

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP VE SÜREKLİ
KESİRLER**

DOKTORA TEZİ

ŞULE SARICA

BALIKESİR, OCAK - 2019

**T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**



**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP VE SÜREKLİ
KESİRLER**

DOKTORA TEZİ

ŞULE SARICA

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Özden KORUOĞLU (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Recep ŞAHİN

Doç. Dr. İlker İNAM

Doç. Dr. Musa DEMİRCİ

Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR

BALIKESİR, OCAK - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Şule SARICA tarafından hazırlanan “**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP VE SÜREKLİ KESİRLER**” adlı tez çalışmasının savunma sınavı 25.01.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

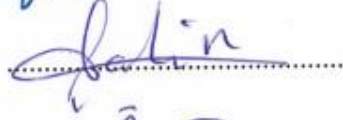
Jüri Üyeleri

İmza

Danışman
Prof. Dr. Özden KORUOĞLU



Üye
Prof. Dr. Recep ŞAHİN



Üye
Doç. Dr. İlker İNAM



Üye
Doç. Dr. Musa DEMİRCİ



Üye
Dr. Öğr. Üyesi Bilal DEMİR



Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR

.....

ÖZET

**GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP VE SÜREKLİ KESİRLER
DOKTORA TEZİ
ŞULE SARICA
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)**

BALIKESİR, OCAK - 2019

Bu tez altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, çalışma tanıtılmıştır. İkinci bölümde, diğer bölümlerde kullanılacak tanımlar, örnekler, teoremler ve metotlar verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, Farey graftaki yollarla tamsayı sürekli kesirler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Farey graftaki herhangi bir yol için, bir tamsayı sürekli kesir ve genişletilmiş modüler grupta bir indirgenmiş blok form bulunmuş ve bu ilişkiyi kullanarak yeni blok formlarla Fibonacci sayıları arasında bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla araştırılmıştır.

Beşinci bölümde, Farey graftaki yolları, tamsayı sürekli kesirleri ve genişletilmiş modüler grup elemanlarının yeni blok form gösterimini kullanarak, herhangi bir rasyonel sayı ile matris bileşenleri Fibonacci sayıları olan matrislerle bir ilişki elde edilmiştir. Ayrıca, önceki bölümlerde bulunan teoremler kullanılarak bir hesaplayıcı program hazırlanmıştır. Bu program, herhangi bir rasyonel sayı için elde edilen ve katsayıları Fibonacci sayıları olan matrisleri hesaplamaktadır.

Altıncı bölümde, elde edilen sonuçlar verilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalar için açık problemlerden bahsedilmiştir.

ANAHTAR KELİMELELER: Genişletilmiş modüler grup, sürekli kesirler, Farey graf, Fibonacci sayıları.

ABSTRACT

THE EXTENDED MODULAR GROUP AND CONTINUED FRACTIONS

PH.D THESIS

ŞULE SARICA

BALIKESİR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE

MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR. ÖZDEN KORUOĞLU)

BALIKESİR, JANUARY 2019

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the study is introduced.

In the second chapter, definitions, examples, theorems and methods that are used in the other sections are given.

In the third chapter of the thesis, the relationships between integer continuous fractions and Farey graphs are given.

In the fourth chapter, an integer continuous fraction for any path in Farey graph and a reduced block form in the extended modular group are obtained, then by using these results, some results between the new block forms and Fibonacci numbers are found. Also, the transformations that have same parabolic point are investigated by the Farey graph.

In the fifth chapter, a relationship is obtained with matrices whose entries are Fibonacci numbers with any rational number by using the paths in Farey graphs, the new block form representation in the extended modular group and the integer continuous fractions. Furthermore, a calculator program is prepared by using theorems in the previous chapters. This program calculates the matrices whose entries are Fibonacci numbers are obtained for each rational number.

In the sixth chapter, the obtained results are given and open problems for future studies are given.

KEYWORDS: Extended modular group, continued fraction, Farey graph, Fibonacci numbers.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET.....	i
ABSTRACT	ii
İÇİNDEKİLER	iii
ŞEKİL LİSTESİ.....	iv
SEMBOL LİSTESİ	v
ÖNSÖZ.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. ÖN BİLGİLER	5
2.1 Hecke Grupları	5
2.2 Modüler Grup	6
2.2.1 Genişletilmiş Modüler Grup	7
2.3 Fibonacci Dizisi.....	9
2.4 Graflar	18
2.5 Farey Dizisi	19
2.6 Farey Graf.....	20
2.7 Ford Çemberleri	22
2.8 Sürekli Kesirler.....	23
2.8.1 Rosen Sürekli Kesirler	31
3. FAREY GRAF VE SÜREKLİ KESİRLER.....	33
3.1 Farey Graftaki Yollar ve Sürekli Kesirlerle İlişkisi	33
4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP ELEMANLARININ SÜREKLİ KESİRLER VE FAREY GRAFTAKİ YOLLARLA İLİŞKİSİ	42
4.1 Parabolik Nokta, Blok Form ve Yeni Blok Form	42
4.2 Modüler Grup ve Tamsayı Sürekli Kesirler	47
4.3 Modüler Grup ve Yeni Bloklar.....	56
4.4 Genişletilmiş Modüler Grup ve Tamsayı Sürekli Kesirler.....	58
4.5 Genişletilmiş Modüler Grup ve Yeni Bloklar	61
5. FİBONACCİ SAYILARININ GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP İLE İLİŞKİSİ VE BİLGİSAYAR PROGRAMI.....	65
5.1 Parabolik Noktaların Farey Graflarla Elde Edilmesi.....	65
5.2 Rasyonel Sayıdan Fibonacci Sayılarına Geçiş	77
5.3 Bilgisayar Programı.....	82
5.3.1 Hesaplayıcı Program.....	82
5.3.2 Tasarım Ayrıntıları	86
6. SONUÇ VE ÖNERİLER	88
7. KAYNAKLAR.....	91

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 2.1: F_4 için Farey graf.	21
Şekil 2.2 : F_5 için Ford çemberleri.	23
Şekil 3.1: $[a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.	33
Şekil 3.2 : $[0,3,2]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.	37
Şekil 3.3 : $[0,1,1,3,2,2]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.	38
Şekil 5.1: Ana ekran.....	83
Şekil 5.2: Sonuç ekranı 1	83
Şekil 5.3: Sonuç ekranı 2	84
Şekil 5.4: Sonuç ekranı 3	84
Şekil 5.5: Sonuç ekranı 4	85
Şekil 5.6: Uyarı ekranı 1	85
Şekil 5.7: Uyarı ekranı 2	86

SEMBOL LİSTESİ

<u>Simge</u>	<u>Adı</u>
\mathbb{Z}	Tam sayılar kümesi
\mathbb{R}	Reel sayılar kümesi
\mathbb{C}	Karmaşık sayılar kümesi
\mathbb{Q}_∞	Genişletilmiş rasyonel sayılar kümesi
$H(\lambda)$	Hecke grubu
Γ	Modüler grup
$\bar{\Gamma}$	Genişletilmiş modüler grup
$PSL(2, \mathbb{Z})$	Modüler grup
$PSL(2, \mathbb{R})$	$\left\{V(z) \mid V(z) = \frac{az+b}{cz+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = 1\right\}$
G_0	$\left\{U(z) \mid U(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}; a, b, c, d \in \mathbb{R}, ad - bc = -1\right\}$
U	Üst yarı düzlem
$F(\lambda)$	$H(\lambda)$ nın temel bölgesi
\mathbb{H}	Hiperbolik üst yarı düzlem
F_n	n . Fibonacci sayısı
F_n	n . Farey dizisi
\mathcal{F}	Farey graf
$\varphi(n)$	Euler fonksiyonu
$\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$	Farey grafta x_0 dan x_n e giden yol
$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$	Basit sürekli kesir
$[b_0, b_1, \dots, b_n]$	Tam sayı sürekli kesir
$[b_1, b_2, \dots, b_n]_q$	Rosen sürekli kesir
C_k	Sürekli kesrin k . yakınsayanı

ÖNSÖZ

Bu çalışmada büyük emeği olan, kendisinin öğrencisi olmaktan her zaman gurur duyduğum sayın hocam ve danışmanım Prof. Dr. Özden KORUOĞLU'na ne kadar teşekkür etsem azdır.

Üzerimde büyük emekleri olan, Balıkesir Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü ve Necatibey Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü hocalarıma teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Bu yolun henüz çok başındayken, bana hep destek olan, kıymetli vaktini ayırıp bana emek harcayan sevgili ortaokul matematik öğretmenim Esra YILMAZ'a çok teşekkür ederim.

Her zaman yanımda olan beni yetiştiren kıymetli anneme, babama ve bu çalışmaya katkıda bulunan kardeşime çok teşekkür ederim.

Doktora hayatım boyunca büyük fedakarlık göstererek bana destek olan eşime ve canım kızıma ne kadar teşekkür etsem azdır.

Son olarak bu çalışmamda maddi ve manevi desteğini esirgemeyen TÜBİTAK'a teşekkürlerimi sunarım.

1. GİRİŞ

λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir [1] ve $H(\lambda)$ ile gösterilir. Literatürde daha çok, $\lambda = \lambda_q$ ($3 \leq q, q \in \mathbb{Z}$) için elde edilen Hecke grupları $H_{2,q} = H(\lambda_q)$ çalışılmaktadır. $H_{2,q}$ Hecke gruplarında, $q = 3$ değerine karşılık gelen en önemli Hecke grubu $H_{2,3}$ modüler grup olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir.

Modüler gruba, $R_1(z) = \frac{1}{z}$ anti-otomorfizmini ekleyerek elde edilen gruba, genişletilmiş modüler grup denir. Genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile antiotomorfizmleri bulundurur.

b_1, b_2, \dots, b_n tamsayı olmak üzere

$$b_1\lambda_q + \frac{-1}{b_2\lambda_q + \frac{-1}{b_3\lambda_q + \dots + \frac{-1}{b_n\lambda_q}}}$$

biçimindeki sürekli kesirlere, λ_q reel sayısına bağlı Rosen sürekli kesirleri denir ve $[b_1, b_2, \dots, b_n]_q$ ile gösterilir [2].

Rosen, Hecke gruplarının T ve U dönüşümlerinin $U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T$ biçimindeki kelime gösterimleri ile Rosen sürekli kesirleri arasındaki

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]_q$$

ilişisini [2] numaralı çalışmasında göstermiştir. Bu ilişki, Hecke grubunun elemanlarının parabolik noktalarını belirleme açısından ve hangi lineer dönüşümün hangi Hecke grubuna ait olması bakımından oldukça önemlidir.

Bu çalışmada ise Rosen sürekli kesirleri ile Hecke grupları arasındaki bu ilişki, tamsayı sürekli kesirler ile modüler grup arasında $q = 3$ ve $\lambda_q = 1$ olmak üzere,

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

eşitliği kullanılarak elde edilmiştir.

Farey graf, düğümlerinin kümesi \mathbb{Q}_∞ olan, hatları sadece, birbiriyle Farey komşusu olan düğüm çiftlerini bağlayan graftır. [3] numaralı kaynakta, Jones, Singerman ve Wicks'in [4] numaralı çalışmalarında geçen Farey graftaki yolların tamsayı sürekli kesirlerle olan ilişkilerini açıklayan teoremler kullanılarak geodezik yollar için benzer ilişkiler kurulmuştur. Bu çalışmalar sayesinde modüler grup, genişletilmiş modüler grup ve Farey graftaki yollar arasında yeni ilişkiler elde edilebilir.

Bir grubun herhangi bir elemanı altında, sonsuzun görüntüsüne o elemanın parabolik noktası denir. Modüler grubun parabolik noktalarının kümesi $\mathbb{Q}_\infty = \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ dur. Bu parabolik noktaları bulmak için yapılan birçok çalışma vardır. Koruoğlu [5] numaralı çalışmasında, basit sürekli kesirleri ve TS ile TS^2 bloklarını kullanarak modüler grup ve genişletilmiş modüler grupta, elemanların parabolik noktalarını belirlemiştir. Yılmaz ve Cangül [6] numaralı çalışmalarında ise $H(\lambda)$ Hecke grubunun parabolik noktalarını incelemişlerdir.

Rosen, genişletilmiş Hecke gruplarının elemanlarının parabolik noktalarını Rosen sürekli kesirlerle bulmuştur. Koruoğlu [5] ise genişletilmiş modüler gruptaki kelimelerin parabolik noktalarını, bloklar yardımıyla basit sürekli kesirlerle ifade etmiştir. Bu çalışmada Rosen'in teoremlerinin $\lambda = 1$ hali ile uyumlu olacak şekilde blokları kullanarak genişletilmiş modüler grubun otomorfizma ve antiotomorfizma elemanlarının parabolik noktaları, tamsayı sürekli kesirler ile ifade edilmiştir.

Fine [7], modüler grup sunuşunda blok kavramını tanıtmış ve iz sınıflarına ayırmıştır. Tanıttığı bu TS ve TS^2 blokları sayesinde modüler grup elemanlarını farklı türde ifade edebilmiştir. Jones ve Thornton ise [8], Fibonacci sayıları ile genişletilmiş modüler grubun

$$f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

elemanı arasındaki,

$$f^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} (f_k, k. \text{ Fibonacci sayısı})$$

ilişkisini bulmuştur. Koruoğlu ve Şahin [9] numaralı çalışmalarında genişletilmiş modüler grup sunuşu yardımıyla

$$h = TSR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

yeni blok formlar ile Fibonacci sayıları arasındaki

$$h^k = \begin{pmatrix} h_{k+1} & h_k \\ h_k & h_{k-1} \end{pmatrix}$$

ilişkisini vermişlerdir. Böylece bu çalışmalarında, genişletilmiş modüler grup ve modüler grubun herhangi bir elemanını Fibonacci sayıları yardımıyla elde etmişlerdir. Tezimizde, bu çalışmadan yola çıkarak, genişletilmiş modüler grubun antiotomorfizma elemanları için bulduğumuz

$$\begin{aligned} & (TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}.R(\infty) \\ & = [b_1, b_2, \dots, b_n] \end{aligned}$$

blok form - tamsayı sürekli kesir ilişkisini yeni blok formlar için yazarak Fibonacci sayıları ile bağlantı kurulmuştur.

Bu çalışmada, Jones , Singerman ve Wicks'in [4] numaralı çalışmalarında geçen Farey graftaki yolların tamsayı sürekli kesirlerle olan ilişkilerini açıklayan teoremlerden yola çıkılmıştır. Çünkü Rosen'in [2] numaralı makalesinde yer alan Rosen sürekli kesir ve Hecke grup arasındaki ilişki bu sayede tamsayı sürekli kesir ve modüler grup arasına taşınabilir. Böylece Koruoğlu [5] tarafından verilen modüler grup elemanlarının parabolik noktalarının sürekli kesirlerle ifadesi de düşünüldüğünde parabolik noktaları belirlemede Farey graftaki yolların kullanılabileceği düşünülebilir. Buradan yola çıkarak dördüncü bölümde parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla bulunmuştur. Ayrıca bir rasyonel sayı için önce sonsuzdan bu rasyonele giden Farey graftaki yolların bulunma yöntemi verilmiştir. Ardından bu yollarla ilişkili olan tamsayı sürekli kesirler bulunarak bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden modüler grup

ve genişletilmiş modüler grup elemanları elde edilmiştir. Elde edilen bu kelimelerin yeni blok formlarına geçiş yapılarak, Fibonacci sayılarından oluşan matrislere ulaşılır. Böylece alınan her rasyonel sayı için bu sayının ilişkili olduğu Fibonacci sayıları bulunmuş olur. Ayrıca beşinci bölümde bütün bu işlemleri yaparak, her adımın sonucunu ekrana yansıtan bir bilgisayar programı yazılmıştır.

Çalışmanın bölümlerini kısaca tanıtalım.

Çalışmanın ilk bölümü tezin gelişimini anlatan, tezin bölümlerinin tanıtıldığı giriş bölümüdür.

Çalışmanın ikinci bölümünde, tezin diğer bölümlerinde kullanılacak tanımlar ve teoremler verilmiştir.

Tezin üçüncü bölümünde, Farey graftaki yollarla tamsayı sürekli kesirler arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, Farey graftaki herhangi bir yol için bir tamsayı sürekli kesir ve genişletilmiş modüler grupta bir indirgenmiş blok form bulunmuş ve bu ilişki yeni blok formlara taşınarak Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilmiştir. Ayrıca bu bölümde parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla bulunmuştur.

Beşinci bölümde, herhangi bir rasyonel sayıyı alıp Farey graftaki yolları, tamsayı sürekli kesirleri ve bu rasyonel sayıyı parabolik nokta kabul eden genişletilmiş modüler grup elemanının yeni blok form gösterimini kullanarak bu rasyonel sayı ile Fibonacci sayıları arasında bir ilişki kurulmuştur. Ayrıca, önceki bölümlerde bulunan teoremler kullanılarak bir hesaplayıcı programı hazırlanmıştır. Bu program herhangi bir rasyonel sayıyı alıp ilişkili olduğu Fibonacci sayılarından oluşan matrisleri verir.

Altıncı bölümde elde edilen sonuçlar verilmiş ve ileride yapılabilecek çalışmalar için açık problemlerden bahsedilmiştir.

2. ÖN BİLGİLER

Bu bölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak olan kavramlar tanımlanmış, temel teoremler ve metotlar verilmiştir.

2.1 Hecke Grupları

Bu çalışmada incelenen modüler grup özel bir Hecke grubu olduğundan, Hecke gruplarını kısaca tanıyalım. Hecke grupları, Erich Hecke'nin 1936 yılında yaptığı "Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen" isimli çalışması ile literatürdeki yerini almıştır. Bu çalışmada Hecke grupları aşağıda verildiği gibi tanımlanmıştır.

2.1.1 Tanım : [1] λ sabit bir pozitif reel sayı olmak üzere ,

$$T(z) = -\frac{1}{z} \text{ ve } U(z) = z + \lambda$$

kesirli doğrusal dönüşümleri ile üretilen gruplara Hecke grupları denir ve $H(\lambda)$ ile gösterilir.

Tanımlanan $T(z)$ ve $U(z)$ dönüşümleri yardımıyla $S = T.U$ alınırsa

$$S(z) = -\frac{1}{z + \lambda}$$

elde edilir.

2.1.2 Teorem : [1] $\lambda \geq 2$ veya $q \geq 3$ bir tamsayı olmak üzere,

$$\lambda = \lambda_q = 2 \cos \frac{\pi}{q}, 1 \leq \lambda < 2$$

ise $H(\lambda)$ grubunun bir temel bölgesi,

$$F_\lambda = \{z \in U \mid |Re z| < \lambda/2, |z| > 1 \}$$

kümesidir.

Ayrıca E. Hecke diğer $\lambda > 0$ değerleri için F_λ kümesinin bir temel bölge olmadığını da göstermiştir. [10-16] numaralı kaynaklarda Hecke grupları ile bunların alt grupları çalışılmıştır. [6,17,18] kaynaklarında ise Hecke gruplarıyla ilgili ayrıntılı bilgilere ulaşılabilir.

$\lambda = \lambda_q$ veya $\lambda \geq 2$ olması durumunda $H(\lambda)$ grubunun sonlu üreteçli bir grup olduğu görülür. Ayrıca $H(\lambda)$ grubu, $PSL(2, \mathbb{R})$ nin ayrık bir alt grubu olduğundan $H(\lambda)$ grubu Fuchsian bir grup olur. [19,20] kaynaklarında ayrık gruplar ve Fuchsian gruplarla ilgili detaylı bilgilere ulaşılabilir.

2.1.3 Teorem : [1] $H(\lambda)$ Hecke gruplarının Fuchsian olması için gerekli ve yeterli koşul $\lambda \geq 2$ veya $\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, ($q \geq 3$ bir tamsayı) olmasıdır.

$\lambda = \lambda_q = 2\cos\frac{\pi}{q}$, $1 \leq \lambda < 2$ durumuna karşılık gelen Hecke grupları $H(\lambda_q)$ veya $H_{2,q}$ ile gösterilir. Bazı $H_{2,q}$ Hecke grupları ve bunların normal alt grupları Cangül tarafından [10] numaralı kaynakta çalışılmıştır.

2.1.4 Teorem : [10] $H_{2,q}$ Hecke grubunun sunuşu,

$$H_{2,q} = \langle T, S | T^2 = S^q = I \rangle \cong C_2 * C_q$$

şeklinde 2 mertebeli devirli grup ile q mertebeli devirli grubun serbest çarpımıdır.

2.2 Modüler Grup

$H_{2,q}$ Hecke gruplarında, $q = 3$ değerine karşılık gelen $H_{2,3}$ Hecke grubu daha çok modüler grup olarak adlandırılır ve $PSL(2, \mathbb{Z})$ ile gösterilir. Modüler grup, katsayılarının tamsayı olması sebebiyle sayılar teorisinde büyük öneme sahiptir. Grubun kendisinin yanı sıra, önemli bazı alt grupları çok sayıda çalışmada kullanılmıştır. Newman [21,22] numaralı makalelerde bu alt grupları incelemiş ve aralarındaki ilişkiyi göstermiştir.

2.2.1 Tanım : $PSL(2, \mathbb{R})$ grubunun

$$\Gamma = PSL(2, \mathbb{Z}) = \left\{ V(z) \mid V(z) = \frac{az + b}{cz + d}; a, b, c, d \in \mathbb{Z}, ad - bc = 1 \right\}$$

alt grubuna modüler grup adı verilir.

Bu grup, aşağıdaki gibi 2×2 lik tam sayı katsayılı matrislerle de temsil edilebilir.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \det A = 1$$

A ve $-A$ aynı dönüşümü temsil ettiğinden söz konusu matris negatifi ile eş alınır. Böylece matris ve dönüşüm arasında bir ayırım yapılmayacaktır. Ayrıca,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ ve } \begin{pmatrix} ka & kb \\ kc & kd \end{pmatrix}, k \neq 0$$

matrisleri yine aynı dönüşümü temsil ettiğinden, matris hesaplamalarında uygun olduğu yerde bu matrisler birbirinin yerine yazılabilir.

2.2.1 Genişletilmiş Modüler Grup

Burada Bölüm 2.2’de verilen modüler gruptan, $R_1(z) = \frac{1}{z}$ yansıma dönüşümü yardımıyla elde ettiğimiz genişletilmiş modüler gruptan kısaca bahsedeceğiz. Faydalanacağımız $R_1(z) = \frac{1}{z}$ dönüşümü birim çembere göre yansımadır.

Koruoğlu [23], sürekli kesirler yardımıyla \mathbb{C} kümesinin her bir elemanının modüler ve genişletilmiş modüler grup altındaki görüntülerini elde etmiş, [5] numaralı kaynakta ise sürekli kesirler yardımıyla bu grupların elemanlarının, parabolik noktalarını belirlemiştir. [9] numaralı kaynakta Koruoğlu ve Şahin, genişletilmiş Hecke ve genişletilmiş modüler grubun genelleştirilmiş Fibonacci dizisiyle olan ilişkisini ortaya koymuşlardır. Ayrıca [24-39] kaynaklarından da genişletilmiş modüler grup ile ilgili temel bilgilere ulaşılabilir.

2.2.1.1 Tanım : Modüler gruba, $R_1(z) = \frac{1}{z}$ antiotomorfizmini ekleyerek elde edilen gruba genişletilmiş modüler grup denir.

Genişletilmiş modüler grup $\bar{\Gamma}$ ile gösterilir ve otomorfizmler ile anti-otomorfizmleri bulundurur.

Şimdi de genişletilmiş modüler grubun aşağıda vereceğimiz yansımalar yardımıyla grup sunuşunu bulalım.

$$R_1(z) = \frac{1}{z}, R_2(z) = -\bar{z}, R_3(z) = \frac{-\bar{z}}{\bar{z} + 1}$$

yansımaları yardımıyla, genişletilmiş modüler grubun sunuşu

$$\bar{\Gamma} = \langle R_1, R_2, R_3 \mid R_1^2 = R_2^2 = R_3^2 = (R_1 R_2)^2 = (R_3 R_1)^3 = I \rangle$$

yazılabilir [38,39]. Burada $R = R_1, T = R_1 R_2 = R_2 R_1, S = R_3 R_1$ olarak alınırsa $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun sunuşu,

$$\bar{\Gamma} = \langle T, S, R \mid T^2 = R^2 = S^3 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

olarak bulunur.

2.2.1.2 Teorem : [39] $\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grup, D_2 ile D_3 gruplarının C_2 grubu ile birleştirilmiş serbest çarpımına izomorftur.

İspat : Teoremde yer alan dihedral grupların sunuşları,

$$G_1 \cong \langle T, R \mid T^2 = R^2 = (TR)^2 = I \rangle \cong D_2$$

ve

$$G_2 \cong \langle S, R \mid S^3 = R^2 = (RS)^2 = I \rangle \cong D_3$$

şeklindedir.

$$A = \langle R \rangle \leq G_1 \text{ alt grubu için, } \phi: A \rightarrow G_2$$

$$R \mapsto R$$

birim dönüşümü yardımıyla

$$\bar{\Gamma} \cong G_1 *_{C_2} G_2 \text{ ve}$$

$$\bar{F} = \langle T, S, R \mid T^2 = S^3 = R^2 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

bulunur. \square

2.3 Fibonacci Dizisi

Leonardo Fibonacci, 1202 yılında tamamladığı Liber Abaci (Hesaplama Kitabı) adlı kitabında bugün kullandığımız sayı sistemini tanıtmıştır ve temel matematik (toplama, çarpma, çıkartma ve bölme) kurallarını birçok örnek vererek anlatmıştır. Ayrıca her sayının, kendinden önce gelen sayı ile toplanarak bir sonrakinin elde edildiği sayı dizisini keşfetmiş ve tavşan problemi ile buna kitabında yer vermiştir.

2.3.1 Tanım : $F_1 = F_2 = 1$ başlangıç şartı ve $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3$ tam sayı, tekrarlama bağıntısına sahip diziye Fibonacci dizisi ve buradaki F_n sayısına n . Fibonacci sayısı denir. Böylece Fibonacci dizisinin ilk on terimi şu şekildedir: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

Fibonacci dizisinin indirgeme kuralı için karşılık gelen karakteristik denklem

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

olmak üzere, bu denklemin köklerini,

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, \beta = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

ile gösterelim. O halde dizinin genel terimi

$$F_n = A \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + B \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$

biçimindedir. A ve B sabitlerini bulalım.

$$n = 0 \text{ için } F_0 = A + B = 0,$$

$$n = 1 \text{ için } F_1 = A\alpha + B\beta = 1 \text{ dir.}$$

Bu denklem sistemi çözüldüğünde $A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ ve $B = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ bulunur. Buna göre Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

olur ve böylece Fibonacci sayıları $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ şeklinde yazılır.

2.3.2 Tanım : $F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$ formülüne Fibonacci sayıları için Binet formülü adı verilir.

2.3.3 Tanım : [41] Herhangi bir $[AB]$ doğru parçasının üzerindeki bir C noktası için $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{|AC|}{|CB|}$ oluyorsa bu orana Altın oran denir ve Φ ile gösterilir.

Altın oranın değerini hesaplamak için $|AC| = x, |CB| = y$ diyelim. Buradan $\frac{|AB|}{|AC|} = \frac{x+y}{x}$ ve $\frac{|AC|}{|CB|} = \frac{x}{y}$ eşitlikleri elde edilir. Tanım 2.3.3 gereği $\frac{x+y}{x} = \frac{x}{y}$ denklemi sağlanır. Buradan $xy + y^2 = x^2$ denklemi y^2 ile bölüldüğünde, $\frac{x}{y} + 1 = \left(\frac{x}{y}\right)^2$ ve $\Phi = \frac{x}{y}$ olduğundan $\Phi^2 - \Phi - 1 = 0$ bulunur. Bu denklemin kökleri $\Phi_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \Phi_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ dir. $x, y > 0$ olduğundan $\frac{x}{y} > 0$ olur ve pozitif kök olan $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618 \dots$ altın oran olarak bulunur.

2.3.4 Teorem : [41] Fibonacci dizisinin bir F_{n+1} terimi bir önceki F_n terimine bölüldüğünde bölüm $n \rightarrow \infty$ için altın orana yakınsar.

İspat: F_n , Fibonacci dizisinin n . terimi olmak üzere

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}$$

limitini inceleyelim.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^{n+1}\right]}{\left[1 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}\right)^n\right]} \\
&= \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad \square
\end{aligned}$$

Şimdi de ϕ sayısının sürekli kesir açılımını kısaca inceleyelim.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ sayısı}$$

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$$

denkleminin bir kökü olduğundan

$$\phi^2 = \phi + 1$$

yazılabilir ve buradan

$$\phi = \sqrt{1 + \phi} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \phi}}} = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

yazılır. Ayrıca

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\phi}}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{\dots}}}$$

olduğundan ϕ sayısının basit sürekli kesir ifadesi bulunmuş olur. Bu sürekli kesrin yakınsayanları incelendiğinde,

$$1 + \frac{1}{1} = \frac{2}{1}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}} = \frac{3}{2}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}} = \frac{5}{3}$$

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}} = \frac{8}{5}$$

bu yakınsayanların ardışık iki Fibonacci sayısının oranları olduğu görülür.

2.3.5 Tanım : [42] $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ şeklinde tanımlanan matris Q -matrisi denir.

2.3.6 Teorem : [42] $n \geq 1$ için $Q^n = \begin{bmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{bmatrix}$ dir.

İspat: Teoremi n üzerine tümevarımla ispatlayalım. $n = 1$ için

$$Q^1 = \begin{bmatrix} F_2 & F_1 \\ F_1 & F_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = Q$$

doğrudur.

$n = k$ için iddia doğru olsun. O halde

$$Q^k = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \text{ dir.}$$

Bu durumda

$$Q^{k+1} = Q^k Q^1 = \begin{bmatrix} F_{k+1} & F_k \\ F_k & F_{k-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$n = k + 1$ için

$$Q^{k+1} = \begin{bmatrix} F_{k+1} + F_k & F_{k+1} \\ F_k + F_{k-1} & F_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{k+2} & F_{k+1} \\ F_{k+1} & F_k \end{bmatrix}$$

olur ve ispat tamamlanır. \square

2.3.7 Sonuç : [42] (Cassini Formülü) $n \geq 1$ olsun. Bu durumda

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \text{ olur.}$$

İspat : $|Q| = -1$ ve $|Q^n| = (-1)^n$ dir. Teorem 2.3.6' dan

$$|Q^n| = F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2$$

dir. O halde

$$F_{n-1}F_{n+1} - F_n^2 = (-1)^n \text{ olur. } \square$$

2.3.8 Teorem : [42] Fibonacci dizisi için $(F_n, F_{n+1}) = 1$, $n \geq 1$ dir.

İspat: Varsayalım ki $d > 1$ sayısı F_n ve F_{n+1} sayılarını böler. O halde

$$F_{n+1} - F_n = F_{n-1}$$

sayısını da böler. Buradan

$$F_n - F_{n-1} = F_{n-2}$$

bağıntısı gereği $d \mid F_{n-2}$ elde edilir. Benzer şekilde devam edilerek $d \mid F_{n-3}$, $d \mid F_{n-4} \dots$ ve $d \mid F_1$ bulunur. $F_1 = 1$ olduğundan herhangi bir $d > 1$ tarafından bölünmez, çelişki elde edilir ve ispat tamamlanır. \square

Şimdi Fibonacci sayılarıyla ilgili bazı teorem ve özdeşlikleri ispatsız olarak verelim.

2.3.9 Teorem : [42] Fibonacci sayıları için şu özellikler vardır:

a) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\sum_{s=0}^{n-1} F_s^2 = F_n F_{n-1}$

b) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\sum_{s=0}^{n-1} F_s F_{s-1} = \begin{cases} F_{n-1}^2, & n \text{ tek ise} \\ F_{n-1}^2 - 1, & n \text{ çift ise} \end{cases}$

c) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\sum_{s=0}^{n-1} F_{s-1}^2 = F_{n-2} F_{n-1} + 1$

d) $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $F_{-n} = (-1)^{n+1} F_n$

2.3.10 Teorem : [42] $m \geq 1, n \geq 1$ için $F_m \mid F_{mn}$ dir.

2.3.11 Teorem : [42] İki Fibonacci sayısının en büyük ortak böleni de bir Fibonacci sayısıdır.

2.3.12 Teorem : [42] Fibonacci dizisinde $n \geq m \geq 3$ için $F_m \mid F_n$ olması için gerek ve yeter şart $m \mid n$ olmasıdır.

2.3.13 Teorem : [42] Herhangi bir pozitif tamsayı, birbirinden farklı ve herhangi ikisi ardışık olmayan Fibonacci sayılarının toplamı şeklinde yazılabilir.

2.3.14 Teorem : [42] $p > 5$ asal sayısı için, ya $p \mid F_{p-1}$ ya da $p \mid F_{p+1}$ dir.

2.3.15 Tanım : [42] $F_n(x) = xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x)$, $F_1(x) = 1$, $F_2(x) = x$, $n \geq 3$ tekrarlama bağıntısıyla tanımlanan diziye tek değişkenli Fibonacci polinomları dizisi denir.

2.3.16 Örnek : $Q(x) = \begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ iken

$$Q^n(x) = \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix}$$

olduğunu gösterelim.

Q nun karakteristik denklemi;

$$|Q - \lambda I_2| = 0, \begin{vmatrix} x - \lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$-x\lambda + \lambda^2 - 1 = 0, \quad \lambda^2 - x\lambda - 1 = 0$$

olur. Bu karakteristik denklemin kökleri

$$r = \frac{x + \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \alpha(x), s = \frac{x - \sqrt{x^2 + 4}}{2} = \beta(x)$$

olarak bulunur.

$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ öz vektör olsun. r kökü için $Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} xu + v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha u \\ \alpha v \end{pmatrix}$$

$xu + v = \alpha u$, $u = \alpha v$. Buradan $v = 1$ için $u = \alpha$ ve öz vektör $\begin{bmatrix} \alpha(x) \\ 1 \end{bmatrix}$ olur.

Benzer şekilde, s kökü için $Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ yazılırsa;

$$\begin{bmatrix} x & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} xu + v \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta u \\ \beta v \end{pmatrix}$$

$xu + v = \beta u$, $u = \beta v$. Buradan $v = 1$ için $u = \beta$ ve öz vektör $\begin{bmatrix} \beta(x) \\ 1 \end{bmatrix}$ olarak bulunur.

Matris köşegenleştirmesinden;

$$Q(x) = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$\begin{aligned} Q^n(x) &= \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} \frac{1}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & -\alpha^{n+1}\beta + \alpha\beta^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & -\alpha^n\beta + \alpha\beta^n \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha^n - \beta^n \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha^{n-1} - \beta^{n-1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} & \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \\ \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} & \frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} F_{n+1}(x) & F_n(x) \\ F_n(x) & F_{n-1}(x) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

bulunur ve istenen elde edilir.

2.3.17 Tanım : [42] a_0, a_1, a_2, \dots bir reel sayı dizisi olsun.

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots$$

(a_n) dizisi için üreteç fonksiyondur. Ayrıca $i > n$ için $a_i = 0$ olsun diyerek üreteç fonksiyonlar sonlu a_0, a_1, \dots, a_n dizisi için de tanımlanabilir. Böylece

$$g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

a_0, a_1, \dots, a_n sonlu dizisi için üreteç fonksiyon olur.

Üreteç fonksiyonlar, sabit katsayılı lineer homojen tekrarlar bağıntılarının çözümünde etkili çözüm sağlar. 1718 yılında Fransız matematikçi Abraham De Moivre üreteç fonksiyonları Fibonacci tekrarlar bağıntısını çözmek için bulmuştur.

2.3.18 Tanım : [42] Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonunu bulmak için

$$f(x) = F_1x + F_2x^2 + F_3x^3 + \dots + F_nx^n + \dots$$

olduğunu kabul edelim. Buradan

$$xf(x) = F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \dots + F_{n-1}x^n + \dots$$

$$x^2f(x) = F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + \dots + F_{n-2}x^n + \dots$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} f(x) - xf(x) - x^2f(x) \\ = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \dots \\ + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \dots \end{aligned}$$

olup, ortak $f(x)$ parantezine alınıp düzenlenirse,

$$f(x) = \frac{x}{1 - x - x^2}$$

şeklinde Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonu bulunur.

2.3.19 Örnek : $F_1 = F_2 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ Fibonacci tekrarlar bağıntısını üreteç fonksiyonları kullanarak çözelim.

$$g(x) = F_0 + F_1x + F_2x^2 + \dots + F_nx^n + \dots = \sum_0^{\infty} F_nx^n$$

Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu olsun. F_{n-1} ve F_{n-2} katsayılı terimlerin mertebeleri F_n den sırasıyla 1 ve 2 küçük olduğundan $xg(x)$ ve $x^2g(x)$ i bulalım.

$$xg(x) = F_1x^2 + F_2x^3 + F_3x^4 + \dots + F_{n-1}x^n + \dots$$

$$x^2g(x) = F_1x^3 + F_2x^4 + F_3x^5 + \dots + F_{n-2}x^n + \dots$$

$$g(x) - xg(x) - x^2g(x) = F_1x + (F_2 - F_1)x^2 + (F_3 - F_2 - F_1)x^3 + \dots + (F_n - F_{n-1} - F_{n-2})x^n + \dots$$

$$(1 - x - x^2)g(x) = x$$

$g(x) = \frac{x}{1-x-x^2}$ ve Tanım 2.3.18 den $g(x)$ Fibonacci sayılarının üreteç fonksiyonunu olduğundan

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} \right]$$

$$\sqrt{5}g(x) = \frac{1}{1-\alpha x} - \frac{1}{1-\beta x} = \sum_0^{\infty} \alpha^n x^n - \sum_0^{\infty} \beta^n x^n$$

$$\sqrt{5}g(x) = \sum_0^{\infty} (\alpha^n - \beta^n) x^n$$

$$g(x) = \sum_0^{\infty} \frac{(\alpha^n - \beta^n)}{\sqrt{5}} x^n$$

$g(x)$ i Fibonacci dizisinin üreteç fonksiyonu olarak yani $g(x) = \sum_0^{\infty} F_n x^n$ olarak tanımlamıştık. Böylece Fibonacci dizisinin genel terimi

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\sqrt{5}} = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$$

olarak bulunur.

Bu örnekle, Binet formülünü ispatlamış olduk. Böylece istediğimiz Fibonacci sayısını bulmak için önceki tüm Fibonacci sayılarını bulmak yerine, istediğimiz n değerini yerine yazarak istenen Fibonacci sayısını bulabiliriz.

2.4 Graflar

1736 yılında Leonhard Euler'in Königsberg'in yedi köprüsü isimli makalesini yayımlamasıyla başlayan graf teori zaman içinde birçok farklı alanda kullanılmaya başlanmıştır. Ekonomi, yönetim bilimi, bilgi iletimi, satış pazarlama, taşıma planlanması gibi birçok alandaki problemleri tanımlama, ilişkilerin yapısını belirleme ve çözümede etkin bir şekilde kullanılır. Aşağıdaki tanımlar [43] numaralı kaynaktan alınmıştır, bu kaynaktan graf teori ile ilgili temel kavramlara ulaşılabilir.

2.4.1 Tanım : Bir G grafı, boş olmayan $V(G)$ düğümler (köşeler) kümesi, $E(G)$; $V(G)$ kümesinden ayırık, hatlar (kenarlar) kümesi, ψ_G fonksiyonu, G nin her hattı ile G nin bir düğüm çiftini (farklı olmak zorunda değil) birleştiren fonksiyon olmak üzere $(V(G), E(G), \psi_G)$ şeklinde bir sıralı üçlüdür.

e bir hat ve u ve v , $\psi_G(e) = uv$ olacak şekildeki düğümler ise e , u ve v düğümlerini birleştiriyor ve u ve v , e hattının uçlarıdır denir.

Bir hat ile birbirine bağlı düğümlere komşu düğümler denir.

2.4.2 Tanım : $V(H) \subseteq V(G), E(H) \subseteq E(G)$ ve ψ_H, ψ_G 'nin $E(H)$ 'ye kısıtlanması ise H grafı G 'nin alt grafıdır denir.

2.4.3 Tanım : $v = v_0, v_1, \dots, v_n = u$ bir G grafının düğümlerinin bir dizisi olsun. Eğer her $1 \leq i \leq n$ için v_{i-1} ve v_i bir hat ile bağlanmışsa v 'den u 'ya n uzunluğunda bir yol vardır denir.

2.4.4 Tanım : Başladığı düğüme geri dönen ve aynı düğümden iki kez geçmeyen yola bir döngü denir.

2.4.5 Tanım : Başlangıç ve bitiş noktası aynı düğüm olan hatta bir çevrim denir.

2.4.6 Tanım : Aynı iki düğümün sadece bir hatla bağlandığı, çevrim içermeyen, hatların bir değer almadığı ve yönünün tanımlanmadığı graflara basit graf denir.

2.4.7 Tanım : İki ya da daha fazla düğüm arasında birden fazla hat (paralel hatlar) olan yönsüz ve çevrimsiz graflara çoklu graflar denir.

2.4.8 Tanım : Bir graftaki hatlar, bağlantının nereden başlayıp nerede bittiğini belirten yön bilgisine sahipse, bu tür graflara yönlü graf denir.

2.4.9 Tanım : Bir grafın farklı her iki düğümünü bağlayan bir yol varsa bu grafa bağlantılı graf denir.

2.4.10 Tanım : İçinde döngü barındırmayan bağlantılı graflara ağaç denir. Ağaca bir hat eklendiğinde mutlaka bir döngü içerir. n tane düğümü olan bir ağacın $n - 1$ tane hattı vardır. Ağaçların bir tane başlangıç düğümü bulunur ve bu düğüme kök denir.

2.4.11 Tanım : v_0 düğümünü kök kabul eden bir ağaçta $\langle v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n \rangle$, v_0 ' dan v_n düğümüne yol olsun. Bu ağaçta; v_{i-1}, v_i ' nin ebeveyni, v_i, v_{i-1} ' in çocuğu, v_0, v_1, \dots, v_{n-1} düğümlerine v_n düğümünün ataları denir.

2.5 Farey Dizisi

John Farey, jeolog olmasına rağmen, kendisinin matematiğe büyük katkıları vardır. 1816 yılında Farey ispat sunmadan Farey dizisindeki her yeni terimin komşularının medyanı olduğunu belirten bir makale yayımladı ve Cauchy bu makaleyi okuyarak iddianın matematiksel ispatını yaptı.

2.5.1 Tanım : n -inci Farey dizisi; 0 ile 1 arasında, küçükten büyüğe sıralanmış, paydası n veya n ' den küçük indirgenmiş kesirlerin kümesidir ve F_n ile gösterilir.

Örneğin ilk beş Farey dizisi şu şekildedir.

$$F_1 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_2 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_3 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_4 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{1} \right\}$$

$$F_5 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{1}{1} \right\}$$

2.5.2 Tanım : $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayılar olmak üzere,

$$\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

işlemine Farey toplamı denir. Farey toplamı, toplanan iki sayının arasında bir değer verir. Farey dizisi oluşturulurken bu toplam aşağıda anlatıldığı şekilde kullanılır.

Her Farey dizisi $\frac{0}{1}$ ile başlar ve $\frac{1}{1}$ ile biter. $n = 2, 3, \dots$ için n . Farey dizisi şu şekilde oluşturulur: n . sıraya $(n-1)$. Farey dizisinin elemanları yazılır ve art arda gelen her $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ sayıları için $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ (Farey toplamı) işlemi yapılır. $b+d \leq n$ ise bu kesir $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ arasına yazılır.

Buradan yola çıkarak F_n ' nin eleman sayısının $F_{n-1} + \varphi(n)$ olduğu kolayca görülür.

2.5.3 Tanım : Farey dizisinde yan yana yazılan iki $\frac{a}{b}, \frac{c}{d}$ elemanına Farey komşusu denir. Bu Farey komşuları $ad - bc = \pm 1$ şartını sağlar.

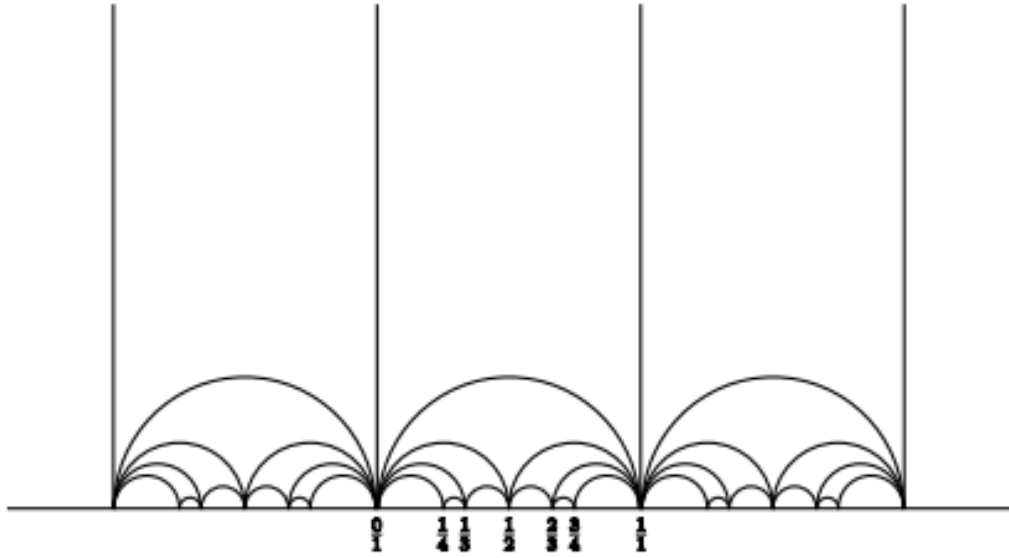
2.6 Farey Graf

Farey graf ilk olarak 1979 yılında Matula ve Kornerup tarafından tanıtıldı. Ardından 1982' de Colbourn bu grafları çalışarak birçok özelliğini keşfetti. Beardon, Hockman ve Short [3] numaralı çalışmalarında, Farey graftaki geodezik yolları incelemişlerdir. Ayrıca [4] numaralı kaynakta, Farey graftaki yolların tamsayı sürekli kesirlerle olan ilişkilerini açıklayan teoremlere yer verilmiştir.

Farey dizisinin elemanlarını düğüm kabul eden Farey graf, $n = 1, 2, \dots$ için F_n dizisinin elemanlarını içereceğinden, 0 ile 1 arasındaki her rasyoneli tam bir kez içerir. Farey komşusu olan rasyoneller Farey grafta art arda yazılır.

Ardışık her tamsayı arasındaki tüm rasyonel sayılar için, aynı aralıktaki tüm rasyonellerin tam kısımları ayrıldığında 0 ile 1 aralığındaki herhangi bir F_n 'nin elemanlarına karşılık geleceklerinden Farey graf aşağıdaki şekilde tanımlanır. Yine aynı sebepten bu tezde Farey grafın 0 ile 1 aralığındaki kısmı dikkate alınacaktır.

2.6.1 Tanım : Farey graf, düğümlerinin kümesi \mathbb{Q}_∞ olan, hatları sadece her Farey komşusu düğüm çiftlerini birbirine bağlayan graftır. \mathcal{F} Farey grafı her bir Farey komşu çiftinin \mathbb{H} üst yarı düzlemde bir hiperbolik doğru ile bağlanmasıyla elde edilir.



Şekil 2.1: F_4 için Farey graf.

2.6.2 Tanım : $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonel sayılar olmak üzere $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{p}{q}$ olsun.

Burada $\frac{p}{q}$ ya $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ nin Farey çocuğu, $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ ye ise $\frac{p}{q}$ nun Farey ebeveynleri denir.

Farey dizisinin oluşturulma biçimi düşünüldüğünde $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d} = \frac{p}{q}$ işlemi sonucu dizide $\frac{a}{b}, \frac{p}{q}, \frac{c}{d}$ sayıları yanyana yazılacağından dizideki her sayı kendi Farey ebeveyniyle Farey komşusu olur ve bu sayılar için $aq - bp = \pm 1$ ve $pd - qc = \pm 1$ şartları sağlanır.

Aşağıdaki teorem, Farey graf ile Farey dizisinin arasındaki ilişkiyi açıklar.

2.6.3 Teorem : [4] $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_\infty$ olsun. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

- i) $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ Farey grafta düğümlerdir.
- ii) $ad - bc = \pm 1$.
- iii) $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ bir m doğal sayısı için F_m nin ardışık terimleridir.

2.7 Ford Çemberleri

Farey komşusu olan iki rasyonel sayı, birbirine teğet olan bir çift Ford çemberine karşılık geldiğinden, Farey graf ve Ford çemberleri arasında yakın bir ilişki vardır. Bu nedenle bu bölümde Ford çemberleri kısaca tanıtılacaktır. Ford çemberleri adını, 1938 yılında bu konuyla ilgili yayınlar yapan Amerikalı matematikçi Lester Randolph Ford' dan alsa da bu çemberlere antik Roma dönemindeki eserlerde ve 17. yüzyıl Japon tabletlerinde rastlanabilir.

Aralarında asal a ve b tamsayıları için, $C(a, b)$ Ford çemberi; yarıçapı $\frac{1}{2b^2}$, merkezi $(\frac{a}{b}, \frac{1}{2b^2})$ olan bir çemberdir. $C(a, b)$ Ford çemberi x eksenine $\frac{a}{b}$ noktasında teğettir ve her rasyonel sayı yalnız bir ford çemberi tarafından içerilir.

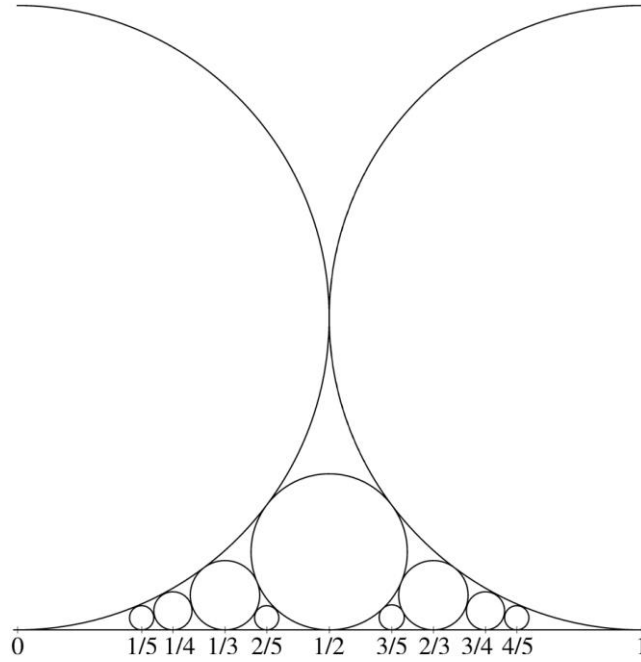
Farey dizisiyle Ford çemberleri arasında şu ilişkiler vardır:

$\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ olmak üzere $C(a, b) \cap C(c, d)$ boş küme değildir, aslında tek elemanlıdır, ancak ve ancak $ad - bc = 1$ dir. Yani bir Farey komşu çifti tam olarak teğet bir çift Ford çemberine karşılık gelir.

Ayrıca $C(a, b)$ ve $C(c, d)$ Ford çemberleri birbirlerine teğet ise $C(a + c, b + d)$ Ford çemberi, bu iki çembere ve reel eksene teğet olan tek çemberdir.

Bu iki özellik yardımıyla Ford çemberleri; $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ Farey komşu çifti olmak üzere bunlara karşılık gelen, birbirlerine ve reel eksene teğet iki Ford çemberi çizilir ve $\frac{a}{b} \oplus \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$ sayısına karşılık gelen Ford çemberi $C(a, b)$, $C(c, d)$ reel eksene

teğet olacak şekilde çizilir. Bu şekilde Farey dizisinin her elemanına bir Ford çemberi karşılık gelerek sonsuza kadar bu çemberler oluşturulabilir.



Şekil 2.2 : F_5 için Ford çemberleri.

2.8 Sürekli Kesirler

Sürekli kesirlerle ilgili bazı tanım ve teoremler bu bölümde verilmiştir. [5] numaralı kaynakta Koruoğlu basit sürekli kesirleri ve blokları kullanarak modüler grup ve genişletilmiş modüler grupta elemanların parabolik noktalarını belirlemiş, [31] numaralı kaynakta ise Hecke gruplarıyla sürekli kesirler arasındaki ilişkileri incelemiştir. [44-46] numaralı kaynaklarda sürekli kesirlerle ilgili ayrıntılı bilgiler bulunabilir.

2.8.1 Tanım : [46] a_0 bir reel sayı ve a_1, a_2, \dots, a_n sayıları pozitif reel sayı olmak üzere;

$$a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}$$

ifadesine sonlu sürekli kesir denir. a_1, a_2, \dots, a_n reel sayılarına kısmi bölümler ya da kısmi paydalar adı verilir. Eğer a_0, a_1, \dots, a_n reel sayılarının hepsi tamsayı ise sürekli kesre sonlu basit sürekli kesir denir. Yukarıdaki gösterim daha sade olarak $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]$ şeklinde, basit sürekli kesir ise $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$ şeklinde gösterilir.

Her rasyonel sayı, sonlu basit sürekli kesir şeklinde gösterilebileceği gibi, her sonlu basit sürekli kesir de bir rasyonel sayıyı temsil eder. Aşağıdaki teoremlerle bu durum gösterilecektir.

2.8.2 Teorem : [46] Her sonlu basit sürekli kesir bir rasyonel sayı temsil eder.

İspat : İspatı tümevarımla yapalım, $[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesrini gözönüne alalım. $n = 1$ için

$$[a_0; a_1]_s = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1}$$

olup bu ifade rasyonel olduğundan iddia doğrudur.

Pozitif k tamsayısı için $[a_0; a_1, \dots, a_k]_s$ basit sürekli kesri rasyonel olsun. Burada a_0, a_1, \dots, a_k tamsayılar olup a_1, a_2, \dots, a_k pozitiftir. Şimdi a_0, a_1, \dots, a_{k+1} tamsayılar ve a_1, \dots, a_{k+1} pozitif olsun. Açık olarak;

$$[a_0; a_1, \dots, a_{k+1}]_s = a_0 + \frac{1}{[a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]_s}$$

olacağından tümevarım hipotezinden $[a_1; a_2, \dots, a_k, a_{k+1}]_s$ rasyoneldir, dolayısıyla $s \neq 0$ olmak üzere $\frac{r}{s}$ şeklinde bir rasyonel sayıya eşittir. Yani,

$$[a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}]_s = a_0 + \frac{1}{\frac{r}{s}} = \frac{a_0 r + s}{r}$$

olur ki bu da bir rasyonel sayıdır. \square

Şimdi de Euclid algoritmasını kullanarak her rasyonel sayının sonlu basit sürekli kesir şeklinde ifade edilebileceğini görelim.

2.8.3 Teorem : [46] Her rasyonel sayı sonlu basit sürekli kesir şeklinde ifade edilebilir.

İspat : a, b tamsayı $b > 0$ olmak üzere $x = \frac{a}{b}$ olsun. $r_0 = a, r_1 = b$ olarak Euclid algoritmasını uygularsak;

$$r_0 = r_1 q_1 + r_2, 0 < r_2 < r_1$$

$$r_1 = r_2 q_2 + r_3, 0 < r_3 < r_2$$

$$r_2 = r_3 q_3 + r_4, 0 < r_4 < r_3$$

⋮

$$r_{n-3} = r_{n-2} q_{n-2} + r_{n-1}, 0 < r_{n-1} < r_{n-2}$$

$$r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n, 0 < r_n < r_{n-1}$$

$$r_{n-1} = r_n q_n$$

olur. Bu eşitliklerde q_2, q_3, \dots, q_n pozitif tamsayılardır. Bunlar kesir formunda yazılırsa;

$$\frac{a}{b} = \frac{r_0}{r_1} = q_1 + \frac{r_2}{r_1} = q_1 + \frac{1}{\frac{r_1}{r_2}}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = q_2 + \frac{r_3}{r_2} = q_2 + \frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

$$\frac{r_2}{r_3} = q_3 + \frac{r_4}{r_3} = q_3 + \frac{1}{\frac{r_3}{r_4}}$$

⋮

$$\frac{r_{n-3}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{r_{n-1}}{r_{n-2}} = q_{n-2} + \frac{1}{\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}}}$$

$$\frac{r_{n-2}}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{r_n}{r_{n-1}} = q_{n-1} + \frac{1}{\frac{r_{n-1}}{r_n}}$$

$$\frac{r_{n-1}}{r_n} = q_n$$

elde edilir. $\frac{r_i}{r_j}$ lerin değerleri sırasıyla yerlerine yazılırsa;

$$\frac{a}{b} = q_1 + \frac{1}{q_2 + \frac{1}{q_3 + \dots + q_{n-1} + \frac{1}{q_n}}}$$

olur, o halde

$$\frac{a}{b} = [q_1; q_2, \dots, q_n]_s$$

dir. Bu da gösterir ki her rasyonel sayı sonlu basit sürekli kesir şeklinde yazılabilir. \square

Rasyonel sayıların bu sürekli kesir şeklinde yazılışı tek türlü değildir.

$$a_n = (a_{n-1}) + \frac{1}{1}$$

eşitliği dikkate alınırsa, $a_n > 1$ olan sürekli kesri,

$$[a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n] = [a_0; a_1, \dots, a_{n-1}, a_n - 1, 1]$$

olarak yazılabilir.

2.8.4 Tanım : [46] $[a_0; a_1, \dots, a_k]$ sürekli kesrine $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ sürekli kesrinin k . yakınsayını denir. Burada k, n 'den küçük negatif olmayan bir tamsayıdır. k . yakınsayan C_k ile gösterilir.

Sürekli kesrin yakınsayanlarının bir takım özellikleri vardır, bu özellikleri inceleyelim.

2.8.5 Teorem : [46] a_0, a_1, \dots, a_n reel sayılar ve a_1, a_2, \dots, a_n pozitif olsun. p_0, p_1, \dots, p_n ve q_0, q_1, \dots, q_n dizileri;

$$p_0 = a_0, \quad q_0 = 1$$

$$p_1 = a_0 a_1 + 1, \quad q_1 = a_1$$

$$p_k = a_k p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k q_{k-1} + q_{k-2}, k = 2, 3, \dots, n$$

şeklinde tanımlanmak üzere, k . yakınsayan

$$C_k = [a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} \text{ dir.}$$

İspat : Teoremin ispatını tümevarımla yapalım.

$k = 0$ için

$$C_0 = [a_0] = \frac{a_0}{1} = \frac{p_0}{q_0}$$

$k = 1$ için

$$C_1 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

olur, yani teorem $k = 0$ ve $k = 1$ için doğrudur.

Teoremin $2 \leq k < n$ olan k tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim.

$$C_k = [a_0; a_1, \dots, a_k] = \frac{p_k}{q_k} = \frac{a_k p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k q_{k-1} + q_{k-2}}$$

olsun. p_j, q_j ' lerin tanımları dikkate alınırsa $p_{k-1}, p_{k-2}, q_{k-1}, q_{k-2}$ reel sayıları sadece a_0, a_1, \dots, a_{k-1} kısmi paydalara bağlıdır. Dolayısıyla yukarıdaki eşitlikte a_k reel sayısını $a_k + \frac{1}{a_{k+1}}$ reel sayısı ile değiştirebiliriz. O zaman,

$$\begin{aligned} C_{k+1} &= [a_0; a_1, \dots, a_k, a_{k+1}] = \left[a_0; a_1, \dots, a_{k-1}, a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \right] \\ &= \frac{a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \cdot p_{k-1} + p_{k-2}}{a_k + \frac{1}{a_{k+1}} \cdot q_{k-1} + q_{k-2}} \\ &= \frac{a_{k+1}(a_k p_{k-1} + p_{k-2}) + p_{k-1}}{a_{k+1}(a_k q_{k-1} + q_{k-2}) + q_{k-1}} + \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} \\ &= \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}} \end{aligned}$$

olur, bu da eşitliğin $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir. \square

2.8.6 Örnek : $\frac{32}{7}$ rasyonel sayısının yakınsayanlarını bulalım.

$\frac{32}{7} = [4; 1,1,3]$ olduğunu biliyoruz. $n = 0,1,2,3$ için p_n ve q_n değerlerini bulalım.

$$p_0 = 4$$

$$q_0 = 1$$

$$p_1 = 4 \cdot 1 + 1 = 5$$

$$q_1 = 1$$

$$p_2 = 1 \cdot 5 + 4 = 9$$

$$q_2 = 1 \cdot 1 + 1 = 2$$

$$p_3 = 3 \cdot 9 + 5 = 32$$

$$q_3 = 3 \cdot 2 + 1 = 7$$

olur, bu sürekli kesrin yakınsayanları da;

$$C_0 = \frac{p_0}{q_0} = \frac{4}{1}$$

$$C_1 = \frac{p_1}{q_1} = \frac{5}{1}$$

$$C_2 = \frac{p_2}{q_2} = \frac{9}{2}$$

$$C_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{32}{7} \text{ dir.}$$

2.8.7 Teorem : [46] $k \geq 1$ olan bir tamsayı ve $[a_0; a_1, \dots, a_n]$ sürekli kesrinin k . yakınsayanı $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ olsun. O zaman

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1} \text{ dir.}$$

İspat : İspat için yine tümevarım kullanılırsa, $k = 1$ için,

$$p_1 \cdot q_0 - p_0 \cdot q_1 = (a_0 \cdot a_1 + 1) \cdot 1 - a_0 \cdot a_1 = 1$$

olup önerme doğrudur. Teoremin $1 \leq k < n$ olan k tamsayısı için doğru olduğunu kabul edelim. Yani,

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}$$

olsun.

$$\begin{aligned}
p_{k+1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k+1} &= (a_{k+1} \cdot p_k + p_{k-1})q_k - p_k(a_{k+1} \cdot q_k + q_{k-1}) \\
&= p_{k-1} \cdot q_k - p_k \cdot q_{k-1} = -(-1)^{k-1} = (-1)^k
\end{aligned}$$

olur, bu ise teoremin $k + 1$ için doğru olduğunu gösterir, bu da ispatı tamamlar. \square

2.8.8 Sonuç : [46] $[a_0; a_1, \dots, a_n]_s$ sonlu basit sürekli kesrinin k . yakınsayını $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ ise $(p_k, q_k) = 1$ dir.

İspat : $(p_k, q_k) = d$ olsun. Teorem 2.8.7' den

$$p_k \cdot q_{k-1} - p_{k-1} \cdot q_k = (-1)^{k-1}$$

olduğunu biliyoruz. Bu da $d \mid (-1)^{k-1}$ demektir, dolayısıyla $d = 1$ dir. \square

2.8.9 Sonuç : [46] $[a_0; a_1, \dots, a_n]_s$ sonlu basit sürekli kesrinin k . yakınsayını $C_k = \frac{p_k}{q_k}$ olsun. O zaman;

$$C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k \cdot q_{k-1}}, \quad 1 \leq k \leq n \quad \text{ve}$$

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_n (-1)^k}{q_k \cdot q_{k-2}}, \quad 2 \leq k \leq n' \quad \text{dir.}$$

İspat : Birinci eşitlik Teorem 2.8.7'de verilen eşitliğin her iki tarafını $q_k \cdot q_{k-1}$ ile bölmekle elde edilir.

İkinci eşitliği bulmak için de;

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_k \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_k}{q_k \cdot q_{k-2}}$$

olur.

$$p_k = a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2}, \quad q_k = a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}$$

olduğu yukarıdaki ifadenin payında kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
p_k \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_k &= (a_k \cdot p_{k-1} + p_{k-2})q_{k-2} - p_{k-2}(a_k \cdot q_{k-1} + q_{k-2}) \\
&= a_k(p_{k-1} \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_{k-1}) \\
&= a_k(-1)^{k-2}
\end{aligned}$$

olur, (Teorem 2.8.7'den $p_{k-1} \cdot q_{k-2} - p_{k-2} \cdot q_{k-1} = (-1)^{k-2}$) o halde,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k \cdot q_{k-2}}$$

olduğu gösterilmiş olur. \square

2.8.10 Teorem : [46] $[a_0; a_1, \dots, a_n]_S$ sonlu basit sürekli kesrinin k . yakınsayanı C_k olsun. O zaman

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots$$

$$C_0 < C_2 < C_4 < \dots$$

yani, tek indisli yakınsayanlar monoton azalırken, çift indisli yakınsayanlar monoton artar, ayrıca $j = 0, 1, 2, \dots$ için her tek yakınsayan C_{2j+1} , her çift yakınsayan C_{2j} den daha büyüktür.

İspat : Sonuç 2.8.9 dan $k = 2, 3, \dots, n$ için,

$$C_k - C_{k-2} = \frac{a_k(-1)^k}{q_k \cdot q_{k-2}}$$

olduğunu biliyoruz. Eğer k tek ise, $C_k < C_{k-2}$ ve k çift ise $C_k > C_{k-2}$ olur, o halde,

$$C_1 > C_3 > C_5 > \dots \text{ ve } C_0 < C_2 < C_4 < \dots \text{ dir.}$$

Her tek yakınsayanın her çift yakınsayandan büyük olduğunu görmek için yine Sonuç 2.8.9 dan;

$$C_{2m} - C_{2m-1} = \frac{(-1)^{2m-1}}{q_{2m}q_{2m-1}} < 0$$

olur ki bu $C_{2m-1} > C_{2m}$ demektir. C_{2k} ve C_{2j-1} i kıyaslarsak

$$C_{2j-1} > C_{2j+2k-1} > C_{2j+2k} > C_{2k}$$

olur. Bu da bize her tek yakınsayanın, her çift yakınsayandan büyük olduğunu gösterir. \square

2.8.11 Tanım : $[a_0, a_1, a_2, \dots] = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \dots}}}$ kesrine bir sonsuz sürekli kesir denir.

2.8.12 Tanım : Bir $x \in \mathbb{R}$ sayısı için, b_1, b_2, \dots, b_n tamsayı olmak üzere;

$$b_0 - \frac{1}{b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{b_n}}}}$$

sürekli kesrine tamsayı sürekli kesir denir ve $[b_0, b_1, \dots, b_n]$ ile gösterilir.

2.8.1 Rosen Sürekli Kesirler

1954 yılında Rosen [2], Hecke gruplarının elemanlarının parabolik noktalarını çalışmak amacıyla günümüzde Rosen sürekli kesirleri olarak bilinen bir sürekli kesir sınıfı tanıttı. Bu tarihten sonra Diophantine yaklaşımı [2,47,48], Rosen sürekli kesirlerinin metrik teorisi [49,50], Hecke grupları ile ilişkili yüzeylerin geometrisi [51-54] ile ilgili çalışmaları içeren zengin bir literatür oluştu.

2.8.1.1 Tanım : [2] b_1, b_2, \dots, b_n tamsayı olmak üzere;

$$b_1 \lambda_q + \frac{-1}{b_2 \lambda_q + \frac{-1}{b_3 \lambda_q + \frac{1}{\ddots + \frac{-1}{b_n \lambda_q}}}}$$

biçimindeki sürekli kesirlere, λ_q sayısına bağlı Rosen sürekli kesirleri denir ve $[b_1, b_2, \dots, b_n]_q$ ile gösterilir.

Rosen, sürekli kesirleri ile Hecke gruplarının T ve U dönüşümlerinin $U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} T$ biçimindeki kelimelerinin arasındaki ilişkiyi göstermiştir. Yani

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]_q$$

$q = 3$ alındığında $\lambda_q = 1$ olur ve $[b_1, b_2, \dots, b_n]_3$ Rosen sürekli kesir paylarındaki katsayıları -1 , paydalarındaki katsayıları tamsayı olan bir sürekli kesir

biçimine girer. Böylece Tanım 2.8.12 de verilen tamsayı sürekli kesirler elde edilmiş olur.

Bu durum düşünülerek, Rosen sürekli kesirleri ile Hecke grupları arasındaki

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]_q$$

ilişkisi, tamsayı sürekli kesirler ile modüler grup arasında $q = 3$ ve $\lambda_q = 1$ olmak üzere,

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

olacak şekilde elde edilmiş olur.

3. FAREY GRAF VE SÜREKLİ KESİRLER

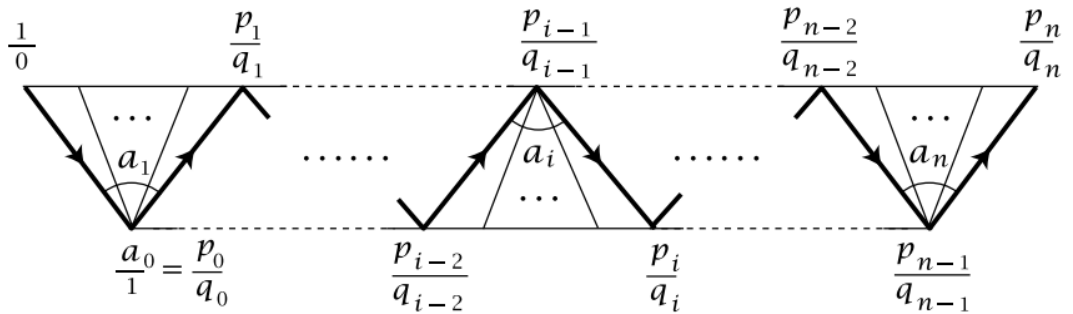
[4] numaralı kaynakta, Farey graftaki yollarla tamsayı sürekli kesirler arasında sürekli kesrin yakınsayanlarıyla, yolun düğümlerini bulan algoritma verilmiştir. Bu ilişkiyi, modüler ve genişletilmiş modüler gruba taşımak için öncelikle Farey grafta, sonsuzdan herhangi bir rasyonel sayıya giden yolların nasıl bulunacağı bu bölümde incelenmiştir. Bu yollar yardımıyla, sonraki bölümlerde modüler grubun elemanlarının parabolik noktaları arasındaki bağlantıları da kurmak için gerekli tanım, teorem ve yöntemlere bu bölümde yer verilmiştir.

3.1 Farey Graftaki Yollar ve Sürekli Kesirlerle İlişkisi

Farey graftaki yolların sürekli kesirlerle ilişkisi inceleyebilmek için öncelikle bu yolların nasıl çizildiğini verelim. Ayrıca bu yolların tamsayı sürekli kesirlerle nasıl ilişkilendirildiğini inceleyelim.

3.1.1 Teorem : [55] $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesrinin yakınsayanları, $\frac{1}{0}$ ile başlayan $\frac{p}{q}$ ile biten Farey grafta düğümlerin sonlu dizisinden oluşan bir zikzak yol boyunca düğümlerdir. Bu yol $\frac{1}{0}$ dan $\frac{a_0}{1}$ e giden hat boyunca başlar, a_1 üçgenlerinin oluşturduğu yelpazeden sola geçer sonra a_2 üçgenlerinin oluşturduğu yelpazeden sağa geçer böyle devam eder ve $\frac{p}{q}$ da sonlanır.

İspat : $\frac{p}{q} = [a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesri şu üçgenler şeridini belirler:



Şekil 3.1: $[a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.

Bu şeridin $\frac{p_n}{q_n}$ ile gösterilen son düğümünün sürekli kesrin değeri olan $\frac{p}{q}$ ya eşit olduğunu göstereceğiz. n yerine i koyarak sürekli kesrin her $[a_0, a_1, \dots, a_i]_s$ başlangıç parçası için böyle olacağı sonucuna varacağız. Bu, teoremin iddia ettiği gibi $\frac{p_i}{q_i}$ düğümlerinin şerit boyunca $\frac{p}{q}$ ya yakınsadığını gösterir.

$\frac{p_n}{q_n} = \frac{p}{q}$ olduğunu göstermek için 2×2 lik matrisleri kullanacağız.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_2 \end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_n \end{pmatrix}$$

çarpımını düşünelim. Bu çarpımı sağdan ya da soldan başlayarak çarpabiliriz. İlk olarak soldan çarpmaya başlayalım. Başlangıç matrisi $\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ dir ve bu matrisin iki sütununun üçgen şeridinin sol hattıyla işaretlenmiş olan $\frac{1}{0}$ ve $\frac{a_0}{1}$ olduğunu görebiliriz. Bu matrisi bir sonraki matrisle çarptığımızda

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & 1 + a_0 a_1 \\ 1 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_0 & p_1 \\ q_0 & q_1 \end{pmatrix}$$

Buradaki iki sütun zigzag yolun ikinci hattının sonundaki kesri verir. Sonraki matris çarpımları için de benzer şey yapıldığında çarpımdaki bir sonraki matrisi çarpmayla zigzag yolun sonraki hattına karşılık gelen matris elde edilir.

$$\begin{pmatrix} p_{i-2} & p_{i-1} \\ q_{i-2} & q_{i-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_{i-2} + a_i p_{i-1} \\ q_{i-1} & q_{i-2} + a_i q_{i-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{i-1} & p_i \\ q_{i-1} & q_i \end{pmatrix}$$

Sonunda bütün matrisler çarpıldığında $\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ den $\frac{p_n}{q_n}$ e şeritteki son hatta karşılık gelen matris elde edilir. Böylece P çarpımının ikinci sütunu $\frac{p_n}{q_n}$ olur ve geriye $\frac{p_n}{q_n}$ nun değerinin $[a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ sürekli kesrine eşit olduğunu göstermek kalır.

$[a_0, a_1, \dots, a_n]_s$ sürekli kesrinin değeri sağdan sola çalışmakla hesaplanır. Eğer $\frac{r_i}{s_i}$ yi sürekli kesrin $[0, a_i, \dots, a_n]_s$ kısmının değeri olarak alırsak

$$\frac{r_n}{s_n} = \frac{1}{a_n}$$

olur ve

$$\frac{r_i}{s_i} = \frac{1}{a_i + \frac{r_{i+1}}{s_{i+1}}} = \frac{s_{i+1}}{a_i s_{i+1} + r_{i+1}}$$

bulunur. Son olarak

$$\frac{p}{q} = a_0 + \frac{r_1}{s_1} = \frac{a_0 s_1 + r_1}{s_1}$$

elde edilir.

Matrisler açısından bu şu anlama gelir;

$$\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ a_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & a_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{i+1} \\ s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{i+1} \\ r_{i+1} + a_i s_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_i \\ s_i \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & a_0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1 + a_0 s_1 \\ s_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}.$$

Bunun anlamı P çarpımını sağdan çarpmaya başladığımızda ikinci sütun sırasıyla $\begin{pmatrix} r_n \\ s_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} r_{n-1} \\ s_{n-1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} r_1 \\ s_1 \end{pmatrix}$ ve sonunda $\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix}$ olur. İkinci sütunun $\frac{p_n}{q_n}$ olduğunu göstermiştik böylece $\frac{p}{q} = \frac{p_n}{q_n}$ olur ve ispat tamamlanır. \square

3.1.2 Teorem : [4] \mathbb{Q}_∞ da şu şekilde tanımlanan bir ρ doğal uzunluğu vardır. $\rho(u, v), u$ ve v düğümleri arasındaki u yu v ye götüren hatların en kısa sayısıdır.

3.1.3 Tanım : u ve v düğümleri arasındaki en kısa uzunluktaki yola bir geodezik yol denir.

3.1.4 Tanım : $\frac{x}{y}$ rasyoneli, Farey grafın $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}$ rasyonellerine Farey toplamı uygulanarak elde edilen bir düğümü olsun. Bu durumda $\frac{a}{b}$ ve $\frac{c}{d}, \frac{x}{y}$ nin Farey ebeveynleri denir.

3.1.5 Teorem : [4] x bir rasyonel sayı olmak üzere ∞ dan x e giden her yol x in bir Farey ebeveyninden geçer. Eğer $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle, x_0 = \infty$ geodezik bir yol ise her x_{k-1}, x_k nın bir Farey ebeveynidir.

İspat : İlk iddia, x bir tamsayı ise ∞ , x in bir Farey ebeveyni olduğundan doğrudur.

Şimdi varsayalım ki x tam olmayan bir rasyonel sayı olsun ve ∞ dan x sayılarına $\langle x_0, x_1, \dots, x_n \rangle$ yolunu alalım. Böylece $n \geq 2$, $x_0 = \infty$ ve $x_n = x$ olur. u ve v , x sayısının $u < v$ olan rasyonel Farey ebeveynleri olsun. Buradan $x = u \oplus v$ böylece $x \in (u, v)$ olur. $\infty \notin [u, v]$ olduğundan, $x_i \notin (u, v)$ olacak şekilde bir i tamsayısı olmalıdır fakat $x_{i+1} \in (u, v)$ dir. Varsayalım ki $x_i \neq u, v$ olsun. Üst yarı düzlemdeki Farey grafta x_i ile x_{i+1} sayılarını birleştiren en kısa hat, u ve v yi birleştiren geodezik hatla kesişir. x_i nin u veya v ye eşit olması gerektiğinden bu imkansızdır. İkinci iddia birinciden görülür çünkü her x_k düğümü için, x_1, \dots, x_{k-1} den biri örneğin x_t olsun x_k nın bir Farey ebeveynidir ve $\langle \infty, x_1, \dots, x_t, x_k, \dots, x_n \rangle$, ∞ dan x e bir yoldur. Bu verilen geodezik yoldan daha kısa olamayacağından $t = k - 1$ olur. \square

3.1.6 Teorem : [4] x bir rasyonel ve $\rho(\infty, x) = n$ olsun. ∞ dan x sayısına en fazla F_n tane geodezik yol vardır. (Burada F_n ; n . Fibonacci sayısını belirtir.)

İspat : Her x rasyonel sayısı için $M(x)$, ∞ dan x e geodezik yolların sayısını gösterebilir. n üzerine tümevarımla $\rho(\infty, x) = n$ ise $M(x) \leq F_n$ olduğunu göstereceğiz.

$n = 1$ ise x ve ∞ u birleştiren tam bir hat vardır. Böylece $M(x) = 1 = F_1$. Sonra varsayalım ki $n = 2$ ve $\langle \infty, u, x \rangle$ geodezik yol olsun. Teorem 2.3 ten u , $\alpha(x)$ ya da $\beta(x)$ tir. Böylece $M(x) \leq 2 = F_2$. Şimdi varsayalım ki $\rho(\infty, y) = k$, $k \leq n$ olan bütün y düğümleri için $M(y) \leq F_k$ olsun. $\rho(\infty, x) = n + 1$ ($n \geq 2$) olan x düğümlerini düşünelim. Teorem 2.3 ten ∞ dan x noktasına her $\langle \infty, x_n, \dots, x_1, x \rangle$ geodezik yolu $x_1 = \alpha(x)$ ya da $x_1 = \beta(x)$ i sağlamak zorundadır. $M_\alpha(x)$, ∞ dan x sayısına giden ve $x_1 = \alpha(x)$ şartını sağlayan, $M_\beta(x)$ de ∞ dan x sayısına giden ve $x_1 = \beta(x)$ şartını sağlayan geodezik yolların sayısı olsun. $M(x) = M_\alpha(x) + M_\beta(x)$ olduğu açıktır.

Varsayalım ki $x_1 = \alpha(x)$ olan bir geodezik yol olsun. $\rho(\infty, \alpha(x)) = n$ dir. Tümevarım hipotezinden $M(\alpha(x)) \leq F_n$ dir. $M_\alpha(x) \leq M(\alpha(x))$ olduğundan $M_\alpha(x) \leq F_n$ olur. Sonra varsayalım ki $\langle \infty, x_n, \dots, x_2, x_1, x \rangle$ yolu $x_1 = \beta(x)$ olan bir geodezik yol olsun. $\gamma(x)$, $\beta(x)$ in $\alpha(x)$ den farklı olan Farey ebeveynini gösterebilir. Geodezik yol $\alpha(x)$ ten geçmeyeceğinden $x_2 = \gamma(x)$ olmak zorundadır. Bu

$x_1 = \beta(x)$ olan bütün geodezik yollar için doğru olduğundan $M_\beta(x) \leq M(\gamma(x))$ olur. Ayrıca $\rho(\infty, \gamma(x)) = n - 1$ olduğundan tümevarım hipotezinden $M(\gamma(x)) \leq F_{n-1}$ olur. Böylece

$$M(x) = M_\alpha(x) + M_\beta(x) \leq F_n + F_{n-1} = F_{n+1}$$

olur ve tümevarım tamamlanır.

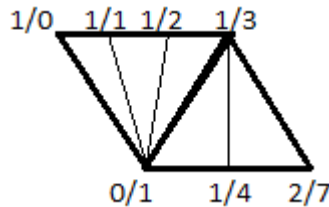
Geriye her n için $\rho(\infty, x_n) = n$ ve $M(x_n) = F_n$ olan bir x_n rasyonel sayısı olduğunu göstermek kalır. $x_0 = \infty$ ve $x_1 = 0$ olsun ve $y_1, x_2, y_2, x_3, \dots$ rasyonelleri sırasıyla tümevarımsal olarak $y_{n+1} = x_n \oplus x_{n+1}$, $x_{n+1} = x_n \oplus y_n$ şeklinde tanımlansın. $x_n = \alpha(x_{n+1})$, $y_n = \beta(x_{n+1})$ ve $x_n = \alpha(y_{n+1})$ olduğu açıktır. Bu gösterir ki $\langle x_0, \dots, x_{n-1}, x_n \rangle$ ve $\langle x_0, \dots, x_{n-1}, y_n \rangle$ ikisi de ata yollardır ve böylece $\rho(\infty, x_n) = \rho(\infty, y_n) = n$ olur. X_n ve Y_n sırasıyla ∞ dan x_n ve y_n e geodezik yolların sayısı olsun. x_n ve y_n , x_{n+1} in Farey ebeveynleri olduğundan $X_{n+1} = X_n + Y_n$ olur. Sonra x_{n-1}, y_n in bir Farey ebeveyni olduğundan $Y_n \geq X_{n-1}$. Buradan $X_{n+1} \geq X_n + X_{n-1}$ ve $X_1 = 1$, $X_2 = 2$ olduğundan $X_n \geq F_n$ bulunur. Fakat $X_n \leq F_n$ olduğunu biliyoruz böylece $X_n = F_n$ dir. \square

Örneklerle bu teoremlerin uygulamasını yapalım.

3.1.7 Örnek : Farey grafta ∞ dan $\frac{2}{7}$ sayısına giden, köşeleri 7. Farey dizisinin elemanları olan yolları bulalım.

$\frac{2}{7}$ nin basit sürekli kesir açılımı:

$$\frac{2}{7} = 0 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2}} = [0, 3, 2]_s$$



Şekil 3.2 : $[0, 3, 2]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.

Teoremde geçtiği gibi yolumuz önce $\frac{1}{0}$ dan $\frac{0}{1}$ e gelir. Daha sonra oluşan her Farey üçgeninin bilinen iki düğümüne Farey toplamı uygulanarak üçüncü düğüm bulunur. Bu şekilde devam edilerek en son $\frac{2}{7}$ ye ulaşılır.

Buradan yollar şu şekilde bulunur.

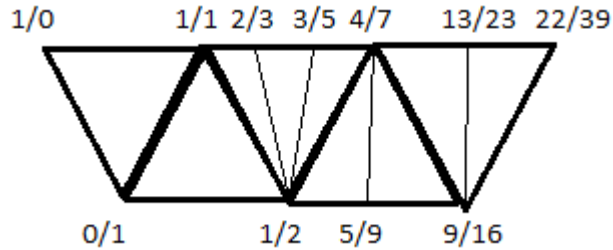
1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ (geodezik)
2. $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ (geodezik)
3. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$
4. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$
5. $\langle \infty, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$
6. $\langle \infty, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$
7. $\langle \infty, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$
8. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle \dots$

Teorem 3.1.6 dan en fazla $F_2 = 2$ tane geodezik yol olduğu da doğrulanır.

3.1.8 Örnek : Farey grafta ∞ dan $\frac{22}{39}$ sayısına giden, köşeleri 39. Farey dizisinin elemanları olan yolları bulalım.

$\frac{22}{39}$ nin basit sürekli kesir açılımı:

$$\frac{22}{39} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2}}}}} = [0, 1, 1, 3, 2, 2]_s$$



Şekil 3.3 : $[0, 1, 1, 3, 2, 2]_s$ basit sürekli kesrinin belirlediği üçgenler şeridi.

Geodezik yollar:

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$

2. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$

3. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle$

4. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle$

5. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$

6. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$

Teorem 3.1.6 dan, $p\left(\infty, \frac{22}{39}\right) = 5$ olduğundan en fazla $F_5 = 8$ tane geodezik yol vardır.

Şimdi de Farey grafta bulduğumuz bu yollarla, tamsayı sürekli kesirler arasında ilişki kuran teoremi verelim.

3.1.9 Teorem : [4] x bir rasyonel sayı olmak üzere, C_1, \dots, C_n , x in tamsayı sürekli kesir açılımının ardışık yakınsayanlarıdır ancak ve ancak $\langle \infty, C_1, \dots, C_n \rangle$ Farey grafta ∞ dan x e bir yoldur.

İspat : İlk olarak varsayalım ki C_1, \dots, C_n , x in tamsayı sürekli kesir açılımının ardışık yakınsayanları olsun. Böylece $C_k = S_{b_1} \dots S_{b_k}(\infty)$ ve $C_n = x$ olur. Şimdi $C_1 = S_{b_1}(\infty) = b_1$ (bir tamsayı), böylece $\{\infty, C_1\}$ Farey grafta bir hat olur. Sonra $C_k = S_{b_1} \dots S_{b_k}(\infty)$, $C_{k+1} = S_{b_1} \dots S_{b_k} S_{b_{k+1}}(\infty) = S_{b_1} \dots S_{b_k}(b_{k+1})$ ve ∞ ile b_{k+1} Farey komşusu olduğundan C_k ve C_{k+1} de Farey komşusudur. Bu nedenle Farey grafta C_k dan C_{k+1} e bir hat vardır. Bu demek oluyor ki $\langle \infty, C_1, \dots, C_n \rangle$, ∞ dan x e bir yoldur.

Şimdi varsayalım ki $\langle \infty, v_1, \dots, v_n \rangle$ Farey grafta ∞ dan x e bir yol olsun (böylece $v_n = x$). $k = 1, \dots, n$ için $v_k = S_{b_1} \dots S_{b_k}(\infty)$ olan bir b_1, \dots, b_n tamsayı

dizisi oluşturmalıyız. x e eşit olan v_k nin $[b_1, \dots, b_n]$ in yakınsayanları olması için, ilk olarak v_1 ile ∞ komşu ($v_1 \sim \infty$) olduğundan v_1 tamsayıdır. Bu nedenle $v_1 = S_{b_1}(\infty)$ olsun diye $b_1 = v_1$ deriz. Şimdi varsayalım ki b_1, \dots, b_k tamsayıları $v_k = S_{b_1} \dots S_{b_k}(\infty)$ şeklinde tanımlanmış olsun. b_{k+1} tamsayısı $b_{k+1} = S_{b_k}^{-1} \dots S_{b_1}^{-1}(v_{k+1})$ ile tanımlıdır. Bu $v_{k+1} = S_{b_1} \dots S_{b_{k+1}}(\infty)$ olduğunu garanti eder. Böylece geriye sadece b_{k+1} in tamsayı olduğunu göstermek kalır. Şimdi $v_k \sim v_{k+1}$ böylece $S_{b_1} \dots S_{b_k}(\infty) \sim S_{b_1} \dots S_{b_k}(b_{k+1})$. Her $S_{b_i}^{-1} \sim$ bağıntısını koruduğundan $\infty \sim b_{k+1}$ olur ve böylece b_{k+1} tamsayı olduğu bulunur ve ispat tamamlanır. \square

3.1.10 Örnek : Bu teoremleri kullanarak $[0, -2, 1, 3]$ tamsayı sürekli kesrine Farey grafta karşılık gelen yolu bulalım.

$$C_1 = [0] = 0$$

$$C_2 = [0, -2] = 0 - \frac{1}{-2} = \frac{1}{2}$$

$$C_3 = [0, -2, 1] = 0 - \frac{1}{-2 - \frac{1}{1}} = \frac{1}{3}$$

$$C_4 = [0, -2, 1, 3] = 0 - \frac{1}{-2 - \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} = \frac{2}{7}$$

Buradan $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu bulunur.

Şimdi de $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yoluna karşılık gelen tamsayı sürekli kesri bulalım.

$$C_1 = [0] = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{-3} = [0, -3]$$

$$C_3 = \frac{2}{7} = 0 - \frac{1}{-3 - \frac{1}{2}} = [0, -3, 2]$$

Buradan $[0, -3, 2]$ tamsayı sürekli kesri bulunur.

3.1.11 Sonuç : [4] Yukarıdaki örnekte görüldüğü gibi, bir x rasyonelinin tamsayı sürekli kesir açılımı bize Farey grafta ∞ dan x sayısına bir yol, en kısa tamsayı sürekli kesir açılımı da ∞ dan x sayısına bir geodezik yol verir.

4. GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP ELEMANLARININ SÜREKLİ KESİRLER VE FAREY GRAFTAKİ YOLLARLA İLİŞKİSİ

Bu bölümde öncelikle parabolik nokta, (TS) ve (TS^2) blok formları ile $f = RTS$ ve $h = TSR$ yeni blok form kavramları tanıtılıp, bunlarla ilgili [5,7,9] kaynaklarında yer alan bazı teoremler verilmiştir. Bu blokları kullanarak, modüler grubun elemanlarının ve genişletilmiş modüler grubun antiotomorfizma elemanlarının parabolik noktaları tamsayı sürekli kesirler ile ifade edilmiştir. Ayrıca tamsayı sürekli kesirler ile yeni blok formlar arasında bazı ilişkiler kurulmuştur. Buradan genişletilmiş modüler grubun herhangi bir elemanı, tamsayı sürekli kesirleri kullanarak Fibonacci sayıları ile ilişkilendirilmiştir. Ayrıca parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla bulunmuş, daha sonra bu dönüşümlerin ilişkili olduğu yolların bulunma yöntemleri ve aralarındaki bağıntılar verilmiştir. Bölüm 4.2 - Bölüm 4.5 teki tüm teoremler orijinaldir.

4.1 Parabolik Nokta, Blok Form ve Yeni Blok Form

Modüler grubun parabolik noktalarının kümesi $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ dur. [5] numaralı kaynakta, Koroğlu basit sürekli kesirleri ve blokları kullanarak modüler grup ve genişletilmiş modüler grupta elemanların parabolik noktalarını belirlemiştir.

4.1.1 Tanım : Bir grubun herhangi bir elemanı altında sonsuzun görüntüsüne o elemanın parabolik noktası denir.

4.1.2 Tanım : [7] Modüler ve genişletilmiş modüler grupta,

$$TS(z) = z + 1 \text{ ve } TS^2(z) = \frac{z}{z+1}$$

dönüşümlerine bloklar denir.

Modüler ve genişletilmiş modüler gruptaki herhangi bir indirgenmiş kelimenin bu bloklar ile ifadesine o kelimenin indirgenmiş blok formu denir ve BRF ile gösterilir.

4.1.3 Teorem : [7] m ve n pozitif tamsayılar olmak üzere;

$$(TS)^m(z) = z + m \text{ ve } (TS^2)^n(z) = \frac{z}{nz+1} \text{ dir.}$$

Modüler gruptaki bir indirgenmiş $W(T, S)$ kelimesi blok formda yazılabilir.

Modüler gruptaki herhangi bir kelime blokları kullanarak

$$W(T, S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

($i = 0, 1, 2$; $j = 0, 1$) şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir. Bu gösterim, modüler grup için genel bir gösterimdir ve aşağıdaki teoremden bu kelime için parabolik noktalar, basit sürekli kesirleri kullanarak hesaplanmıştır.

4.1.4 Teorem : [5] Modüler grupta TS ile başlayıp TS^2 ile biten bir

$$W(T, S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

kelimesi için parabolik noktalar

$$i = 0, j = 0 \text{ ise } [m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k]$$

$$i = 0, j = 1 \text{ ise } [m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k]$$

$$i = 1, j = 0 \text{ ise } -\frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k] + 1}$$

$$i = 1, j = 1 \text{ ise } -\frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k] + 1}$$

$$i = 2, j = 0 \text{ ise } -1 - \frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k]}$$

$$i = 2, j = 1 \text{ ise } -1 - \frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k]}$$

şeklindedir.

4.1.5 Teorem : [5] Modüler grupta TS ile başlayıp TS ile biten bir

$$W(T, S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (TS)^{m_{k+1}} T^j$$

kelimesi için

$$W^*(T, S) = (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (TS)^{m_{k+1}}$$

kelimesinin parabolik noktası

$$[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k]$$

sürekli kesridir.

4.1.6 Teorem : [5] Modüler grupta TS^2 ile başlayıp TS^2 ile biten bir

$$W(T, S) = S^i (TS^2)^{m_0} (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (TS^2)^{m_{k+1}} T^j$$

kelimesi için

$$W^*(T, S) = (TS^2)^{m_0} (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} (TS^2)^{n_k} (TS^2)^{m_{k+1}}$$

kelimesinin parabolik noktası

$$\frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k, n_k, m_{k+1}]}$$

şeklindedir.

4.1.7 Teorem : [5] Modüler grupta TS^2 ile başlayıp TS ile biten bir

$$W(T, S) = S^i (TS^2)^{m_0} (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

kelimesi için

$$W^*(T, S) = (TS^2)^{m_0} (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} (TS^2)^{n_k}$$

kelimesinin parabolik noktası

$$\frac{1}{[m_0; n_0, m_1, n_1, \dots, m_k]}$$

biçimindedir.

4.1.8 Örnek : Modüler grupta

$$W(T, S) = STSTS^2TS^2TSTS^2$$

kelimesi için bu kelimenin blok formu

$$W(T, S) = S(TS)(TS^2)^2(TS)(TS^2)$$

biçimindedir. Bu kelime için Teorem 4.1.4 uygulanırsa $i = 1, j = 0$ olduğundan kelimenin parabolik noktası $-\frac{1}{[1;2,1,1]_{+1}} = -\frac{5}{12}$ olarak bulunur.

Şimdi de genişletilmiş modüler grubun elemanları için parabolik noktaları inceleyelim.

$\bar{\Gamma}$ genişletilmiş modüler grubun sunuşunun Tanım 2.2.1.1 den

$$\bar{\Gamma} = \langle T, S, R | T^2 = R^2 = S^3 = (TR)^2 = (RS)^2 = I \rangle$$

olduğunu hatırlayalım. Bu grupta, herhangi bir $W(T, S, R)$ kelimesi,

$r_i = 0, 1, 2$ ($0 \leq i \leq n$), $k = 0, 1$ olmak üzere,

$$W(T, S, R) = R^k S^{r_0} T S^{r_1} T \dots S^{r_n}$$

biçimindedir. Bu kelime, blok formda şu iki şekilde ifade edilebilir:

$$W(T, S, R) = W(T, S) = S^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

veya

$$W(T, S, R) = RS^i (TS)^{m_0} (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} (TS^2)^{n_k} T^j$$

($i = 0, 1, 2; j = 0, 1$) şeklinde ifade edilebilir. Blokların kuvvetleri pozitif tamsayılardır, m_0 ve n_k sıfır olabilir.

Dikkat edilirse $W(T, S, R)$ kelimesinde R lerin kuvvetleri toplamı çift sayı ise kelime $W(T, S)$ haline dönüşür ve verilen teoremler yardımıyla parabolik noktası hesaplanabilir. Şimdi $W(T, S, R)$ şeklindeki kelimeler için aşağıdaki teoremi verelim.

4.1.9 Teorem : [5] $W(T, S, R)$ kelimesindeki R lerin kuvvetleri toplamı tek sayı ise kelime

$$W(T, S, R) = RS^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

formundadır ve

$$W^*(T, S) = S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

kelimesinin parabolik noktası K ise $W(T, S, R)$ kelimesinin parabolik noktası

$$R(K) = \frac{1}{K} \text{ olur.}$$

4.1.10 Tanım : [9] Genişletilmiş modüler grupta

$$f = RTS = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, h = TSR = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

kelimelerine yeni bloklar denir.

4.1.11 Teorem : [9] Yukarıda tanımlanan f ve h dönüşümleri için, f_k ve h_k , k . Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$f^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix}, h^k = \begin{pmatrix} h_{k+1} & h_k \\ h_k & h_{k-1} \end{pmatrix}$$

biçimindedir.

Bu teorem sayesinde, genişletilmiş modüler grubun tüm elemanları Fibonacci sayılarını kullanarak ifade edilebileceği gösterilmiştir.

4.1.12 Tanım : [9] Genişletilmiş modüler grupta bir $W(T, S, R)$ kelimesi f ve h dönüşümlerinin kuvvetleri şeklinde ifade edildiğinde, bu yeni kelime formuna indirgenmiş yeni blok form ($NBRF$) denir.

4.1.13 Sonuç : [9] Genişletilmiş modüler gruptaki her indirgenmiş kelime, bir indirgenmiş yeni blok forma sahiptir.

İspat : $W(T, S, R)$, genişletilmiş modüler grupta bir indirgenmiş kelime olsun. $W(T, S, R)$ kelimesinin indirgenmiş blok formu,

$$S^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

veya

$$RS^i(TS)^{m_0}(TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}(TS^2)^{n_k}T^j$$

biçimindedir.

$W(T, S, R)$ kelimesindeki TS ve TS^2 blokları için

$$TS = Rf = hR \text{ ve } TS^2 = Rh = fR$$

ilişkileri vardır. Böylece bu bloklar yerine eşitleri yazılarak $W(T, S, R)$ kelimesi yeni bloklarla ifade edilmiş olur. \square

4.1.14 Örnek : Genişletilmiş modüler grupta $W = (TS)^3(TS^2)(TS)^2(TS^2)^2$ blok formda bir kelime olsun. $TS = Rf = hR$ ve $TS^2 = Rh = fR$ eşitliklerini kullanarak

$$W = RfRfRfRhRfRfRhRh$$

yazılabilir ve

$$\begin{aligned} W &= hf h^3 f^2 h = \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_4 & h_3 \\ h_3 & h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir.

4.2 Modüler Grup ve Tamsayı Sürekli Kesirler

Modüler gruptaki kelimelerin parabolik noktaları [5] numaralı çalışmada bloklar yardımıyla basit sürekli kesirlerle ifade edilmiştir. [2] numaralı çalışmada ise Hecke gruplarının elemanlarının parabolik noktaları, Rosen sürekli kesir yardımıyla bulunmuştur. Bu bölümde, [2] numaralı çalışmanın $\lambda = 1$ hali ile uyumlu olacak şekilde blokları kullanarak, modüler grubun elemanlarının parabolik noktaları tamsayı sürekli kesirler ile ifade edilmiştir. Bu bölümdeki teoremlerin tümü orijinaldir.

Öncelikle modüler gruptaki bir kelimeyle, tamsayı sürekli kesirler arasındaki ilişkiyi veren aşağıdaki teoremi verelim.

4.2.1 Teorem : Modüler grupta parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri olan kelime

$$(TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}T$$

formundadır.

İspat : Modüler grubun,

$$T(z) = \frac{-1}{z} \quad S(z) = \frac{-1}{z+1} \quad U(z) = TS(z) = z + 1$$

elemanları düşünüldüğünde $U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T$ kelimesinin parabolik noktası için;

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T(\infty) = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \dots - \frac{1}{b_n}}}$$

olduğu açıkça görülür.

Böylece parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri olan $U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T$ kelimesi bulunur.

Şimdi bu kelimeyi blok formda yazalım. $U = TS$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için,

$$\begin{aligned} U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}T &= (TS)^{b_1}T(TS)^{b_2}T \dots (TS)^{b_n}T \\ &= \underbrace{TS.TS \dots TS}_{b_1 \text{ tane}}.T.\underbrace{TS.TS \dots TS}_{b_2 \text{ tane}}.T.\underbrace{TS.TS \dots TS}_{b_3 \text{ tane}}.T \dots T.\underbrace{TS.TS \dots TS}_{b_n \text{ tane}}.T \\ &= (TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}T \end{aligned}$$

kelimesi elde edilir. \square

Bu teorem sayesinde, herhangi bir tamsayı sürekli kesirden modüler grupta (TS) ve (TS^2) bloklarının kullanıldığı kelime sunuşu elde edebiliriz. Teorem 3.1.9 da x rasyonel sayısının, tamsayı sürekli kesir açılımının ardışık yakınsayanları ile Farey grafta ∞ dan bu x rasyoneline giden yolların ilişkisi kurulmuştu. Bu ilişkiyi

Teorem 4.2.1 ile birleştirerek, Farey graftaki herhangi bir yol için bir tamsayı sürekli kesir ve modüler grupta bir indirgenmiş blok form bulabiliriz. Aşağıdaki örneklerle bu durumu açıklayalım.

4.2.2 Örnek : Farey grafta ∞ dan $\frac{2}{7}$ ye giden yollar için, bu yolların eşleştiği tamsayı sürekli kesirleri ve modüler gruptaki indirgenmiş blok formları bulalım.

Bu yollardan bazıları Örnek 3.1.7 de bulunmuştu. Şimdi onları inceleyelim.

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için Teorem 3.1.9 dan

$$C_1 = 0 = [0]$$

$$C_2 = \frac{1}{3} = 0 - \frac{1}{-3} = [0, -3]$$

$$C_3 = \frac{2}{7} = 0 - \frac{1}{-3-\frac{1}{2}} = [0, -3, 2]$$

$[0, -3, 2]$ tamsayı sürekli kesri elde edilir. Şimdi Teorem 4.2.1 i uygulayalım.

$[b_1, b_2, \dots, b_n] = [0, -3, 2]$ için

$$(TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}T$$

blok formu

$$[0, -3, 2] = (TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-5}.(TS^2).(TS).T(\infty)$$

biçimindedir. Buradan

$$(TS^2)^3.(TS)^2.T$$

kelimesi ve

$$(TS^2)^3.(TS)^2.T(z) = \frac{2z - 1}{7z - 3}$$

dönüşümü bulunur.

2. $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için: $[0, -4, -2]$ sürekli kesri

$$[0, -4, -2] = (TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-6}.(TS^2).(TS)^{-3}.T(\infty)$$

$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)$ kelimesi

$$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)(z) = \frac{2z+1}{7z+4} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

3. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[1,2,2,3]$ sürekli kesri

$$[1,2,2,3] = (TS^2).(TS^2).(TS^2).(TS)^2.T(\infty)$$

$(TS^2)^3.(TS)^2.T$ kelimesi

$$(TS^2)^3.(TS)^2.T(z) = \frac{2z-1}{7z-3} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

4. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[1,2,2,2, -1]$ sürekli kesri

$$[1,2,2,2, -1] = (TS^2).(TS^2).(TS^2).(TS^2).(TS)^{-2}.T(\infty)$$

$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)$ kelimesi

$$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)(z) = \frac{2z+1}{7z+4} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

5. $\langle \infty, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[0, -1, 1, 2, 3]$ sürekli kesri

$$[0, -1, 1, 2, 3] =$$

$$(TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-3}.(TS^2).(TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^0.(TS)^2.(TS)^2.T(\infty)$$

$(TS^2)^3.(TS)^2.T$ kelimesi

$$(TS^2)^3.(TS)^2.T(z) = \frac{2z-1}{7z-3} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

6. $\langle \infty, 0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[0, -1, 1, 2, 2, -1]$ sürekli kesri

$$[0, -1, 1, 2, 2, -1]$$

$$= (TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-3}.(TS^2).(TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^{-2}.T(\infty)$$

$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)$ kelimesi

$$(TS^2)^3.(TS).(TS^2)(z) = \frac{2z+1}{7z+4} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

7. $\langle \infty, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[1, 1, -2, 2]$ sürekli kesri

$$[1,1,-2,2] = (TS^2). (TS)^{-1}. (TS^2). (TS)^{-4}. (TS^2). (TS)^1. T(\infty)$$

$(TS^2)^3. (TS)^2. T$ kelimesi

$$(TS^2)^3. (TS)^2. T(z) = \frac{2z-1}{7z-3} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

8. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için: $[0, -2, 1, 3]$ sürekli kesri

$$[0, -2, 1, 3] = (TS)^{-1}. (TS^2). (TS)^{-4}. (TS^2). (TS)^{-1}. (TS^2). (TS)^2. T(\infty)$$

$(TS^2)^3. (TS)^2. T$ kelimesi

$$(TS^2)^3. (TS)^2. T(z) = \frac{2z-1}{7z-3} \text{ dönüşümü bulunur.}$$

4.2.3 Örnek : ∞ dan $\frac{22}{39}$ a giden geodezik yollar için benzer işlemleri yapalım.

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$ $[0, -2, -4, 2, -2]$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2)^2(z) = \frac{22z + 9}{39z + 16}$$

2. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$ $[1, 2, -3, 2, -2]$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2)^2(z) = \frac{22z + 9}{39z + 16}$$

3. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$ $[0, -2, -5, -2, -3]$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2)^2(z) = \frac{22z + 9}{39z + 16}$$

4. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$ $[1, 2, -4, -2, -3]$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2)^2(z) = \frac{22z + 9}{39z + 16}$$

5. $\langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle$ $[0, -2, -4, 3, 2]$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2). (TS). T(z) = \frac{22z - 13}{39z - 23}$$

$$6. \langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle \quad [1, 2, -3, 3, 2]$$

$$(TS^2). (TS). (TS^2)^3. (TS)^2. (TS^2). (TS). T(z) = \frac{22z - 13}{39z - 23}$$

Teorem 4.2.1 de bir $x = [b_1, b_2, \dots, b_n] \in \mathbb{Q}$ sayısı için modüler grupta bu sayıyı parabolik nokta kabul eden kelimenin

$$(TS)^{b_1-1}. (TS^2). (TS)^{b_2-2}. (TS^2). (TS)^{b_3-2}. (TS^2) \dots (TS^2). (TS)^{b_n-1}T$$

formunda olması gerektiği bulunmuştu. Şimdi de bu durumun tersini düşünerek modüler grubun herhangi bir elemanını alalım ve parabolik noktasının tamsayı sürekli kesirlerle nasıl ifade edileceğini inceleyelim.

Modüler gruptaki kelimeler şu blok formlarda olabilirler:

1. $W(T, S) = S^i. (TS)^{m_0}. (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}. (TS^2)^{n_k}. (TS)^{m_{k+1}}. T^j$
2. $W(T, S) = S^i. (TS^2)^{m_0}. (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}. (TS)^{n_k}. T^j$
3. $W(T, S) = S^i. (TS)^{m_0}. (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}. (TS^2)^{n_k}. T^j$
4. $W(T, S) = S^i. (TS^2)^{m_0}. (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k}. (TS)^{n_k}. (TS^2)^{m_{k+1}}. T^j$

Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

4.2.4 Teorem :

$$W(T, S) = S^i. (TS)^{m_0}. (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}. (TS^2)^{n_k}. (TS)^{m_{k+1}}. T^j$$

biçimindeki kelimelerin parabolik noktalarının karşılık geldiği tamsayı sürekli kesirler

$$\text{a) } i = 0, j = 1 \text{ için } \left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, m_{k+1} + 1 \right]$$

$$\text{b) } i = 0, j = 0 \text{ için } \left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_k-1} \right]$$

şeklindedir.

İspat :

a) $i = 0, j = 1$ için

$$W(T, S) = S^i. (TS)^{m_0}. (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k}. (TS^2)^{n_k}. (TS)^{m_{k+1}}. T^j$$

kelimesini Teorem 4.1.1 de kullandığımız forma benzetmek için

$$W(T, S) = (TS)^{m_0} \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \cdot (TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_0 \text{ tane } (TS^2)} \dots$$

$$(TS)^{m_k} \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{m_{k+1}} \cdot T$$

yazabiliriz. Buradan Teorem 4.2.1 den sürekli kesir

$$\left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, m_{k+1} + 1 \right]$$

olarak bulunur.

b) $i = 0, j = 0$ için benzer şekilde

$$W(T, S) = S^i \cdot (TS)^{m_0} \cdot (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} \cdot (TS^2)^{n_k} \cdot (TS)^{m_{k+1}} \cdot T^j$$

$$= (TS)^{m_0} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_0 \text{ tane } (TS^2)} \dots (TS)^{m_k} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{m_{k+1}} \cdot T^0$$

Buradan

$$\left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{n_k-1} \right]$$

tamsayı sürekli kesri bulunur. \square

4.2.5 Teorem :

$$W(T, S) = S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot T^j$$

biçimindeki kelimelerin karşılık geldiği tamsayı sürekli kesirler

a) $i = 0, j = 1$ için $\left[1, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, n_k + 1 \right]$

b) $i = 0, j = 0$ için $\left[1, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, 2, \underbrace{2, 2 \dots, 2}_{m_k-1} \right]$

İspat : a) $i = 0, j = 1$ için

$$W(T, S) = S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot T^j$$

$$= (TS)^0 \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_0 \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_0} \dots \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_k} \cdot T$$

Buradan

$$\left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, n_k + 1 \right]$$

tamsayı sürekli kesri elde edilir.

b) $i = 0, j = 0$ için

$$\begin{aligned} W(T, S) &= S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot T^j \\ &= (TS)^0 \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_0 \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_0} \dots \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_k} \cdot T^0 \end{aligned}$$

böylece

$$\left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_k-1} \right]$$

tamsayı sürekli kesri elde edilir. □

4.2.6 Teorem :

$$W(T, S) = S^i \cdot (TS)^{m_0} \cdot (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} \cdot (TS^2)^{n_k} \cdot T^j$$

biçimindeki kelimelerin karşılık geldiği tamsayı sürekli kesirler

$$\mathbf{a) } i = 0, j = 1 \text{ için } \left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_k-1}, 2 \right]$$

$$\mathbf{b) } i = 0, j = 0 \text{ için } \left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_k-1} \right]$$

İspat : a) $i = 0, j = 1$ için

$$\begin{aligned} W(T, S) &= S^i \cdot (TS)^{m_0} \cdot (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} \cdot (TS^2)^{n_k} \cdot T^j \\ &= (TS)^{m_0} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_0 \text{ tane } (TS^2)} \dots (TS)^{m_k} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^0 \cdot T \end{aligned}$$

buradan

$$\left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_k-1}, 2 \right]$$

sürekli kesri elde edilir.

b) $i = 0, j = 0$ için

$$\begin{aligned} W(T, S) &= S^i \cdot (TS)^{m_0} \cdot (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} \cdot (TS^2)^{n_k} \cdot T^j \\ &= (TS)^{m_0} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_0 \text{ tane } (TS^2)} \dots (TS)^{m_k} \cdot \underbrace{(TS^2)(TS)^0 \dots (TS^2)}_{n_k \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^0 \cdot T^0 \end{aligned}$$

böylece

$$\left[m_0 + 1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_0-1}, m_1 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{n_k-1} \right]$$

sürekli kesri bulunur. \square

4.2.7 Teorem :

$$W(T, S) = S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot (TS^2)^{m_{k+1}} \cdot T^j$$

biçimindeki kelimelerin karşılık geldiği tamsayı sürekli kesirler

$$\text{a) } i = 0, j = 1 \text{ için } \left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_{k+1}-1}, 2 \right]$$

$$\text{b) } i = 0, j = 0 \text{ için } \left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_{k+1}-1} \right]$$

İspat : a) $i = 0, j = 1$ için

$$\begin{aligned} W(T, S) &= S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot (TS^2)^{m_{k+1}} \cdot T^j \\ &= (TS)^0 \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_0 \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS)^{n_k} \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_{k+1} \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^0 \cdot T \end{aligned}$$

buradan

$$\left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_{k+1}-1}, 2 \right]$$

elde edilir.

b) $i = 0, j = 0$ için

$$\begin{aligned} W(T, S) &= S^i \cdot (TS^2)^{m_0} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS^2)^{m_k} \cdot (TS)^{n_k} \cdot (TS^2)^{m_{k+1}} \cdot T^j \\ &= (TS)^0 \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_0 \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^{n_0} \dots (TS)^{n_k} \cdot \underbrace{(TS^2) \cdot (TS)^0 \dots (TS^2)}_{m_{k+1} \text{ tane } (TS^2)} \cdot (TS)^0 \cdot T^0 \end{aligned}$$

$$\left[1, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_0-1}, n_0 + 2, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_1-1}, \dots, \underbrace{2, 2, \dots, 2}_{m_{k+1}-1} \right]$$

sürekli kesri bulunur. \square

4.3 Modüler Grup ve Yeni Bloklar

Önceki bölümlerde tamsayı sürekli kesirler ile (TS) ve (TS^2) bloklarıyla olan ilişkiler kurulmuştu. Bu bölümde ise, $f = RTS$ ve $h = TSR$ yeni bloklarının kuvvetleri Fibonacci sayılarıyla ifade edilebildiğinden, sonraki bölümlerde Fibonacci sayılarıyla bağlantı kurmak amacıyla, tamsayı sürekli kesirler ile yeni blok formlar arasında ilişki kurulmuştur. Bu ilişki aşağıdaki orijinal teoremden verilmiştir.

4.3.1 Teorem : $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden otomorfizmanın yeni blok formu şu şekilde bulunur: ($i = 2, 3, \dots, n - 1$)

$$b_1 \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}_{1.\text{parça}}, \quad b_1 \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot h^2}_{1.\text{parça}}$$

$$b_i \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot h^2}_{i.\text{parça}}, \quad b_i \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}} \cdot fR}_{i.\text{parça}}$$

$$b_n \text{ tek ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}} \cdot T}_{n.\text{parça}}, b_n \text{ çift ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}} \cdot hRT}_{n.\text{parça}}$$

İspat : Teorem 4.2.1 den

$$(TS)^{b_1-1} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_2-2} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_3-2} \cdot (TS^2) \dots (TS^2) \cdot (TS)^{b_n-1} \cdot T(\infty)$$

$$= [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

olduğunu biliyoruz.

$$TS = Rf = hR \text{ ve } TS^2 = Rh = fR$$

ilişkilerini kullanarak,

$$TS = Rf, TS^2 = fR$$

yazalım

$$(TS)^{b_1-1} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_2-2} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_3-2} \cdot (TS^2) \dots (TS^2) \cdot (TS)^{b_n-1} \cdot T(\infty)$$

$$= (Rf)^{b_1-1} \cdot fR \cdot (Rf)^{b_2-2} \cdot fR \cdot (Rf)^{b_3-2} \cdot fR \dots fR \cdot (Rf)^{b_n-1} \cdot T(\infty)$$

Bu gösterimi

$$= \underbrace{(Rf)^{b_1-1} \cdot fR}_{1.\text{parça}} \cdot \underbrace{(Rf)^{b_2-2} \cdot fR}_{2.\text{parça}} \cdot \underbrace{(Rf)^{b_3-2} \cdot fR}_{3.\text{parça}} \dots \underbrace{(Rf)^{b_n-1} \cdot fR}_{n.\text{parça}} \cdot T(\infty)$$

şeklinde parçalar halinde düşünelim.

$$= \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_1-1} \cdot fR \cdot \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_2-2} \cdot fR \dots \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_n-1} \cdot T(\infty)$$

$Rf = hR$ yi kullanarak;

b_1 tek ise ($b_1 - 1$ çift)

$$= \underbrace{hR \cdot Rf \cdot hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots$$

b_1 çift ise ($b_1 - 1$ tek)

$$= \underbrace{hR \cdot Rf \cdot hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot hR \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots$$

$$= \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot hR \cdot fR}_{1.par\c{a}} \dots = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot hR \cdot Rh}_{1.par\c{a}} \dots = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot h^2}_{1.par\c{a}} \dots$$

$i = 2, 3, \dots, n - 1$ için b_i tek ise

$$\begin{aligned} &= \dots \underbrace{hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot hR \cdot fR}_{i.par\c{a}} \dots \\ &= \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot hR \cdot fR}_{i.par\c{a}} \dots = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot h^2}_{i.par\c{a}} \dots \end{aligned}$$

b_i çift ise

$$= \dots \underbrace{hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot fR}_{i.par\c{a}} \dots = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}} \cdot fR}_{i.par\c{a}} \dots$$

b_n tek ise

$$= \dots \underbrace{hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot T}_{n.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}} \cdot T}_{n.par\c{a}}$$

b_n çift ise

$$= \dots \underbrace{hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot hR \cdot T}_{n.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}} \cdot hRT}_{n.par\c{a}}$$

Buradan, sürekli kesri oluşturan her b_i için b_i nin tekliği çiftliği hesaba katılarak, blok formda yazılan kelime, parça parça yeni blok formda yazılabilir. \square

4.4 Genişletilmiş Modüler Grup ve Tamsayı Sürekli Kesirler

Genişletilmiş modüler gruptaki kelimelerin parabolik noktaları [5] numaralı çalışmada bloklar yardımıyla basit sürekli kesirlerle ifade edilmiştir. [2] numaralı çalışmada ise genişletilmiş Hecke gruplarının elemanlarının parabolik noktaları Rosen sürekli kesirlerle bulunmuştur. Bu bölümde [2] numaralı çalışmanın, $\lambda = 1$ hali ile uyumlu olacak şekilde (TS) ve (TS^2) bloklarını kullanarak genişletilmiş modüler grubun antiotomorfizma elemanlarının parabolik noktaları tamsayı sürekli kesirler ile ifade edilmiştir.

4.4.1 Teorem : Genişletilmiş modüler grupta parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri olan antiotomorfizma

$$(TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}.R$$

formundadır.

İspat : Genişletilmiş modüler grubun

$$T(z) = \frac{-1}{z}, \quad S(z) = \frac{-1}{z+1}, \quad U(z) = TS(z) = z+1, \quad R(z) = \frac{1}{z}$$

elemanları düşünüldüğünde

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R$$

kelimesinin parabolik noktası için;

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n] = b_1 - \frac{1}{b_2 - \frac{1}{b_3 - \dots - \frac{1}{b_n}}}$$

olduğu açıkça görülür.

Böylece $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R$$

kelimesini verir.

Şimdi bu kelimeyi blok formda yazalım. $U = TS$ yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için,

$$\begin{aligned} & U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R \\ &= (TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}.R(\infty) \end{aligned}$$

kelimesi elde edilir. \square

Şimdi de daha önce otomorfizmalar için yaptığımız örneği antiotomorfizmalar için yapalım.

4.4.2 Örnek : Farey grafta, ∞ dan $\frac{2}{7}$ ye giden yollar için, bu yolların eşleştiği tamsayı sürekli kesirleri ve antiotomorfizmaların indirgenmiş blok formlarını bulalım.

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için:

$[0, -3, 2]$ sürekli kesri $b_1 = 0, b_2 = -3, b_3 = 2$ olmak üzere

$$\begin{aligned} [0, -3, 2] &= (TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-5}.(TS^2).(TS)^1.R(\infty) \\ &= S^2TTS^2S^2TS^2TS^2TS^2TTS^2TSR(\infty) = (TS^2)^3.(TS)^2R(\infty) \end{aligned}$$

2. $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için: $[0, -4, -2]$ sürekli kesri

$$\begin{aligned} &= (TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-6}.(TS^2).(TS)^{-3}.R(\infty) \\ &= (TS^2)^3.(TS).(TS^2).T.R(\infty) \end{aligned}$$

3. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için $[1, 2, 2, 3]$ sürekli kesri

$$\begin{aligned} &= (TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^2.R(\infty) \\ &= (TS^2)^3.(TS)^2.R(\infty) \end{aligned}$$

4. $\langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için $[1, 2, 2, 2, -1]$ sürekli kesri

$$\begin{aligned} &= (TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^0.(TS^2).(TS)^{-2}.R(\infty) \\ &= (TS^2)^3.(TS).(TS^2).T.R(\infty) \end{aligned}$$

5. $\langle \infty, 1, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ yolu için $[1, 1, -2, 2]$ sürekli kesri

$$\begin{aligned} &= (TS)^0.(TS^2).(TS)^{-1}.(TS^2).(TS)^{-4}.(TS^2).(TS)^1.R(\infty) \\ &= (TS^2)^3.(TS)^2.R(\infty) \end{aligned}$$

Teorem 4.4.1 de herhangi bir tamsayı sürekli kesir için genişletilmiş modüler grupta bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden antiotomorfizmaya geçiş verilmişti. Şimdi de genişletilmiş modüler grubun herhangi bir elemanın parabolik noktalarının tamsayı sürekli kesirlerle nasıl ifade edileceğini inceleyelim.

Genişletilmiş modüler gruptaki kelimeler şu iki blok formlarda olabilirler:

$$1. W(T, S, R) = W(T, S) = S^i . (TS)^{m_0} . (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} . (TS^2)^{n_k} . T^j$$

$$2. W(T, S, R) = R . S^i . (TS)^{m_0} . (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} . (TS^2)^{n_k} . T^j$$

$$(i = 0, 1, 2 ; j = 0, 1 \text{ ve } m_0, \dots, m_k, n_0, \dots, n_k \in \mathbb{N})$$

$W(T, S, R)$ kelimesindeki R lerin kuvvetleri toplamı çift ise kelime $W(T, S)$ halini alır ve bu kelimenin parabolik noktası Teorem 4.2.4 - Teorem 4.2.7 de gösterildiği gibi hesaplanır. Aksi durum için aşağıdaki teoremi verelim.

$$\mathbf{4.4.3 Teorem} : W(T, S, R) = R . S^i . (TS)^{m_0} . (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} . (TS^2)^{n_k} . T^j$$

biçimindeki kelimelerin parabolik noktalarının karşılık geldiği tamsayı sürekli kesirler;

$$W(T, S) = S^i . (TS)^{m_0} . (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} . (TS^2)^{n_k} . T^j$$

kelimesinin parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ olmak üzere, $\frac{1}{[b_1, b_2, \dots, b_n]}$ şeklindedir.

İspat : $W(T, S) = S^i . (TS)^{m_0} . (TS^2)^{n_0} \dots (TS)^{m_k} . (TS^2)^{n_k} . T^j$ kelimesinin parabolik noktası Teorem 4.2.4 – Teorem 4.2.7 sayesinde hesaplanır. $R(z) = \frac{1}{z}$ olduğundan istenen elde edilir.

4.5 Genişletilmiş Modüler Grup ve Yeni Bloklar

Teorem 4.4.1 de, genişletilmiş modüler grubun antiotomorfizma elemanları için bulduğumuz blok form-tamsayı sürekli kesir ilişkisini, yeni blok formlar için yazalım. Böylece genişletilmiş modüler grubun, herhangi bir antiotomorfizma elemanını, tamsayı sürekli kesirleri kullanarak Fibonacci sayıları ile ilişkilendirebiliriz.

4.5.1 Teorem : $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden antiotomorfizmanın yeni blok formu, şu şekilde bulunur: ($i = 2, 3, \dots, n - 1$)

$$b_1 \text{ tek ise } = \frac{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}{1.\text{pârça}}, b_1 \text{ çift ise } = \frac{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot h^2}{1.\text{pârça}}$$

$$b_i \text{ tek ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot h^2}_{i.\text{parça}}, b_i \text{ çift ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}} \cdot fR}_{i.\text{parça}}$$

$$b_n \text{ tek ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}} \cdot R}_{n.\text{parça}}, b_n \text{ çift ise } = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}} \cdot h}_{n.\text{parça}}$$

İspat : Teorem 4.4.1 den

$$\begin{aligned} (TS)^{b_1-1} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_2-2} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_3-2} \cdot (TS^2) \dots (TS^2) \cdot (TS)^{b_n-1} \cdot R(\infty) \\ = [b_1, b_2, \dots, b_n] \end{aligned}$$

olduğunu biliyoruz.

$$TS = Rf = hR \text{ ve } TS^2 = Rh = fR$$

ilişkilerini kullanarak

$$TS = Rf, TS^2 = fR$$

yazalım.

$$\begin{aligned} (TS)^{b_1-1} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_2-2} \cdot (TS^2) \cdot (TS)^{b_3-2} \cdot (TS^2) \dots (TS^2) \cdot (TS)^{b_n-1} \cdot R(\infty) \\ = (Rf)^{b_1-1} \cdot fR \cdot (Rf)^{b_2-2} \cdot fR \cdot (Rf)^{b_3-2} \cdot fR \dots fR \cdot (Rf)^{b_n-1} \cdot R(\infty) \end{aligned}$$

Bu gösterimi

$$= \underbrace{(Rf)^{b_1-1} \cdot fR}_{1.\text{parça}} \cdot \underbrace{(Rf)^{b_2-2} \cdot fR}_{2.\text{parça}} \cdot \underbrace{(Rf)^{b_3-2} \cdot fR}_{3.\text{parça}} \dots \underbrace{(Rf)^{b_n-1} \cdot fR}_{n.\text{parça}} \cdot R(\infty)$$

şeklinde parçalar halinde düşünelim.

$$= \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_1-1} \cdot fR \cdot \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_2-2} \cdot fR \dots \underbrace{Rf \cdot Rf \dots Rf}_{b_n-1} \cdot R(\infty)$$

$Rf = hR$ yi kullanarak;

b_1 tek ise ($b_1 - 1$ çift)

$$= \underbrace{hR \cdot Rf \cdot hR \cdot Rf \dots hR \cdot Rf \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots$$

b_1 çift ise ($b_1 - 1$ tek)

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{hR.Rf.hR.Rf \dots hR.Rf.hR.fR \dots}_{1.par\c{a}} \\
&= \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}}.hR.fR \dots}_{1.par\c{a}} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}}.hR.Rh \dots}_{1.par\c{a}} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}}.h^2 \dots}_{1.par\c{a}}
\end{aligned}$$

$i = 2, 3, \dots, n - 1$ için b_i tek ise

$$\begin{aligned}
&= \dots \underbrace{hR.Rf \dots hR.Rf.hR.fR \dots}_{i.par\c{a}} \\
&= \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}}.hR.fR \dots}_{i.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}}.h^2 \dots}_{i.par\c{a}}
\end{aligned}$$

b_i çift ise

$$= \dots \underbrace{hR.Rf \dots hR.Rf.fR \dots}_{i.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}}.fR \dots}_{i.par\c{a}}$$

b_n tek ise

$$= \dots \underbrace{hR.Rf \dots hR.Rf.R}_{n.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}}.R}_{n.par\c{a}}$$

b_n çift ise

$$= \dots \underbrace{hR.Rf \dots hR.Rf.hR.R}_{n.par\c{a}} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}}.h}_{n.par\c{a}}$$

Buradan, sürekli kesri oluşturan her b_i için b_i nin tekliği çiftliği hesaba katılarak, blok formda yazılan kelime parça parça yeni blok formda yazılabilir. \square

4.5.2 Örnek : $[1,2,2,3] = \frac{2}{7}$ sürekli kesrine karşılık gelen yeni blok formu, genişletilmiş modüler grupta antiotomorfizma için bulalım.

$$\begin{aligned}
[1,2,2,3] &= (hf)^{\frac{1-1}{2}}.fR.(hf)^{\frac{2-2}{2}}.fR.(hf)^{\frac{2-2}{2}}.fR.(hf)^{\frac{3-1}{2}}.R(\infty) \\
&= fR.fR.fR.hf.R(\infty) \\
&= fhf^2h(\infty)
\end{aligned}$$

Uyarı : Teorem 4.5.1 deki amaç $x = [b_1, b_2, \dots, b_n]$ sayısını parabolik nokta kabul eden bir kelime bulmaktır. Bulunan bu yeni blok form gösterimi tek değildir. Örneğin $\frac{2}{7}$ sayısını parabolik nokta kabul eden fhf^3R kelimesi de vardır ve bu kelimeyle $[1,2,2,3] = \frac{2}{7}$ tamsayı sürekli kesri arasında Teorem 4.5.1 de verilenden farklı bir ilişki de kurulabilir.

5. FİBONACCİ SAYILARININ GENİŞLETİLMİŞ MODÜLER GRUP İLE İLİŞKİSİ VE BİLGİSAYAR PROGRAMI

Bu bölümde, parabolik noktası aynı olan dönüşümler, Farey graf yardımıyla bulunacaktır. Bununla bağlantılı olarak, bu dönüşümlerin ilişkili olduğu yollar ve aralarındaki bağıntılar incelenecektir. Ayrıca önceki bölümlerde bulunan teoremler kullanılarak, herhangi bir rasyonel sayı ile Fibonacci sayıları arasında bir ilişki kurulmuştur. Bulunan bu Fibonacci sayıları, başlangıçta alınan rasyonel sayıyı parabolik nokta kabul eden genişletilmiş modüler grup elemanının katsayılarıdır. Bu bağıntılar orijinal teoremler ile gösterilecektir. Ayrıca bu bölümde, bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu program önceki bölümlerde bulduğumuz teoremleri kullanarak, girdi olarak yazılan rasyonel sayıdan, bu rasyonelle ilişkili olan geodezik yolları, tamsayı sürekli kesirleri, genişletilmiş modüler grubun otomorfizma ve antiotomorfizma elemanları için blok ve yeni blok formları, Fibonacci sayılarından oluşan matrisleri ekrana sekmeler halinde yazdırmaktadır.

5.1 Parabolik Noktaların Farey Graflarla Elde Edilmesi

Genişletilmiş modüler grupta alınan bir kelime için, bu kelimenin ilişkili olduğu tamsayı sürekli kesirleri ve Farey graftaki yolları Bölüm 3 ve Bölüm 4.4 te inceledik. Bu grupta, bir dönüşümü temsil eden kelimenin Farey grafta farklı yollara karşılık gelebileceğini gördük. Bu bölümde, önce parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla bulunacak, daha sonra bu dönüşümlerin ilişkili olduğu yolların bulunma yöntemleri ve aralarındaki bağıntılar incelenecektir. Bu bölümdeki tüm teoremler orjinaldir.

5.1.1 Teorem : $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{a}{c}$, $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ yani $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, $\frac{a}{c}$ nin Farey ebeveynleri olsun. Bu durumda parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan, genişletilmiş modüler gruptaki dönüşümlerin matris gösterimleri $\begin{pmatrix} a & b_i \\ c & d_i \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\frac{r}{s} \leq \frac{b_i}{d_i} \leq \frac{p}{q}$$

olur ve bütün $\frac{b_i}{d_i}$ ler

$$\frac{r}{s} = \frac{b_0}{d_0} < \frac{b_0}{d_0} \oplus \frac{a}{c} = \frac{b_1}{d_1} < \frac{b_1}{d_1} \oplus \frac{a}{c} = \frac{b_2}{d_2} < \dots < \frac{a}{c} < \dots < \frac{b_{n-2}}{d_{n-2}} \oplus \frac{a}{c} = \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} < \frac{b_n}{d_n} = \frac{p}{q}$$

şeklindedir.

Ayrıca, genişletilmiş modüler grubun otomorfizma dönüşümleri

$$\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c} \text{ için } M(z) = \frac{az+b_i}{cz+d_i}, \frac{a}{c} < \frac{b_i}{d_i} \text{ için } V(z) = \frac{az-b_i}{cz-d_i}$$

antiotomorfizma dönüşümleri

$$\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c} \text{ için } M'(z) = \frac{a\bar{z}-b_i}{c\bar{z}-d_i}, \frac{a}{c} < \frac{b_i}{d_i} \text{ için } V'(z) = \frac{a\bar{z}+b_i}{c\bar{z}+d_i}$$

biçimindedir.

İspat : $\frac{a}{c} \in \mathbb{Q}$ ve $\frac{p}{q} \oplus \frac{r}{s} = \frac{a}{c}$, $\frac{r}{s} < \frac{p}{q}$ olsun. Parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan dönüşümlerin matris gösterimleri şu şekildedir: $\begin{pmatrix} a & b_i \\ c & d_i \end{pmatrix}$ için $ad_i - b_i c = \pm 1$ şartı sağlanmalıdır. $\frac{p}{q}$ ve $\frac{r}{s}$, $\frac{a}{c}$ nin Farey ebeveynleri olduğundan $aq - cp = \pm 1$ ve $as - cr = \pm 1$ dir. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} a & p \\ c & q \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & r \\ c & s \end{pmatrix}$ genişletilmiş modüler grubun elemanlarıdır. Farey toplamı işlemi toplanan iki sayının arasında bir değer verdiğiinden

$$\frac{b_0}{d_0} = \frac{r}{s} < \frac{a}{c} < \frac{p}{q} = \frac{b_n}{d_n}$$

olur. $\frac{b_0}{d_0} \oplus \frac{a}{c} = \frac{b_1}{d_1}$ tekrar $\frac{b_0}{d_0}$ ve $\frac{a}{c}$ nin arasında olur. $ad_1 - cb_1 = \pm 1$ eşitliğinden ve $\frac{b_n}{d_n} \oplus \frac{a}{c} = \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}}$ tekrar $\frac{b_n}{d_n}$ ve $\frac{a}{c}$ nin arasında olur, $ad_n - cb_n = \pm 1$ eşitliğinden benzer şekilde devam ederek,

$$\frac{b_0}{d_0} < \frac{b_1}{d_1} < \frac{b_2}{d_2} < \dots < \frac{a}{c} < \dots < \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} < \frac{b_n}{d_n}$$

artan dizisi elde edilir ve ispatın ilk bölümü tamamlanır.

Ayrıca $\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ için $ad_i - cb_i = +1$ olduğundan $M(z) = \frac{az+b_i}{cz+d_i}$ ve

$\frac{a}{c} < \frac{b_i}{d_i}$ için $a(-d_i) - c(-b_i) = +1$ olduğundan $V(z) = \frac{az-b_i}{cz-d_i}$ dönüşümleri birer otomorfizmadır.

$\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ için $a(-d_i) - c(-b_i) = -1$ olduğundan $M'(z) = \frac{a\bar{z}-b_i}{c\bar{z}-d_i}$ ve

$\frac{a}{c} < \frac{b_i}{d_i}$ için $ad_i - cb_i = -1$ $V'(z) = \frac{a\bar{z}+b_i}{c\bar{z}+d_i}$ dönüşümleri birer antiotomorfizmadır. \square

Şimdi sıradaki teorem için bir hatırlatma yapalım. Bölüm 2.6 dan, Farey grafta bir yol oluşturabilmek için yan yana gelen düğümlerin Farey komşuluk şartını yerine getirmeleri gerekir. Özel olarak, Farey grafta bir geodezik yol elde edilmek isteniyorsa Teorem 3.1.5 gereği; bu yolu oluşturan her düğümün, kendinden bir sonraki düğümün Farey ebeveyni olması gerekir.

5.1.2 Teorem : Genişletilmiş modüler grubun $M(z) = \frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ antiotomorfizma elemanı için bu dönüşümün ilişkili olduğu Farey graftaki yollar, son iki düğümü $\frac{b}{d}, \frac{a}{c}$ olmak üzere,

$$\langle \infty, \dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c} \rangle$$

biçimindedir.

İspat : Genişletilmiş modüler grubun $U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R$ elemanı için;

$$U^{b_1}TU^{b_2}T \dots U^{b_n}R(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

olduğunu biliyoruz. Bu sürekli kesirden Farey graftaki yola geçerken Teorem 3.1.9 gereği,

$$C_1 = [b_1]$$

$$C_2 = [b_1, b_2]$$

⋮

$$C_{n-1} = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$$

$$C_n = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

algoritmasıyla bu yolun düğümleri bulunmuştu. Buradan

$$C_n = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

noktasının yolun son düğümü olduğu açıktır. Aynı zamanda

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R \in \bar{F}$$

olduğundan

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R(z) = \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$$

şeklinde kesirli lineer dönüşüm olarak da ifade edilebilir. Dolayısıyla

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R(\infty)$$

ifadesi bu kelimenin yani $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ dönüşümünün parabolik noktası olduğundan

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R(\infty) = \frac{a}{c}$$

olduğu açıktır. Ayrıca Bölüm 2.8.1 de ifade edilen

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R(\infty) = [b_1, b_2, \dots, b_n]$$

eşitliği de dikkate alındığında

$[b_1, b_2, \dots, b_n] = C_n$ yolun son düğümü olduğundan $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ dönüşümü için yol

$$\langle \infty, \dots, \frac{a}{c} \rangle$$

şeklinde bulunmuş olur.

Benzer şekilde $U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R$ kelimesinde ve $\frac{a\bar{z}+b}{c\bar{z}+d}$ dönüşümünde 0 (sıfır) değeri yazıldığında;

$$U^{b_1} T U^{b_2} T \dots U^{b_n} R(0) = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$$

ve

$$\frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}(0) = \frac{b}{d}$$

elde edilir. $[b_1, b_2, \dots, b_{n-1}]$ sürekli kesri C_{n-1} değerine eşit olduğundan

$$C_{n-1} = [b_1, b_2, \dots, b_{n-1}] = \frac{b}{d}$$

olur. Yolun $(n - 1)$. düğümü $\frac{b}{d}$ olarak bulunur ve böylece yol

$$\langle \infty, \dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c} \rangle$$

biçiminde elde edilir. \square

İspat uygun şekilde düzenlenerek aynı teorem modüler grubun otomorfizma elemanları için de verilebilir. Dolayısıyla

$$\langle \infty, \dots, \frac{b}{d}, \frac{a}{c} \rangle$$

yolu için $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matris gösterimi kullanılabilir.

Bu teorem sayesinde son iki düğümü aynı olan yolların, genişletilmiş modüler grupta aynı matris gösterimine karşılık geldiği görülür. Buna dayanarak Farey graftaki geodezik yolları sınıflandırmak adına aşağıdaki teorem verilebilir.

5.1.3 Teorem : l_1 ve l_2 , ∞ dan 0 ile 1 arasındaki sabit bir $\frac{x}{y}$ rasyoneline giden geodezik yollar olsun.

$$\beta = \{(l_1, l_2) : l_1 \text{ ve } l_2 \text{ son düğüme aynı Farey ebeveyninden gelirler}\}$$

bu β bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat : i) Teoremin ifadesine uygun olarak; $\frac{a}{c} \oplus \frac{b}{d} = \frac{x}{y}$ olmak üzere, $l_1 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ olsun. Buna göre, l_1 ve l_1 son düğüme aynı Farey ebeveyninden gelirler. $(l_1, l_1) \in \beta$ olduğu açıktır. β bağıntısı yansıyandır.

ii) $(l_1, l_2) \in \beta \Rightarrow l_1 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ve $l_2 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ dir. Bu durumda l_2 ve l_1 yollarının son düğüme aynı Farey ebeveyninden geldikleri görülür. Yani $(l_2, l_1) \in \beta$ olur ve β simetriktir.

iii) $(l_1, l_2) \in \beta \Rightarrow l_1 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ve $l_2 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ve

$(l_2, l_3) \in \beta \Rightarrow l_2 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ve $l_3 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ise

$l_1 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ ve $l_3 = \langle \infty, \dots, \frac{a}{c}, \frac{x}{y} \rangle$ olduğundan $(l_1, l_3) \in \beta$ olur

böylece β geçişkendir.

Buradan β bir denklik bağıntısıdır. \square

5.1.4 Örnek : Teorem 5.1.3 ü kullanarak Farey grafta ∞ dan $\frac{22}{39}$ noktasına giden geodezik yolları denklik sınıflarına ayıralım.

Teorem 3.1.1 den ∞ dan $\frac{22}{39}$ noktasına giden geodezik yollar şunlardır:

$$l_1 = \langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$$

$$l_2 = \langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$$

$$l_3 = \langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle$$

$$l_4 = \langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{4}{7}, \frac{13}{23}, \frac{22}{39} \rangle$$

$$l_5 = \langle \infty, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$$

$$l_6 = \langle \infty, 1, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{9}{16}, \frac{22}{39} \rangle$$

Teorem 5.1.3 gereği son iki düğümü aynı olan yolları aynı denklik sınıfına yazarak;

$$\bar{l}_1 = \{l_1, l_2, l_5, l_6\}$$

$$\bar{l}_3 = \{l_3, l_4\}$$

elde edilir. Buradan bu bağıntıya göre yolların oluşturduğu denklik sınıfları her bir rasyonel sayı için ikişer tane olmak üzere sonsuz tanedir. \square

Teorem 5.1.1 de aynı parabolik noktaya sahip antiotomorfizma dönüşümleri Farey graftaki yollar yardımıyla bulunmuştu. $\frac{b_0}{d_0}$ ve $\frac{b_n}{d_n}, \frac{a}{c}$ düğümünün Farey

ebeveynleri olmak üzere bu dönüşümlerin matris gösterimlerinin $\begin{pmatrix} a & b_i \\ c & d_i \end{pmatrix}$ biçiminde olduğu düşünüldüğünde, tüm $\frac{b_i}{d_i}$ düğümleri için

$$\frac{b_0}{d_0} < \frac{b_1}{d_1} < \frac{b_2}{d_2} < \dots < \frac{a}{c} < \dots < \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} < \frac{b_n}{d_n}$$

olduğu Teorem 5.1.1 de verilmişti. Bu eşitsizlik sebebiyle aşağıdaki teorem $\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ ve $\frac{b_i}{d_i} > \frac{a}{c}$ şartları için iki duruma ayrılarak verilecektir.

5.1.5 Teorem : Parabolik noktası $\frac{a}{c} = \frac{b_0}{d_0} \oplus \frac{b_n}{d_n}$ olan dönüşümlerin matris gösterimleri

$$\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a & b_n \\ c & d_n \end{pmatrix}, \quad n \in \mathbb{N}$$

olsun.

a) $\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ için dönüşümlerin ilişkili olduğu yollar şu şekildedir:

$$\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{a}{c} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{a}{c} \rangle$$

⋮

$$\begin{pmatrix} a & b_m \\ c & d_m \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{b_1}{d_1}, \dots, \frac{b_m}{d_m}, \frac{a}{c} \rangle$$

⋮

c) $\frac{b_i}{d_i} > \frac{a}{c}$ için dönüşümlerin ilişkili olduğu yollar şu şekildedir:

$$\begin{pmatrix} a & b_n \\ c & d_n \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_n}{d_n}, \frac{a}{c} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b_{n-1} \\ c & d_{n-1} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}}, \frac{b_n}{d_n}, \frac{a}{c} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} a & b_{n-2} \\ c & d_{n-2} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_{n-2}}{d_{n-2}}, \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}}, \frac{b_n}{d_n}, \frac{a}{c} \rangle$$

⋮

İspat : a) $\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ olsun. İddiyayı tümevarımla ispatlayalım.

$n = 0$ için doğru olduğu Teorem 5.1.2 de ispatlandı.

$n = k$ için

$$\begin{pmatrix} a & b_k \\ c & d_k \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_{k-1}}{d_{k-1}}, \frac{b_k}{d_k}, \frac{a}{c} \rangle$$

doğru olsun.

$n = k + 1$ için

$$\begin{pmatrix} a & b_{k+1} \\ c & d_{k+1} \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_k}{d_k}, \frac{b_{k+1}}{d_{k+1}}, \frac{a}{c} \rangle$$

olduğunu gösterelim.

$n = k$ için

$$\begin{pmatrix} a & b_k \\ c & d_k \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_k}{d_k}, \frac{a}{c} \rangle$$

dir. $\begin{pmatrix} a & b_{k+1} \\ c & d_{k+1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b_k \\ c & d_k \end{pmatrix}$ ile parabolik noktası aynı olan dönüşümdür.

Önceki teoremden parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan dönüşümleri bulmak için

$\begin{pmatrix} a & b_k \\ c & d_k \end{pmatrix}$ dan sonra $\frac{a}{c} \oplus \frac{b_k}{d_k} = \frac{b_{k+1}}{d_{k+1}}$ işlemi ile $\begin{pmatrix} a & b_{k+1} \\ c & d_{k+1} \end{pmatrix}$ bulunur. Buradan $\frac{b_{k+1}}{d_{k+1}}, \frac{a}{c}$ ve $\frac{b_k}{d_k}$ arasındadır ve ikisiyle de Farey komşusudur. O halde Farey graftaki bu yol

$$\langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \dots, \frac{b_k}{d_k}, \frac{b_{k+1}}{d_{k+1}}, \frac{a}{c} \rangle \text{ olur.}$$

b) $\frac{b_i}{d_i} > \frac{a}{c}$ durumu için benzer işlemler yapılır. □

İspat 2 : Yukarıda tümevarım yöntemiyle yapılan bu ispatı şimdi de doğrudan ispat yöntemiyle yapalım. Parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan dönüşümlerin matris gösterimleri

$\begin{pmatrix} a & b_i \\ c & d_i \end{pmatrix}$ olsun. $\frac{b_i}{d_i}$ leri bulmak için Öklid algoritmasıyla $ad - bc = \pm 1$ denkleminin (b_0, d_0) özel çözümü bulunur. $0 < \frac{a}{c} < 1$ olduğundan $a < c$ olur ve Öklid algoritması şu şekilde ilerler:

$$ad - bc = \pm 1$$

$$c = q_1 \cdot a + r_1$$

$$a = q_2 \cdot r_1 + r_2$$

⋮

$$r_{n-1} = q_{n-1} \cdot r_n + 0$$

buradan geriye gidilerek $ad - bc = \pm 1$ elde edilir ve (b_0, d_0) özel çözümü bulunur. $ad - bc = \pm 1$ bir özel çözümü bilinen lineer diophant denkleminin diğer çözümleri bulunur.

$d = d_0 - c \cdot t$ ve $b = b_0 - a \cdot t$ bulunur. $\frac{b_0}{d_0}$ ile $\frac{b_1}{d_1}$ in Farey komşusu olup olmadığını görmek için $b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0 = \pm 1$ olduğu gösterilmelidir.

$$b_0 \cdot d_1 - b_1 \cdot d_0 = b_0 \cdot (d_0 - c) - (b_0 - a) \cdot d_0$$

$$= b_0 \cdot d_0 - b_0 \cdot c - b_0 \cdot d_0 + a \cdot d_0$$

$$= a \cdot d_0 - b_0 \cdot c = \pm 1 \text{ dir.}$$

Böylece $\frac{b_0}{d_0}$ ile $\frac{b_1}{d_1}$ Farey komşusudur. Ayrıca $\frac{a}{c}$ ile $\frac{b_1}{d_1}$ için

$$a \cdot d_1 - b_1 \cdot c = a \cdot (d_0 - c) - (b_0 - a) \cdot c = a \cdot d_0 - b_0 \cdot c = \pm 1$$

olduğundan $\frac{a}{c}$ ile $\frac{b_1}{d_1}$ Farey komşusudur. Buradan

$$\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix} \text{ için Farey graftaki yol } \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{a}{c} \rangle$$

$$\text{ve } \begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix} \text{ için Farey graftaki yol } \langle \infty, \dots, \frac{b_1}{d_1}, \frac{a}{c} \rangle \text{ idi.}$$

$\begin{pmatrix} a & b_1 \\ c & d_1 \end{pmatrix}$ için $\langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{a}{c} \rangle$ yolu yazılabilir.

Benzer şekilde $\frac{b_2}{d_2}, \frac{a}{c}$ ve $\frac{b_1}{d_1}$ ile Farey komşusu olacağından $\begin{pmatrix} a & b_2 \\ c & d_2 \end{pmatrix}$ için

$$\langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{b_1}{d_1}, \frac{b_2}{d_2}, \frac{a}{c} \rangle$$

yolu yazılabilir. Bu şekilde devam ederek $\frac{b_i}{d_i} < \frac{a}{c}$ için

$$\begin{pmatrix} a & b_m \\ c & d_m \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{b_0}{d_0}, \frac{b_1}{d_1}, \dots, \frac{b_m}{d_m}, \frac{a}{c} \rangle$$

elde edilir.

$\frac{b_i}{d_i} > \frac{a}{c}$ için benzer işlemler yapılarak istenen bulunur. \square

5.1.6 Örnek : Parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan, genişletilmiş modüler gruptaki dönüşümleri Teorem 5.1.1'i kullanarak bulalım. 7. Farey dizisi olan

$$F_7 = \left\{ \frac{0}{1}, \frac{1}{7}, \frac{1}{6}, \frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{2}{7}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{4}{7}, \frac{3}{4}, \frac{5}{7}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}, \frac{1}{1} \right\}$$

göz önüne alındığında $\frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$ olduğu görülür. $\begin{pmatrix} 2 & b_i \\ 7 & d_i \end{pmatrix}$ dönüşümleri için $\frac{b_i}{d_i}$

düşümleri şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = \frac{b_0}{d_0} < \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{11} = \frac{b_1}{d_1} < \frac{3}{11} \oplus \frac{2}{7} = \frac{5}{18} = \frac{b_2}{d_2} < \dots < \frac{2}{7} < \dots < \frac{3}{10} \oplus \frac{2}{7} = \frac{5}{17} \\ &= \frac{b_{n-2}}{d_{n-2}} < \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{10} = \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} < \frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Buradan, parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan, genişletilmiş modüler gruptaki otomorfizma dönüşümleri

$$\frac{b_i}{d_i} < \frac{2}{7} \text{ için } \frac{2z+1}{7z+4}, \frac{2z+3}{7z+11}, \frac{2z+5}{7z+18}, \dots,$$

$$\frac{2}{7} < \frac{b_i}{d_i} \text{ için } \frac{2z-1}{7z-3}, \frac{2z-3}{7z-10}, \frac{2z-5}{7z-17}, \dots$$

antiotomorfizma dönüşümleri

$$\frac{b_i}{d_i} < \frac{2}{7} \text{ için } \frac{2\bar{z}-1}{7\bar{z}-4}, \frac{2\bar{z}-3}{7\bar{z}-11}, \frac{2\bar{z}-5}{7\bar{z}-18}, \dots,$$

$$\frac{2}{7} < \frac{b_i}{d_i} \text{ için } \frac{2\bar{z}+1}{7\bar{z}+3}, \frac{2\bar{z}+3}{7\bar{z}+10}, \frac{2\bar{z}+5}{7\bar{z}+17}, \dots$$

olarak bulunur.

5.1.7 Örnek : Yukarıdaki örnekte bulduğumuz dönüşümlerin ilişkili olduğu yolları Teorem 5.1.5 i kullanarak bulalım.

Parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan dönüşümlerin matris gösterimleri:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{7} \text{ ve } \frac{b_0}{d_0} = \frac{1}{4}, \frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{3} \text{ olduğu göz önüne alınarak}$$

$\frac{b_i}{d_i} < \frac{2}{7}$ olan dönüşümler için yollar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{2}{7} \rangle$$

⋮

Bu şekilde sondan bir önceki düğümün değeri gittikçe $\frac{2}{7}$ sayısına yaklaşarak sonsuz tane yol elde edilir.

$\frac{b_i}{d_i} > \frac{2}{7}$ olan dönüşümler için yollar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{5}{17}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\vdots$$

Bu şekilde sondan bir önceki düğümün değeri gittikçe $\frac{2}{7}$ sayısına yaklaşarak sonsuz tane yol elde edilir.

5.1.8 Sonuç : Parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan genişletilmiş modüler grubun herhangi bir elemanı için $\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b_n \\ c & d_n \end{pmatrix}$ dönüşümleri Teorem 5.1.1 de verildiği gibi bulunur ve diğer dönüşümler bu iki dönüşümden yola çıkarak hesaplanabilir. Bu iki dönüşümün karşılık geldiği Farey graftaki yollar ise Teorem 5.1.2 de olduğu gibi bulunur ve parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan diğer dönüşümler için olan yollar da bunlardan türetilebilir.

5.1.9 Örnek : Genişletilmiş modüler grubun $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$ elemanı için bu dönüşümün karşılık geldiği yolları bulalım.

$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$ elemanı için Teorem 5.1.1 i uygulayalım. $\frac{a}{c} = \frac{2}{7}$ dir. Bu durumda $\frac{2}{7}$ nin paydası 7 olduğundan F_7 yi kullanarak $\frac{2}{7}$ nin Farey ebeveynleri $\frac{1}{4}$ ve $\frac{1}{3}$ olarak bulunur. Sonuç 5.1.7 de $\frac{1}{4} = \frac{b_0}{d_0}$ ve $\frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{3}$ değerleri yazıldığında $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümleri sonsuzdan $\frac{2}{7}$ düğümüne giden geodezik yolların elde edildiği dönüşümler olarak bulunur. Dolayısıyla parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan diğer dönüşümler bu iki dönüşümden yola çıkarak bulunabilir. $\frac{7}{17} > \frac{2}{7}$ olduğundan bu dönüşüm için $\frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{3}$ yani $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümü kullanılmalıdır. $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümünden yola çıkarak $\frac{1}{3} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{10}$ işlemi ile $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}$ dönüşümü ve tekrar $\frac{3}{10} \oplus \frac{2}{7} = \frac{5}{17}$ işlemi ile $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}$ dönüşümü elde edilir. Böylece $\frac{2}{7}$ nin Farey ebeveynlerini kullanarak parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan istediğimiz dönüşümü elde ettik. Şimdi benzer şekilde bu dönüşümün karşılık geldiği Farey graftaki yolu bulalım. Teorem 5.1.2 den $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümü için

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$$

yolunun bulunduğunu biliyoruz. Teorem 5.1.5 i uygularsak

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7} \rangle$$

ve

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{5}{17}, \frac{2}{7} \rangle$$

olarak bulunur.

5.2 Rasyonel Sayıdan Fibonacci Sayılarına Geçiş

Farey grafinin 0 ile 1 aralığındaki kısmı tüm Farey grafi temsil ettiğinden, Bölüm 2.6 da da belirtildiği gibi bu aralıktan bir rasyonel sayı olarak işlemleri yapabiliriz. Farey graftaki yolları, tamsayı sürekli kesirleri ve bu rasyonel sayıyı parabolik nokta kabul eden genişletilmiş modüler grup elemanının yeni blok form gösterimini kullanarak bu rasyonel sayı ile Fibonacci sayıları arasında bir ilişki kurulabilir.

Bunun için şu yol izlenir: İlk olarak, Teorem 3.1.1 de elde edildiği gibi Farey grafta ∞ dan alınan bu rasyonel sayıya giden yollar bulunur. Daha sonra Teorem 3.1.9 kullanılarak, verilen tamsayı sürekli kesrin C_n yakınsayanları yardımıyla bu yollara karşılık gelen tamsayı sürekli kesirler bulunur ve Teorem 4.5.1 kullanılarak $f = RTS$ ve $h = TSR$ yeni blok formlara geçiş yapılır. Yeni blok formlarla Fibonacci sayıları arasındaki ilişkiyi de kullanarak istenen sonuca ulaşılır.

5.2.1 Teorem : 0 ile 1 aralığından herhangi bir $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısı alındığında bu sayıyı parabolik nokta kabul eden dönüşüm, bileşenleri genişletilmiş modüler grubun elemanlarının katsayıları olan Fibonacci sayılarından oluşan matrislerle ifade edilebilir.

İspat : Alınan $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısı için Teorem 3.1.1 uygulandığında ∞ dan $\frac{a}{c}$ sayısına giden Farey graftaki yollar bulunur. Ardından bulunan her yol için, Teorem 3.1.9 sayesinde $\frac{a}{c}$ sayısının tamsayı sürekli kesir açılımları bulunur. Teorem 4.5.1 ile de bu tamsayı sürekli kesirlerle ilişkili olan yeni blok formlar bulunmuş olur. Bulunan bu yeni blok form gösterimine sahip kelimelerin parabolik noktaları $\frac{a}{c}$ sayısıdır. Tanım 4.1.10 da tanımlanan $f = RTS$ ve $h = TSR$ dönüşümleri için, Teorem 4.1.11' de verilen f_k ve h_k , k . Fibonacci sayısı olmak üzere;

$$f^k = \begin{pmatrix} f_{k-1} & f_k \\ f_k & f_{k+1} \end{pmatrix} \quad h^k = \begin{pmatrix} h_{k+1} & h_k \\ h_k & h_{k-1} \end{pmatrix}$$

ilişkisi kullanılarak, parabolik noktaları $\frac{a}{c}$ olan kelimeler Fibonacci sayılarıyla ifade edilmiş olur. \square

5.2.2 Örnek : $\frac{2}{7}$ rasyonel sayısını alalım ve ilişkili olduğu Fibonacci sayılarını bulalım.

Önce Farey grafta ∞ dan $\frac{2}{7}$ sayısına giden geodezik yolları bulalım. Bunlar

$$\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle \text{ ve } \langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$$

şeklindedir.

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için tamsayı sürekli kesir $[0, -3, 2]$
2. $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için tamsayı sürekli kesir $[0, -4, -2]$ dir.

Bu sürekli kesirlerden yeni blok formlara geçelim.

$ad - bc = 1$ durumu için

$$\begin{aligned} [0, -3, 2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS)^2 \cdot T(\infty) = fhf^2hRT(\infty) \\ &= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} RT \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0, -4, -2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS) \cdot (TS^2) = fhf^3R \\
&= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} R \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$ad - bc = -1$ durumu için

$$\begin{aligned}
[0, -3, 2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS)^2 R(\infty) = fhf^2h \\
&= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[0, -4, -2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS) \cdot (TS^2) TR = fhf^3T \\
&= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Böylece Teorem 5.2.1 ve Teorem 5.1.4 birlikte düşünüldüğünde aşağıdaki sonuç elde edilir.

5.2.3 Sonuç : $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısını parabolik nokta kabul eden genişletilmiş modüler gruptaki tüm dönüşümler için Farey graftaki yollar ve Fibonacci sayıları $\frac{b_0}{d_0} \oplus \frac{b_n}{d_n} = \frac{a}{c}$ olacak şekildeki $\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b_n \\ c & d_n \end{pmatrix}$ dönüşümleri kullanılarak bulunabilir.

Teorem 5.1.1 den parabolik noktası $\frac{a}{c}$ olan tüm dönüşümler bulunur. Teorem 5.1.4 ten $\begin{pmatrix} a & b_0 \\ c & d_0 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a & b_n \\ c & d_n \end{pmatrix}$ dönüşümleri kullanılarak diğer dönüşümlerin de ilişkili olduğu Farey graf yolları bulunur. Tanım 4.1.10 ve Teorem 4.1.11 den Fibonacci sayılarına geçiş sağlanır. \square

5.2.4 Örnek : $\frac{2}{7}$ sayısını parabolik nokta kabul eden genişletilmiş modüler gruptaki tüm dönüşümler için Fibonacci sayılarını bulalım.

Teorem 5.1.1 i kullanarak parabolik noktası $\frac{2}{7}$ olan tüm dönüşümleri bulalım.

$\frac{1}{4} \oplus \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$ olduğundan, $\begin{pmatrix} 2 & b_i \\ 7 & d_i \end{pmatrix}$ dönüşümleri için $\frac{b_i}{d_i}$ ler şu şekildedir:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} = \frac{b_0}{d_0} < \frac{1}{4} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{11} = \frac{b_1}{d_1} < \frac{3}{11} \oplus \frac{2}{7} = \frac{5}{18} = \frac{b_2}{d_2} < \dots < \frac{2}{7} < \dots < \frac{5}{10} \oplus \frac{2}{7} = \frac{7}{17} \\ &= \frac{b_{n-2}}{d_{n-2}} < \frac{1}{3} \oplus \frac{2}{7} = \frac{3}{10} = \frac{b_{n-1}}{d_{n-1}} < \frac{b_n}{d_n} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Buradan dönüşümler:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

olarak bulunur. Teorem 5.1.4 ten $\frac{b_i}{d_i} < \frac{2}{7}$ olan dönüşümler için yollar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{4}, \frac{3}{11}, \frac{5}{18}, \frac{2}{7} \rangle$$

⋮

$\frac{b_i}{d_i} > \frac{2}{7}$ olan dönüşümler için yollar:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 10 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{2}{7} \rangle$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 17 \end{pmatrix} \rightarrow \langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{3}{10}, \frac{5}{17}, \frac{2}{7} \rangle$$

⋮

Buradan Sonuç 5.1.7 de verildiği gibi tüm dönüşümler $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümlerinden ve yolları da bu iki dönüşümün yollarından türetilebileceğinden ∞

dan $\frac{2}{7}$ sayısına giden geodezik yollar için $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümleri incelenerek $\frac{2}{7}$ sayısının ilişkili olduğu Fibonacci sayıları bulunur. Teorem 5.1.2 den $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümü için yol $\langle \infty, \dots, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ şeklindedir. Burada geodezik yolları aradığımızdan, Teorem 3.1.5 ten yolun geodezik olması için $\frac{1}{3}$ düğümünden bir önceki düğüm $\frac{1}{3}$ sayısının Farey ebeveyni ve ∞ un Farey komşusu olmalıdır. Bu şartlara uyan tek sayı 0 (sıfır) dır. Dolayısıyla $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$ dönüşümü için yol $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ dir. Benzer sebepten $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ dönüşümü için yol $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ dir.

1. $\langle \infty, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için tamsayı sürekli kesir $[0, -3, 2]$
2. $\langle \infty, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{7} \rangle$ geodezik yolu için tamsayı sürekli kesir $[0, -4, -2]$ dir.

Bu sürekli kesirlerden yeni blok formlara geçelim.

$ad - bc = 1$ durumu için

$$\begin{aligned} [0, -3, 2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS)^2 \cdot T(\infty) = fhf^2hRT(\infty) \\ &= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} RT \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [0, -4, -2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS) \cdot (TS^2)(\infty) = fhf^3R(\infty) \\ &= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} R \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$ad - bc = -1$ durumu için

$$\begin{aligned} [0, -3, 2] &= (TS^2)^3 \cdot (TS)^2 R(\infty) = fhf^2h(\infty) \\ &= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_2 & f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$[0, -4, -2] = (TS^2)^3 \cdot (TS) \cdot (TS^2)TR(\infty) = fhf^3T(\infty)$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} f_0 & f_1 \\ f_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_2 & h_1 \\ h_1 & h_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_2 & f_3 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

5.3 Bilgisayar Programı

5.3.1 Hesaplayıcı Program

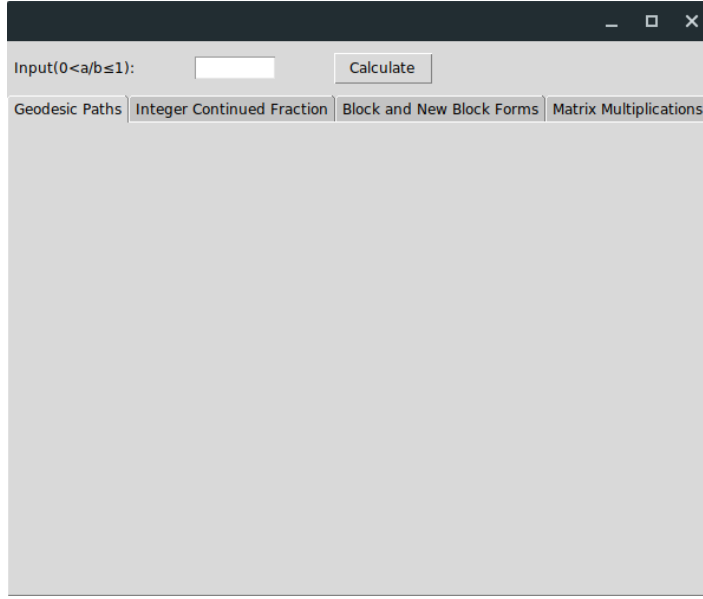
Bu bölümde, daha önceki bölümlerde bulduğumuz teoremleri kullanarak aşağıda tanıtilen programı hazırladık. Bu program herhangi bir rasyonel sayıyı alıp ilişkili olduğu Fibonacci sayılarından oluşan matrisleri verir.

Hesaplayıcı yazılım, yürütülebilir bir windows platformu uygulaması ve Python kaynak kodu olarak sunulmaktadır. Exe uzantılı uygulama dosyası çalıştırıldığında program ana ekranı (Şekil 5.1) kullanıcıya görüntülenir. Bu ekrana gerekli kesir girilip "Hesapla" butonuna basıldıktan sonra istenen sekme seçilerek bu rasyonelle ilişkili olan geodezik yollar (Şekil 5.2), tamsayı sürekli kesirler (Şekil 5.3), genişletilmiş modüler grubun otomorfizma ve antiotomorfizma elemanları için blok ve yeni blok formlar (Şekil 5.4), Fibonacci sayılarından oluşan matrisler (Şekil 5.5) ekranda görüntülenir.

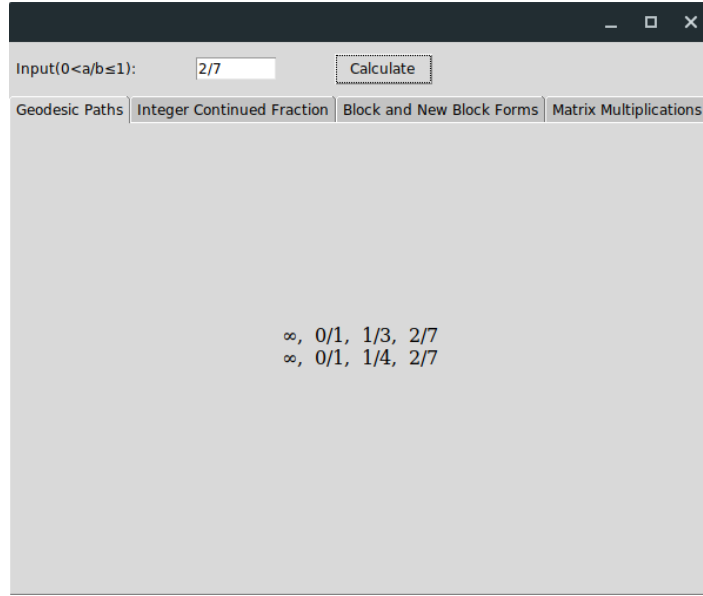
Programın kaynak koduna

<https://github.com/kaymakf/Sule-Sarica/blob/master/main.py> adresinden, windows yürütülebilir dosyasına

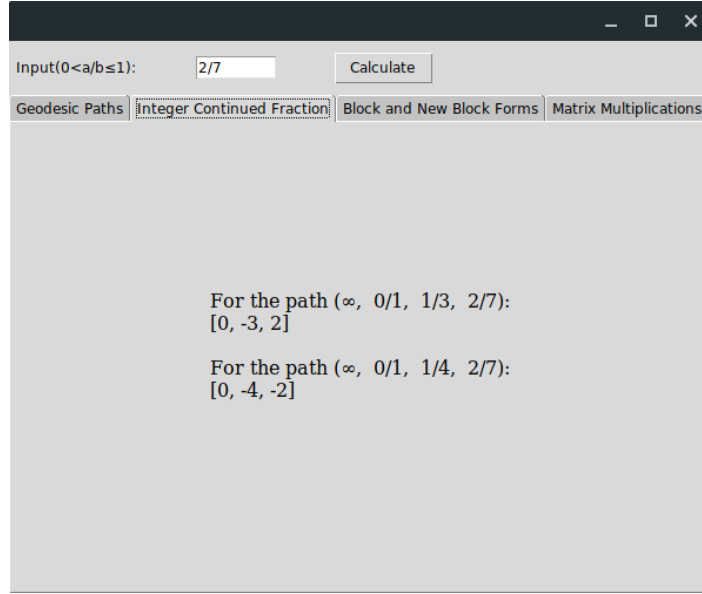
<https://github.com/kaymakf/Sule-Sarica/releases/download/0.1.1/sule.exe> adresinden erişilebilir.



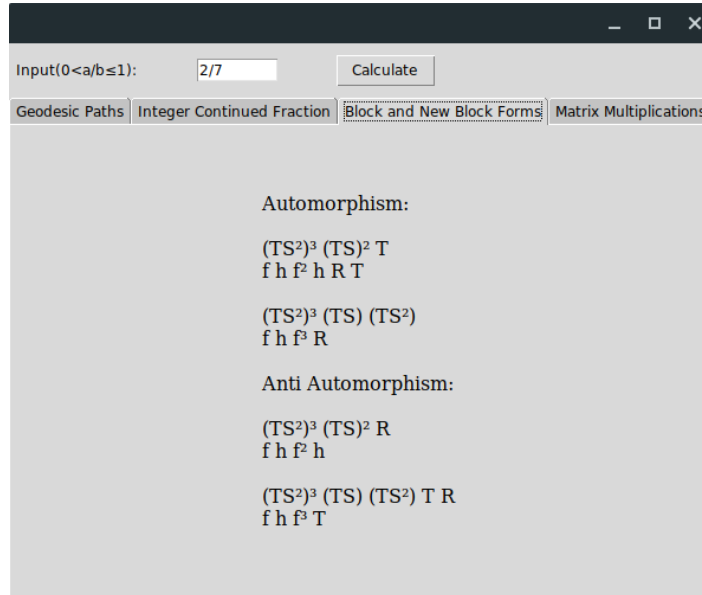
Şekil 5.1: Ana ekran.



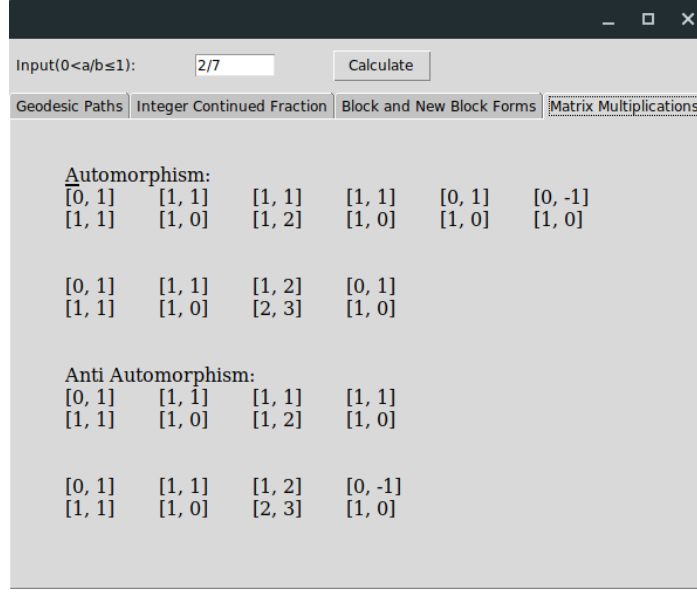
Şekil 5.2: Sonuç ekranı 1.



Şekil 5.3: Sonuç ekranı 2.

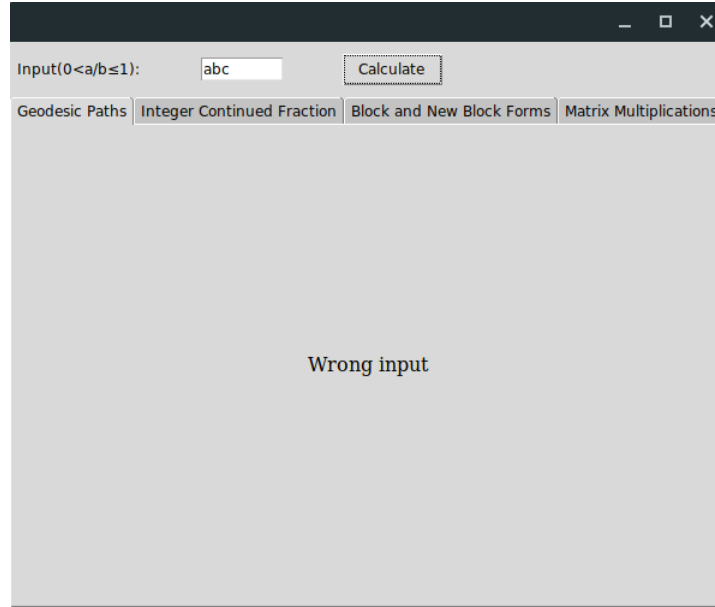


Şekil 5.4: Sonuç ekranı 3.

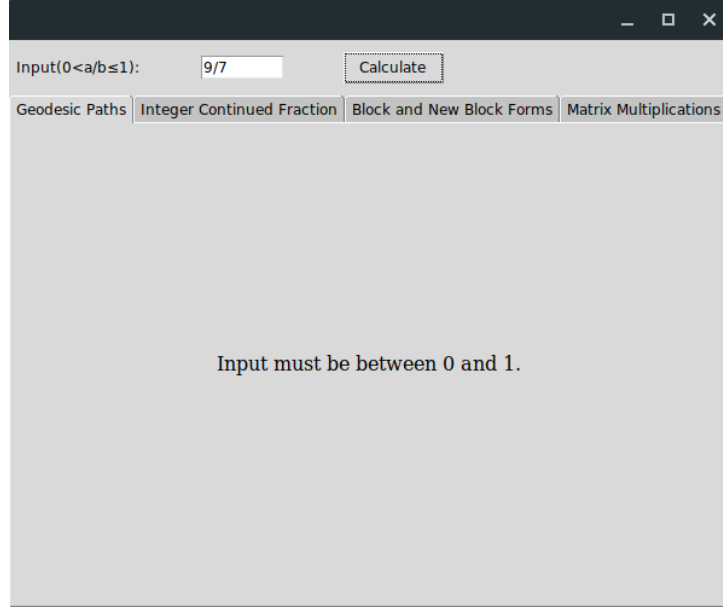


Şekil 5.5: Sonuç ekranı 4.

Ayrıca girdi bir rasyonel sayı değilse (Şekil 5.6) veya rasyonel sayı istenen aralığın dışındaysa (Şekil 5.7) ekranda uyarı görülür.



Şekil 5.6: Uyarı ekranı 1.



Şekil 5.7: Uyarı ekranı 2.

5.3.2 Tasarım Ayrıntıları

Program, Python programlama dilinde yazılmış, prosedürel ve yapısal programlama ilkeleri kullanılarak tasarlanmış ve networkx, sympy, python standart math ve tkinter kütüphaneleri içeri aktarılarak gerçekleştirilmiştir. Windows ortamı için derlenmiş olan yürütülebilir dosya gerekli kütüphaneleri içerdiğinden dolayı, programın çalıştırılması için ek bir yazılım yükleme ihtiyacı yoktur.

Bu program prosedürel programlama ilkeleri doğrultusunda tasarlanmıştır. Hesaplamalar sırasındaki her bir işlem bloğu, tanımlanan bir fonksiyon ile gerçekleştirilmiştir.

Ana kod bloğunda grafik arayüzünün ekranda görüntülenmesi ve kullanıcı ile etkileşime geçmesi için gerekli değişken tanımlamaları ve fonksiyon çağrıları yapılır. Bu fonksiyonların kullandığı algoritmalar daha önceki çalışmalarımızda bulduğumuz teoremlere dayanır. Fonksiyonların çalışma şeklide şu biçimdedir:

onclick fonksiyonu, kullanıcı "Hesapla" butonuna bastığı zaman çağrılır, girdi alanına girilen değer istenen aralıkta geçerli bir kesir olup olmadığını kontrol eder ve bu kesri argüman olarak kullanarak calculate fonksiyonunu çağırır.

calculate fonksiyonu, parametre olarak aldığı kesri kullanarak, sonuçtaki matrislere ulaşmak için gerekli tüm işlemleri yapan fonksiyonları sırasıyla çağırır ve sonuç matrislerini döndürür.

normalizeFraction fonksiyonu, parametre olarak aldığı kesri 0-1 aralığına düşürür.

simpleContinuedFraction fonksiyonu, parametre olarak aldığı kesrin basit sürekli kesir açılımını hesaplar.

findThePath fonksiyonu, parametre olarak aldığı basit sürekli kesri kullanarak, sonsuzdan bu sayıya gelen Farey graftaki geodezik yolları Dijkstra algoritmasını kullanarak bulur.

integerContinuedFraction fonksiyonu, parametre olarak aldığı geodezik yolun ilişkili olduğu tamsayı sürekli kesri bulur.

getTheWord fonksiyonu, parametre olarak aldığı tamsayı sürekli kesirden genişletilmiş modüler gruptaki bir kelimenin blok formuna ve oradan da yeni blok formuna geçer.

getTheMatrix fonksiyonu, parametre olarak bulunan yeni blok formu alır ve fibonacci sayılarından oluşan matrisleri hesaplar.

fib fonksiyonu, parametresi olan n'inci fibonacci sayısını bulur.

Böylece ekrana yazdığımız rasyonel sayıya karşılık ilişkili olduğu geodezik yollar, tamsayı sürekli kesirler, genişletilmiş modüler grubun otomorfizma ve antiotomorfizma elemanları için blok ve yeni blok formlar, Fibonacci sayılarından oluşan matrisler ekranda görüntülenir.

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçları bölümlere ayırarak kısaca açıklayalım.

Dördüncü bölümde, parabolik nokta, blok form ve yeni blok form kavramları tanıtarak, modüler grubun elemanlarının parabolik noktaları tamsayı sürekli kesirler ile ifade edilmiştir.

Modüler grupta parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri olan kelime

$$(TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}T$$

biçiminde bulunmuştur. Ardından bu durumun tersi düşünülerek modüler grubun herhangi bir elemanının, parabolik noktasının tamsayı sürekli kesirlerle ifadesi bulunmuştur.

Bölümün devamında, $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden otomorfizmanın yeni blok formu $i = 2, 3, \dots, n - 1$ olmak üzere;

$$b_1 \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}_{1.\text{parça}}, b_1 \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot h^2}_{1.\text{parça}}$$

$$b_i \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot h^2}_{i.\text{parça}}, b_i \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}} \cdot fR}_{i.\text{parça}}$$

$$b_n \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}} \cdot T}_{n.\text{parça}}, b_n \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}} \cdot hRT}_{n.\text{parça}}$$

biçiminde elde edilmiştir.

Genişletilmiş modüler grup içindeki otomorfizmalarla uyumlu olarak, genişletilmiş modüler grupta parabolik noktası $[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri olan antiotomorfizma elemanı

$$(TS)^{b_1-1}.(TS^2).(TS)^{b_2-2}.(TS^2).(TS)^{b_3-2}.(TS^2) \dots (TS^2).(TS)^{b_n-1}.R$$

olarak bulunmuştur. Ayrıca bu durumun tersi düşünülerek, genişletilmiş modüler grubun herhangi bir elemanın parabolik noktalarının tamsayı sürekli kesirlerle ifadesi elde edilmiştir.

$[b_1, b_2, \dots, b_n]$ tamsayı sürekli kesri için bu tamsayı sürekli kesri parabolik nokta kabul eden antiotomorfizmanın yeni blok formu, $i = 2, 3, \dots, n - 1$ olmak üzere;

$$b_1 \text{ tek ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-1}{2}} \cdot fR}_{1.\text{parça}} \dots, b_1 \text{ çift ise} = \underbrace{(hf)^{\frac{b_1-2}{2}} \cdot h^2}_{1.\text{parça}} \dots$$

$$b_i \text{ tek ise} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-3}{2}} \cdot h^2}_{i.\text{parça}} \dots, b_i \text{ çift ise} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_i-2}{2}} \cdot fR}_{i.\text{parça}} \dots$$

$$b_n \text{ tek ise} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-1}{2}} \cdot R}_{n.\text{parça}}, b_n \text{ çift ise} = \dots \underbrace{(hf)^{\frac{b_n-2}{2}} \cdot h}_{n.\text{parça}}$$

şeklinde bulunmuştur.

Beşinci bölümde, öncelikle parabolik noktası aynı olan dönüşümler Farey graf yardımıyla bulunmuş, daha sonra bu dönüşümlerin ilişkili olduğu Farey graftaki yolların bulunma yöntemleri ve aralarındaki bağıntılar verilmiştir. Ayrıca Farey graftaki geodezik yollar denklik sınıflarına ayrılmıştır. Yine bu bölümde 0 ile 1 aralığından alınan herhangi bir $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısı için bu sayıyı parabolik nokta kabul eden dönüşüm, Fibonacci sayılarından oluşan matrislerle ifade edilmiştir.

Ayrıca bu bölümde önceki bölümlerde bulduğumuz teoremleri kullanarak bir bilgisayar programı hazırlanmıştır. Bu program 0 ile 1 aralığından herhangi bir $\frac{a}{c}$ rasyonel sayısını girdi olarak alıp ekranda sekmeler halinde, bu rasyonelle ilişkili olan geodezik yolları, tamsayı sürekli kesirleri, genişletilmiş modüler grubun otomorfizma ve antiotomorfizma elemanları için blok ve yeni blok formları ve Fibonacci sayılarından oluşan matrisleri görüntüler.

Yapılan bu çalışmalar [56] numaralı kaynakta toplanmıştır.

İleride yapılacak çalışmalar için bazı problemler şu şekilde olabilir.

Bu çalışmada tamsayı sürekli kesirler ile modüler grup arasında bulunan ilişkiler, λ sürekli kesirler ile Hecke grupları arasında olduğundan, yapılanlar Hecke

ve genişletilmiş Hecke gruplarına taşınabilir. Ayrıca genişletilmiş modüler grup elemanları içinde, terslerinin parabolik noktaları aynı $\frac{a}{c}$ olan dönüşümleri düşünelim.

Bu dönüşümler içinde parabolik noktası 0-1 aralığında olan, $\frac{b_0}{d_0} \oplus \frac{b_n}{d_n} = \frac{a}{c}$ olmak üzere, $\frac{d_0z-b_0}{cz-a}$ ve $\frac{d_nz-b_n}{cz-a}$ vardır. Ve diğer tüm dönüşümlerin

$$z \rightarrow z \pm k, k = 1, 2, \dots$$

dönüşümü yardımıyla bu iki dönüşümden elde edilebileceği görülür, bu durum incelenebilir.

7. KAYNAKLAR

- [1] Hecke, E., “Über die Bestimmung Dirichleter Reichen durch ihre Funktionalgleichungen”, *Math. Ann.*, 112, 664-699, (1936).
- [2] Rosen, D., “A class of continued fractions associated with certain properly discontinuous groups”, *Duke Math. J.*, 21, 549-563, (1954).
- [3] Beardon, A. F., Hockman, M. and Short, I., “Geodesic continued fractions”, *Michigan Math. J.* 61 (1), 133–150, (2012).
- [4] Jones , G.A., Singerman, D. and Wicks, K., *The Modular Group and Generalized Farey Graphs*, Cambridge: London Math. Soc. Lecture Notes, CUP, 316–338, (1991).
- [5] Koroğlu, Ö., “The determination of parabolic points in modular and extended modular groups by continued fractions”, *Bull. Malays. Math. Sci. Soc.*, 33 (2), 439-445, (2010).
- [6] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., “On the Group Structure and Parabolic Points of the Hecke Group $H(\lambda)$ ”, *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, 51, 35-46, (2002).
- [7] Fine, B., “Trace classes and quadratic forms in the modular group”, *Canad. Math. Bull.*, 37 (2), 202-212, (1994).
- [8] Jones, G. A. and Thornton, J. S., “Automorphisms and Congruence Subgroups of The Extended Modular Group”, *J. London Math. Soc.*, 34 (2), 26-40, (1986).
- [9] Koroğlu, Ö. and Şahin, R., “Generalized Fibonacci sequences related to the extended Hecke groups and an application to the extended modular group”, *Turkish J. Math.*, 34, 325-332, (2010).
- [10] Cangül, İ. N., “Normal Subgroups of Hecke Groups”, Ph.D. Thesis, *Southampton University*, (1993).

- [11] İkikardeş, S., Şahin, R. and Koruoğlu, Ö., “Power Subgroups of Some Hecke Groups”, *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 497-508, (2006).
- [12] Cangül, İ. N. and Singerman, D., “Normal Subgroups of Hecke Groups and Regular Maps”, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 59-74, (1998).
- [13] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., “Power Subgroups of Hecke Groups \sqrt{n} ”, *Int. J. Math. Sci.*, 11, 703-708, (2001).
- [14] Cangül, İ. N., Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., “Power Subgroups of Some Hecke Groups II” *Houston J. Math.*, 33, 33-42, (2007).
- [15] Cangül, İ. N., “Normal Subgroups of the Hecke Group ”, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Series A*, 43, 129-135, (1994).
- [16] Yılmaz, N. and Cangül, İ. N., “Normal Subgroups of Hecke Group $\sqrt{5}$ ”, *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, 28 (4), 277-283, (2000).
- [17] Schmidt, T. A. and Sheingorn, M., “Length spectra of the triangle Hecke Groups”, *Math. Z.* 220, 369-397, (1995).
- [18] Schmidt, T. A. and Sheingorn, M., “Covering the Hecke Triangle Surfaces”, *The Ramanujan Journal*, 1, 155-163, (1997).
- [19] Başkan, T., *Ayrık Gruplar*, Beytepe, Ankara: H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 1-29, (1980).
- [20] Ford, L. R., *Automorphic Functions*, New York: Chelsea Publishing Company, 66-82, (1951).
- [21] Newman, M., “The Structure of Some Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 480-487, (1962).
- [22] Newman, M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).
- [23] Koruoğlu, Ö., “The images under the modular group and extended modular group”, *Hacet. J. Math. Stat.*, 40, 15-20, (2011).

- [24] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., “On the Power Subgroups of the Extended Modular Group $\bar{\Gamma}$ ”, *Turk. J. Math.*, 28, 143-151, (2004).
- [25] Bizim, O., “Genişletilmiş Modüler Grup”, Doktora Tezi, *Uludağ Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Bursa, (1995).
- [26] Koruoğlu, Ö., Şahin, R. and İkikardeş, S., “The Normal Subgroup Structure of the Extended Hecke Groups”, *Bull. Braz. Math. Soc. (N.S.)*, 38, 51-65, (2007).
- [27] Şahin, R., Bizim, O. and Cangül, İ. N., “Commutator Subgroups of the Extended Hecke Groups $\bar{H}(\lambda_p)$ ”, *Czechoslovak Mathematical Journal*, 54, 253-259, (2004).
- [28] Şahin, R., Koruoğlu, Ö. and İkikardeş, S., “On the Extended Hecke Group $\bar{H}(\lambda_5)$ ”, *Algebra Colloquium.*, 13, 17-23, (2006).
- [29] Şahin, R., İkikardeş, S. and Koruoğlu, Ö., “Some Normal Subgroups of The Extended Hecke Groups $\bar{H}(\lambda_p)$ ”, *Rocky Mountain J. Math.*, 36, 1033-1048, (2006).
- [30] Özgür, N. Y. and Şahin, R., “On The Extended Hecke Groups”, *Turk. J. Math.*, 27, 473-480, (2003).
- [31] Koruoğlu, Ö., “ $\bar{H}(\lambda)$ ile $\bar{H}(\lambda_p)$ Genişletilmiş Hecke Gruplarının Bazı Normal Alt Grupları ve Sürekli Kesirler”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2005).
- [32] Huang, S., “Generalized Hecke groups and Hecke polygons”, *Annales Academia Scientiarum Fennica Mathematica*, 24, 187-214, (1999).
- [33] Jones, G. A. and Singerman, D., *Complex Functions*, Cambridge University Press, 17-19, 221-267, (1987).
- [34] Başkan, T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Bursa: Vipaş, 318-324, (2001).
- [35] Başkan, T., *Ayrık Gruplar*, Beytepe, Ankara: H.Ü. Fen Fakültesi Yayınları, 129, (1980).

- [36] Ford, L. R., *Automorphic Functions*, New York: Chelsea Publishing Company, 66-82, (1951).
- [37] Newman, M., “Free Subgroups and Normal Subgroups of The Modular Group”, *Illionis J. Math.*, 8, 262-265, (1964).
- [38] Coxeter, H. S. M. and Moser, W. O. J., *Generators and Relations For Discrete Groups*, second ed., Berlin-Göttingen-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 3538, (1965).
- [39] Şahin, R., “Genişletilmiş Hecke Grupları”, Doktora Tezi, *Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Matematik Anabilim Dalı, Balıkesir, (2001).
- [40] Karadeniz, A. A., *Yüksek Matematik*, Çağlayan Kitabevi, (2003).
- [41] Yağcı, M., "Altın Oran", *Matematik Dünyası*, 52-60, (2005).
- [42] Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, ISBN: 978-0-471-39969-8, A Wiley-Interscience Publication, (2001).
- [43] Bondy, J. A. and Murty, U. S. R., *Graph Theory*, London : Springer-Verlag, (2008).
- [44] Leveque, W. J., *Fundamentals of Number Theory*, Dover, (1996).
- [45] Cangül, İ. N., Çelik, B., *Sayılar Teorisi Problemleri*, Bursa: Paradigma Basın Yayın Ltd. Şti., 305-330, (2002).
- [46] Altındış, H., *Sayılar Teorisi ve Uygulamaları*, Kayseri: Erciyes Üniversitesi Yayın Komisyonu, (1999).
- [47] Lehner, J., “Diophantine approximation on Hecke groups”, *Glasgow Math. J.*, 27, 117–127, (1985).
- [48] Nakada, H., “On the Lenstra constant associated to the Rosen continued fractions”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 12 (1), 55–70, (2010).
- [49] Burton, R. M., Kraaikamp, C. and Schmidt, T. A., “Natural extensions for the Rosen fractions”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 352 (3), 1277–1298, (2000).

- [50] Dajani, K., Kraaikamp, C. and Steiner, W., “Metrical theory for α -Rosen fractions”, *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 11 (6), 1259–1283, (2009).
- [51] Mayer, D. and Mühlenbruch, T., “Nearest λq -multiple fractions in Spectrum and dynamics”, *Amer. Math. Soc.*, 52, 147–184, (2010).
- [52] Mayer, D., Mühlenbruch, T. and Strömberg, F., “The transfer operator for the Hecke triangle groups”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 32 (7), 2453–2484, (2012).
- [53] Mayer, D. and Strömberg, F., “Symbolic dynamics for the geodesic flow on Hecke surfaces”, *J. Mod. Dyn.*, 2 (4), 581–627, (2008).
- [54] Rosen, D. and Schmidt, T. A., “Hecke groups and continued fractions”, *Bull. Austral. Math. Soc.*, 46 (3), 459–474, (1992).
- [55] Hatcher, A., *Topology of Numbers*, Cambridge: Cambridge University Press, (2002).
- [56] Sarica, Ş., Koruoğlu, Ö., Demir, B. and Kaymak, A. F., “Relationships between cusp points in the extended modular group and Fibonacci”, yayına sunuldu.