},b_{k-2}}, T_{2_{k-1}}, +1, z_{a_k,b_k y_1} W')...$$
$$(1, T_{2_1}, +1, z_{a_2,b_2 y_1} z_{a_3,b_3 y_1} ... z_{a_k,b_k y_1} W')$$

yolu $P_+(\Gamma_{T_2})$ içinde $W = W_0 y_1 W'$ den $y_1 W_{0 y_1} W'$ $(W_{0 y_1} = z_{a_1,b_2 y_1} z_{a_2,b_2 y_1} ... z_{a_k,b_k y_1})$ ye bir yoldur. Bu şekilde devam edilirse, $V \in (\{z_{a,b} \ : \ a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi için, W köşesinden $f_2(W)V$ köşesine bir $p_w \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu elde edilir. Eğer $V' \in (\{z_{a,b} \ : \ a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi için, $p \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu W den $f_2(W)V'$ ne başka bir yol ise bu durumda $p^{-1} p_w \in P(\Gamma_{T_2})$ yolu da $f_2(W)V'$ köşesinden $f_2(W)V$ köşesine bir yoldur. Dolayısıyla 3.4.4 Yardımcı Teorem ile , $p^{-1} p_W \simeq 1$ ve bu da $p_W \simeq p$ (2.5.1 Tanım (c), (d) ile) ve $V = V'$ sonucunu verir. □

3.4.2 Yardımcı Teorem'e benzer şekilde, aşağıdaki yardımcı teoremin doğruluğu görülebilir.

3.4.6 Yardımcı Teorem: $p \in P(\Gamma_{T_3})$ ve $U, U' \in X^*$, $V, V' \in Y^*$ olsun. Eğer $\iota(p) = UV$ ve $\tau(p) = U'V'$ ise, $U = U'$, $V = V'$ ve $p \simeq 1$ dir.

Şimdi X ve Y üreteç kümelerine bağlı olarak, $f_3(x)=x\ (x\in X)$ ve $f_3(y)=1$ olacak biçiminde bir

$$f_3:(X\cup Y)^* \to X^*$$

homomorfizması tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.7 Yardımcı Teorem: $W\in (X\cup Y)^*$ olsun. Bu durumda bazı $V\in Y^*$ için W köşesinden $f_3(W)V$ köşesine bir $p_W\in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu vardır. Eğer bazı $V\in Y^*$ kelimesi için W den $f_3(W)V'$ ye bir $p\in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu varsa, bu durumda $V=V'$ ve $p_W\simeq p$ dir.

İspat: $x_i\in X$ ve $W_0,W_1,...,W_m\in Y^*$ olmak üzere bir W kelimesini $W=W_0x_1W_1x_2...x_mW_m$ biçiminde alalım. Bu durumda $f_3(W)=x_1x_2...x_m$ olur. Ayrıca $W_0=y_1y_2...y_k$ $(y_i\in Y, 1\le i\le k)$ ve $T_{3_i}:y_ix_1=x_1y_i$ olsun. Buradan $W'=W_1x_2W_2x_3...x_mW_m$ olmak üzere, $P_+(\Gamma_{T_3})$ içinde $W=W_0x_1W'$ den x_1W_0W' e bir yol aşağıdaki gibidir.

$$(y_1y_2...y_{k-1},T_{3_k},+1,W')(y_1y_2...y_{k-2},T_{3_{k-1}},+1,y_kW')...(1,T_{3_1},+1,y_2...y_kW').$$

Bu şekilde devam edersek, bazı $V\in Y^*$ kelimesi için, W köşesinden $f_3(W)V$ köşesine bir $p_w\in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu elde ederiz. Eğer bazı $V'\in Y^*$ kelimesi için, $p\in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu W den $f_3(W)V'$ ne bir yol ise bu durumda $p^{-1}p_w\in P(\Gamma_{T_3})$ yolu da $f_3(W)V'$ den $f_3(W)V$ ye bir yoldur. Dolayısıyla 3.4.6 Yardımcı Teorem ile , $p^{-1}p_W\simeq 1$ ve bu da $p_W\simeq p$ (2.5.1 Tanım (c), (d) ile) ve $V=V'$ sonucunu verir. □

Ana sonucun ispatına ulaşabilmek amacı ile bu alt bölüm; T_1, T_2 ve T_3 bağıntıları düşünülerek elde edilen “Temel Yardımcı Teorem” leri içeren üç kısma ayrılmıştır. Her bir temel yardımcı teoremin ispatı için, yollar üzerindeki aşağıdaki kuralların verilmesi gerekmektedir.

Kabul edelim ki, $p,q \in P(\Gamma)$ ve $\simeq$ bağıntısı da $P(\Gamma)$ üzerinde bir homotopi bağıntısı olsun. Bazı $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_l})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_l})$ $(1 \le l \le 3)$ yolları için $p \simeq p_+ q p_-$ oluyor ise, bu durumda $p \mapsto q$ yazılır. Ayrıca bu $\mapsto$ bağıntısı geçişmelidir ve $(X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $(Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ ve $(X \cup Y)^*$ kümelerinin iki yanlı hareketleri ile uyumludur. Bunlara ek olarak, $p \in P_+(\Gamma_{T_l})$ $(l \in \{1,2,3\})$ ve $q \in P(\Gamma)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} \iota(p).q &\mapsto \tau(p).q \\ q.\iota(p) &\mapsto q.\tau(p) \end{aligned} \tag{3.1}$$

kurallarını tanımlayalım. (Bunlar 2.5.1 Tanım ile kolaylıkla görülebilir).

3.4.1 Temel Yardımcı Teorem 1

İlk olarak A monoidinin sunuşunun $\wp_A = [X\ ;\ \mathbf{s}]$ ve $\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$ nin de $A \Diamond B$ nin üreteç kümesini oluşturan kümelerden biri olduğunu hatırlatalım. Daha sonra her bir $S : S^{+1} = S^{-1} \in \mathbf{s}$ ve her bir $z_{a,b} \in \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile $S^{+1} z_{a,b}$ köşesinden $z_{S^{+1}a,b} S^{+1}$ köşesine bir $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu ve $z_{S^{-1}a,b} S^{-1}$ köşesinden $S^{-1} z_{a,b}$ köşesine bir $p_- \in P_-(\Gamma_{T_1})$ yolu vardır. Ek olarak $z_{a,b}^2 = z_{a,b}$ olduğundan, $z_{S^{+1}a,b}$ den $z_{S^{+1}a,b}^2$ köşesine de bir yol mevcuttur. Ayrıca $[S^{+1}]_A = [S^{-1}]_A$ olduğundan, $[z_{S^{+1}a,b}]_A = [z_{S^{-1}a,b}]_A$ dir. Böylece $z_{S^{+1}a,b}$ den $z_{S^{-1}a,b}$ köşesine bir $q'_{S,z_{a,b}}$ yolu vardır. Dolayısıyla $S^{+1} z_{a,b}$ den $S^{-1} z_{a,b}$ e bir

$$q_{S,z_{a,b}} = p_+ (q'_{S,z_{a,b}} . p_{S,z_{a,b}}) p_-$$

yolu elde edilir. Bu durumda

$$C_1 = \{((1, S, +1, z_{a,b}), q_{S,z_{a,b}}) : S \in \mathbf{s},\ z_{a,b} \in \{z_{c,d} : c \in A, d \in B\}\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

olsun. T_0^1, T_0^2 bağıntıları ve her bir $x \in X$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile

$xz_{a,b}^2$ den $z_{xa,b}^2 x$ köşesine bir $p'_+ \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu

ve

$xz_{a,b}z_{c,d}$ den $z_{xa,b}z_{xc,d}x$ köşesine bir $p''_+ \in P_+(\Gamma_{T_1})$ yolu

vardır. Benzer olarak,

$z_{xa,b}x$ den $xz_{a,b}$ köşesine bir $p'_- \in P_-(\Gamma_{T_1})$ yolu

ve

$z_{xc,d}z_{xa,b}x$ den $xz_{c,d}z_{a,b}$ köşesine bir $p''_- \in P_-(\Gamma_{T_1})$ yolu

vardır. Ayrıca $x \in X$ için, $z_{xa,b}^2 = z_{xa,b}$ ve $z_{xa,b}z_{xc,d} = z_{xc,d}z_{xa,b}$ olduğundan $xz_{a,b}^2$ den $z_{xa,b}$ köşesine ve $z_{xa,b}z_{xc,d}$ den $z_{xc,d}z_{xa,b}$ köşesine de sırasıyla $p'_{z_{xa,b}}$ ve $p''_{z_{xa,b}z_{xc,d}}$ yolları vardır. Böylece

$$q'_x = p'_+(p'_{z_{xa,b}}.x)p'_- \quad \text{ve} \quad q''_x = p''_+(p''_{z_{xa,b}z_{xc,d}}.x)p''_-$$

biçiminde yeni yollar elde edilir. Buradan

$$C_2 = \{((x, T_0^1, +1, 1), q'_x)\} \cup \{((x, T_0^2, +1, 1), q''_x)\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

olsun. Şimdi Temel Yardımcı Teorem 1'i oluşturmak için gerekli olan yardımcı teoremleri verelim. Bunun için

$$h_1 : (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^* \to (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$$

homomorfizmasını tanımlayalım.

3.4.8 Yardımcı Teorem: p ve q yolları, $\tau(p) = \iota(q)$ olacak şekilde Γ grafında iki yol olsun. $p \mapsto p'$, $q \mapsto q'$ ve $\tau(p'), \iota(q') \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ ise, $\tau(p') = \iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ dir.

İspat: $p \mapsto p'$ ve $q \mapsto q'$ olduğu için, $p \simeq p_+ p' p_-$ ve $q \simeq q_+ q' q_-$ $(p_+, q_+ \in P_+(\Gamma_{T_1})$ ve $p_-, q_- \in P_-(\Gamma_{T_1}))$ homotopik denkliklere sahip oluruz. Bu durumda açıkça görülür ki

$$pq \simeq p_+ p' p_- q_+ q' q_-$$

dir ve 3.4.2 Yardımcı Teorem ile de $p_- q_+ \simeq 1$ dir. Dolayısıyla $\tau(p') = \iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ sonucu elde edilir. □

3.4.9 Yardımcı Teorem: $U, V \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $T \in \{T_0^1, T_0^2\}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, $e = (U, T, \varepsilon, V)$ kenarı Γ_{T_0} da bir kenar olsun. Herhangi bir $x \in X$ için,

$$x.e \mapsto_{C_2} q.x$$

olacak biçimde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: 3.4.3 Yardımcı Teorem ile $P_+(\Gamma_{T_1})$ içinde xU dan $h_1(Ux)x$ köşesine bir yol vardır. Dolayısıyla (3.1) ile

$$x.e \mapsto_{C_2} (h_1(Ux)x, T, \varepsilon, V) \mapsto_{C_2} q_1.xV$$

$(q_1 = p'_{z_{xa,b}} \in P(\Gamma_{T_0})$ veya $q_1 = p''_{z_{xa,b} z_{xc,d}} \in P(\Gamma_{T_0}))$ homotopik denklikleri elde edilir. Ayrıca $P_+(\Gamma_{T_1})$ içinde xV den $h_1(Vx)x$ köşesine bir yol daha vardır ve (3.1) ile

$$q_1.xV \mapsto_{C_2} q.x$$

$(q = q_1.h_1(Vx))$ elde edilir. Sonuç olarak $x.e \mapsto_{C_2} q.x$ homotopik denkliğinin sağlandığı görülür. □

3.4.10 Yardımcı Teorem: p yolu Γ_{T_0} da herhangi bir yol olsun. $W \in X^*$ için,

$$W.p \mapsto_{C_2} q.W$$

olacak şekilde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: İspat W kelimesinin bir tek $x \in X$ harfinden oluşması üzerine verilecektir.

$p = e_1e_2...e_m$ olsun. Bu durumda 3.4.9 Yardımcı Teorem ile $x.e_i \mapsto_{C_2} q_i.x$ olacak şekilde bir $q_i \in P(\Gamma_{T_0})$ yolu vardır. Burada $1 \le i \le m$ için, $e_i = (U_i, T_i, \varepsilon_i, V_i)$ ve $U_i, V_i \in X^*$ dır. Böylece 3.4.8 Yardımcı Teorem ile $x.p \mapsto_{C_2} (q_1q_2...q_m).x$ elde edilir.

Genel durum W kelimesinin uzunluğu üzerinde tümevarım hipotezi düşünülerek yapılabilir. □

3.4.11 Yardımcı Teorem: $U,\ V \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $T \in \{T_0^1, T_0^2\}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U,T,ε,V) kenarı Γ_{A,T_0} da bir kenar olsun. Bu durumda

$$(U,T,\varepsilon,V) \mapsto_{C_2} q.f_1(UV)$$

olacak şekilde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: Γ_{A,T_0} de bir (U,T,ε,V) kenarını alalım.

$$\begin{aligned}
(U,T,\varepsilon,V) &\mapsto_{C_2} (h_1(U)f_1(U),T,\varepsilon,V) && \text{(3.4.3 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}\\
&\mapsto_{C_2} q_1.f_1(U)V && \text{(3.4.10 Yardımcı Teorem ile)}\\
&\mapsto_{C_2} q_1h_1(Uf_1(V))f_1(UV) && \text{(3.4.3 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}\\
&\mapsto_{C_2} q.f_1(UV)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_1 \in P(\Gamma_{T_0})$ ve $q = q_1.h_1(Uf_1(V))$ dir. □

3.4.12 Yardımcı Teorem: $S \in \mathbf{s}$ ve $W \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ olsun. Bazı $W' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için,

$$(1, S, \varepsilon, 1).W \mapsto_{C_1} (q.S^{\varepsilon})W'(1, S, \varepsilon, 1)$$

olacak şekilde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: Herhangi bir $U \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi ve $p \in P(\Gamma_{T_0})$ yolu için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile

$$p.U \mapsto_{C_1} p'.f_1(U) \tag{3.2}$$

$(p' \in P(\Gamma_{T_0}))$ homotopik denkliği elde edilir. Buna ek olarak, her bir $z_{a,b} \in \{z_{c,d} : c \in A, d \in B\}$ için, C_1 kümesinin tanımı ile

$$(1, S, \varepsilon, 1).z_{a,b} \mapsto_{C_1} (q'.S^{\varepsilon})(W_1.(1, S, \varepsilon, 1)) \tag{3.3}$$

$(q' \in P(\Gamma_{T_0})$ ve $W_1 \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ homotopik denkliğine sahip oluruz. Sonuçta (3.2) ve (3.3) ün tekrarlanması ve 3.4.8 Yardımcı Teorem ile istenen sonuç elde edilir. □

3.4.13 Yardımcı Teorem: $U, V \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $S \in \mathbf{s}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U, S, ε, V) kenarı Γ_{A,T_0} da bir kenar olsun. Bu durumda

$$(U, S, \varepsilon, V) \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q.f_1(US^{\varepsilon}V))(h_1(US^{-\varepsilon}V).(f_1(U), S, \varepsilon, f_1(V)))$$

olacak şekilde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: Γ_{A,T_0} de bir (U, S, ε, V) kenarını alalım. Bu durumda

$$(U,S,\varepsilon,V) \mapsto (h_1(U)f_1(U),S,\varepsilon,h_1(V)f_1(V)) \quad \text{(3.4.3 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}$$

$$\mapsto_{C_1} (h_1(U)f_1(U).q_1.S^{\varepsilon}f_1(V))(h_1(U)f_1(U)W_1.(1,S,\varepsilon,f_1(V)))$$

(3.4.12 Yardımcı Teorem ile)

$(q_1 \in P(\Gamma_{T_0}),\ W_1 \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*)$ elde edilir. Ayrıca 3.4.10 Yardımcı Teorem ile

$$h_1(U)f_1(U).q_1.S^{\varepsilon}f_1(V) \mapsto_{C_2} q.f_1(US^{\varepsilon}V) \qquad (q \in P(\Gamma_{T_0}))$$

ve 3.4.3 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile de

$$h_1(U)f_1(U)W_1.(1,S,\varepsilon,f_1(V)) \mapsto W.(f_1(U),S,\varepsilon,f_1(V))$$

$(W \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*)$ dir. Buradan 3.4.8 Yardımcı Teorem ve yukarıdaki homotopik denklikler kullanılarak

$$(U,S,\varepsilon,V) \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q.f_1(US^{\varepsilon}V)(W.f_1(U),S,\varepsilon,f_1(V)))$$

homotopik denkliği elde edilir. Burada, 3.4.3 Yardımcı Teorem ve h_1 in tanımı ile $W = h_1(US^{\varepsilon}V)$ dir. □

3.4.14 Yardımcı Teorem (Temel Yardımcı Teorem 1): $p \in P(\Gamma_{A,T_0})$ olsun. $q' \in P(\Gamma_{T_0}),\ r' \in P(\Gamma_A)$ olmak üzere, $q = q'.f_1(\iota(p))$ ve $r = h_1(\tau(p)).r'$ dir. Ayrıca $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_1}),\ p_- \in P_-(\Gamma_{T_1})$ yolları için,

$$p \simeq_{C_1 \cup C_2} p_+ q r p_-$$

denkliği vardır. Burada $\tau(p_+) = h_1(\iota(p))f_1(\iota(p))$ ve $\iota(p_-) = h_1(\tau(p))f_1(\tau(p))$ dir.

İspat: $U,V \in (X \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ kelimeleri için, varsayalım ki p yolu (U,Q,ε,V) biçiminde tek bir kenar içersin. Bu durumda sonuç,

$Q \in \{T_0^1, T_0^2\}$ ise 3.4.11 Yardımcı Teorem,

$Q \in \mathbf{s}$ ise 3.4.13 Yardımcı Teorem,

$Q \in T_1$ ise 3.4.3 Yardımcı Teorem

ile açıktır. Dolayısıyla e bir kenar ve p bir yol olmak üzere, $p = p_1 e$ olarak tanımlandığını kabul edelim. Bu durumda

$$p \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q_1^{'}.f_1(\iota(p)))(h_1(\tau(p_1)).r_1^{'}),$$
$$e \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q_2^{'}.f_1(\iota(e)))(h_1(\tau(p)).r_2^{'})$$

biçiminde homotopik denklikler vardır. Burada $q_1^{'}, q_2^{'} \in P(\Gamma_{T_0})$, $r_1^{'}, r_2^{'} \in P(\Gamma_A)$ olamk üzere,

$$\iota(q_1^{'}) = h_1(\iota(p)), \qquad \tau(r_1^{'}) = f_1(\tau(p_1)),$$
$$\iota(q_2^{'}) = h_1(\iota(e)), \qquad \tau(r_2^{'}) = f_1(\tau(p))$$

dir. Buradan 3.4.8 Yardımcı Teorem ile

$$p \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q_1^{'}.f_1(\iota(p)))(h_1(\tau(p_1)).r_1^{'})(q_2^{'}.f_1(\iota(e)))(h_1(\tau(p)).r_2^{'}).$$

homotopik denklik elde edilir. Buradaki $h_1(\tau(p_1)).r_1^{'}$ ve $q_2^{'}.f_1(\iota(e))$ yollarında kullanılan bağıntılar farklı olduğundan 2.5.1 Tanım (a) yardımı ile

$$(h_1(\tau(p_1)).r_1^{'})(q_2^{'}.f_1(\iota(e))) \simeq (q_2^{'}.f_1(\iota(p)))(h_1(\tau(p)).r_1^{'})$$

denkliğini elde ederiz. Şimdi $q^{'} = q_1^{'} q_2^{'}$ ve $r^{'} = r_1^{'} r_2^{'}$ olduğunu kabul edelim. Böylece $\iota(q^{'}) = h_1(\iota(p))$ ve $\tau(r^{'}) = f_1(\tau(p))$ için,

$$p \mapsto_{C_1 \cup C_2} (q'.f_1(\iota(p)))(h_1(\tau(p)).r')$$

sonucu elde edilir. □

A ve B monoidleri sonlu olduğundan, $\simeq_{C_A} = P^{(2)}(\Gamma_A)$ ve $\simeq_{C_{T_0}} = P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ olacak biçimde $C_A \subset P^{(2)}(\Gamma_A)$ ve $C_{T_0} \subset P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ sonlu alt kümeleri vardır. Ayrıca $C' = C_A \cup C_{T_0} \cup C_1 \cup C_2$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.15 Sonuç: $\simeq_{C'} = P^{(2)}(\Gamma_{A,T_0})$ dır.

İspat: $(p_1, p_2) \in P^{(2)}(\Gamma_{A,T_0})$ olsun. $p_+, p_+' \in P_+(\Gamma_{T_1})$ ve $p_-, p_-' \in P_-(\Gamma_{T_1})$ olmak üzere, Temel Yardımcı Teorem 1 ile $p_1 \simeq_{C'} p_+q_1r_1p_-$ ve $p_2 \simeq_{C'} p_+'q_2r_2p_-'$ denklikleri vardır. Ayrıca $q_i = q_i'.f_1(\iota(p_i))$ ve $r_i = h_1(\tau(p_i)).r_i'$ $(q_i' \in P(\Gamma_{T_0})$ ve $r_i' \in P(\Gamma_A)$, $i = 1,2)$ eşitlikleri de sağlanır. Burada $\iota(p_1) = \iota(p_2)$ ve $\tau(p_1) = \tau(p_2)$ olduğu için,

$$\tau(p_+) = h_1(\iota(p_1))f_1(\iota(p_1)) = h_1(\iota(p_2))f_1(\iota(p_2)) = \tau(p_+'),$$
$$\iota(p_-) = h_1(\tau(p_1))f_1(\tau(p_1)) = h_1(\tau(p_2))f_1(\tau(p_2)) = \iota(p_-')$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $p_+ =_{C'} p_+'$ ve $p_- =_{C'} p_-'$ olur.

Ayrıca açıkça görülüyor ki, $\iota(q_i') = h_1(\iota(p_i))$ ve $\tau(q_i') = h_1(\tau(p_i))$ $(i = 1,2)$ dir. Buradan da $\iota(q_1') = \iota(q_2')$ ve $\tau(q_1') = \tau(q_2')$ elde edilir. Böylece $(q_1', q_2') \in P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ olur. $\simeq_{C_{T_0}} = P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ ve $C_{T_0} \subset C'$ olduğu için, $q_1' \simeq_{C'} q_2'$ ve böylece de $q_1 \simeq_{C'} q_2$ elde edilir.

Benzer şekilde, $\iota(r_1') = f_1(\iota(p_1)) = f_1(\iota(p_2)) = \iota(r_2')$ ve $\tau(r_1') = f_1(\tau(p_1)) = f_1(\tau(p_2)) = \tau(r_2')$ ve dolayısıyla da $(r_1', r_2') \in P^{(2)}(\Gamma_A)$ dır. $\simeq_{C_A} = P^{(2)}(\Gamma_A)$ ve $C_A \subset C'$ olduğundan, $r_1' \simeq_{C'} r_2'$ ve böylece de $r_1 \simeq_{C'} r_2$ elde edilir. Buradan da

$$p_1 \simeq_{C'} p_+ q_1 r_1 p_- \simeq_{C'} p_+^{'} q_2 r_2 p_-^{'} \simeq_{C'} p_2$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize $\simeq_{C'} = P^{(2)}(\Gamma_{A,T_0})$ eşitliğini verir. □

3.4.2 Temel Yardımcı Teorem 2

B monoidinin sunuşunun $\wp_B = [Y \,;\, \mathbf{r}]$ ve $\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$ nin de $A \Diamond B$ nin üreteç kümesini oluşturan kümelerden biri olduğunu hatırlatalım. Burada her bir $R : R^{+1} = R^{-1} \in \mathbf{r}$ ve her bir $z_{a,b} \in \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile $z_{a,b}R^{+1}$ köşesinden $R^{+1}z_{a,bR^{+1}}$ köşesine bir $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu ve $R^{-1}z_{a,bR^{-1}}$ den $z_{a,b}R^{-1}$ köşesine bir $p_- \in P_-(\Gamma_{T_2})$ yolu vardır. Ayrıca $[R^{+1}]_B = [R^{-1}]_B$ olduğundan, $[z_{a,bR^{+1}}]_B = [z_{a,bR^{-1}}]_B$ dir. Böylece $z_{a,bR^{+1}}$ den $z_{a,bR^{-1}}$ köşesine ve R^{+1} den R^{-1} köşesine sırasıyla $q'_{R,z_{a,b}}$ ve $p_{R,z_{a,b}}$ yolları vardır. Dolayısıyla $z_{a,b}R^{+1}$ den $z_{a,b}R^{-1}$ köşesine bir

$$q_{R,y} = p_+(p_{R,z_{a,b}}.q'_{R,z_{a,b}})p_-$$

yolu elde edilir. Buna göre

$$C_3 = \{((z_{a,b}, R, +1, 1), q_{R,y}) : R \in \mathbf{r},\ y \in Y\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

olsun. T_0^1, T_0^2 bağıntıları ve her bir $y \in Y$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile

$z_{a,b}^2 y$ den $yz_{a,by}^2$ köşesine bir $p'_+ \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu

ve

$z_{a,b}z_{c,d}y$ den $yz_{a,by}z_{c,dy}$ köşesine bir $p''_+ \in P_+(\Gamma_{T_2})$ yolu

vardır. Benzer olarak,

$yz_{a,by}$ den $z_{a,b}y$ köşesine bir $p'_- \in P_-(\Gamma_{T_2})$ yolu

ve

$yz_{c,dy}z_{a,by}$ den $z_{c,d}z_{a,b}y$ köşesine bir $p''_- \in P_-(\Gamma_{T_2})$ yolu vardır. Ayrıca $y \in Y$ için, $z_{a,by}^2 = z_{a,by}$ ve $z_{a,by} z_{c,dy} = z_{c,dy} z_{a,by}$ olduğundan $z_{a,by}^2$ den $z_{a,by}$ köşesine ve $z_{a,by} z_{c,dy}$ den $z_{c,dy} z_{a,by}$ köşesine sırasıyla $p'_{z_{a,by}}$ ve $p''_{z_{a,by} z_{c,dy}}$ yolları vardır. Böylece tüm bu yollar yardımıyla

$$q'_y = p'_+ (y.p'_{z_{a,by}}) p'_- \quad \text{ve} \quad q''_y = p''_+ (y.p''_{z_{a,by} z_{c,dy}}) p''_-$$

yolları elde edilir. Buradan

$$C_4 = \{((1, T_0^1, +1, y), q'_y)\} \cup \{((1, T_0^2, +1, y), q''_y)\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

olsun. Şimdi Temel Yardımcı Teorem 2'yi oluşturmak için gerekli olan yardımcı teoremleri sunalım. Bunun için

$$h_2 : (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^* \to (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$$

homomorfizmasını tanımlayalım.

Aşağıdaki yardımcı teoremin ispatı 3.4.8 Yardımcı Teorem'e benzer olarak yapılır.

3.4.16 Yardımcı Teorem: p ve q yolları $\tau(p) = \iota(q)$ olacak şekilde Γ grafında iki yol olsun. $p \mapsto p', q \mapsto q'$ ve $\tau(p'), \iota(q') \in Y^* (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ ise bu durumda $\tau(p') = \iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ dir.

3.4.17 Yardımcı Teorem: $R \in \mathbf{r}$ ve $W \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ olsun. Bazı $W' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ için,

$$W.(1, R, \varepsilon, 1) \mapsto_{C_3} (R^{\varepsilon}.q)(1, R, \varepsilon, 1).W'$$

olacak şekilde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

İspat: C_3 kümesinin tanımı gereği, her bir $z_{a,b} \in \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\}$ elemanı için,

$$z_{a,b}.(1,R,\varepsilon,1) \mapsto_{C_3} (R^{\varepsilon}.q'_{z_{a,bR}})(1,R,\varepsilon,1).z_{a,bR^{\varepsilon}}$$

homotopik denkliğine sahip oluruz. Burada $q'_{z_{a,bR}}$ yolu $z_{a,bR^{+1}}$ den $z_{a,bR^{-1}}$ köşesine bir yoldur. Ayrıca, herhangi bir $U \in (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ kelimesi ve $p, p' \in P(\Gamma_{T_0})$ yolları için, $U.p \mapsto_{C_3} f_2(U).p'$ homotopik denkliği elde edilir. Böylece $W' \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$ ve $q \in P(\Gamma_{T_0})$ olmak üzere,

$$W.(1,R,\varepsilon,1) \mapsto_{C_3} (R^{\varepsilon}.q)(1,R,\varepsilon,1).W'$$

sonucu elde edilir. □

Aşağıdaki yardımcı teoremlerin ispatları sırasıyla 3.4.9 ve 3.4.10 Yardımcı Teoremlerin ispatlarına benzer şekilde yapılabilir.

3.4.18 Yardımcı Teorem: e kenarı Γ_{T_0} grafında herhangi bir kenar olsun. Bu durumda bir $y \in Y$ için,

$$e.y \mapsto_{C_4} y.q$$

olacak biçimde Γ_{T_0} grafında bir q yolu vardır.

3.4.18 Yardımcı Teorem'de verilen e kenarı yerine p yolu ve $y \in Y$ üreteç elemanı yerine $W \in Y^*$ kelimesi düşünülürse aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.19 Yardımcı Teorem: p yolu Γ_{T_0} grafında herhangi bir yol olsun. Herhangi $W \in Y^*$ için,

$$p.W \mapsto_{C_4} W.q$$

biçiminde Γ_{T_0} da bir q yolu vardır.

3.4.20 Yardımcı Teorem: $U,V \in (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $T \in \{T_0^1, T_0^2\}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U,T,ε,V) kenarı Γ_{B,T_0} grafında bir kenar olsun. Bu durumda Γ_{T_0} da bir q yolu için,

$$(U,T,\varepsilon,V) \mapsto_{C_4} f_2(UV).q$$

dir.

İspat: Γ_{B,T_0} grafında bir (U,T,ε,V) kenarını alalım. Bu kenar için,

$$\begin{aligned}(U,T,\varepsilon,V) &\mapsto_{C_4} (U,T,\varepsilon, f_2(V)h_2(V)) && \text{(3.4.5 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}\\ &\mapsto_{C_4} Uf_2(V).q_1 && \text{(3.4.19 Yardımcı Teorem ile)}\\ &\mapsto_{C_4} f_2(UV)h_2(Uf_2(V)).q_1 && \text{(3.4.5 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}\\ &\mapsto_{C_4} f_2(UV).q\end{aligned}$$

$(q_1 \in P(\Gamma_{T_0})$ ve $q = h_2(Uf_2(V)).q_1)$ homotopik denklikleri elde edilir. □

3.4.21 Yardımcı Teorem: $U,V \in (Y \cup \{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*$, $R \in \mathbf{r}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U,R,ε,V) kenarı Γ_{B,T_0} grafında bir kenar olsun. Bu durumda

$$(U,R,\varepsilon,V) \mapsto_{C_3 \cup C_4} (f_2(UR^{\varepsilon}V).q)((f_2(U),R,\varepsilon,f_2(V)).h_2(UR^{-\varepsilon}V))$$

olacak biçimde Γ_{T_0} grafında bir q yolu vardır.

İspat: Γ_{B,T_0} grafında bir (U,R,ε,V) kenarı alalım. Bu kenar için

$$(U,R,\varepsilon,V) \mapsto (f_2(U)h_2(U),R,\varepsilon,f_2(V)h_2(V)) \quad \text{(3.4.5 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile)}$$
$$\mapsto_{C_3} (f_2(U)R^{\varepsilon}.q_1.f_2(V)h_2(V))((f_2(U),R,\varepsilon,1).W_1.f_2(V)h_2(V))$$

$(q_1 \in P(\Gamma_{T_0})$ ve $W_1 \in (\{z_{a,b} : a \in A, b \in B\})^*)$. Ayrıca, 3.4.19 Yardımcı Teorem ile bazı $q \in P(\Gamma_{T_0})$ yolu için,

$$f_2(U)R^{\varepsilon}.q_1.f_2(V)h_2(V) \mapsto_{C_4} f_2(UR^{\varepsilon}V).q$$

homotopik denkliği elde edilir. Diğer yandan 3.4.5 Yardımcı Teorem ve (3.1) ile de

$$(f_2(U),R,\varepsilon,1).W_1.f_2(V)h_2(V) \mapsto (f_2(U),R,\varepsilon,f_2(V)).h_2(UR^{-\varepsilon}V)$$

denkliğine sahip oluruz. 3.4.16 Yardımcı Teorem ve yukarıdaki denklikler kullanılarak istenen sonuç elde edilir. □

3.4.22 Yardımcı Teorem (Temel Yardımcı Teorem 2): $p \in P(\Gamma_{B,T_0})$ olsun. $q' \in P(\Gamma_{T_0})$, $r' \in P(\Gamma_B)$ olmak üzere, $q = f_2(\iota(p)).q'$ ve $r = r'.h_2(\tau(p))$ dir. Ayrıca $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_2})$, $p_- \in P_-(\Gamma_{T_2})$ yolları için,

$$p \simeq_{C_3 \cup C_4} p_+ q r p_-$$

homotopik denkliği vardır. Burada $\tau(p_+) = f_2(\iota(p))h_2(\iota(p))$ ve $\iota(p_-) = f_2(\tau(p))h_2(\tau(p))$ dir.

A ve B monoidleri sonlu olduğundan $\simeq_{C_B} = P^{(2)}(\Gamma_B)$ ve $\simeq_{C_{T_0}} = P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ eşitlikleri sağlanacak şekilde $C_B \subset P^{(2)}(\Gamma_B)$ ve $C_{T_0} \subset P^{(2)}(\Gamma_{T_0})$ sonlu alt kümeleri vardır. Buradan $C'' = C_B \cup C_{T_0} \cup C_3 \cup C_4$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.23 Sonuç: $\simeq_{C''} = P^{(2)}(\Gamma_{B,T_0})$ dır.

3.4.3 Temel Yardımcı Teorem 3

Wang'ın [69] da yaptığı çalışmanın özel bir hali olarak bu alt bölüm oluşturulmuştur.

Her bir $R : R^{+1} = R^{-1} \in \mathbf{r}$ ve her bir $x \in X$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile $R^{+1}x$ den xR^{+1} köşesine bir $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu ve xR^{-1} den $R^{-1}x$ köşesine bir $p_- \in P_-(\Gamma_{T_3})$ yolu vardır. Ayrıca $[R^{+1}]_B = [R^{-1}]_B$ olduğundan R^{+1} den R^{-1} köşesine bir $p_{R,x}$ yolu da vardır. Böylece $R^{+1}x$ köşesinden $R^{-1}x$ köşesine bir

$$q_{R,x} = p_+(x.p_{R,x})p_-$$

yolu elde edilir. Buradan

$$C_5 = \{((1, R, +1, x), q_{R,x}) : R \in \mathbf{r},\ x \in X\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

olsun. Ayrıca her bir $S : S^{+1} = S^{-1} \in \mathbf{s}$ ve her bir $y \in Y$ için, 3.4.3 Yardımcı Teorem ile

yS^{+1} den $S^{+1}y$ köşesine bir $p'_+ \in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu

ve

$S^{-1}y$ den yS^{-1} köşesine bir $p'_- \in P_+(\Gamma_{T_3})$ yolu

vardır. Ayrıca $[S^{+1}]_A = [S^{-1}]_A$ olduğundan, S^{+1} den S^{-1} köşesine bir $p_{S,y}$ yolu vardır. Böylece yS^{+1} köşesinden yS^{-1} köşesine bir

$$q'_{S,y} = p'_{+}(p_{S,y}.y)p'_{-}$$

yolu elde edilir. Buradan da

$$C_6 = \{((y,S,+1,1),q'_{S,y}) : S \in \mathbf{s}, y \in Y\} \subset P^{(2)}(\Gamma)$$

biçiminde olsun. Şimdi Temel Yardımcı Teorem 3'ü oluşturmak için gerekli olan yardımcı teoremleri sunalım. Bunun için X ve Y üreteç kümelerine bağlı

$$h_3 : (X \cup Y)^* \to Y^*$$

homomorfizmasını tanımlayalım.

3.4.24 Yardımcı Teorem: p ve q yolları $\tau(p) = \iota(q)$ olacak şekilde $\Gamma_{A,B}$ grafında iki yol olsun. $p \mapsto p', q \mapsto q'$ ve $\tau(p'), \iota(q') \in (X \cup Y)^*$ ise bu durumda $\tau(p') = \iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ dir.

3.4.25 Yardımcı Teorem: Γ_B grafında herhangi bir e kenarı alalım. $x \in X$ için,

$$e.x \mapsto_{C_5} x.q$$

olacak şekilde Γ_B da bir q yolu vardır.

3.4.26 Yardımcı Teorem: p yolu Γ_B grafında herhangi bir yol olsun. Herhangi $W \in X^*$ ve Γ_B da bir q yolu için,

$$p.W \mapsto_{C_5} W.q$$

dir.

3.4.27 Yardımcı Teorem: $U,V \in (X \cup Y)^*$, $R \in \mathbf{r}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U,R,ε,V) kenarı $\Gamma_{A,B}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda Γ_B grafında bir q yolu için,

$$(U,R,\varepsilon,V) \mapsto_{C_5} f_3(UV).q$$

dir.

3.4.28 Yardımcı Teorem: $S \in \mathbf{s}$ ve $W \in Y^*$ olsun. Bazı $W' \in Y^*$ ve Γ_B grafında bir q yolu için,

$$W.(1,S,\varepsilon,1) \mapsto_{C_6} (S^{\varepsilon}.q)((1,S,\varepsilon,1).W')$$

dir.

3.4.29 Yardımcı Teorem: $U,V \in (X \cup Y)^*$, $S \in \mathbf{s}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U,S,ε,V) kenarı $\Gamma_{A,B}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda

$$(U,S,\varepsilon,V) \mapsto_{C_5 \cup C_6} (f_3(US^{\varepsilon}V).q)((f_3(U),S,\varepsilon,f_3(V)).h_3(US^{-\varepsilon}V))$$

olacak şekilde Γ_B grafında bir q yolu vardır.

3.4.30 Yardımcı Teorem (Temel Yardımcı Teorem 3): $p \in P(\Gamma_{A,B})$ olsun. $q' \in P(\Gamma_B)$, $r' \in P(\Gamma_A)$ olmak üzere, $q = f_3(\iota(p)).q'$ ve $r = r'.h_3(\tau(p))$ dir. Ayrıca $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_3})$, $p_- \in P_-(\Gamma_{T_3})$ yolları için,

$$p \simeq_{C_5 \cup C_6} p_+ q r p_-$$

homotopik denkliği sağlanır. Burada $\tau(p_+) = f_3(\iota(p))h_3(\iota(p))$ ve $\iota(p_-) = f_3(\tau(p))h_3(\tau(p))$ dir.

Daha önce tanımlanan C' ve C'' kümelerine ek olarak $C''' = C_A \cup C_B \cup C_5 \cup C_6$ olsun. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

3.4.31 Sonuç: $\simeq_{C'''} = P^{(2)}(\Gamma_{A,B})$ dir.

Ayrıca verilen notasyonlara ek olarak $C = C' \cup C'' \cup C'''$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda 3.4.15 Sonuç, 3.4.23 Sonuç ve 3.4.31 Sonuç ile aşağıdaki sonuç kolaylıkla görülebilir.

3.4.32 Sonuç: $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma)$ dir.

Ana Teoremin İspatı:

A ve *B* monoidleri sonlu olduklarından $\wp_A$ ve $\wp_B$ sonlu sunuşludur. Böylece C_A, C_B ve C_{T_0} sonlu üreteç kümeleridir. Böylece $\wp$ sunuşu sonlu bir sunuş ve $C = C_A \cup C_B \cup C_{T_0} \cup (\bigcup_{I=1}^{6} C_I)$ kümesi de sonlu bir kümedir. Ayrıca 3.4.32 Sonuç ile $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma)$ dir. Dolayısıyla sonlu türetilmiş tip özelliğinin tanımı gereği, $A \Diamond B$ bu homotopik sonluluk özelliğine sahiptir. Bu da istenen sonuçtur. □

4. MONOİDLERİN GRAF ÇARPIMI İÇİN SONLU TÜRETİLMİŞ TİP ÖZELLİĞİ

4.1 Giriş

Bu bölümde monoidler üzerinde diğer önemli bir çarpım olan graf çarpım ele alınmış ve bu çarpımın *sonlu türetilmiş tip* özelliğine sahip olması için gerek koşul verilmiştir. Bu bölümde sunulan "Ana Teorem" ve ispatı, tezimizin 3. Bölümünde olduğu gibi verilecektir.

4.2 Monoidlerin Graf Çarpımı

Graf çarpımının temelini "Graflar" oluşturduğundan, ilk olarak bu özel geometrik yapı ile ilgili tezimiz için bilinmesi gereken temel özellikleri verelim. Daha detaylı bilgilere [45, 62] kaynaklarından ulaşılabilir.

V *köşelerin kümesi*, $E \subseteq V \times V$ *kenarların kümesi* olmak üzere, *graf* $\Gamma' = (V, E)$ biçiminde ifade edilen geometrik bir yapıdır. Bu Γ' grafındaki herhangi iki u ve v köşesi için, $(u, v) \in E$ ise bu kenarlar *bitişiktir* denir. Eğer bir grafta bütün köşeler birbirine bir kenar ile bağlı ise bu durumda bu graf *tam graf* adını alır.

Graf çarpım, ilk olarak grup yapısı üzerinde çalışılmış ve Green'in doktora tezi ile literatüre girmiştir [30]. Birçok matematikçi tarafından da çalışılan bu çarpım, daha sonra monoid cebirsel yapısı üzerinde düşünülmüştür. Bu yöndeki bazı çalışmaları şu şekilde özetleyebiliriz:

- Costa ([17]) monoidlerin graf çarpımını kullanarak oluşturulan monoid için, Yarı Grup Teori'de oldukça önemli bir yer teşkil eden Green bağıntılarını karakterize etmiş ve bu monoidden alınan bir elemanın idempotent, regüler ve tam regüler olması için gerek ve yeter koşulları vermiştir.

- Fohry ve Kuske, [26] daki çalışmalarında Teorik Bilgisayar Bilimi'nde önemli bir çalışma alanı oluşturan otomatik yapıları bu çarpım üzerinde incelemişlerdir.

- Fountain ve Kambites ([27]) sağ terslenebilir monoidlerin graf çarpımı üzerinde çalışmalarda bulunmuşlardır.

Graf çarpım aslında direkt ve serbest çarpımların bir karışımıdır. Eğer grafın hiçbir kenarı yok ise, graf çarpım monoidlerin bir serbest çarpımıdır. Eğer graf tam ise, bu durumda monoidlerin bir direkt çarpımıdır. Bir grafın her bir köşesine bir monoid konulduğu düşünülürse graf çarpım, köşe monoidleri ile üretilen bir monoid olur. Her bir monoidin sahip olduğu bağıntıların yanı sıra bitişik köşelerdeki monoidlerin elemanları arasındaki değişmeli kurallar da bağıntı kümesine eklenir. Bu monoidler özel olarak $\mathbb{Z}^+$ ya izomorf alınırsa bu durumda bu monoidlerin graf çarpımı, *graf monoid* olarak adlandırılır. Graf monoidler literatürde serbest kısmi değişmeli monoidler, sağ-açılı Artin monoidler veya iz monoidleri olarak da bilinirler ([24]).

4.2.1 Tanım: M_j $(1 \le j \le n, \quad n \in \mathbb{Z}^+)$ monoidleri, her bir $\mathbf{x}_j$ kümesi birbirinden farklı olmak üzere, $\wp_{M_j} = [\mathbf{x}_j \; ; \mathbf{s}_j]$ sunuşlarına sahip olsun. Γ' grafı; köşeleri M_j monoidleri ile etiketlenen basit bir graf olmak üzere, bu M_j monoidlerinin graf çarpımı $X = \bigcup \mathbf{x}_j$ ($\mathbf{x}_{j_1}$ ve $\mathbf{x}_{j_2}$ birbirini takip eden M_{j_1} ve M_{j_2} $(j_1 \ne j_2, 1 \le j_1, j_2 \le n)$ monoidlerinin üreteçleri), $S = \bigcup \mathbf{s}_j$ ve

$$S_{\Gamma'} = \{(ab, ba) : a \in \mathbf{x}_{j_1}, b \in \mathbf{x}_{j_2}\}$$

için $\wp_M = [X \; ; S, S_{\Gamma'}]$ sunuşunun temsil ettiği monoid olur [17].

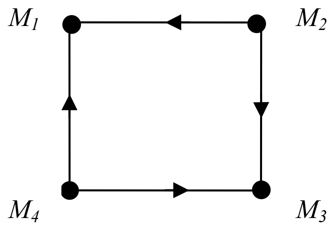
4.2.2 Örnek: M_1, M_2, M_3 ve M_4 monoidlerinin sunuşları sırasıyla

$$\wp_{M_1} = [x; x^3 = 1], \ \wp_{M_2} = [y; y^2 = 1], \ \wp_{M_3} = [z; z^3 = 1] \text{ ve } \wp_{M_4} = [t; t^2 = 1]$$

olsun. Şekil 4.1 deki gibi grafın her bir köşesine bu M_1, M_2, M_3 ve M_4 devirli monoidleri yerleştirilsin. Böylece bu köşe monoidleri ile üretilen graf çarpımın sunuşu

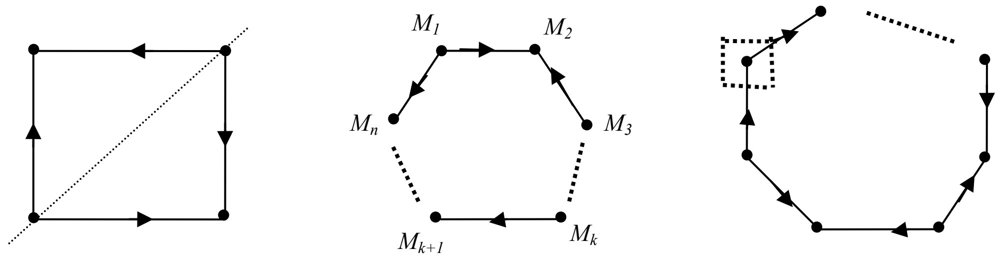
$$\wp = [x, y, z, t; x^3 = 1, y^2 = 1, z^3 = 1, t^2 = 1, yx = xy, yz = zy, tz = zt, tx = xt]$$

biçiminde olacaktır.



Şekil 4.1

4.2.3 Uyarı: Bu çalışmada M_j monoidlerinin sayısını çift almamız gerekmektedir $(1 \leq j \leq n,\ n = 2m, m \in \mathbb{Z}^+)$. Bunun sebebi ise bu monoidlerin graf çarpımı için bir confluent sunuş oluşturmaktır. (Dolayısıyla çözülebilir kelime problemine sahip bir monoid elde edilir). Diğer sebep ise graf üzerindeki okların yönüdür. Bu oklar ile $S_{\Gamma'}$ kümesindeki kuralların yönü kastedilmektedir. Diğer bir deyişle, $S_{\Gamma'}$ kümesindeki kuralların nasıl yazılması gerektiğini (soldan sağa veya sağdan sola) belirlenmesi gerekmektedir. Eğer graf çarpımının yapılacağı M_j monoidlerinin sayısını çift seçmeseydik birbirini takip eden en az iki ok olurdu (bakınız Şekil 4.2-(c)). Dolayısıyla $\wp_M$ sunuşu kullanılarak elde edilen kritik çiftler (çakışan kelimelerin indirgenmesiyle elde edilen kelimeler) çözülemezdi bu da sonlu ve tam bir sunuşa sahip olamayacağımız sonucunu verirdi.



$n=4$ (a) $\qquad$ $n=2m$ (b) $\qquad$ $n=2m+1$ (c)

Şekil 4.2

Kabul edelim ki, M_1, M_2, …, M_k, M_{k+1}, …, M_{n-1}, M_n monoidleri graf üzerinde bitişik monoidler olsun. Bu durumda Şekil 4.2-(b) yi de düşünerek $S_{\Gamma'}$ kümesi

$$\begin{aligned}\{&x_1x_2 = x_2x_1,\ x_3x_2 = x_2x_3,\ x_3x_4 = x_4x_3,\ x_5x_4 = x_4x_5,\ \ldots,\ x_kx_{k+1} = x_{k+1}x_k, \\ &x_{k+2}x_{k+1} = x_{k+1}x_{k+2},\ x_{k+2}x_{k+3} = x_{k+3}x_{k+2},\ \ldots,\ x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1},\ x_1x_n = x_nx_1\}\end{aligned} \tag{4.1}$$

$(x_j \in \mathbf{x}_j,\ 1 \le j \le n)$ biçiminde yazılır. Bu bölümdeki işlemleri kolaylaştırmak için (4.1) deki kümeyi

$$T_j : \begin{cases} x_jx_{j+1} = x_{j+1}x_j \ ; \ j \text{ tek sayı} \\ x_{j+1}x_j = x_jx_{j+1} \ ; \ j \text{ çift sayı } (j \ne n) \\ x_1x_n = x_nx_1 \quad ; \ j = n \end{cases}$$

olarak etiketleyebiliriz.

M_1 ve M_2 monoidlerinin yerleştirildiği köşeleri sırasıyla v_{M_1} ve v_{M_2} ile gösterelim. Bu köşeleri birbirine bağlayan kenarın yönü v_{M_1} köşesinden v_{M_2} köşesine doğru ise bu durumda $(v_{M_1}, v_{M_2}) \in E$ yazılır.

Şuna dikkat çekmeliyiz ki herhangi bir n (n çift) sayısı için, temel nokta seçiminde iki durum vardır. (Bu temel noktanın seçimi sunuştaki bağıntıların yazımını etkileyecektir). Bunlardan ilki, bu noktanın yönleri birbirlerine doğru olan iki okun ortasındaki köşeye konmasıdır (ki böylece $S_{\Gamma'}$ kümesi elde edilir). Diğer bir deyişle, bu noktayı $e_1 = (v_{M_1}, v_{M_2}) \in E$ ve $e_2 = (v_{M_3}, v_{M_2}) \in E$ biçimindeki e_1 ve e_2 kenarlarının ortasındaki köşe olarak almaktır. Diğeri ise yönleri birbirlerine zıt yönde olan yani $e_1^{'} = (v_{M_2}, v_{M_1}) \in E$ ve $e_2^{'} = (v_{M_2}, v_{M_3}) \in E$ biçimindeki iki kenarın ortasındaki köşeye koymaktır. Bu durumda açıktır ki (4.1) deki bağıntılar $\{x_2x_1 = x_1x_2,\ x_2x_3 = x_3x_2,\ ...,\ x_nx_1 = x_1x_n\}$ olarak elde edilir.

Not: Monoidlerin graf çarpımının sunuşu üreteç kümesindeki bütün üreteçler için değişmeli bağıntılar içermediğinden monoidlerin direkt çarpımından farklıdır. Bu ise bize; bu bölümde yapılan çalışmanın literatürde daha önce bulunmadığını göstermektedir.

4.3 Ana Teorem

Γ_{M_j} ve Γ_M grafları sırasıyla $\wp_{M_j}$ ve $\wp_M$ sunuşları ile ilişkili graflar olsun. (Aslında her bir Γ_{M_j} grafı Γ_M nin bir alt grafı olarak düşünülebilir). Ayrıca her bir Γ_{T_j} $(1 \le j \le n)$ grafı Γ_M in alt grafı olsun. Bunlara ek olarak

$$\Gamma_{M_1,M_2}, ..., \Gamma_{M_k,M_{k+1}}, ..., \Gamma_{M_{n-1},M_n}, \Gamma_{M_1,M_n}$$

grafları Γ_M nin diğer alt grafları olmak üzere,

- Γ_{M_1,M_2} grafının kenarları $\Gamma_{M_1}, \Gamma_{M_2}$ ve Γ_{T_1} graflarının kenarlarının birleşimi,

  …
- $\Gamma_{M_k,M_{k+1}}$ grafının kenarları $\Gamma_{M_k}, \Gamma_{M_{k+1}}$ ve Γ_{T_k} graflarının kenarlarının birleşimi,

  …
- Γ_{M_{n-1},M_n} grafının kenarları $\Gamma_{M_{n-1}}, \Gamma_{M_n}$ ve $\Gamma_{T_{n-1}}$ graflarının kenarlarının birleşimi

  ve

- Γ_{M_1,M_n} grafının kenarları $\Gamma_{M_1}, \Gamma_{M_n}$ ve Γ_{T_n} graflarının kenarlarının birleşimidir.

Bu bölümde elde edilen ana sonuç aşağıda verilmiştir.

4.3.1 Teorem (*Ana Teorem*) [37]: Her bir M_j $(1 \leq j \leq n,\ n = 2m, m \in \mathbb{Z}^+)$ monoidi sonlu türetilmiş tipe sahip ise, bu monoidlerin graf çarpımı da sonlu türetilmiş tipe sahiptir.

Ana teoremin ispatı bir sonraki alt bölümde ayrıntılı olarak verilecektir.

4.4 Ana Teoremin İspatı

İlk olarak ana sonucun ispatı için gerekli olan yardımcı teoremleri verelim. Bunun için $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $P_+(\Gamma_{T_j})$ (sırasıyla $P_-(\Gamma_{T_j})$) kümesi Γ_{T_j} grafı içinde sadece $(U_j, T_j, +1, V_j)$ (sırasıyla $(U_j, T_j, -1, V_j)$) formundaki kenarları içeren yolların kümesi olsun. Ayrıca $\simeq$ bağıntısı $P(\Gamma_M)$ üzerinde keyfi bir homotopi bağıntısı olarak verilsin. Bunlara ek olarak şunu not etmeliyiz ki, *j* nin tek veya çift sayı olmasına göre (4.1) kümesindeki bağıntıların yazımı değişeceğinden aşağıda verilecek olan yardımcı teoremler ve ispatları *j* nin tek sayı olduğu düşünülerek yapılacaktır. *j* nin diğer durumu (çift sayı) için olan ispatlar da bunlara benzer olarak yapılır.

a) *j nin tek sayı olma durumu*:

4.4.1 Yardımcı Teorem: $p \in P(\Gamma_{T_j})$ olsun. Bu durumda $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolları için $p \simeq p_+ p_-$ dir.

İspat: $e_1, e_2, ..., e_m$ lerin her biri Γ_{T_j} grafında kenarlar olmak üzere, $p = e_1 e_2 ... e_m$ olsun. *j* nin tek sayı olma durumu düşünüldüğü için, $T_j : x_j x_{j+1} = x_{j+1} x_j$

$(x_j \in \mathbf{x}_j, x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1})$ biçiminde bir bağıntı vardır. Bir i indeksi için $e_i \in P_-(\Gamma_{T_j})$ ve $e_{i+1} \in P_+(\Gamma_{T_{j+1}})$ olsun. Bu durumda öyle küçük bir i seçelim ki $x_{j_i}, x_{j_{i+1}} \in \mathbf{x}_j$, $x_{j+1_i}, x_{j+1_{i+1}} \in \mathbf{x}_{j+1}$ için,

$$\begin{aligned} e_i &= (U_i, T_{j_i}, -1, V_i), \qquad & T_{j_i} &: x_{j_i} x_{j+1_i} = x_{j+1_i} x_{j_i}, \\ e_{i+1} &= (U_{+1i}, T_{j_{i+1}}, +1, V_{i+1}), \qquad & T_{j_{i+1}} &: x_{j_{i+1}} x_{j+1_{i+1}} = x_{j+1_{i+1}} x_{j_{i+1}}. \end{aligned}$$

olsun. Eğer $U_i = U_{i+1}$ ise bu durumda $x_{j_i} = x_{j_{i+1}}, x_{j+1_i} = x_{j+1_{i+1}}$ ve $V_i = V_{i+1}$ dir. Dolayısıyla $e_{i+1} = e_i^{-1}$ dir ve böylece $p \simeq e_1 ... e_{i-1} e_{i+2} ... e_m$ olur. Eğer $U_i \neq U_{i+1}$ ise bu durumda $U_i x_{j_i} x_{j+1_i} V_i = U_{i+1} x_{j_{i+1}} x_{j+1_{i+1}} V_{i+1}$ eşitliği kenarların bağıntıların farklı uygulamalarını içermesini sağlar. Burada $U_i = U_{i+1} x_{j_{i+1}} x_{j+1_{i+1}} W_{i+1}$ ve $V_{i+1} = W_{i+1} x_{j_i} x_{j+1_1} V_i$ ise, $e_i^{'} \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $e_{i+1}^{'} \in P_-(\Gamma_{T_j})$ olmak üzere 2.5.1 Tanım (a) ile

$$\begin{aligned} e_i e_{i+1} &= (U_{i+1} x_{j_{i+1}} x_{j+1_{i+1}} W_{i+1}, T_{j_i}, -1, V_i)(U_{i+1}, T_{j_{i+1}}, +1, W_{i+1} x_{j_i} x_{j+1_i} V_i) \\ &\simeq (U_{i+1}, T_{j_{i+1}}, +1, W_{i+1} x_{j+1_i} x_{j_i} V_i)(U_{i+1} x_{j+1_{i+1}} x_{j_{i+1}} W_{i+1}, T_{j_i}, -1, V_i) \\ &= e_i^{'} e_{i+1}^{'} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $p \simeq e_1 ... e_{i-1} e_i^{'} e_{i+1}^{'} e_{i+2} ... e_m$ (2.5.1 Tanım (c) ile) elde edilir. Dolayısıyla p yolu istenen formdaki yol haline dönüşür. □

4.4.2 Yardımcı Teorem: $p \in P(\Gamma_{T_j})$ olsun. Eğer $\iota(p) = UV$ ve $\tau(p) = U'V'$ $(U, U' \in \mathbf{x}_j^{*}, V, V' \in \mathbf{x}_{j+1}^{*})$ ise, $U = U'$, $V = V'$ ve $p \simeq 1$ dir.

İspat: 4.4.1 Yardımcı Teorem ile $p \simeq p_+ p_-$ olacak şekilde $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolları vardır. $\iota(p_+) = \iota(p) = UV$ ve $\tau(p_+) = \tau(p) = U'V'$ olduğu için, $p_+ = 1$ ve $p_- = 1$ elde ederiz. Böylece $p \simeq 1$ ve $U = U', V = V'$ olur. □

Şimdi $f_j(x_j) = x_j$ ve $f_j(x_{j+1}) = 1$ $(x_j \in \mathbf{x}_j,\ x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1})$ olacak şekilde bir

$$f_j : (\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^* \to \mathbf{x}_j^*$$

homomorfizması tanımlayalım. Bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.3 Yardımcı Teorem: $W \in (\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^*$ olsun. Bu durumda bazı $V \in \mathbf{x}_{j+1}{}^*$ için W den $Vf_j(W)$ köşesine bir $p_W \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu vardır. Eğer bazı $V' \in \mathbf{x}_{j+1}{}^*$ için W köşesinden $V' f_j(W)$ köşesine bir $p \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu varsa, bu durumda $V = V'$ ve $p_W \simeq p$ dir.

İspat: Bir $W = W_0 x_{j+1_1} W_1 x_{j+1_2} ... x_{j+1_m} W_m$ kelimesi alalım. Burada $x_{j+1_t} \in \mathbf{x}_{j+1}$, $W_s \in \mathbf{x}_{j+1}^*$ $(1 \le t \le m$ ve $0 \le s \le m)$ olduğundan $f_j(W) = W_0 W_1 ... W_m$ olur. Ayrıca $W_0 = x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_k}$ $(x_{1_i} \in x_1, 1 \le i \le k)$ olmak üzere,

$$T_{j_i} : x_{j_i} x_{j+1_1} = x_{j+1_1} x_{j_i} \ (1 \le i \le k)$$

dir. Bunlara ek olarak, $W' = W_1 x_{j+1_2} W_2 x_{j+1_3} ... x_{j+1_m} W_m$ kelimesini alalım. Bu durumda $P_+(\Gamma_{T_j})$ deki

$$(x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_{k-1}}, T_{j_k}, +1, W')(x_{j_1} x_{j_2} ... x_{j_{k-2}}, T_{j_{k-1}}, +1, x_{j_k} W')...(1, T_{j_1}, +1, x_{j_2} ... x_{j_k} W')$$

yolu $W = W_0 x_{j+1_1} W'$ den $x_{j+1_1} W_0 W'$ köşesine bir yoldur. Bu şekilde devam edilirse, bazı $V \in \mathbf{x}_{j+1}^*$ kelimesi için, W den $Vf_j(W)$ köşesine bir $p_w \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu elde edilir. Eğer bazı $V' \in \mathbf{x}_{j+1}^*$ kelimesi için, $p \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu W den $V' f_j(W)$ ye bir yol ise bu durumda $p^{-1} p_w \in P(\Gamma_{T_j})$ yolu da $V' f_j(W)$ den $Vf_j(W)$ köşesine bir yoldur. Dolayısıyla 4.4.2 Yardımcı Teorem ile, $p^{-1} p_W \simeq 1$ ve bu da $p_W \simeq p$ (2.5.1 Tanım (c), (d) ile) ve $V = V'$ sonucunu verir. □

Şimdi $p,q \in P(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ olmak üzere $\simeq$ bağıntısı $P(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ üzerinde bir homotopi bağıntısı olsun. Bazı $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolları için $p \simeq p_+qp_-$ oluyor ise, 3.4 Alt Bölüm'de verildiği gibi $p \mapsto q$ yazılır. Ayrıca şunu not edelim ki bu $\mapsto$ bağıntısı geçişmelidir ve $(\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^*$ kümesinin iki yanlı hareketi ile uyumludur. Bunlara ek olarak, Temel Yardımcı Teorem'in (4.4.10 Yardımcı Teorem) ispatı için $p \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $q \in P(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\iota(p).q \mapsto \tau(p).q \\ &q.\iota(p) \mapsto q.\tau(p) \end{aligned} \tag{4.2}$$

kurallarını hatırlatalım. (Bunlar 2.5.1 Tanım ile kolaylıkla görülebilir).

Her bir $S_j : S_j^{+1} = S_j^{-1} \in \mathbf{s}_j$ ve her bir $x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1}$ için, 4.4.3 Yardımcı Teorem ile $S_j^{+1}x_{j+1}$ den $x_{j+1}S_j^{+1}$ köşesine bir $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu ve $x_{j+1}S_j^{-1}$ den $S_j^{-1}x_{j+1}$ köşesine bir $p_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolu vardır. Ayrıca $[S_j^{+1}]_{M_j} = [S_j^{-1}]_{M_j}$ olduğundan S_j^{+1} den S_j^{-1} köşesine bir p_{S_j} yolu da mevcuttur. Dolayısıyla $S_j^{+1}x_{j+1}$ den $S_j^{-1}x_{j+1}$ e bir

$$q_{S_j,x_{j+1}} = p_+(x_{j+1}, S_j, +1, 1)p_-$$

yolu elde edilir (Şekil 4.3-(a)). Bu durumda

$$C_{j,j+1} = \{((1,S_j,+1,x_{j+1}),q_{S_j,x_{j+1}}) : S_j \in \mathbf{s}_j,\ x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1}\} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$$

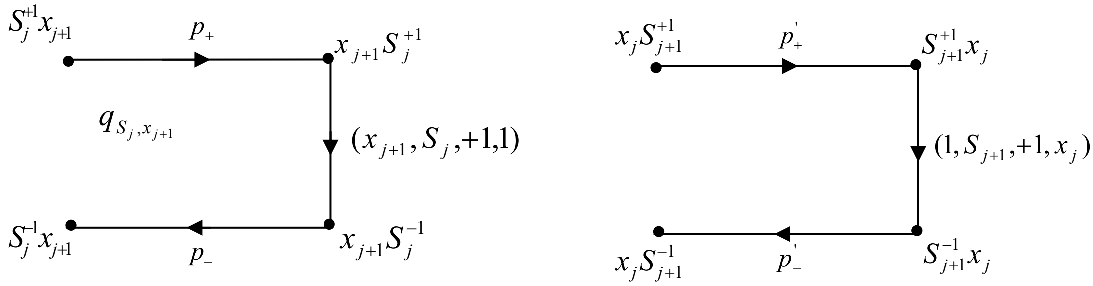
olsun. Her bir $x_j \in \mathbf{x}_j$ ve $S_{j+1} : S_{j+1}^{+1} = S_{j+1}^{-1} \in \mathbf{s}_{j+1}$ için, 4.4.3 Yardımcı Teorem ile $x_jS_{j+1}^{+1}$ den $S_{j+1}^{+1}x_j$ köşesine bir $p_+' \in P_+(\Gamma_{T_j})$ yolu ve $S_{j+1}^{-1}x_j$ den $x_jS_{j+1}^{-1}$ köşesine bir $p_-' \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolu vardır. Ayrıca $[S_{j+1}^{+1}]_{M_{j+1}} = [S_{j+1}^{-1}]_{M_{j+1}}$ olduğundan S_{j+1}^{+1} den S_{j+1}^{-1} köşesine de bir $p_{S_{j+1}}$ yolu mevcuttur. Böylece $x_jS_{j+1}^{+1}$ den $x_jS_{j+1}^{-1}$ köşesine bir

$$q'_{x_j,S_{j+1}} = p'_+(1,S_{j+1},+1,x_j)p'_-$$

yolu elde edilir (Şekil 4.3-(b)). Buradan

$$C'_{j,j+1} = \{((x_j,S_{j+1},+1,1),q'_{x_j,S_{j+1}}):S_{j+1} \in \mathbf{s}_{j+1},\ x_j \in \mathbf{x}_j\} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$$

olsun.



(a) (b)

Şekil 4.3

Şimdi Temel Yardımcı Teorem'i (4.4.10 Yardımcı Teorem) oluşturmak için gerekli olan yardımcı teoremleri verelim. Bunun için

$$h_j:(\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^* \to \mathbf{x}_{j+1}{}^*$$

homomorfizmasını tanımlayalım.

4.4.4 Yardımcı Teorem: p ve q yolları $\tau(p)=\iota(q)$ olacak şekilde $\Gamma_{M_j,M_{j+1}}$ da iki yol olsun. $p \mapsto p', q \mapsto q'$ ve $\tau(p'),\iota(q') \in (\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^*$ ise bu durumda $\tau(p')=\iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ dir.

İspat: $p \mapsto p'$ ve $q \mapsto q'$ olduğu için, $p \simeq p_+p'p_-$ ve $q \simeq q_+q'q_-$ ($p_+,q_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p_-,q_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$) homotopik denkliklere sahip oluruz. Bu durumda açıkça görülür ki

$$pq \simeq p_+ p' p_- q_+ q' q_-$$

dir ve 4.4.2 Yardımcı Teorem ile de $p_- q_+ \simeq 1$ dir. Dolayısıyla $\tau(p') = \iota(q')$ ve $pq \mapsto p'q'$ sonucu elde edilir. □

4.4.5 Yardımcı Teorem: $U, V \in \mathbf{x}^*_{\mathrm{j+1}}$, $S_{j+1} \in \mathbf{s}_{\mathrm{j+1}}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, $e = (U, S_{j+1}, \varepsilon, V)$ kenarı $\Gamma_{M_{j+1}}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda herhangi bir $x_j \in \mathbf{x}_{\mathrm{j}}$ için,

$$x_j.e \mapsto_{C'_{j,j+1}} q.x_j$$

olacak şekilde $\Gamma_{M_{j+1}}$ de bir q yolu vardır.

İspat: 4.4.3 Yardımcı Teorem ile, $P_+(\Gamma_{M_{j+1}})$ içinde $x_j U$ dan $h_j(x_j U)x_j$ köşesine bir yol vardır. Dolayısıyla (4.2) ile

$$x_j.e \mapsto_{C'_{j,j+1}} (h_j(x_j U)x_j, S_{j+1}, \varepsilon, V) \mapsto_{C'_{j,j+1}} q_1.x_j V$$

$(q_1 \in P(\Gamma_{M_{j+1}}))$ homotopik denklikleri elde edilir. Ayrıca $P_+(\Gamma_{M_{j+1}})$ içinde $x_j V$ den $h_j(x_j V)x_j$ köşesine bir yol daha vardır ve (4.2) ile

$$q_1.x_j V \mapsto_{C'_{j,j+1}} q.x_j$$

elde edilir. Burada $q = q_1.h_j(x_j V)$ dir. Sonuç olarak $x_j.e \mapsto_{C'_{j,j+1}} q.x_j$ homotopik denkliğinin sağlandığı görülür. □

4.4.6 Yardımcı Teorem: p yolu $\Gamma_{M_{j+1}}$ grafında herhangi bir yol olsun. Herhangi $W \in \mathbf{x}^*_{\mathrm{j}}$ için,

$$W.p \mapsto_{C'_{j,j+1}} q.W$$

olacak şekilde $\Gamma_{M_{j+1}}$ da bir q yolu vardır.

İspat: İspat W kelimesinin bir tek $x_j \in \mathbf{x_j}$ harfinden oluşması üzerine verilmiştir. Genel durum W kelimesinin uzunluğu üzerinde tümevarım hipotezi düşünülerek yapılabilir.

$p = e_1 e_2 ... e_m$ olsun. Bu durumda 4.4.6 Yardımcı Teorem ile, $x_j.e_i \mapsto_{C'_{j,j+1}} q_i.x_j$ olacak şekilde bir $q_i \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ yolu vardır. Burada $1 \leq i \leq m$ için, $e_i = (U_i, S_{j+1_i}, \varepsilon_i, V_i)$ ve $U_i, V_i \in \mathbf{x}^*_{j+1}$ dır. Böylece 4.4.4 Yardımcı Teorem ile,

$$x_j.p \mapsto_{C'_{j,j+1}} (q_1 q_2 ... q_m).x_j$$

elde edilir. □

4.4.7 Yardımcı Teorem: $U, V \in (\mathbf{x}_j \cup \mathbf{x}_{j+1})^*$, $S_{j+1} \in \mathbf{s}_{j+1}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, $(U, S_{j+1}, \varepsilon, V)$ kenarı $\Gamma_{M_j, M_{j+1}}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda $\Gamma_{M_{j+1}}$ grafında bir q yolu vardır öyle ki

$$(U, S_{j+1}, \varepsilon, V) \mapsto_{C'_{j,j+1}} q.f_j(UV)$$

dir.

İspat: $\Gamma_{M_j, M_{j+1}}$ grafında bir $(U, S_{j+1}, \varepsilon, V)$ kenarını alalım.

$$\begin{aligned}
(U, S_{j+1}, \varepsilon, V) &\mapsto_{C'_{j,j+1}} (h_j(U) f_j(U), S_{j+1}, \varepsilon, V) && \text{(4.4.3 Yardımcı Teorem ve (4.2) ile)} \\
&\mapsto_{C'_{j,j+1}} q_1.f_j(U)V && \text{(4.4.6 Yardımcı Teorem ile)} \\
&\mapsto_{C'_{j,j+1}} q_1 h_j(U f_j(V)) f_j(UV) && \text{(4.4.3 Yardımcı Teorem ve (4.2) ile)} \\
&\mapsto_{C'_{j,j+1}} q.f_j(UV)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada $q_1 \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ ve $q = q_1.h_j(Uf_j(V))$ dir. □

4.4.8 Yardımcı Teorem: $S_j \in \mathbf{s}_j$ ve $W \in \mathbf{x}_{\mathrm{j+1}}^*$ olsun. Bu durumda bazı $W' \in \mathbf{x}_{\mathrm{j+1}}^*$ için,

$$(1, S_j, \varepsilon, 1).W \mapsto_{C_{j,j+1}} (q.S_j^{\varepsilon})(W'.(1, S_j, \varepsilon, 1))$$

olacak şekilde $\Gamma_{M_{j+1}}$ grafında bir q yolu vardır.

İspat: Herhangi bir $U \in (\mathbf{x}_{\mathrm{j}} \cup \mathbf{x}_{\mathrm{j+1}})^*$ kelimesi ve $p \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ yolu için, 4.4.3 Yardımcı Teorem ve (4.2) ile

$$p.U \mapsto p'.f_j(U) \tag{4.3}$$

$(p' \in P(\Gamma_{M_{j+1}}))$ homotopik denkliğini elde ederiz. Buna ek olarak, her bir $x_{j+1} \in \mathbf{x}_{\mathbf{j+1}}$ için, $C_{j,j+1}$ kümesinin tanımı ile

$$(1, S_j, \varepsilon, 1).x_{j+1} \mapsto_{C_{j,j+1}} (x_{j+1}.S_j^{\varepsilon})(x_{j+1}.(1, S_j, \varepsilon, 1)) \tag{4.4}$$

homotopik denkliğine sahip oluruz. (4.3) ve (4.4) ün tekrarlanması ve 4.4.4 Yardımcı Teorem ile istenen sonuç elde edilir. □

4.4.9 Yardımcı Teorem: $U, V \in (\mathbf{x}_{\mathrm{j}} \cup \mathbf{x}_{\mathrm{j+1}})^*$, $S_j \in \mathbf{s}_{\mathrm{j}}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, (U, S_j, ε, V) kenarı $\Gamma_{M_j, M_{j+1}}$ grafında bir kenar olsun. Bu durumda $q \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ için,

$$(U, S_j, \varepsilon, V) \mapsto_{C_{j,j+1} \cup C'_{j,j+1}} (q.f_j(US_j^{\varepsilon}V))W(f_j(U), S_j, \varepsilon, f_j(V))$$

sağlanır.

İspat: $\Gamma_{M_j,M_{j+1}}$ grafında bir (U,S_j,ε,V) kenarını alalım. 4.4.3 Yardımcı Teorem ve (4.2) ile

$$(U,S_j,\varepsilon,V)\mapsto (h_j(U)f_j(U),S_j,\varepsilon,h_j(V)f_j(V))$$

denkliği ve 4.4.8 Yardımcı Teorem ile de

$$(h_j(U)f_j(U),S_j,\varepsilon,h_j(V)f_j(V))\mapsto_{C_{j,j+1}} (h_j(U)f_j(U)q_1.S_j^{\varepsilon}f_j(V))(h_j(U)f_j(U)W_1.(1,S_j,\varepsilon,f_j(V)))$$

$(q_1\in P(\Gamma_{M_{j+1}}),W_1\in \mathbf{x}^*_{\mathrm{j+1}})$ denkliğini elde ederiz. Ayrıca 4.4.6 Yardımcı Teorem ile

$$h_j(U)f_j(U).q_1.S_j^{\varepsilon}f_j(V)\mapsto_{C'_{j,j+1}} q.f_j(US_j^{\varepsilon}V) \qquad (q\in P(\Gamma_{M_{j+1}}))$$

ve 4.4.3 Yardımcı Teorem ve (4.2) ile

$$h_j(U)f_j(U)W_1.(1,S_j,\varepsilon,f_j(V))\mapsto W.(f_j(U),S_j,\varepsilon,f_j(V)) \qquad (W\in \mathbf{x}^*_{\mathrm{j+1}})$$

dir. Buradan 4.4.4 Yardımcı Teorem ve yukarıdaki homotopik denklikler kullanılarak

$$(U,S_j,\varepsilon,V)\mapsto_{C_{j,j+1}\cup C'_{j,j+1}} (q.f_j(US_j^{\varepsilon}V)(W.f_j(U),S_j,\varepsilon,f_j(V)))$$

denkliği elde edilir. Burada, 4.4.3 Yardımcı Teorem ve h_j nin tanımı ile $W=h_j(US_j^{-\varepsilon}V)$ dir. □

4.4.10 Yardımcı Teorem (Temel Yardımcı Teorem): $p\in P(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ olsun. $q'\in P(\Gamma_{M_{j+1}})$, $r'\in P(\Gamma_{M_j})$ olmak üzere, $q=q'.f_j(\iota(p))$ ve $r=h_j(\tau(p)).r'$ dir. Ayrıca $p_+\in P_+(\Gamma_{T_j})$, $p_-\in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolları için,

$$p \simeq_{C_{j,j+1} \cup C'_{j,j+1}} p_+ q r p_-$$

homotopik denkliği sağlanır. Burada $\tau(p_+) = h_j(\iota(p)) f_j(\iota(p))$ ve $\iota(p_-) = h_j(\tau(p)) f_j(\tau(p))$ dir.

İspat: $U, V \in (\mathbf{x}_{\mathrm{j}} \cup \mathbf{x}_{\mathrm{j+1}})^*$ kelimeleri için, p yolunun (U, Q, ε, V) biçiminde tek bir kenar içerdiğini kabul edelim. Bu durumda sonuç,

$Q \in s_{j+1}$ ise 4.4.7 Yardımcı Teorem,

$Q \in s_j$ ise 4.4.9 Yardımcı Teorem,

$Q \in T_j$ ise 4.4.3 Yardımcı Teorem

ile açıktır. Şimdi e bir kenar ve p bir yol olmak üzere, $p = p_1 e$ olarak tanımlansın. Bu durumda

$$\begin{aligned} p &\mapsto_{C_{j,j+1} \cup C'_{j,j+1}} (q'_1 . f_j(\iota(p)))(h_j(\tau(p_1)).r'_1), \\ e &\mapsto_{C_{j,j+1} \cup C'_{j,j+1}} (q'_2 . f_j(\iota(e)))(h_j(\tau(p)).r'_2) \end{aligned}$$

biçiminde homotopik denklikler vardır. Burada $q'_1, q'_2 \in P(\Gamma_{M_{j+1}}), r'_1, r'_2 \in P(\Gamma_{M_j})$ ve

$$\begin{aligned} \iota(q'_1) &= h_j(\iota(p)), \qquad \tau(r'_1) = f_j(\tau(p_1)), \\ \iota(q'_2) &= h_j(\iota(e)), \qquad \tau(r'_2) = f_j(\tau(p)) \end{aligned}$$

dir. Buradan 4.4.4 Yardımcı Teorem ile

$$p \mapsto_{C_{j,j+1} \cup C'_{j,j+1}} (q'_1 . f_j(\iota(p)))(h_j(\tau(p_1)).r'_1)(q'_2 . f_j(\iota(e)))(h_j(\tau(p)).r'_2)$$

homotopik denkliğini elde ederiz. Buradaki $h_j(\tau(p_1)).r'_1$ ve $q'_2 . f_j(\iota(e))$ yollarında kullanılan bağıntılar farklı olduğundan, 2.5.1 Tanım (a) ile,

$$(h_j(\tau(p_1)).r_1^{'})(q_2^{'}.f_j(\iota(e))) \simeq (q_2^{'}.f_j(\iota(p)))(h_j(\tau(p)).r_1^{'})$$

denkliği elde edilir. Buradan $q^{'} = q_1^{'}q_2^{'}$ ve $r^{'} = r_1^{'}r_2^{'}$ eşitlikleri kabul edilirse $\iota(q^{'}) = h_j(\iota(p))$ ve $\tau(r^{'}) = f_j(\tau(p))$ için,

$$p \mapsto_{C_{j,j+1} \cup C_{j,j+1}^{'}} (q^{'}.f_j(\iota(p)))(h_j(\tau(p)).r^{'})$$

sonucu elde edilir. □

Ayrıca M_j monoidleri sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip oldukları için, $\simeq_{C_{M_j}} = P^{(2)}(\Gamma_{M_j})$ ve $\simeq_{C_{M_{j+1}}} = P^{(2)}(\Gamma_{M_{j+1}})$ olacak şekilde $C_{M_j} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_j})$ ve $C_{M_{j+1}} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_{j+1}})$ sonlu alt kümeleri vardır.

Buradan $C' = C_{M_j} \cup C_{M_{j+1}} \cup C_{j,j+1} \cup C_{j,j+1}^{'}$ olmak üzere aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.4.11 Sonuç: $\simeq_{C'} = P^{(2)}(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ dır.

İspat: $(p_j, p_{j+1}) \in P^{(2)}(\Gamma_{M_j,M_{j+1}})$ olsun. $p_+, p_+^{'} \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p_-, p_-^{'} \in P_-(\Gamma_{T_j})$ olmak üzere, Temel Yardımcı Teorem (4.4.10 Yardımcı Teorem) ile $p_j \simeq_{C'} p_+q_jr_jp_-$ ve $p_{j+1} \simeq_{C'} p_+^{'}q_{j+1}r_{j+1}p_-^{'}$ denklikleri vardır. Ayrıca $q_i^{'} \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ ve $r_i^{'} \in P(\Gamma_{M_{j+1}})$ $(i = j, j+1)$ için,

$$q_i = q_i^{'}.f_j(\iota(p_i)) \quad \text{ve} \quad r_i = h_j(\tau(p_i)).r_i^{'}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada $\iota(p_j) = \iota(p_{j+1})$ ve $\tau(p_j) = \tau(p_{j+1})$ olduğu için,

$$\tau(p_+) = h_j(\iota(p_j))f_j(\iota(p_j)) = h_j(\iota(p_{j+1}))f_j(\iota(p_{j+1})) = \tau(p_+^{'}),$$
$$\iota(p_-) = h_j(\tau(p_j))f_j(\tau(p_j)) = h_j(\tau(p_{j+1}))f_j(\tau(p_{j+1})) = \iota(p_-^{'})$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece $p_+ =_{C'} p_+^{'}$ ve $p_- =_{C'} p_-^{'}$ olur.

Ayrıca $i = j, j+1$ için, $\iota(q_i^{'}) = h_j(\iota(p_i))$ ve $\tau(q_i^{'}) = h_j(\tau(p_i))$ dir. Buradan $\iota(q_j^{'}) = \iota(q_{j+1}^{'})$ ve $\tau(q_j^{'}) = \tau(q_{j+1}{'})$ eşitlikleri elde edilir. Bu ise $(q_j^{'}, q_{j+1}^{'}) \in P^{(2)}(\Gamma_{M_{j+1}})$ olmasını sağlar. Sonuç olarak, $\simeq_{C_{M_{j+1}}} = P^{(2)}(\Gamma_{M_{j+1}})$ ve $C_{M_{j+1}} \subset C'$ olduğu için, $q_j^{'} \simeq_{C'} q_{j+1}^{'}$ ve böylece de $q_j \simeq_{C'} q_{j+1}$ elde edilir.

Benzer şekilde,

$$\iota(r_j^{'}) = f_j(\iota(p_j)) = f_j(\iota(p_{j+1})) = \iota(r_{j+1}^{'})$$

ve

$$\tau(r_j^{'}) = f_j(\tau(p_j)) = f_j(\tau(p_{j+1})) = \tau(r_{j+1}^{'})$$

olduğundan $(r_j^{'}, r_{j+1}^{'}) \in P^{(2)}(\Gamma_{M_j})$ dir. $\simeq_{C_{M_j}} = P^{(2)}(\Gamma_{M_j})$ ve $C_{M_j} \subset C'$ olduğundan, $r_j^{'} \simeq_{C'} r_{j+1}^{'}$ ve böylece de $r_j \simeq_{C'} r_{j+1}$ elde edilir. Buradan da

$$p_j \simeq_{C'} p_+ q_j r_j p_- \simeq_{C'} p_+^{'} q_{j+1} r_{j+1} p_-^{'} \simeq_{C'} p_{j+1}$$

sonucuna ulaşılır. Bu da bize $\simeq_{C_{M'}} = P^{(2)}(\Gamma_{M_j, M_{j+1}})$ eşitliğini verir. □

b) ***j nin çift sayı olma durumu*:**

Bu bölümün bütünlüğünü korumak amacıyla son olarak *j* nin çift sayı olma durumunu yukarıdakilere benzer şekilde inceleyelim. Bunun için her bir $S_{j+1} : S_{j+1}^{+1} = S_{j+1}^{-1} \in \mathbf{s}_{j+1}$ ve her bir $x_j \in \mathbf{x}_j$ için, 4.4.3 Yardımcı Teorem ile $S_{j+1}^{+1} x_j$

den $x_j S_{j+1}^{+1}$ köşesine bir $p_+ \in P_+(\Gamma_{T_{j+1}})$ yolu ve $x_j S_{j+1}^{-1}$ den $S_{j+1}^{-1} x_j$ köşesine bir $p_- \in P_-(\Gamma_{T_{j+1}})$ yolu vardır. Ayrıca $[S_{j+1}^{+1}]_{M_{j+1}} = [S_{j+1}^{-1}]_{M_{j+1}}$ olduğundan, S_{j+1}^{+1} den S_{j+1}^{-1} köşesine bir $p_{S_{j+1}}$ yolu da mevcuttur. Dolayısıyla $S_{j+1}^{+1} x_j$ den $S_{j+1}^{-1} x_j$ e bir

$$q_{S_{j+1},x_j} = p_+(x_j, S_{j+1}, +1, 1) p_-$$

yolu elde ederiz (Şekil 4.4-(a)). Buna göre

$$\widehat{C}_{j,j+1} = \{((1, S_{j+1}, +1, x_j), q_{S_{j+1},x_j}) : S_{j+1} \in \mathbf{s}_{j+1},\ x_j \in \mathbf{x}_j\} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_j, M_{j+1}})$$

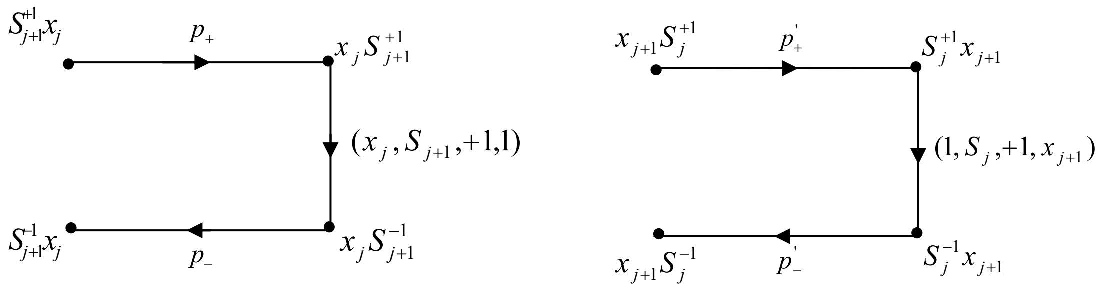
olsun. Şimdi her bir $x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1}$ ve her bir $S_j : S_j^{+1} = S_j^{-1} \in \mathbf{s}_j$ için, 4.4.3 Yardımcı Teorem ile $x_{j+1} S_j^{+1}$ den $S_j^{+1} x_{j+1}$ köşesine ve $S_j^{-1} x_{j+1}$ den $x_{j+1} S_j^{-1}$ köşesine sırasıyla $p'_+ \in P_+(\Gamma_{T_j})$ ve $p'_- \in P_-(\Gamma_{T_j})$ yolları vardır. Ayrıca $[S_j^{+1}]_{M_j} = [S_j^{-1}]_{M_j}$ gerçeği ile S_j^{+1} den S_j^{-1} köşesine bir p_{S_j} yolu mevcuttur. Böylece $x_{j+1} S_j^{+1}$ den $x_{j+1} S_j^{-1}$ köşesine bir

$$q'_{x_{j+1},S_j} = p'_+(1, S_j, +1, x_{j+1}) p'_-$$

yolu vardır (Şekil 4.4-(b)). Buna göre

$$\widehat{C}'_{j,j+1} = \{((x_{j+1}, S_j, +1, 1), q'_{x_{j+1},S_j}) : S_j \in \mathbf{s}_j,\ x_{j+1} \in \mathbf{x}_{j+1}\} \subset P^{(2)}(\Gamma_{M_j, M_{j+1}})$$

olsun.



(a) (b)

Şekil 4.4

Ayrıca j çift sayısı için, $C'' = C_{M_j} \cup C_{M_{j+1}} \cup \widehat{C}_{j,j+1} \cup \widehat{C}'_{j,j+1}$ olmak üzere, 4.4.11 Sonuç'a benzer şekilde aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.4.12 Sonuç: $\simeq_{C''} = P^{(2)}(\Gamma_{M_j, M_{j+1}})$ dır.

Yukarıdakilere ek olarak

$$C_{tek} = (C_{1,2} \cup C'_{1,2}) \cup \ldots \cup (C_{k,k+1} \cup C'_{k,k+1}) \cup \ldots \cup (C_{n-1,n} \cup C'_{n-1,n})$$

ve

$$C_{çift} = (\widehat{C}_{2,3} \cup \widehat{C}'_{2,3}) \cup \ldots \cup (\widehat{C}_{l,l+1} \cup \widehat{C}'_{l,l+1}) \cup \ldots \cup (\widehat{C}_{n,1} \cup \widehat{C}'_{n,1})$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$C = C_{M_j} \cup C_{tek} \cup C_{çift}$$

olmak üzere, 4.4.11 Sonuç ile aşağıdaki sonuç kolaylıkla görülür.

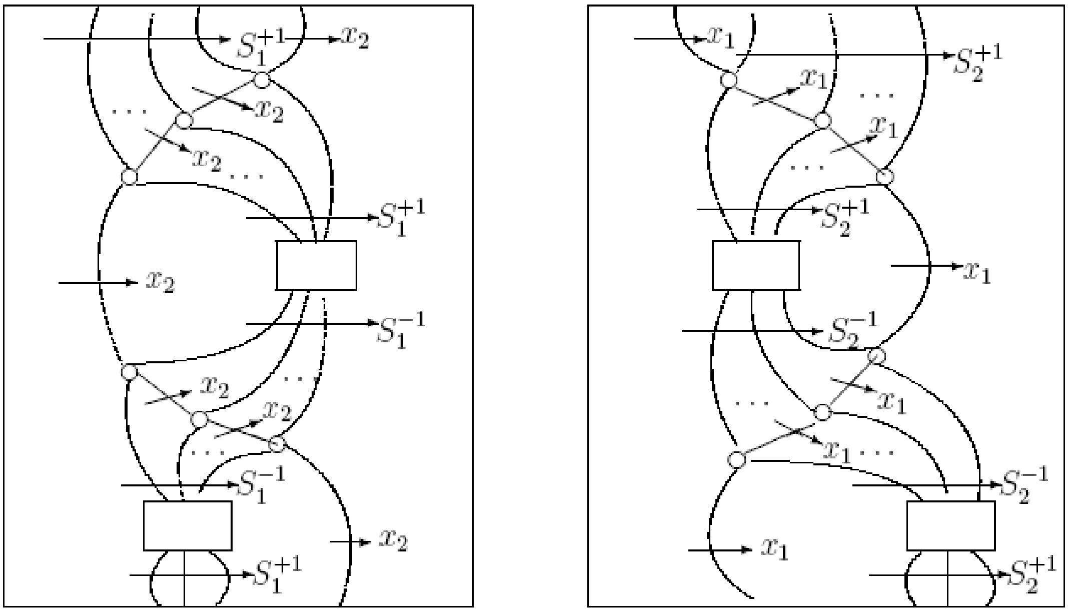
4.4. 13 Sonuç: $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_M)$ dır.

Ana Teoremin İspatı:

Her bir M_j $(1 \le j \le n,\ n = 2m, m \in \mathbb{Z}^+)$ monoidi sonlu türetilmiş tipe sahip ise bu durumda bütün $\wp_{M_j}$ sunuşlarını sonlu sunuşlu ve bütün C_{M_j} kümelerini sonlu kabul edebiliriz. Böylece $\wp_M$ sonlu sunuşlu ve C kümesi de sonlu bir kümedir. Ayrıca 4.4.13 Sonuç ile $\simeq_C = P^{(2)}(\Gamma_M)$ dir. Dolayısıyla M_j monoidlerinin graf çarpımı sonlu türetilmiş tipe sahiptir. Bu da istenen sonuçtur. □

Not :

i) $C_{1,2}$ ve $C'_{1,2}$ üreteç kümelerinin "küresel monoid resimleri" Şekil 4.5 ile temsil edilirler. (Bu küresel monoid resmi ile ilgili temel kavramlar 5. Bölüm'de bahsedilmiştir.) Bu resim kavramı ile ilgili ayrıntılı bilgilere [56, 57] kaynaklarından ulaşılabilir.



Şekil 4.5

ii) Costa ([17]) monoidlerin graf çarpımının kelime problemine sahip olabilmesi için kelimeler üzerinde bazı şartların sağlanması gerektiğini göstermiştir. 4.2.3 Uyarı'da not edildiği gibi graf çarpımın kelime probleminin çözülebilirliği bağıntıların seçimine bağlıdır. Burada önemli olan nokta budur. Çünkü $S_{\Gamma'}$ kümesini (4.1) kümesindeki gibi seçerek bu $S_{\Gamma'}$ kümesinde hiçbir çakışan kelimenin olmaması garanti altına alınıyor. Böylece $\wp_M$ sunuşu için çakışan kelimeler sadece

$$\begin{cases} S_j^{+1}x_{j+1},\ x_jS_{j+1}^{+1} & ;\ j \text{ tek sayı} \\ S_{j+1}^{+1}x_j,\ x_{j+1}S_j^{+1} & ;\ j \text{ çift sayı } (j \neq n) \\ S_1^{+1}x_n,\ x_1S_n^{+1} & ;\ j = n \end{cases}$$

şeklinde olmaktadır. Değişmeli bağıntılardan dolayı bu kelimelerin her birisi bir tek indirgenemez kelimeye sahiptir. Bu ise bize $\wp_M$ sunuşunun tam olduğunu göstermektedir. Ayrıca şunu da not etmeliyiz ki her bir monoidin çözülebilir kelime problemine sahip olması şartı kesinlikle gerekli olan bir durumdur.

5. CAYLEY GRAFLARLA ELDE EDİLEN MONOİDLERİN WREATH ÇARPIMI İÇİN BAZI SONUÇLAR

5.1 Giriş

Birleştirilmiş Grup ve Yarı Grup Teoride bir çarpımın sunuşu düşünüldüğünde, ilk olarak bu sunuşun sonlu üreteçli ve sonlu sunumlu olması için gerek ve yeter koşullar çalışılmaktadır. Bu çalışmada üzerinde duracağımız monoidlerin wreath çarpımının sunuşu; [33] deki çalışma ile literatüre kazandırılmış ve bu sunuşun sonlu üreteçli ve sonlu sunumlu olması ile ilgili çalışmalar [60] da yapılmıştır. Tezimizin bu bölümünde önemli olan nokta, monoidlerin bu wreath çarpımının sunuşunun geometrik bir yapı olan ve 2.6 Alt Bölüm'de verilen *Cayley graflar* yardımı ile bulunmasıdır. Bu bölümün başlangıç kısmını oluşturacak olan 5.2 Alt Bölüm'ün temel kaynağını Ateş ve Çevik'in [7] deki çalışması oluşturmaktadır.

Bu bölümün ikinci kısmında, wreath çarpım üzerinde, geometrik bir özellik olan *p-Cockcroft* (*etkililik*) özelliği incelenmiştir. Wreath çarpımlar da özel yarı direkt çarpımlar olduklarından öncelikle bu özelliğin yarı direkt çarpımlar altında çalışıp çalışılmadığına bakılmalıdır. Bu yöndeki önemli çalışmalar ise Çevik'in [21] ve [22] referanslarındaki yayınlarında bulunmaktadır.

Cebirsel yapıların sınıflandırılması, bu yapıların anlaşılmasında önemli bir yer teşkil etmektedir. Özellikle gruplar ve monoidler ile bunların alt grupları ve alt monoidleri arasındaki ilişki, sınıflandırmada en çok üzerinde durulan noktalardan biridir. *Alt monoid ayrıştırılabilirlik*; bir monoid ile bu monoidin alt monoidi arasındaki ilişkiyi ortaya çıkardığından bu çalışmanın diğer bir bölümünde özellik olarak wreath çarpım üzerinde verilmiştir. Bu özellik bazı grup genişlemeleri üzerinde [6] kaynağında çalışılmıştır.

5. Bölümün son alt bölümünde (5.4 Alt Bölüm) ise bazı özel monoidlerin wreath çarpımı üzerinde *kelime problemi* incelenmiştir. Bu problem 2.3 Alt Bölüm'de verildiği gibi 1911 yılında Max Dehn tarafından literatüre kazandırılan *karar verme problemlerinden* biridir.

5.2 Monoidlerin Wreath Çarpımı İçin Sunuş Elde Edilmesi

Bu alt bölümde amacımız, Cayley grafları kullanarak monoidlerin wreath çarpımı için bir sunuş elde etmektir. [7] deki çalışmada aynı metot gruplar için kullanılmış (ayrıntılı bilgilere [4] kaynağından da ulaşılabilir), monoidler için ise açık bırakılmıştır. Ancak ilk olarak bu çarpımın sunuşu hakkında bilgi verelim.

A ve *B* monoid olmak üzere, *B* nin *A* nın mertebesi kadar kendisi ile kartezyen çarpımını $B^{\times A}$ notasyonuyla, uygun direkt çarpımı ise $B^{\oplus A}$ notasyonuyla gösterelim. $B^{\times A}$ ile *A* monoidinden *B* monoidine tanımlanan bütün fonksiyonların kümesi ve $B^{\oplus A}$ ile de bu şekildeki *f* fonksiyonlarından *sonlu desteğe* sahip olanların kümesi ifade edilir. Bir *f* fonksiyonunun sonlu desteğe sahip olması ise $x \in A$ için, $f(x) = 1_B$ şartının sağlanması demektir.

5.2.1 Tanım: *A* ve *B* monoidlerinin *kısıtlanmamış* ve *kısıtlanmış wreath çarpımları*

$$(f,b)(g,b') = (f\,{}^{b}g, bb')$$

çarpma işlemi altında tanımlı olup sırasıyla $B^{\times A} \times A$ ve $B^{\oplus A} \times A$ kartezyen kümeleridir. Ayrıca özel olarak *BWrA* ve *BwrA* şeklinde gösterilirler. Eşitliğin ikinci tarafındaki ${}^{b}g$ fonksiyonu

$${}^{b}g : A \to B\,, \quad (x)^{b}g = (xb)g \qquad (x \in A)\,,$$

biçiminde tanımlanır. *BWrA* ve *BwrA*, birim elemanı $(\bar{1}, 1_A)$ ($\forall x \in A$ için $\bar{1}(x) = 1_B$) olan moniddirler.

Ayrıca *BWrA* = *BwrA* olması için gerek ve yeter koşul $|B| = 1$ veya *A* nın sonlu olmasıdır [33].

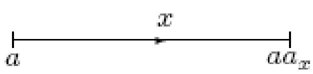
Bu bölümde yapılacak olan tüm çalışmalarda “wreath çarpım” ile “kısıtlanmış wreath çarpım” ifade edilmiştir.

A ve B herhangi iki monoid olsun. Ayrıca $\wp_A = [\mathbf{x}\ ;\ \mathbf{r}]$ sunuşuna sahip A monoidi için üreteç kümesi $\{a_x : x \in \mathbf{x}\}$ ve $\wp_B = [\mathbf{y}\ ;\ \mathbf{s}]$ sunuşuna sahip B monoidi için üreteç kümesi $\{b_y : y \in \mathbf{y}\}$ olsun. $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ olmak üzere, belirtilen bu üreteç kümeleri ve sunuşlar kullanılarak aşağıdaki adımlar uygulanır:

- $a_1 < a_2 < ... < a_n$ sıralamasını seçelim ve $a_1 = 1$ olsun.
- A monoidinin elemanları kullanılarak Γ_A ile gösterilen bir Cayley graf çizilir.
- Her bir $a \in A$ köşesi için, $\wp_B$ nin $[\mathbf{y}^{(a)}\ ;\ \mathbf{s}^{(a)}]$ kopyası alınır.
- Her bir a, a' $(a \neq a')$ köşe çifti için, $y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)}$ $(y, z \in \mathbf{y})$ bağıntısı yazılır.
- Γ_A Cayley grafındaki her bir pozitif kenar için (Şekil 5.1 de gösterildiği gibi),

$$\left(\prod_{a \in ca_x^{-1}} y^{(a)} \right) x = x y^{(c)}$$

bağıntıları yazılır. Burada $c \in A$ için ca_x^{-1} ile $\{a \in A\ :\ aa_x = c\}$ kümesi belirtilir.



Şekil 5.1

Bütün bu adımlardan sonra [33] kaynağında ispatı verilen aşağıdaki yardımcı teorem elde edilir.

5.2.2 Yardımcı Teorem: A ve B monoid olmak üzere *M=BwrA* olsun. Bu durumda M monoidi için

$$\wp_M = [\mathbf{y}^{(a)}\ (a \in A), \mathbf{x}\ ;\ \mathbf{s}^{(a)}, r, y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)}, \left(\prod_{a \in ca_x^{-1}} y^{(a)} \right) x = x y^{(c)},$$

$$(a, a' \in A,\ x \in \mathbf{x},\ y, z \in \mathbf{y})]$$

sunuşu elde edilir.

- Son olarak yukarıda elde edilen $\wp_M$ sunuşuna Cayley graftan seçilecek maksimal ağaca bağlı olarak, Tietze dönüşümleri ([45, 64]) uygulanır.

5.2.3 Uyarı: Wreath çarpım için, yukarıdaki algoritmada belirtildiği gibi, Cayley grafın kullanılmasının nedeni aslında bu çarpımın temel karakteristiğini belirleyen

$$y^{(a)}z^{(a')} = z^{(a')}y^{(a)} \qquad \text{ve} \qquad \left(\prod_{a\in ca_x^{-1}} y^{(a)}\right)x = xy^{(c)}$$

$(a, a' \in A,\ x \in \mathbf{x},\ y, z \in \mathbf{y})$ bağıntılarını elde etmektir.

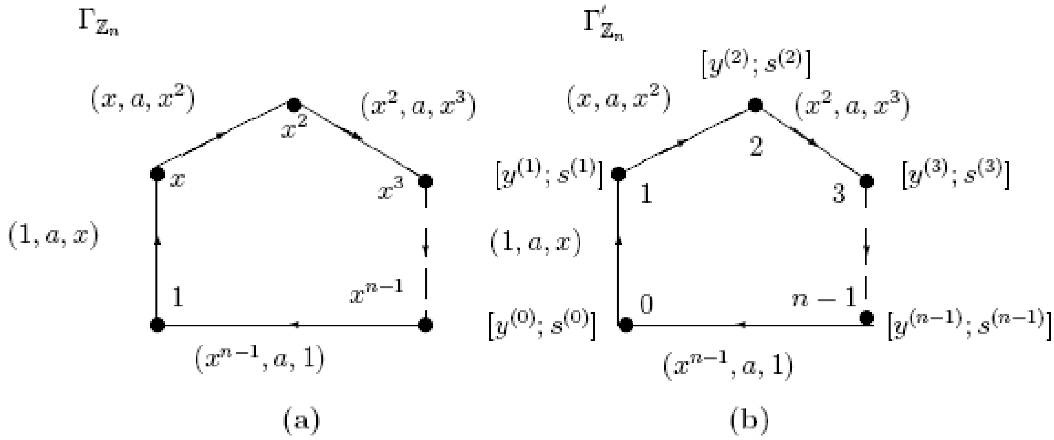
5.2.4 Örnek: B sonlu monoidi $\wp_B = [\mathbf{y}\ ;\ \mathbf{s}]$ sunuşuna sahip ve $A = \mathbb{Z}_n$ mertebesi n olan devirli bir grup olsun. Şimdi M=$BwrA$ için yukarıdaki adımlara göre bir sunuş oluşturalım.

$A = \mathbb{Z}_n$ grubu $[x; x^n = 1]$ monoid sunuşuna sahip olsun. Ayrıca C kümesi $\{a\}$ elemanı ile tanımlansın. Bu durumda $\mathbb{Z}_n$ in $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ Cayley grafını çizmek için $\varphi : C^* \to \mathbb{Z}_n,\ a \mapsto x$ biçiminde bir homomorfizma tanımlayabiliriz ([66]). (Buradaki C^* ile C kümesi üzerindeki bütün boştan farklı kelimelerden oluşan serbest monoid temsil edilir). $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ in köşe ve kenar kümeleri sırasıyla

$$V(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \{1, x, x^2, ..., x^{n-1}\} \qquad \text{ve} \qquad E(\Gamma_{\mathbb{Z}_n}) = \{(1, a, x), (x, a, x^2), ..., (x^{n-1}, a, 1)\}$$

biçimindedir. Böylece $\mathbb{Z}_n$ in Cayley grafı Şekil 5.2-(a) daki gibi çizilir.

Kolaylık olması açısından, $1, x, x^2, ..., x^{n-1}$ köşe elemanları sırasıyla $0, 1, 2, ..., n-1$ biçiminde etiketlensin. Böylece her bir $0 \le i \le n-1$ köşesi için, $\wp_B$ nin bir $[\mathbf{y}^{(i)}\ ; \mathbf{s}^{(i)}]$ kopyası alınır. Gerçekte $\wp_B$ nin n kopyası $\Gamma_{\mathbb{Z}_n}$ içindeki her bir köşeye sabitlenirse, Şekil 5.2-(b) gibi $\Gamma'_{\mathbb{Z}_n}$ Cayley grafı ve bu $\Gamma'_{\mathbb{Z}_n}$ Cayley grafından $y^{(i)}x = xy^{(i+1)}\ (0 \le i \le n-2)$ bağıntısı elde edilir.



Şekil 5.2

Ayrıca $\Gamma'_{\mathbb{Z}_n}$ Cayley grafındaki her bir *i* ve *j* $(0 \le i < j \le n-1)$ köşesi için,

$$y^{(i)}z^{(j)} = z^{(j)}y^{(i)}$$

bağıntısını elde etmekte mümkündür. Böylece 5.2.2 Yardımcı Teorem yardımıyla *M=BwrA* monoidi

$$\wp_M = [\mathbf{y}^{(i)},\ x\ ;\ \mathbf{s}^{(i)},\ x^n = 1, y^{(i)}z^{(j)} = z^{(j)}y^{(i)},\ y^{(i)}x = xy^{(i+1)}] \qquad (5.1)$$

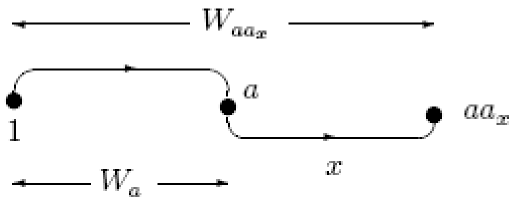
$(0 \le i < j \le n-1)$ sunuşuna sahip olur.

Aşağıda verilmiş olan Tietze dönüşümlerindeki teknik zorluklar için, yukarıdaki yapıda *B* yi monoid ve *A* yı ise monoid sunuşuna sahip grup alınarak devam ettirilmiştir. Bu durumda 5.2.2 Yardımcı Teorem'de verilen sunuş

$$\wp_M = [\mathbf{y}^{(a)}\ (a \in A), \mathbf{x}; \mathbf{s}^{(a)}\ (a \in A), \mathbf{r}, y^{(a)}z^{(a')} = z^{(a')}y^{(a)}, \left(\prod_{a \in ca_x^{-1}} y^{(a)}\right)x = xy^{(c)}] \quad (5.2)$$

$(a, a', c \in A,\ x \in \mathbf{x},\ y, z \in \mathbf{y})$ biçiminde tekrar yazılabilir.

Şimdi Γ_A Cayley grafından T_A maksimal ağacı seçilsin. Her bir $a \in A$ için, γ_a gösterimiyle; T_A maksimal ağacı içinde 1 köşesinden a köşesine en kısa yol (geodezik) ve W_a gösterimiyle; γ_a üzerindeki etiketi temsil edelim (Şekil 5.3). Şimdi (5.2) ile verilen $\wp_M$ sunuşunu düşünelim ve bu sunuş üzerinde bazı Tietze dönüşümlerini uygulayalım:



Şekil 5.3

(T1) $\left(\prod_{a \in ca_x^{-1}} y^{(a)}\right) x = xy^{(c)}$ ve $\mathbf{r}$ bağıntılarını kullanarak $W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$ ($y^{(a)} \in \mathbf{y}^{(a)}$) bağıntılarını ekleyelim.

(T2) $W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$ ve $\mathbf{r}$ bağıntılarını kullanarak $\left(\prod_{a \in ca_x^{-1}} y^{(a)}\right) x = xy^{(c)}$ bağıntılarını silelim. Aslında bunu aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

Herhangi $a \in A$ için, $W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$ alalım ve eşitliğin her iki yanını sağdan x ile çarpalım. Bu durumda $W_a x = W_{aa_x}$ olduğu için,

$$W_a y^{(a)} x = \left(\prod_{1 \in cW_{aa_x}^{-1}} y^{(0)}\right) W_{aa_x}$$

eşitliğini elde ederiz. Buradan

$$W_{aa_x} y^{(c)} = \left(\prod_{1 \in c W_{aa_x}^{-1}} y^{(0)} \right) W_{aa_x}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır ($c = aa_x$). Ayrıca son iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$W_a \prod_{a \in c a_x^{-1}} y^{(a)} x = W_{aa_x} y^{(c)}$$

eşitliği elde edilir. Daha sonra yukarıdaki eşitliğin her iki yanını soldan W_a^{-1} (buradaki W_a^{-1} ile a köşesinden 1 köşesine olan en kısa yol üzerindeki etiket kastedilmektedir) çarparsak;

$$W_a^{-1} W_a \prod_{a \in c a_x^{-1}} y^{(a)} x = W_a^{-1} W_{aa_x} y^{(c)}$$

elde edilir. Burada $W_a^{-1} W_a$ ve $W_a^{-1} W_{aa_x}$ sırasıyla 1 ve x elemanlarına denk olduklarından,

$$\left(\prod_{a \in c a_x^{-1}} y^{(a)} \right) x = x y^{(c)}$$

sonucu elde edilir.

(T3) $\mathbf{s}^{(1)}$ ve $W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$ bağıntıları yardımıyla $\mathbf{s}^{(a)}$ ($a \neq 1$) bağıntılarını sileriz. Bu silme işleminin ardından, sunuşta sadece $\mathbf{s}^{(1)}$ bağıntılarına sahip oluruz. Bu eleminasyon işlemini aşağıdaki gibi gösterebiliriz:

Herhangi bir $a \neq 1$ için,

$$W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$$

bağıntısını göz önüne alalım. Şimdi $S^{(1)} \in \mathbf{s}^{(1)}$ ve $S^{(a)} \in \mathbf{s}^{(a)}$ elemanlarını dikkate alalım. Bu $S^{(1)}$ ve $S^{(a)}$ harflerinin sırasıyla $\mathbf{y}^{(1)}$ ve $\mathbf{y}^{(a)}(a \neq 1)$ ye ait oldukları anlamına gelir. Sonuçta $W_a y^{(a)} = y^{(1)} W_a$ eşitliği de kullanılarak $W_a s^{(a)} = s^{(1)} W_a \ (a \neq 1)$ bağıntısı elde edilir. Böylece $S^{(1)} \approx 1$ ve dolayısıyla da $S^{(a)} \approx 1$ elde edilir ($S^{(1)} \in \mathbf{s}^{(1)}$ ve $\mathbf{s}^{(1)}$ de $\wp_M$ sunuşu içinde bir bağıntı olduğu için). $\mathbf{s}^{(a)}$ bağıntıları $\mathbf{s}^{(1)}$ bağıntılarından türetilebildiğinden $\mathbf{s}^{(a)} \ (a \neq 1)$ bağıntılarını silebiliriz. Sonuçta elimizdeki sunuşta sadece $\mathbf{s}^{(1)}$ biçimindeki bağıntılar kalmıştır.

(T4) $\mathbf{y}^{(a)}$ $(a \neq 1)$ üreteç elemanlarını silerek, her bir $\mathbf{y}^{(a)}$ yı $y^{(a)} z^{(a')} = z^{(a')} y^{(a)} \ (a, a' \in A, y, z \in \mathbf{y})$ bağıntısı içinde $W_a^{-1} y^{(1)} W_a \ (a \neq 1)$ ile yer değiştirelim. Bu silme işleminden sonra $\mathbf{y}^{(a)}$ üreteç kümesinin içinde sacede $\mathbf{y}^{(0)}$ üretecine sahip oluruz.

Yukarıdaki bütün adımlardan sonra $^{(1)}$ üssü ihmal edilerek

$$\wp'_M = [\mathbf{y}, \mathbf{x} \ ; \mathbf{s}, \mathbf{r}, y W_a^{-1} z W_a = W_a^{-1} z W_a y \ (a \in A, a \neq 1, y, z \in \mathbf{y})] \tag{5.3}$$

sunuşu elde edilir.

5.2.5 Uyarı: $\wp_M$ sunuşu üzerine uygulanan yukarıdaki Tietze dönüşümleri, (5.3) deki yeni sunuşun minimal üreteç kümesine sahip olmasını gerektirir.

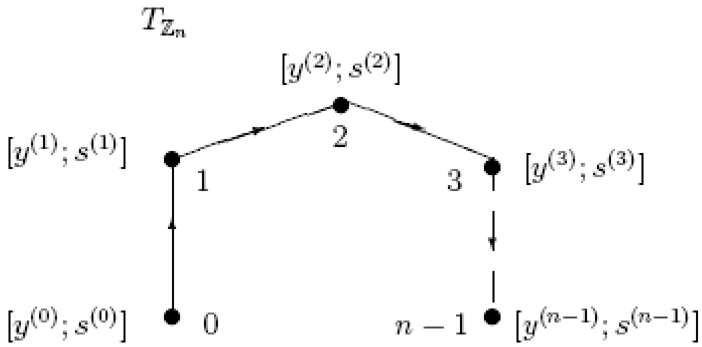
5.2.6 Örnek (devam): $A = \mathbb{Z}_n$ yi monoid sunuşuna sahip n mertebeli devirli bir grup olarak düşünelim. Daha sonra $\wp_M$ sunuşunu ((5.1) de verildiği gibi) alalım ve Tietze dönüşümlerini uygulayalım.

(T3) özelliği kullanılarak, $s^{(i)} \ (0 \leq i \leq n-1)$ bağıntısının $s^{(0)}$ ın bir sonucu olduğu görülür.

$S^{(i)} \in s^{(i)}$ ve $S^{(0)} \in s^{(0)}$ olsun. Ayrıca kabul edelim ki $\gamma_0 = 1, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{n-1}$ ler $T_{\mathbb{Z}_n}$ maksimal ağacında 0 dan $0 \leq i \leq n-1$ köşesine en kısa yol olsunlar (Şekil 5.4'te verildiği gibi) ve özel olarak

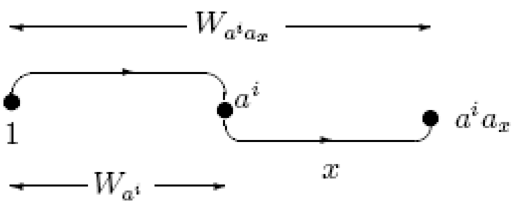
x, γ_1 ile, x^2, γ_2 ile, …, x^{n-1}, γ_{n-1} ile

etiketlensin.



Şekil 5.4

Bunlara ek olarak, W_{a^i} Şekil 5.5'teki gibi, γ_i üzerindeki etiket olsun.



Şekil 5.5

Bu durumda

$$W_{a^i}^{-1}\left(\prod_{1 \in a^i W_{a^i}^{-1}} y^{(0)}\right) W_{a^i} = s^{(i)}$$

eşitliği elde edilir. Gerçekte $S^{(0)} \in \mathbf{s}^{(0)}$ ve $\mathbf{s}^{(0)}$ de bir bağıntı olduğundan ve ayrıca $S^{(0)} \approx 1$ denkliğinden, $\mathbf{s}^{(i)}$ elemanı $\mathbf{s}^{(0)}$ dan türetilebilir. Dolayısıyla $\mathbf{s}^{(i)}$ elemanı bağıntı kümesinden silinebilir. Böylece (5.1) sunuşundaki bağıntılar kullanılarak

$$y^{(0)} x^{(i)} = x^{(i)} y^{(i)}$$

$(1 \le i \le n-1)$ eşitliği veya denk olarak

$$y^{(0)}\gamma_i = \gamma_i y^{(i)}$$

eşitliği elde edilir. Şekil 5.2-(b)'deki Cayley graftan

$$\gamma_i\gamma_j = \gamma_{i+j} = \begin{cases} \gamma_{i+j} & ; \quad i+j<n \quad \text{ise} \\ 1 & ; \quad i+j=n \quad \text{ise} \\ \gamma_m \quad \text{öyle ki} \quad i+j \equiv m \pmod{n} & ; \quad i+j>n \quad \text{ise} \end{cases} \tag{5.4}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu adımlardan sonra, $0 \le i < j \le n-1$ için,

$$y^{(i)}z^{(j)} = z^{(j)}y^{(i)}, \quad y^{(i)} = \gamma_{n-i}y^{(0)}\gamma_i \tag{5.5}$$

ve $x^n = 1$, $s^{(0)}$ bağıntıları elde edilir. (5.5) deki ikinci eşitliği birinci eşitlikte yerine yazarak, $0 \le i \le n-2$ ve $0 \le k \le n-1$ için,

$$y^{(i)}\gamma_k z^{(0)}\gamma_{n-k} = \gamma_k z^{(0)}\gamma_{n-k}y^{(i)} \tag{5.6}$$

bağıntısını elde ederiz. Bu bağıntı her bir i için, $i+k=n-1$ eşitliği olana kadar yazılmalıdır. Daha sonra (5.4) eşitliğini uygulayarak ve (5.6) nın sağ tarafından (veya sol tarafından) $\gamma_1, \gamma_2, ..., \gamma_{n-1}$ ile çarparak

$$y^{(i)}z^{(i+p)} = z^{(i+p)}y^{(i)}$$

$(1 \le i \le n-2$ ve $1 \le p \le n-1-i)$ bağıntısını silebiliriz. Her bir i için, bu son bağıntının $i+p=n+1$ eşitliği olana kadar yazılabileceği açıkça görülür. Böylece

$$t = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2} & ; \quad n \quad \text{tek,} \\ \dfrac{n}{2} & ; \quad n \quad \text{çift,} \end{cases}$$

olmak üzere,

$$\wp_M = [\mathbf{y}^{(0)}, x \ \ ; \ \ \mathbf{s}^{(0)}, x^n = 1, y^{(0)}z^{(1)} = z^{(1)}y^{(0)}, y^{(0)}z^{(2)} = z^{(2)}y^{(0)}, \cdots, y^{(0)}z^{(t)} = z^{(t)}y^{(0)}]$$

sunuşu elde edilir.

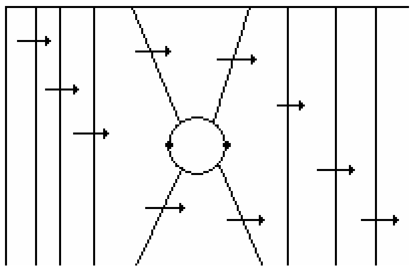
5.3. *p*-Cockcroft Özelliği

[21] de Çevik, herhangi iki monoidin yarı direkt çarpımının sunuşunun *p*-Cockcroft (veya etkililik) özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşulları vermiştir. Daha sonra ise bu sonucun bir uygulaması olarak sonlu ve devirli iki monoidin yarı direkt çarpımının sunuşunun etkililiğini incelemiştir. Çevik'in [21] deki çalışmasının ardından [5] de Ateş ve Çevik, bu sonlu devirli monoidlerin yarı direkt çarpım monoidini minimal ancak etkili yapan koşulları ortaya koymuşlardır. Bu bölümde, [21] kaynağında verilen ana sonucun bir sonraki adımı olarak, 5.2.2 Yardımcı Teorem'de verilen $\wp_M$ sunuşu için *p*-Cockcroft özelliği incelenmiştir. Bu yapılırken ise kısıtlanmış wreath çarpımın aslında bir yarı direkt çarpımın sonlu kopyası olduğu gerçeği kullanılmıştır. Böylece [21] de verilen yarı direkt çarpımın üreteç (trivialiser) kümesi düşünülerek wreath çarpımın üreteç kümesi tanımlanmıştır.

Cebirsel yapılar (özellikle grup ve monoid) için verilen sunuşlar üzerindeki *resim* kavramı, ilk olarak Pride tarafından 1990 lı yılların başında bir metot olarak geliştirilmiş ve literatüre kazandırılmıştır [56, 57].

Şimdi *p*-Cockcroft özelliği için gerekli temel tanımları verelim. Bu kavram ile ilgili detaylı bilgilere [21, 56, 57] kaynaklarından ulaşılabilir.

$\wp = [\mathbf{x} \ ; \ \mathbf{r}]$ bir monoid sunuşu olmak üzere, $F(\mathbf{x})$ kümesi $\mathbf{x}$ üzerinde tanımlanan serbest bir monoid olsun. Eğer $W = UR_\varepsilon V$ $(U, V \in F(\mathbf{x}),\ R \in \mathbf{r},\ \varepsilon = \pm 1)$ kelimesi, $F(\mathbf{x})$ kümesine ait bir kelime ise R_ε nin $R_{-\varepsilon}$ ile yer değiştirmesinden $W' = UR_{-\varepsilon}V$ kelimesi elde edilir. Bu durumun geometrik gösterimi Şekil 5.6'da verilmiştir. Bu geometrik gösterim $\mathrm{A} = (U, R, \varepsilon, V)$ şeklindeki sıralı dörtlü ile ifade edilip, özel olarak *atomik monoid resmi* adını alır. Bir A atomik monoid resmine ait, R ile etiketlenmiş olan disk için $\varepsilon = 1$ (veya $\varepsilon = -1$) ise bu diske *pozitif* (veya *negatif*) *disk* denir.



Şekil 5.6

Monoid resimlerinin inşasında temel yapı taşını *Squier graflar* oluşturur. Bir $\Gamma\ (= \Gamma(\wp))$ Squier grafı, verilen bir $\wp$ sunuşu için aşağıdaki şekilde oluşturulur:

1) Γ grafının *köşe elemanları* $F(\mathbf{x})$ in elemanlarından ve *kenar elemanları* $U, V \in F(\mathbf{x})$, $R \in \mathbf{r}$ ve $\varepsilon = \pm 1$ olmak üzere, $\mathrm{A} = (U, R, \varepsilon, V)$ sıralı dörtlülerinden oluşur.

2) Bir A kenarının başlangıç, bitiş ve tersinir fonksiyonları sırasıyla

$$\iota(\mathrm{A}) = UR_\varepsilon V,\ \tau(\mathrm{A}) = UR_{-\varepsilon}V \quad \text{ve} \quad \mathrm{A}^{-1}(U, R, -\varepsilon, V)$$

biçimindedir.

3) Graf üzerindeki bir *yol* $1 \le i \le n$ için, $\tau(\mathrm{A}_i) = \iota(\mathrm{A}_{i+1})$ olmak üzere, $\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2, ..., \mathrm{A}_n$ biçimindeki atomik monoid resimlerinin

$$\mathbb{P} = \mathrm{A}_1 \mathrm{A}_2 ... \mathrm{A}_n \tag{5.7}$$

şeklinde bir araya getirilmesinden oluşur.

5.3.1 Tanım: 1), **2)** ve **3)** maddelerinden hareketle oluşturulan Squier grafta,

3) maddesi ile tanımlanan her bir yol *monoid resmi* olarak adlandırılır. Özel olarak, (5.7) deki gibi verilen bir $\mathbb{P}$ resmi için $\iota(\mathrm{A}_1) = \tau(\mathrm{A}_n)$ oluyor ise bu $\mathbb{P}$ resmine *küresel monoid resmi,* olmuyor ise *küresel olmayan monoid resmi* denir.

Γ Squier grafının köşe elemanlarını oluşturan $F(\mathbf{x})$ kümesi üzerinde, aşağıda **i)** ve **ii)** ile tanımlanmış olan soldan hareket vardır.

i) W kelimesi Γ grafının bir köşe elemanı olsun. Bu durumda $C \in F(\mathbf{x})$ olmak üzere, $C.W$ hareketi CW ($F(\mathbf{x})$ deki çarpım) olacaktır.

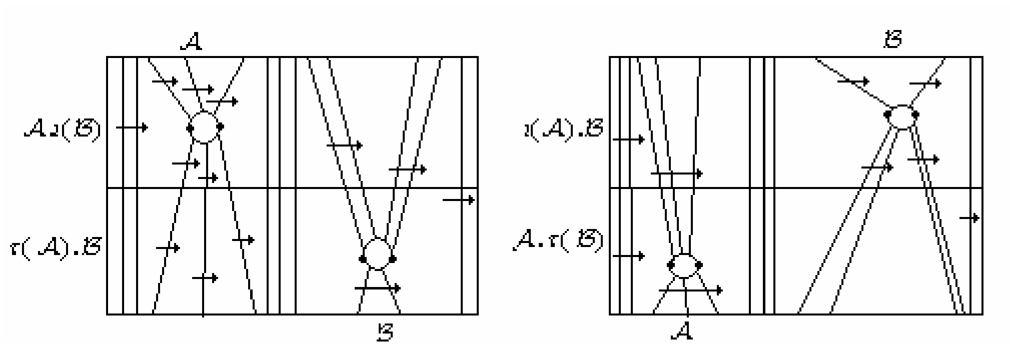
ii) A atomik monoid resmi, Şekil 5.6'da verildiği gibi, Γ grafının bir kenarı olsun. Bu durumda $C.A$ hareketi (CU, R, ε, V) biçiminde olacaktır.

A ve B iki monoid resmi olmak üzere, bu iki resim için aşağıdaki operasyonlar uygulanabilir:

(I) AA^{-1} tersinir çiftinin silinmesi.

(I)$^{-1}$ AA^{-1} tersinir çiftinin eklenmesi.

(II) $(\mathrm{A}.\iota(\mathrm{B}))(\tau(\mathrm{A}).\mathrm{B})$ alt resminin $(\iota(\mathrm{A}).\mathrm{B})(\mathrm{A}.\tau(\mathrm{B}))$ alt resmi ile yer değiştirmesi. Bu durum Şekil 5.7'de gösterilmiştir.



Şekil 5.7

5.3.2 Tanım: İki küresel resimden biri diğerinden sonlu sayıda **(I), (I)$^{-1}$** ve **(II)** işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme *denk küresel resimler* denir.

Yollar üzerinde yukarıda tanımlanan bu denklik bağıntısıyla beraber, Γ grafına $\wp$ sunuşunun *Squier Kompleksi* denir ve $D(\wp)$ ile gösterilir.

Küresel monoid resimlerinin kümesini **X** olarak alalım. Yukarıda tanımlanan **(I), (I)$^{-1}$** ve **(II)** operasyonlarına ek olarak, $\mathbb{P} \in \mathbf{X}$, $W, V \in F(\mathbf{x})$ olmak üzere, aşağıdaki gibi iki yeni işlem daha tanımlanır:

(III) $(W.\ \mathbb{P}^{\pm 1}.V)$ formundaki alt resimlerin silinmesi.

(III)$^{-1}$ $(W.\ \mathbb{P}^{\pm 1}.V)$ formundaki alt resimlerin eklenmesi.

5.3.3 Tanım: İki küresel monoid resminden biri diğerinden sonlu sayıda **(I), (I)$^{-1}$, (II), (III)** ve **(III)$^{-1}$** işlemlerinin uygulanmasıyla elde edilebiliyorsa, bu iki küresel resme **X** *kümesine göre denk küresel resimler* denir.

Buradan hareketle aşağıdaki önemli teorem verilebilir.

5.3.4 Teorem [56]: **X** kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı altında, her bir küresel monoid resmi boş resme denk ise **X** kümesi $D(\wp)$ nin *üreteç resimlerinin* (*trivialiser*) *kümesidir*.

5.3.5 Tanım: a) $\wp$ sunuşu üzerindeki herhangi bir $\mathbb{P}$ monoid resmi için, $exp_R(\mathbb{P})$ sembolü $R \in \mathbf{r}$ olmak üzere, R nin $\mathbb{P}$ resmindeki *üstler toplamı* (R ile etiketlenen pozitif disklerin sayısı ile R ile etiketlenen negatif disklerin sayısının farkı) olarak tanımlanır.

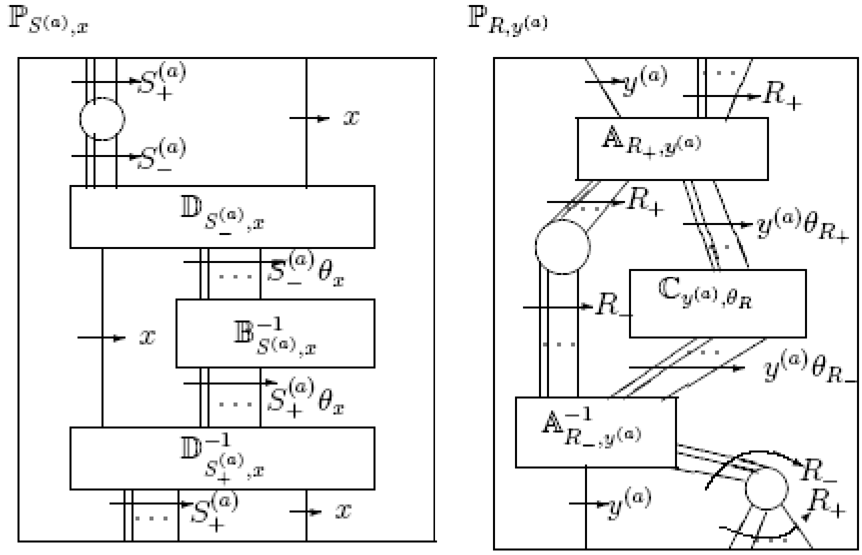
b) M monoidin sunuşu $\wp$ ve n negatif olmayan bir tamsayı olsun. Her $R \in \mathbf{r}$ ve $\wp$ üzerindeki her küresel monoid resmi için,

$$exp_R(\mathbb{P}) \equiv 0 \pmod{n}$$

oluyor ise, $\wp$ sunuşuna *n-Cockcroft* denir. M monoidi n-Cockcroft sunuşa sahip ise bu durumda M ye *n-Cockcroft monoid* denir.

Şimdi $\wp_A = [\mathbf{x}\ ;\ \mathbf{r}]$ ve $\wp_B = [\mathbf{y}\ ;\ \mathbf{s}]$ sunuşlarına sahip A ve B monoidleri için $M = BwrA$ monoidini ele alalım. Küresel olan ve küresel olmayan resimler $\mathbb{P}_{S,x}$,

$\mathbb{P}_{R,y}$, $\mathbb{B}_{S,x}$, $\mathbb{A}_{R_+,y}$, $\mathbb{A}_{R_-,y}$ ve $\mathbb{C}_{y,\theta_R}$ için [21] kaynağı iyi bir referanstır. Kısıtlanmış wreath çarpımın tanımı ile bu resimler $\mathbb{P}_{S^{(a)},x}$, $\mathbb{P}_{R,y^{(a)}}$, $\mathbb{B}_{S^{(a)},x}$, $\mathbb{A}_{R_+,y^{(a)}}$, $\mathbb{A}_{R_-,y^{(a)}}$ ve $\mathbb{C}_{y^{(a)},\theta_R}$ $(a \in A)$ olarak etiketlensin. Böylece $D(\wp_M)$ nin üreteç kümesini, $\mathbf{X_M}$, $D(\wp_A)$ ve $D(\wp_K)$ nın üreteç kümeleri sırasıyla $\mathbf{X_A}$ ve $\mathbf{X_K}$ olmak üzere $\mathbf{X_A} \cup \mathbf{X_K} \cup \mathbf{C_1} \cup \mathbf{C_2}$ olarak tanımlayalım. Burada K, B nin kendisi ile $|A|$ kadar olan direkt çarpımıdır. Ayrıca $\mathbf{C_1}$ ve $\mathbf{C_2}$ sırasıyla $\mathbb{P}_{S^{(a)},x}$ ve $\mathbb{P}_{R,y^{(a)}}$ küresel resimlerinin kümesi olsun (bakınız Şekil 5.8).



Şekil 5.8

[21, Teorem 3.1] in bir sonucu olarak herhangi iki monoidin wreath çarpımının p-Cockcroft özelliği ile ilgili olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.3.6 Teorem: Herhangi bir p asalı veya 0 için, $\wp_M$ sunuşunun (5.2.2 Yardımcı Teorem) p-Cockcroft olması için gerek ve yeter koşullar

(i) $\wp_A$ ve $\wp_B$ sunuşlarının p-Cockcroft,

(ii) $\exp_{y^{(a)}}(S^{(a)}) \equiv 0 \pmod p$, $y \in \mathbf{y}$, $S^{(a)} \in s^{(a)}, a \in A$,

(iii) $\exp_{S^{(a)}}(\mathbb{B}_{S^{(a)},x}) \equiv 1 \pmod p$, $S^{(a)} \in s^{(a)}, a \in A$,

(iv) $\exp_{T_{y^{(a)}x}}(\mathbb{A}_{R_+,y^{(a)}})$- $\exp_{T_{y^{(a)}x}} \mathbb{A}_{R_-,y^{(a)}} \equiv 0 \pmod p$

olmasıdır.

İspat: $\mathbf{X}_{\boldsymbol{M}}$ üreteç kümesi aslında $\mathbf{X}_{\boldsymbol{A}}$ ve $\mathbf{X}_{\boldsymbol{K}}$ üreteç kümelerini içerdiği için, $\wp_A$ ve $\wp_B$ sunuşları p-Cockcroft olmalıdır. Bu (i) şartını verir. $\mathbf{C_1}$ ve $\mathbf{C_2}$ kümelerindeki resimler göz önüne alınırsa (ii), (iii) ve (iv) koşullarının sağlandığını görmek kolaydır.

Tersine, kabul edelim ki bu dört koşulun sağlandığını kabul edelim. Bu durumda $D(\wp_M)$ Squier kompleksinin üreteç kümesi kullanılarak $\wp_M$ sunuşunun p-Cockcroft (herhangi asal p veya 0 için) olduğu görülür. □

5.3.7 Uyarı: 5.3.6 Teorem A nın monoid sunuşuna sahip sonlu bir monoid olması durumunda da sağlanır. Bunun yanı sıra $M=BwrA$ monoidinin etkili değil iken minimalliği de incelenebilir. Ancak Lustig' in testinin ([46]) monoid versiyonu (bu [22] de belirtildiği gibi, Pride' ın yayınlanmamış bir çalışmasında incelenmiştir) bu durumda çalışmayabilir. Böylece $M=BwrA$ (B monoid ve A monoid sunuşuna sahip bir grup) nin etkili değil iken minimal olma durumu açık bir problem olarak bırakılabilir. Bununla birlikte B ve A keyfi monoid iken $M=BwrA$ nin etkili değil iken minimal olma durumu da hala açık bir problemdir.

5.4 Diğer Sonuçlar

Bu alt bölümde (5.3) de belirtilen sunuşun temsil ettiği M monoidi için alt monoid ayrıştırılabilirlik özelliği incelenmiştir. Ayrıca matematik ve teorik bilgisayar biliminde önemli bir çalışma alanı oluşturan yeniden yazma sistemi kullanılarak, bir monoidin monoid sunuşuna sahip bir grup ile olan wreath çarpımının kelime probleminin çözülebilirliği ile ilgili bazı uygulamalar verilmiştir.

5.4.1 Alt Monoid Ayrıştırılabilirlik

5.4.1 Tanım: M bir monoid olsun. Herhangi sonlu üreteçli bir alt monoid K ve herhangi $m \in M - K$ için, M den sonlu bir monoide $\phi(m) \notin \phi K$ olacak şekilde bir

ϕ homomorfizması var ise, bu durumda M monoidi *alt monoid ayrıştırılabilirdir* denir.

$\wp'_M = [\mathbf{y},\mathbf{x}\,;\mathbf{s},\mathbf{r}, yW_a^{-1}zW_a = W_a^{-1}zW_a y \;(a \in A, a \neq 1, y, z \in \mathbf{y})]$ sunuşu dikkate alınarak bu sunuşun temsil ettiği *M=BwrA* için aşağıdaki sonuç verilebilir.

5.4.2 Teorem: *M=BwrA* monoidi alt monoid ayrıştırılabilirdir.

İspat: Wreath çarpımın tanımı ile *M=BwrA=K⋊A* ve $K = B^{|A|}$ dır. Burada $B^{|A|}$ monoidi M nin sonlu üreteçli bir alt monoididir. Böylece **x** in elemanlarıyla elde edilen elemanlara sahip (ve böylece **r** yi içerir) ve elemanları $[y, W_a^{-1}zW_a]$ komutatör formunu sağlayan bir $M - B$ kümesine sahip oluruz. Burada W_a kelimesi T_A maksimal ağacında 1 den a köşesine olan en kısa yoldur ve $W_a^{-1}W_a \approx 1$ dir. Burada W_a yolu sadece **x** üreteç kümesinin elemanlarından oluşur. Ayrıca m kelimesi $M - B$ kümesinden alınan bir kelime olsun. $a \neq 1$ olduğu için, m kelimesi **y** nin formunda olamaz ve $\wp'_M$ sunuşu üreteçlerin minimal sayısına sahip olduğundan (bakınız 5.2.5 Uyarı), $M - B$ kümesi elemanların bu minimal sayısından elde edilebilir. Şimdi M den sonlu bir S monoidine

$$x \overset{\phi}{\longmapsto} V_x \quad \text{ve} \quad y^{(i)} \overset{\phi}{\longmapsto} V_{y^{(i)}}$$

biçiminde bir ϕ homomorfizması tanımlayalım. Burada V kelimesi, S monoidi üzerinde **x** ve $y^{(i)}, z^{(j)} \in \mathbf{y}^{(0)}$ üreteçlerine bağlı bir kelimedir. Şimdi $M - B$ kümesinden alacağımız bir elemana ϕ homomorfizmasını uygularsak, bu durumda $\phi(B)$ sadece $V_{y^{(0)}}$ elemanlarından oluşan hiçbir kelime içermez. Böylece tanım gereği M monoidi alt monoid ayrıştırılabilirdir. □

Wreath çarpımın sonsuz durumunun alt monoid ayrıştırılabilirliği için, rankı n olan F_n serbest monoidlerini düşünebiliriz. Çünkü serbest monoidler de serbest gruplar gibi alt monoid ayrıştırılabilirdir. Serbest monoidler dereceli (graded) oldukları için, 5.4.2 Teorem'in bir sonucu olarak, serbest monoidlerin wreath çarpımı alt monoid ayrıştırılabilirdir diyebiliriz. Eğer bir M monoidi, E üreteç kümesinin sonlu bir sistemine sahipse ve M nin her bir elemanı E üzerinde sonlu birçok yol ile yazılabiliyorsa, bu monoide *derecelidir* denir ([50]). Böylece bir dereceli monoid 1 den başka bir alt monoid içeremez. Dolayısıyla $M = F_{n_1} wr F_{n_2}$ monoidi düşünülerek $m \in M - 1$ alalım. M den herhangi bir monoide tanımlanacak bir homomorfizma için, m nin görüntüsü 1 alt monoidi tarafından içerilemez. Bu ise bize $M = F_{n_1} wr F_{n_2}$ nin alt monoid ayrıştırılabilir olduğunu verecektir.

5.4.2 Kelime Probleminin Çözülebilirliği ile İlgili Sonuçlar

Bu alt bölümde bazı özel bağıntılı monoidlerle oluşturulan wreath çarpım monoidlerinin kelime probleminin çözülebilirliği ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir. Bilindiği gibi tek bağıntılı monoidler Birleştirilmiş Grup Teoride önemli bir yer teşkil etmektedir.

Adian ([1]), Magnus' un sonuçlarını kullanarak bir bağıntılı monoidlerin kelime problemini incelemiştir. Bu çalışmasında $[A; u = v]$ $(u, v \in A^*)$ biçimindeki monoid sunuşlarının temsil ettiği monoidlerin çözülebilir kelime probleme sahip olması için u veya v den birinin boş kelime ya da boştan farklı u ve v kelimelerinin farklı başlangıç ve bitiş harflerine sahip olması gerektiğini ispatlamıştır.

$k, l \in \mathbb{Z}^+$ için, $\wp_A = [x; x^n = 1]$ ve $\wp_B = [y_1, y_2; y_1^k y_2 = y_2 y_1^l]$ olsun. ($\wp_B$ sunuşunun temsil ettiği monoidler Baumslag-Solitar monoidleri, $BS(k,l)$, olarak adlandırılır). Bu durumda *M=BwrA* monoidi için,

$$\begin{aligned}\wp_M = [y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, x; x^n = 1, (y_1^{(i)})^k y_2^{(j)} = y_2^{(j)} (y_1^{(i)})^l, y_1^{(i)} y_2^{(j)} = y_2^{(j)} y_1^{(i)},\ y_1^{(i)} x = x y_1^{(i+1)},\\ y_2^{(i)} x = x y_2^{(i+1)}\ (i+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, n))]\end{aligned} \quad (5.8)$$

$(0 \le i < j \le n-1)$ sunuşu elde edilir. Şimdi bu sunuş ile ilgili olarak aşağıdaki sonucu verelim.

5.4.3 Teorem: *M=BwrA* monoidi (5.8) sunuşuna sahip olsun. M monoidinin kelime probleminin çözülebilir olması için gerek koşul $k = l$ olmasıdır.

İspat: Kabul edelim ki $k = l$ olsun. A monoidinin kelime probleminin çözülebilir olduğu aşikar olmakla beraber B monoidinin kelime probleminin çözülebilirliği [34] kaynağında gösterilmiştir. $k = l$ olduğu için, (5.8) sunuşunun bağıntı kümesindeki bütün çakışık kelimeler yeniden yazma kuralları kullanılarak bir tek indirgenemez kelimeye sahiptir. Dolayısıyla bu, (5.8) sunuşunun tam yeniden yazma sistemine sahip olmasını gerektirir. Tam yeniden yazma sistemine sahip sunuşun temsil ettiği cebirsel yapı için kelime problemi çözülebilir olduğundan *M=BwrA* monoidi için de kelime problemi çözülebilirdir. Eğer $k \neq l$ olsaydı bu durumda (5.8) sunuşu için yeniden yazma sistemi confluent (elmas) özelliğini sağlamazdı. Dolayısıyla da *M=BwrA* monoidinin kelime problemi çözülemez olurdu. □

5.4.4 Örnek: $X = \{a,b\}$ kümesi üzerindeki $R = \{b^2 = 1, a^n = 1, ba = a^{n-1}b\}$ yeniden yazma sistemi $2n$ $(n \geq 2)$ mertebeli D_{2n} dihedral grubunu tanımlar. Bu grubun

$$[a,b \; ; \; b^2 = 1, \; a^n = 1, \; ba = a^{n-1}b]$$

monoid sunuşunu ele alalım. Bu sunuşun tam yeniden yazma sistemine ve dolayısıyla da çözülebilir kelime problemine sahip olduğu kolaylıkla görülmektedir.

Şimdi $n = 4$ olduğunu ve B nin de $\wp_B = [y; y^3 = 1]$ sunuşuna sahip 3 mertebeli devirli monoid olduğunu kabul edelim. $M = Z_3wrD_8$ wreath çarpımını düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}\wp_M = [y^{(i)}, a, b; (y^{(i)})^3 = 1, b^2 = 1, a^4 = 1, ba = a^3b, y^{(i)}a = ay^{(i+1)},\\ y^{(i)}b = by^{(i+1)} \; (i+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\, 8))]\end{aligned} \tag{5.9}$$

sunuşu elde edilir. Bu sunuşun bağıntı kümesindeki bütün çakışan kelimelerin tek bir indirgenemez kelimeye sahip olup olmadığına bakalım. Bunun için $(y^{(i)})^3a, (y^{(i)})^3b, y^{(i)}a^4, y^{(i)}b^2$ ve $y^{(i)}ba$ çakışan kelimeleri alalım. Bu kelimelerden sadece $(y^{(i)})^3a$ ve $(y^{(i)})^3b$ kelimeleri bir indirgenemez kelimeye sahiptir.

Diğerlerinden, örneğin $y^{(i)}ba$ kelimesi $a^3by^{(i+2)}$ ve $a^3by^{(i+4)}$ biçiminde iki indirgenemez kelimelere sahiptir. Böylece y nin her bir $0 \leq i \leq 7$ kopyası için bir şart konulması gerekmektedir. Dolayısıyla (5.9) sunuşunun tam yeniden yazma sistemine sahip olabilmesi için, (i) kopya yerine $i \equiv s(\bmod 2)$ olacak biçimde (s) kopya yazılmalıdır. Bu durum n nin genel durumunda düşünülürse aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.4.5 Teorem: A monoid sunuşuna sahip $2n$ $(n \geq 2)$ mertebeli D_{2n} dihedral grup ve B ise m mertebeli bir devirli monoid olsun. Bu durumda *M=BwrA* wreath çarpımının kelime probleminin çözülebilir olması için gerek koşul B nin elemanlarının bütün (i) $(0 \leq i \leq 2n-1)$ kopyaları yerine $i \equiv s(\bmod 2)$ olacak biçimde (s) kopyalarının yazılmasıdır.

5.4.6 Örnek: B monoidi $\wp_B = [y_1, y_2\,; y_1y_2 = y_2y_1]$ sunuşuna sahip rankı 2 serbest abelyan monoid ve A da $\wp_A = [x\,; x^3 = 1]$ monoid sunuşuna sahip 3 mertebeli devirli bir grup olsun. Rankı 2 olan serbest abelyan monoidin bütün elemanları $\{y_1^m y_2^n\}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ formunda yazıldığından bu monoid için kelime problemi çözülebilirdir. *M=BwrA* için,

$$\wp_M = [\mathbf{y}^{(0)}, x\,; \mathbf{s}^{(0)}, x^n{=}1,\; y_1^{(0)}y_2^{(0)} = y_2^{(0)}y_1^{(0)}, y_1^{(0)}y_2^{(1)} = y_2^{(1)}y_1^{(0)}]$$

sunuşunu ele alalım ve bu sunuşun bağıntı kümesindeki elemanlar arasında hiçbir çakışan kelime bulunmadığından M için kelime problemi çözülebilirdir.

6. YARI GRUPLARIN WREATH ÇARPIMI İÇİN KELİME VE GENELLEŞTİRİLMİŞ KELİME PROBLEMİ

6.1 Giriş

Bu bölümde yarı grupların wreath çarpımı için kelime ve genelleştirilmiş kelime problemlerine yer verilmiştir. Bilindiği gibi algoritmik problemler, *kelime, eşlenik* ve *izomorfizma problemleri*, grup ve yarı grup teoride oldukça önemli bir yer teşkil etmektedir. Karar verme problemleri olarak da adlandırılan bu tür cebirsel problemler, Max Dehn tarafından 1900'lü yılların başında literatüre kazandırılmıştı. Basit bir ifade ile bu problemlerin, özel bir soruya "evet" veya "hayır" şeklinde bir yanıt aramak olduğu hatırlanarak, üzerinde en çok yorum ve çalışma yapılan kelime problemi ve bunun türevleri (örneğin genelleştirilmiş kelime problemi), grup ve yarı grup cebirsel yapıları üzerinde geniş bir çalışma alanı oluşturmuştur [1, 2].

6.2 Yarı Grupların Kelime Problemi ve Sonuçlar

Bir S yarı grubunun bir A üreteç kümesi bakımından *çözülebilir kelime problemine sahip* olması aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

"*Herhangi iki $u, v \in A^+$ kelimeleri için, $u = v$ biçiminde bir bağıntının S yarı grubu içinde sağlanıp sağlanmadığına karar veren bir algoritma var mıdır*?"

Belirtilen bu şekilde bir algoritma bulunabilirse, çalışılan yarı grup için kelime problemi *çözülebilirdir* denir. Bir S yarı grubu bir üreteç kümesine göre çözülebilir kelime problemine sahip iken aynı zamanda başka bir üreteç kümesine göre kelime problemi çözülemez olabilir [11, 20]. Bununla beraber S yarı grubu *sonlu üreteçli* ise kelime probleminin çözülebilirliği, aslında bu yarı grubun sonlu üreteç kümesinden bağımsızdır. Yani bir S yarı grubu herhangi sonlu bir üreteç kümesine göre çözülebilir kelime problemine sahip ise, sonlu üreteçli S yarı grubu için kelime problemi çözülebilirdir. Ayrıca her sonlu yarı grubun kelime problemi de çözülebilirdir. Diğer bir deyişle çözülebilir kelime problemine sahip olmak bir *sonluluk durumudur.*

Kelime probleminin çalışıldığı önemli bazı yarı grup örnekleri aşağıdaki gibi özetlenebilir:

1. S bir yarı grup ve T de S nin büyük alt yarı grubu olsun. S sonlu üreteçli ise bu durumda

S çözülebilir kelime problemine sahiptir $\Leftrightarrow$ *T çözülebilir kelime problemine sahiptir* [65, Teorem 5.1].

2. I bir yarı latis ve $S_i\ (i \in I)$ yarı grupların bir ailesi olsun. Sonlu bir yarı latis I için,

S_i yarı gruplarının güçlü yarı latisi $S = S[I, S_i, \theta_{j,i}]$ $(\theta_{j,i} : S_j \to S_i\ (j \geq i)$ homomorfizma) çözülebilir kelime problemine sahiptir $\Leftrightarrow$ *her bir $S_i\ (i \in I)$ çözülebilir kelime problemine sahiptir* [10, Teorem 3].

3. S bir yarı grup ve $S' = M[S; I, J; P]$ sonlu üreteçli bir Rees matrix yarı grup olsun. Bu durumda

S' çözülebilir kelime problemine sahiptir $\Leftrightarrow$ *S çözülebilir kelime problemine sahiptir* [9, Teorem 5.4].

4. S_1 ve S_2 çözülebilir kelime problemine sahip sonlu sunumlu tersinir yarı gruplar olsun. U yarı grubu da S_1 ve S_2 içinde çözülebilir genelleştirilmiş kelime problemine sahip tersinir bir yarı grup olmak üzere, $S_1 *_U S_2$ *birleştirilmiş serbest çarpım bazı özel şartlar altında çözülebilir kelime problemine sahiptir* [51].

6.3 Yarı Grupların Wreath Çarpımı

Grup ve yarı gruplar için wreath çarpım önemli bir yapıdır. Örneğin permütasyon grupları ([25]) ve sonlu yarı gruplar için olan ünlü Krohn-Rhodes ayrışım teoremi ([53]) için temel yapı taşı oluştururlar. Bu çarpımlar sonsuz gruplar üzerinde de çalışılmıştır. Literatürde sonsuz yarı grupların wreath çarpımı üzerine az sayıda çalışmalar bulunmaktadır. Bunun bir nedeni olarak gerek üreteç kümesinin gerekse bağıntı kümesinin belirlenmesinin zor olduğu söylenebilir.

Wreath çarpımlar özel yarı direkt çarpım olduklarından öncelikle yarı direkt çarpım hakkında kısa bir bilgi verelim.

6.3.1 Tanım: S ve T yarı gruplar olmak üzere, $\theta : T \to End(S)$ bir homomorfizma olsun. Bir $t \in T$ için, ${}^{t}s$ ifadesini $s(t\theta)$ olarak tanımlayalım. Bu durumda S nin T ile *yarı direkt çarpımı,* $S \rtimes_{\theta} T$,

$$(s_1, t_1)(s_2, t_2) = (s_1\ {}^{t_1}s_2, t_1 t_2) \qquad (s_1, s_2 \in S,\ t_1, t_2 \in T),$$

işlemi ile tanımlanan $S \times T$ kümesidir.

S yarı grubu için, S^n kümesini $S^n = \{s_1 s_2 \ldots s_n : s_1, s_2, \ldots, s_n \in S\}$ $(n \geq 2)$ biçiminde yazalım. X bir küme olmak üzere, $X \to S$ ye bütün dönüşümlerin kümesi olan S^X, dönüşümlerin "component-wise" çarpımı altında bir yarı grup oluşturur. Bu durum S nin X ile olan *kartezyen kuvveti* olarak adlandırılır. Eğer bu S yarı grubu bir e idempotent elemana sahip ise bu durumda $f \in S^X$ in *desteği* (e elemanına bağlı),

$$supp_e(f) = \{x \in X : xf \neq e\}$$

biçiminde tanımlanır. $S^{(X)_e} = \{f \in S^X : |supp_e(f)| < \infty\}$ kümesi S^X kümesinin bir alt yarı grubudur ve S nin (e elemanına bağlı) *direkt kuvveti* olarak adlandırılır. Eğer

X kümesi n elemanlı sonlu bir küme ise S^X ile $S^{(X)_e}$ kümeleri çakışır ve S yarı grubunun elemanlarının n-lilerinden oluşan $S^{(n)}$ yarı grubuna izomorfiktirler.

6.3.2 Tanım: S nin T ile *kısıtlanmamış wreath çarpımı SWrT* olarak gösterilip,

$$(f,t)(g,u) = (f\ {}^t g, tu), \tag{6.1}$$

işlemi ile tanımlanan $S^T \rtimes T$ kümesidir. Burada ${}^t g \in S^T$ dönüşümü bir $x \in T$ elemanı için,

$$(x)^t g = (xt)g$$

biçiminde tanımlanır. (*Kısıtlanmış*) *wreath çarpım* ise $S_e wrT$ (e elemanına bağlı) ile gösterilen ve

$$\{(f,t) \in SWrT : |supp_e(f)| < \infty\}$$

kümesi ile üretilen kısıtlanmamış wreath çarpımın ($SWrT$) bir alt yarı grubudur.

S ve T nin grup olması durumunda $SwrT$ (e ihmal edilebilir) ile $\{(f,t) \in SWrT : |supp_e(f)| < \infty\}$ kümesi çakışır. Ancak yarı gruplarda bu gerekli bir durum değildir. Bu durumu şu şekilde özetleyebiliriz [33]:

$S_e wrT = \{(f,t) \in SWrT : |supp_e(f)| < \infty\} \iff$

- S tekil yarı grup,
- e sol sıfır,
- bütün $t,u \in T$ için, $\{x \in T : u = xt\}$ kümesi sonludur.

Yarı gruplar (monoidler) üzerinde bir çarpım düşünüldüğünde bununla alakalı ilk çalışmalar bu çarpımın sonlu üreteçli veya sonlu sunumlu olması ile ilgilidir.

[61] de bulunan bu yöndeki çalışmalar Şekil 6.1'deki gibi özetlenebilir. İlk olarak ilgili aşağıdaki tanımı verelim.

6.3.3 Tanım: Bir S yarı grubunun bir X kümesi üzerine *hareketi*

$$X \times S \to X, \quad (x,s) \mapsto xs$$

biçiminde tanımlı ve $(xs_1)s_2 = x(s_1s_2)$ $(s_1, s_2 \in S)$ eşitliğini sağlayan bir dönüşümdür. Bir hareket ile birlikte bir X kümesi *S-act* olarak adlandırılır. Bu X kümesi için eğer $US^1 = X$ ise $U \subseteq X$ ile üretiliyor ve bu şekilde sonlu bir U kümesi var ise bu durumda sonlu üreteçlidir denir.

Bir S yarı grubunun *çapraz hareketi* $(s_1, s_2)s = (s_1s, s_2s)$ ile tanımlı $S \times S$ kümesidir.

<u>*T* sonlu yarıgrup</u>

S sonlu yarıgrup (aşikar)

S sonsuz yarıgrup

- çapraz hareketi sonlu üreteçli (4.1Teorem)
- çapraz hareketi sonlu üreteçli değil (4.2 Teorem)

<u>*T* sonsuz yarı grup</u>

S sonlu yarıgrup (5.5 Önerme)

S sonsuz yarıgrup

- çapraz hareketi sonlu üreteçli (5.4 Önerme)
- çapraz herekti sonlu üreteçli değil (4.3 Önerme)

$\boxed{\text{\textit{SwrT} sonlu üreteçli}}$

Şekil 6.1

6.3.4 Teorem [61, Teorem 4.1]: S çapraz hareketi sonlu üreteçli sonsuz bir yarı grup ve T tekilden farklı sonlu bir yarı grup olsun. $SwrT$ nin sonlu üreteçli olması için gerek ve yeter koşullar;

(i) $S^2 = S$ ve $T^2 = T$,

(ii) S sonlu üreteçli

olmasıdır.

Herhangi iki sonlu yarı grubun wreath çarpımı da sonlu olmaktadır. Sonlu bir yarı grubun da kelime problemi çözülebilir olduğundan bu wreath çarpımın çözülebilir kelime problemine sahip olması aşikardır. Dolayısıyla bu bölümün ana sonucunu oluşturacak olan 6.4.1 Teorem de, *S* ve *T* yarı gruplarını sırasıyla sonsuz ve sonlu yarı gruplar olarak alacağız. Dolayısıyla 6.3.4 Teorem'in yeterlilik şartlarının kabul edildiği düşünülmelidir.

6.4 Yarı Grupların Wreath Çarpımı İçin Kelime Problemi

Bu alt bölümde bu bölümün temel sonucu verilecektir.

6.4.1 Teorem (*Ana Teorem*) [38]: *S* nin *T* ile wreath çarpımının çözülebilir kelime problemine sahip olması için gerek ve yeter koşul *S* ve *T* nin her ikisinin de çözülebilir kelime problemine sahip olmasıdır.

İspat: $\Leftarrow$: Kabul edelim ki *S* ve *T* yarı gruplarının her ikisi de çözülebilir kelime problemine sahip olsunlar. *SWrT* içinde keyfi bir

$$w_1 = (f_1, d_1)(f_2, d_2)...(f_n, d_n) \tag{6.2}$$

kelimesi alalım. Burada w_1 kelimesinin çarpanlarının birinci bileşenleri S^T nin elemanları (yani $f_1, f_2, ..., f_n$ bileşenleri *T* den *S* ye dönüşümler), ikinci bileşenler ise (yani $d_1, d_2, ..., d_n$ elemanları) *T* yarı grubunun elemanlarıdır. (6.1) ile

$$w_1 = (f_1, d_1)(f_2, d_2)...(f_n, d_n) = (f_1 \ {}^{d_1}f_2 \ ... \ {}^{d_1 d_2 ... d_{n-1}}f_n, d_1 d_2 ... d_n) \tag{6.3}$$

yazabiliriz. *SWrT* içinde diğer bir kelime olarak

$$w_2 = (g_1, h_1)(g_2, h_2)...(g_r, h_r) \tag{6.4}$$

alalım. Kelime probleminin tanımı gereği $w_1 = w_2$ eşitliğinin $SWrT$ yarı grubu içinde sağlandığını kontrol etmemiz gerekmektedir. T yarı grubunun kelime problemi çözülebilir olduğundan,

$$d_1 d_2 ... d_n = h_1 h_2 ... h_r$$

eşitliği sağlanmaktadır. Şimdi (6.3) deki w_1 kelimesinin birinci bileşeninin bir $w \in T$ elemanı üzerindeki görüntüsüne bakalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}(w) f_1 \ {}^{d_1} f_2 \ \ldots \ {}^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} f_n &= (w) f_1 \ \ (w)^{d_1} f_2 \ \ \ldots \ \ (w)^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} f_n \\ &= (w) f_1 (w d_1) f_2 \ldots (w d_1 d_2 \ldots d_{n-1}) f_n \\ &= s_1 s_2 \ldots s_n\end{aligned}$$

$(s_i \in S, 1 \le i \le n)$ dir. Buradaki her bir s_i kelimesi, her bir $w, wd_1, ..., wd_{n-1}$ kelimesinin sırasıyla $f_1, f_2, ..., f_n$ dönüşümleri altındaki görüntüleridir. Gerçekte T yarı grubu için olan kabulümüz bize

$w \in T$ elemanının bazı $w' \in T$ elemanına denk,

$wd_1 \in T$ elemanının bazı $w' d_1^{'} \in T$ elemanına denk

ve bu durumu devam ettirerek,

$wd_1 d_2 ... d_{n-1} \in T$ elemanının da bazı $w' d_1^{'} d_2^{'} ... d_{n-1}^{'} \in T$ elemanına denk

olduklarını verir. Böylece bütün $w', w' d_1^{'}, ..., w' d_1^{'} d_2^{'} ... d_{n-1}^{'} \in T$ elemanları için $s_1^{'}, \ s_2^{'}, \ ..., \ s_n^{'} \in S$ elde ederiz. S çözülebilir kelime problemine sahip olduğu için, bu bize $s_1 s_2 ... s_n \in S$ nin bazı $s_1^{'} s_2^{'} ... s_n^{'} \in S$ kelimesine denk olmasını ve dolayısıyla alınan $w \in T$ elemanı keyfi olduğundan, S^T içinde

$$f_1 \ {}^{d_1} f_2 \ldots {}^{d_1 d_2 \ldots d_{n-1}} f_n = g_1 \ {}^{h_1} g_2 \ldots {}^{h_1 h_2 \ldots h_{r-1}} g_r$$

eşitliğinin sağlandığını verecektir.

$\Rightarrow$: İspatın yeterlilik kısmı için $SWrT$ nin çözülebilir kelime problemine sahip olduğunu varsayalım. $w_1, w_2 \in SWrT$ elemanları (6.2) ve (6.4) de tanımlandığı gibi olsun. $SWrT$ yarı grubu için sağlanan $w_1 = w_2$ eşitliği bize S ve T nin kelime problemlerinin çözülebilir olduğunu açıkça verecektir. □

6.5 Yarı Grupların Wreath Çarpımı İçin Genelleştirilmiş Kelime Problemi

Bu alt bölümde serbest abelyan yarı grubunun sonlu monojenik (devirli) yarı grup ile olan wreath çarpımının genelleştirilmiş kelime probleminin çözülebilirliği incelenmiştir. Monojenik yarı grup (veya monoid) ile ilgili temel bilgiler [14, 21] ve [32, Bölüm 1.2] de bulunabilmesine rağmen bu tür özel yarı gruplar hakkında kısa bir bilgi verelim.

S yarı grubu s elemanı ile üretilen $k > 1$ mertebeli bir monojenik yarı grup olsun. Bu durumda $s, s^2, ..., s^k$ elemanlarının hepsi S yarı grubundadır. Yarı grup tanımından $s^{k+1}, s^{k+2}, ...$ elemanları da S yarı grubunda olmalıdır. Ancak S nin mertebesi sonlu olduğundan s^{k+1} elemanı bazı $1 \leq n \leq k$ için s^n elemanına eşit olmalıdır. Buna ek olarak, bu sonlu monojenik yarı grubu için iki tane doğal sayı tanımlanır. Bunlar s elemanının *indeksi* r ve *periyodu* m dir ve bu sayılar arasında $r + m = k + 1$ biçiminde bir eşitlik mevcuttur.

Aşağıdaki yardımcı teorem [21] deki Teorem 1.9'un bir sonucu olarak verilebilir.

6.5.1 Yardımcı Teorem: Eğer S içinde $s^p = s^q$ $(1 \leq p < q \leq k+1)$ ise bu durumda $q = k+1$ dir.

Ayrıca sonlu monojenik yarı grubun sunuşunu aşağıdaki yardımcı teorem ile tanımlayabiliriz.

6.5.2 Yardımcı Teorem: S yarı grubu mertebesi k ve indeksi l olan bir sonlu monojenik yarı grup olsun. Bu durumda S yarı grubu

$$\wp_{k+1,l} = [x; x^{k+1} = x^l]$$

($l < k+1,\ l, k \in \mathbb{Z}^{+}$) sunuşuna sahiptir.

İspat: $\wp_{k+1,l}$ sunuşu ile tanımlanan yarı grup $S(\wp_{k+1,l})$ olsun. $[x]_{\wp_{k+1,l}}$ ile x elemanını içeren denklik sınıfını gösterelim ve $\psi : X = \{x\} \to S$ dönüşümünü düşünelim. $\psi(x^{k+1}) = \psi(x^{l})$ olduğu için,

$$\psi' : S(\wp_{k+1,l}) \to S, \qquad [x]_{\wp_{k+1,l}} \mapsto s$$

biçiminde bir homomorfizma elde ederiz. Ayrıca $s \in Gör\,\psi'$ olduğu için ψ' homomorfizması örtendir. $\wp_{k+1,l}$ sunuşu tam yeniden yazma sunuşudur ([13]) ve indirgenemez elemanları da ($x^{k+1} = x^{l}$ bağıntısı daha fazla uygulanamayan elemanlar) $x, x^2, \ldots, x^k$ dır. Böylece $S(\wp_{k+1,l})$ yarı grubunun farklı elemanları $[x]_{\wp_{k+1,l}}, [x^2]_{\wp_{k+1,l}}, \ldots, [x^k]_{\wp_{k+1,l}}$ ve dolayısıyla da $|S(\wp_{k+1,l})| = k$ dır. Ayrıca ψ' homomorfizması birebir olmasaydı bu durumda $|Gör\,\psi'| < |S(\wp_{k+1,l})| = k$ olurdu ki bu çelişkidir. Böylece ψ' homomorfizması birebir ve dolayısıyla da izomorfizmadır. □

6.5.3 Yardımcı Teorem: $l \neq l'$ ise bu durumda $S(\wp_{k+1,l}) \not\cong S(\wp_{k+1,l'})$ dir.

İspat: $l < l'$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca c ile üretilen $k - l + 1$ mertebeli C devirli grubunu düşünelim. [39] ile $S(\wp_{k+1,l})$ den C üzerine $[x]_{\wp_{k+1,l}} \overset{\gamma}{\mapsto} c$ ile verilen bir γ homomorfizması vardır.

Şimdi

$$\omega : S(\wp_{k+1,l'}) \to S(\wp_{k+1,l})$$

bir izomorfizma olsaydı $\gamma\omega$ bileşkesi, γ', $S(\wp_{k+1,l'})$ yarı grubundan C üzerine bir homomorfizma verirdi. Böylece $\gamma'([x]_{\wp_{k+1,l'}})$ elemanı C nin bir üreteç elemanı, $\hat{c}$, olması gerekirdi. Ancak $[x]^{k+1}_{\wp_{k+1,l'}} = [x]^{l'}_{\wp_{k+1,l'}}$ olduğu için,

$$\hat{c}^{k+1} = \gamma'([x]^{k+1}_{\wp_{k+1,l'}}) = \gamma'([x]^{l'}_{\wp_{k+1,l'}}) = \hat{c}^{l'}$$

eşitliklerine ve böylece de C içinde $\hat{c}^{(k-l'+1)} = 1$ eşitliğine sahip olurduk. Ancak $k - l' < k - l$ eşitsizliğinden dolayı bu durum $\hat{c}$ nın mertebesinin $k - l + 1$ olmalı gerçeği ile çelişki oluşturmaktadır. Dolayısıyla $S(\wp_{k+1,l}) \ncong S(\wp_{k+1,l'})$ dir. □

Kolaylık olması açısından $S(\wp_{k+1,l})$ yarıgrubunu $S_{k+1,l}$ ile gösterelim. Sonlu monojenik yarıgruplarla ilgili yukarıdaki materyelleri ve yardımcı teoremleri aşağıdaki sonuç ile özetleyelim.

6.5.4 Teorem: Sabit bir $k + 1 > 2$ sayısı için, $S_{k+1,l}$ $(1 \leq l \leq k)$ yarı grupları k mertebeli monojenik yarı grupturlar ve ikişerli izomorf değildirler. k mertebeli herhangi bir monojenik yarı grup, bazı l değerleri için $S_{k+1,l}$ yarı grubuna izomorftur.

6.5.2 Yardımcı Teorem'i kullanarak ve [33, Teorem 2.2] deki monoidlerin wreath çarpımının sunuşu ile ilgili sonucun ispatını S ve T yarı gruplarının wreath çarpımına adapte edersek aşağıdaki sonucun ispatı rahatlıkla görülebilir. (Şunu not etmeliyiz ki [33] deki sonucun adapte edilirken dikkat edilmesi gereken nokta monoidin birim elemanının önemsenmemesidir).

6.5.5 Yardımcı Teorem: S ve T sonlu monojenik yarı grupları sırasıyla

$$\wp_S = [y; y^{k+1} = y^l \ (l < k+1)] \quad \text{ve} \quad \wp_T = [x; x^{m+1} = x^n \ (n < m+1)],$$

sunuşlarına sahip olsunlar. Bu durumda S nin T ile wreath çarpımının sunuşu

$$\begin{aligned} \wp_{SWrT} = [y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots, y^{(m)}, x; x^{m+1} = x^n, (y^{(i)})^{k+1} = (y^{(i)})^l, y^{(i)} y^{(j)} = y^{(j)} y^{(i)} \ (1 \leq i < j \leq m), \\ xy^{(i)} = y^{(i-1)} x \ (2 \leq i \leq m), xy^{(n)} = y^{(m)} x] \end{aligned}$$

biçimindedir.

Özel durum olarak S yi sonsuz yarı grup ve T yi de sonlu monogenik yarı grup alarak $SWrT$ nin genelleştirilmiş kelime probleminin çözümünü inceleyelim. Öncelikle bu çarpımın sunuşunu oluşturalım.

6.5.6 Yardımcı Teorem: S rankı 2 olan serbest abelyan yarı grup ve T sonlu monojenik yarı grupları sırasıyla

$$\wp_S = [y_1, y_2 ; y_1 y_2 = y_2 y_1] \quad \text{ve} \quad \wp_T = [x ; x^{m+1} = x^n \ (n < m+1)]$$

sunuşlarına sahip olsunlar. Bu durumda S nin T ile wreath çarpımının sunuşu

$$\begin{aligned}\wp_{SWrT} = [y_1^{(a)}, y_2^{(a)} \quad (1 \le a \le m), x \ \ ; \ & x^{m+1} = x^n \quad (n < m+1),\\ & y_i^{(a)} y_j^{(b)} = y_j^{(b)} y_i^{(a)} \quad (i, j \in \{1,2\},\ i \le j,\ 1 \le a, b \le m),\\ & x y_1^{(a+1)} = y_1^{(a)} x \quad (1 \le a \le m), x y_2^{(b+1)} = y_2^{(b)} x \quad (1 \le b \le m),\\ & x y_1^{(n)} = y_1^{(m)} x, \quad x y_2^{(n)} = y_2^{(m)} x] \end{aligned} \tag{6.5}$$

biçimindedir.

6.5.7 Tanım: S_1 yarı grubu X ile üretilen keyfi bir yarı grup ve S_2 de S_1 in alt yarı grubu olsun. S_1 içindeki S_2 yarı grubu için *genelleştirilmiş kelime problemi*, X kümesindeki elemanlarla oluşturulan bir kelimenin S_2 yarı grubunun elemanı olup olmadığını araştıran bir algoritmanın varlığı problemidir.

Bu konunun üzerinde çalışıldığı özel bir yarı grup örneği olarak Baumslag-Solitar yarı gruplarını verebiliriz [34].

Bu bölümün diğer önemli bir sonucu olan aşağıdaki teoremi verelim.

6.5.8 Teorem: S rankı 2 serbest abelyan yarı grup ve T sonlu monojenik yarı grup olmak üzere, $SWrT$ için genelleştirilmiş kelime problemi çözülebilirdir.

İspat: İlk olarak *SWrT* yarı grubuna ait kelimelerin normal formlarını oluşturmamız gerekmektedir. Bu kelimelerin (6.5) sunuşu düşünülerek $y_1^{(a)}, y_2^{(a)}\ (1 \leq a \leq m)$ ve x üreteç elemanlarından oluştuğu aşikardır. *SWrT* aslında $S^T \rtimes T$ olduğundan kelimelerin *taban normal formlarını*

$$(y_2^{(a_1)})^{p_1}(y_2^{(a_2)})^{p_2}...(y_2^{(a_r)})^{p_r}(y_1^{(b_1)})^{q_1}(y_1^{(b_2)})^{q_2}...(y_1^{(b_s)})^{q_s}x^c \tag{6.6}$$

olarak alabiliriz. Burada $1 \leq a_i, b_j \leq m,\ p_i, q_j \in \mathbb{N}\ (1 \leq i \leq r,\ 1 \leq j \leq s),\ 1 \leq c \leq m$ dir. Gerçekte *SWrT* içindeki

$$(y_2^{(a_i+p)})^{c_1}(y_1^{(b_j+q)})^{c_2}x^d$$

$(p \neq q,\ 0 \leq p, q \leq m-2,\ c_1, c_2 \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq d \leq m)$ biçimindeki kelimeler de (6.5) sunuşundaki

$$xy_1^{(a+1)} = y_1^{(a)}x \quad (1 \leq a \leq m), \qquad xy_2^{(b+1)} = y_2^{(b)}x \quad (1 \leq b \leq m)$$

ve

$$xy_1^{(n)} = y_1^{(m)}x, \quad xy_2^{(n)} = y_2^{(m)}x$$

bağıntıları kullanılarak (6.6) daki forma dönüşür.

Şimdi $v \in SWrT$ keyfi bir kelime olsun. Varsayalım ki $U = \{u_1, u_2, ..., u_t\}$ kümesi *SWrT* yarı grubunun sonlu üreteçli alt yarı grubunun üreteçlerini temsil eden kelimelerin kümesi olsun. (6.5) sunuşundaki

$$xy_1^{(a+1)} = y_1^{(a)}x \quad (1 \leq a \leq m), \ \ xy_2^{(b+1)} = y_2^{(b)}x \quad (1 \leq b \leq m) \text{ ve } xy_1^{(n)} = y_1^{(m)}x,\ xy_2^{(n)} = y_2^{(m)}x$$

bağıntılarını kullanarak, $v \in SWrT$ kelimesinin U kümesindeki elemanların bazı çarpımına denk olduğunu göstermeliyiz. Bunun için öncelikle bu U kümesini

$$\{(y_1^{(i)})^p x^c,\ (y_2^{(i)})^p x^c\} \quad (1 \le i, c \le m, \quad p \in \mathbb{N})$$

biçiminde genel bir formda yazalım. Kelimeler U kümesindeki elemanların sonlu sayıda çarpımı (yan yana yazımı) ile elde edilebileceğinden ve $SWrT$ içinden alınacak keyfi bir kelime de (6.6) daki form gibi yazılabileceğinden, hiçbir kelime $U = \{(y_1^{(i)})^p x^c, (y_2^{(i)})^p x^c\}$ kümesinin dışında değildir. Bu ise bize $SWrT$ yarı grubunun genelleştirilmiş kelime probleminin çözülebilir olduğunu verecektir. □

Aşağıdaki Tablo 6.1 ile, yarı grupların wreath çarpımı için elde edilen sonuçlar gruplandırılmış ve üzerinde çalışılması gereken bazı açık problemler gösterilmiştir.

	Yarı grupların wreath Çarpımı	Sonuçlar
Sonlu üreteçli	: +	Teorem 4.1, 4.2, Önerme 5.3, 5.4, 5.5, [61]
Sonlu sunumlu	: +	Teorem 6.2, [61]
Periyodik	: +	Teorem 7.1, [61]
Yerel sonlu	: +	Teorem 7.2, [61]
Çözülebilir kelime problemi	: +	Teorem 2.2, [38]
Otomatiklik	: +	Teorem 6.2, [3]
Sonlu tam yeniden yazma sistemi	: ?	
Sonlu türetilmiş tip	: ?	

Tablo 6.1

7. SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar tezin üçüncü, dördüncü, beşinci ve altıncı bölümlerinde bulunmaktadır. Bu sonuçlar aşağıda paragraflar halinde verilmiştir.

Üçüncü bölümde, iki sonlu monoidin Schützenberger çarpımının sonlu türetilmiş tip özelliğine sahip olduğu gösterilmiştir.

Dördüncü bölümde, sonlu türetilmiş tip özelliği monoidlerin graf çarpımı üzerinde çalışılmış ve bu çarpımın sonlu türetilmiş özelliğine sahip olması için gerek koşul belirtilmiştir.

Beşinci bölümde, monoidlerinin wreath çarpımının sunuşu Cayley graf kullanarak oluşturulmuş ve elde edilen bu sunuşun *p*-Cockcroft özelliğine sahip olması için gerek ve yeter koşullar verilmiştir. Daha sonra monoidlerin bu wreath çarpımı üzerinde alt monoid ayrıştırılabilirlik özelliği incelenmiş ve bazı özel monoidlerin wreath çarpımının çözülebilir kelime problemine sahip olduğuna dair sonuç ve örnekler verilmiştir.

Altıncı bölümde, wreath çarpım yarı gruplar üzerinde ele alınmış ve bu çarpımın kelime probleminin çözülebilir olması için gerek ve yeter koşul ortaya konmuştur. Ayrıca bazı özel yarı grupların wreath çarpımı üzerinde genelleştirilmiş kelime problemi incelenmiştir.

8. KAYNAKLAR

[1] Adian, S. I., “Defining relations and algorithmic problems for groups and semigroups”, *Trudy Maht. Inst. Steklov,* **85** (1966) (Russian); English Translation: *Proc. Steklov Inst. Math.,* **85** (1967).

[2] Adian, S. I., Durnev, V. G., “Decision problems for groups and semigroups”, *Russian Math. Surveys,* **55**(2) (2000), 207.

[3] Andrade, I., Descalço, L., Martins, M. A., “Automatic structures for semigroup constructions”, *Semigroup Forum*, **76** (2008), 239.

[4] Ateş, F., Grup ve monoid yapılarına geometrik yaklaşımlar, Doktora Tezi, Balıkesir Üniversitesi, (2007).

[5] Ateş, F., Çevik, A. S., “Minimal but inefficient presentations for semi-direct products of finite cyclic monoids”, Groups St. Andrews 2005, Cambridge University Press, LMS Lecture Note Series, **339** (2005), 170.

[6] Ateş, F., Çevik, A. S., “(Cyclic) Subgroup separability of HNN and split extensions”, *Mathematica Slovaca,* **57**(1) (2007), 33.

[7] Ateş, F., Çevik, A. S., “Separability and efficiency under standard wreath product in terms of Cayley graphs”, *Rocky Mountain Journal of Mathematics,* **38**(3) (2008), 779.

[8] Ateş, F., Karpuz, E. G. and Çevik, A. S., “Regular and π-inverse monoids under Schützenberger product”, *Algebras, Groups and Geometries*, (2009) (basım aşamasında).

[9] Ayık, H., “On finiteness conditions for Rees matrix semigroups”, *Czechoslovak Mathematical Journal,* **55**(130) (2005), 455.

[10] Ayık, G., Ayık, H., Ünlü, Y., “Presentations and word problem for strong semilattices of semigroups”, *Algebra and Discrete Mathematics,* **4** (2005), 28.

[11] Baumslag, G., Topics in combinatorial group theory, Birkhäuser, Basel, (1993).

[12] Book, R. V., "Thue systems as rewriting systems", *Symbolic Computation*, **3** (1987), 39.

[13] Book, R. V., Otto, F., String rewriting systems, Springer-Verlag, New York, (1993).

[14] Clifford, A. H., Preston, G. B., "The algebraic theory of semigroups", Vol I. *Math. Surveys*, No.7 Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1961).

[15] Cohen, D. E., Combinatorial group theory: topological approach, Cambridge University Press, (1989).

[16] Cohen, D. E., "String rewriting and homology of monoids", *Math. Struct. in Comp. Science*, **7** (1997), 207.

[17] Costa, A. V., "Graph products of monoids", *Semigroup Forum*, **63** (2001), 247.

[18] Cremanns, R., Otto, F., "Finite derivation type implies the homological finiteness condition FP_3", *Journal of Symbolic Computation*, **18** (1994), 91.

[19] Cremanns, R., Otto, F., "For groups the property of having finite derivation type is equivalent to the homological finiteness condition FP_3", *Journal of Symbolic Computation*, **22** (1996), 155.

[20] Cutting, A., Soloman, A., "Remarks concerning finitely generated semigroups having regular sets of unique normal forms", *J. Aust. Math. Society,* Ser A, **70**(3) (2001), 293.

[21] Çevik, A. S., "*p*-Cockcroft property of the semidirect product of monoids", *Int. Journal of Algebra and Computation*, **13**(1) (2003), 1.

[22] Çevik, A. S., "Minimal but inefficient presentations of the semidirect product of some monoids", *Semigroup Forum*, **66**(1) (2003), 1.

[23] Çevik, A. S., Özel, C. and Karpuz, E. G., "Rewriting as a special case of noncommutative Gröbner bases theory for the Affine Weyl group $\widetilde{A}_n$", Proceedings of International Ring and Module Theory Conference, Birkhäuser, (2008) (kabul edildi).

[24] Diekert, V., Combinatorics on traces, Lecture Notes in Computer Science **454**, Springer-Verlag, (1990).

[25] Dixon, J. D., Mortimer, B., Permutation groups, Springer-Verlag, Berlin, (1996).

[26] Fohry, E., Kuske, D., “On graph products of automatic and biautomatic monoids”, *Semigroup Forum*, **72** (2006), 337.

[27] Fountain, J., Kambites, M., “Graph products of right cancellative monoids”, *Journal of the Australian Math. Soc.*, (to appear).

[28] Gallagher, P., On the finite generation and presentability of diagonal acts, finitary power semigroups and Schützenberger products, Ph.D. Thesis, University of St. Andrews, (2005).

[29] Gallagher, P., Ruškuc, N., “On finite generation and presentability of Schützenberger products”, *Journal of Australian Math. Soc.*, **83**(3) (2007), 357.

[30] Green, E. R., Graph products of groups, Ph.D. Thesis, University of Leeds, (1990).

[31] Heyworth, A., “Rewriting as a special case of noncommutative Gröbner basis theory”, Computational and Geometric Aspects of Modern Algebra, LMS Lecture Note Series, **275** (2000), 101.

[32] Howie, J. M., Fundamentals of semigroup theory, Series ed. H. G. Dalles and P. M. Neumann, LMS Monographs New Series, Clarendon Press, Oxford, (1995).

[33] Howie, J. M., Ruškuc, N., “Constructions and presentations for monoids”, *Communication in Algebra,* **22** (1994), 6209.

[34] Jackson, D. A., “Decision and separability problems for Baumslag-Solitar semigroups”, *Int. Journal of Algebra and Computation,* **12** (2002), 33.

[35] Johnson, D. L., Presentations of groups, LMS Lecture Note Series, **15** Cambridge University Press, (1990).

[36] Kapur, D., Narendran, P., “A finite thue system with a decidable word problem and without equivalent finite canonical system”, *Theoretical Computer Science*, **35** (1985), 337.

[37] Karpuz, E. G., Ateş, F. and Çevik, A. S., “Finite derivation type for graph products of monoids”, *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, (incelenme aşamasında).

[38] Karpuz, E. G., Çevik, A. S., "The word and generalized word problem for semigroups under wreath products", *Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome*, **52**(100) No.2 (2009), 151.

[39] Kashintsev, E. V., "Some conditions for the embeddability of semigroups in groups", *Mathematical Notes*, **70**(5) (2001), 640.

[40] Kobayashi, Y., "Complete rewriting systems and homology of monoid algebras", *Journal of Pure and Applied. Algebra*, **65** (1990), 263.

[41] Kobayashi, Y., Otto, F., "On homotopical and homological finiteness conditions for finitely presented monoids", *Int. Journal of Algebra and Computation,* **11** (2001), 391.

[42] Kobayashi, Y., Otto, F., "For finitely presented monoids the homological finiteness conditions *FHT* and bi-FP_3 coincide", *Journal of Algebra*, **264** (2003), 327.

[43] Lafont, Y., "A finiteness condition for monoids presented by complete rewriting systems", *Journal of Pure and Applied Algebra*, **98** (1995), 229.

[44] Lohrey, M., Computational and logical aspects of infinite monoids, Ph.D. Thesis, University of Stuttgart, (2003).

[45] Lyndon, R. C., Schupp, P. E., Combinatorial group theory, Springer-Verlag, (1977).

[46] Lustig, L. G., "Fox ideals, *N*-torsion and applications to groups and 3-manifolds", Two-Dimensional Homotopy and Combinatorial Group Theory, Cambridge University Press, (1993), 219.

[47] Magnus, W., Karrass, A. and Solitar, D., Combinatorial group theory, Dover Publications, Inc., (1976).

[48] Malheiro, A., "Finite derivation type for large ideals", *Semigroup Forum*, **78**(3) (2009), 450.

[49] Malheiro, A., "Finite derivation type for Rees matrix semigroups", *Theoretical Computer Science*, **355** (2006), 274.

[50] Margolis, S. W., Meakin, J., Sunik, Z., "Distortion functions and the membership problem for submonoids of groups and monoids", *Contemporary Mathematics*, **372** (2005), 109.

[51] Mazzucchelli, M., Cherubini, A., "On the decidability of the word problem for amalgamated free products of inverse semigroups", *Semigroup Forum*, **76** (2008), 309.

[52] McGlashan, S., Pasku, E. and Pride, S. J., "Finiteness conditions for rewriting systems", *Int. Journal of Algebra and Computation*, **15**(1) (2005), 175.

[53] Meldrum, J. D. P., Wreath products of groups and semigroups, Longman, (1995).

[54] Otto, F., "Modular properties of monoids and string-rewriting systems", Algebraic Engineering, World Scientific, Singapure, (1999), 538.

[55] Parkes, D. W., Thomas, R. M., "Syntactic monoids and word problems", *Arab. J. Sci. Engrg.*, **25** (2000), 81.

[56] Pride, S. J., "Geometric methods in combinatorial semigroup theory", Semigroups, Formal Languages and Groups, Kluwer Academic Publishers, (1995), 215.

[57] Pride, S. J., "Low-dimensional homotopy theory for monoids", *Int. Journal of Algebra and Computation*, **5** (1995), 631.

[58] Pride, S. J., Otto, F., "For monoids the topological finiteness conditions *FDT* and *FHT* are different", *Journal of London Math. Soc.*, **69**(2) (2004), 363.

[59] Pride, S. J., Wang, J., "Rewriting systems finiteness conditions and associated functions", Algorithmic Problems in Groups and Semigroups, Birkhäuser, Boston, (2000), 195.

[60] Robertson, E. F., Ruškuc, N., Thomson, M. R., "Finite generation and presentability of wreath products of monoids", *Journal of Algebra*, **266**(2) (2003), 382.

[61] Robertson, E. F., Ruškuc, N., Thomson, M. R., "On finite generation and other finiteness conditions for wreath products of semigroups", *Communication in Algebra*, **30**(8) (2002), 3851.

[62] Rotman, J. J., Theory of groups, Wm. C. Brown Publishers, Iowa, (1988).

[63] Röver, C. E., Holt, D. F., Rees, S. E. and Thomas, R. M., "Groups with a context-free co-word problem", *Journal of London Math. Soc.*, **71**(2) (2005), 643.

[64] Ruškuc, N., Semigroup presentations, Ph.D. Thesis, University of St Andrews, (1996).

[65] Ruškuc, N., “On large subsemigroups and finiteness conditions for semigroups”, *Proc. London Math. Soc.,* **76**(3) (1998), 383.

[66] Silva, P. V., Steinberg, B., “A geometric characterization of automatic monoids”, *Ouart. Oxford Journal Mathematics,* **55**(3) (2004), 333.

[67] Squier, C. C., “A finiteness condition for rewriting systems”, revision by F. Otto and T. Kobayashi, *Theoretical Computer Science*, **131** (1994), 271.

[68] Squier, C. C., “Word problems and a homological finiteness condition for monoids”, *Journal of Pure and Applied Algebra*, **49** (1987), 201.

[69] Wang, J., “Finite derivation type for semidirect products of monoids”, *Theoretical Computer Science*, **191** (1998), 219.

[70] Wang, J., “Finite complete rewriting systems and finite derivation type for small extensions of monoids”, *Journal of Algebra*, **204** (1998), 493.

[71] Wang, J., “Finite derivation type for semigroups and congruences”, *Semigroup Forum*, **75** (2007), 388.