T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖNEMLİ MONOİDLERİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARININ BELİRLENMESİ

DOKTORA TEZİ

CANAN KOCAPINAR

BALIKESİR, ARALIK - 2013

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

BAZI ÖNEMLİ MONOİDLERİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARININ BELİRLENMESİ

DOKTORA TEZİ

CANAN KOCAPINAR

BALIKESİR, ARALIK - 2013

KABUL VE ONAY SAYFASI

CANAN KOCAPINAR tarafından hazırlanan "**BAZI ÖNEMLİ MONOİDLERİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARININ BELİRLENMESİ**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26.12.2013 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Doç. Dr. Fırat ATEŞ	....
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. Ahmet TEKCAN	....
Üye Doç. Dr. Sabahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Yrd. Doç. Dr. Musa DEMİRCİ	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez BAÜ Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof.Dr. Cihan ÖZGÜR ....

ÖZET

BAZI ÖNEMLİ MONOİDLERİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARININ BELİRLENMESİ
DOKTORA TEZİ
CANAN KOCAPINAR
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI
(TEZ DANIŞMANI:DOÇ. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, ARALIK - 2013

Bu tez toplam altı bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş bölümü olup dört alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak bu tezde yapılacak olan çalışma hakkında genel bilgi verilmektedir. İkinci alt bölümde monoid sunuşları hatırlatılmıştır. Üçüncü alt bölümde bu tez boyunca kullanılacak olan terim sıralamalarına yer verilmiştir. Son alt bölüm olan dördüncü alt bölümde ise bu tezin ana amacı olan Gröbner-Shirshov taban tanıtılmıştır.

İkinci bölüm giriş dışında iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk olarak monoid yapıları için önemli bir yeri olan graf çarpım hakkında temel bilgiler verilmiştir. Daha sonra monoidlerin graf çarpımı için Gröbner-Shirshov taban hesabına yer verilmiştir.

Üçüncü bölüm giriş dışında iki alt bölümden oluşmaktadır. Öncelikle monoidlerin Schützenberger çarpımı hatırlatılmıştır. Daha sonra bu bölümün ana amacı olan monoidlerin Schützenberger çarpımının Gröbner-Shirshov taban hesabına yer verilmiştir.

Dördüncü bölüm giriş dışında iki alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde Rees matris yarıgrupları hakkında temel bilgiler verilmiştir. Ardından Rees matris yarıgruplarının Gröbner-Shirshov tabanlarının belirlenmesine yer verilmiştir.

Beşinci bölüm giriş dışında üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde Bruck-Reilly genişlemeler hatırlatılmıştır. İkinci alt bölümde genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemeler tanıtılmış ve sunuşuna yer verilmiştir. Son alt bölüm de genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemelerin Gröbner-Shirshov tabanlarının belirlenmesine yer verilmiştir.

Son bölümde ise bu çalışma boyunca elde edilen sonuçların bir değerlendirmesi yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Monoid, Yarıgrup, Sunuş, Gröbner-Shirshov Taban, Genişleme, Graf Çarpım, Schützenberger Çarpım, Rees Matris Yarıgrupları, Bruck-Reilly Genişlemesi, Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemesi.

ABSTRACT

CALCULATING GROBNER-SHIRSHOV BASES OF SOME IMPORTANT MONOIDS
PH.D THESIS
CANAN KOCAPINAR
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS
(SUPERVISOR:ASSOC. PROF. DR. FIRAT ATEŞ)

BALIKESİR, DECEMBER 2013

This thesis consists of six chapters. The first chapter, which is the introduction, includes four parts. The introductory part presents general information about the content of the study. The second part mentions monoid presentations. The third part focuses on term orders which are used throughout the thesis. The last part draws attention to the main idea of the thesis, which is Gröbner-Shirshov bases.

The second chapter comprises two parts, except the introduction. First of all, basic information is given about graph product, which is important for monoid structures. The other part contains calculation of Gröbner-Shirshov bases for graph products of monoids.

The third chapter involves two parts, except the introduction. The first part reminds Schützenberger product of monoids. The second part introduces to calculation of Gröbner-Shirshov bases for Schützenberger product of monoids.

The fourth chapter composes two parts, except the introduction. The first part proposes basic information about Rees matrix semigroups. The following part involves calculation of Gröbner-Shirshov bases for Rees matrix semigroups.

The fifth chapter is made up of three parts, except the introduction. The first part reviews Bruck-Reilly extentions. The next part puts forward generalized Bruck-Reilly *-extention and gives its presentation. The third part suggests calculation of Gröbner-Shirshov bases for generalized Bruck-Reilly *-extention.

The final chapter deals with evaluation of the results of the study.

KEYWORDS: Monoid, Semigroup, Presentation, Gröbner-Shirshov Bases, Extention, Graf Product, Schützenberger Product, Rees Matrix Semigroups, Bruck-Reilly Extetion, Generalized Bruck-Reilly *-Extention.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

TABLO LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

w	:	Kelime
w^{-1}	:	w kelimesinin tersi
$\iota(w)$	:	w kelimesinin başlangıç harfi
$\tau(w)$	:	w kelimesinin bitiş harfi
$w \approx u$	:	w ile u kelimeleri serbest olarak denktir
$\approx$	:	Kelimeler arasındaki denklik bağıntısı
1_w	:	Boş kelime
$\|w\|$	:	w kelimesinin uzunluğu
$[w]$	:	w kelimesini içeren denklik sınıfı
X	:	Küme (alfabe)
X^*	:	X kümesindeki tüm kelimelerin kümesi
X^+	:	Boş kelimeden farklı tüm sonlu kelimelerin kümesi
$F(X)$	:	X ile üretilen serbest monoid
M	:	Monoid
$\wp_M$	:	M monoidinin sunuşu
$\langle X \| R \rangle$	:	Üreteç kümesi X ve bağıntı kümesi R olan monoid sunuşu
$deg(p)$	:	p kuvvet çarpanının toplam derecesi
PP	:	Kuvvet çarpanları kümesi
$<$	:	Toplam sıralama
$<_{lex}$	:	Sözlük sıralaması
$<_{deg-lex}$	:	Derece sözlük sıralaması
$\overline{f}$	:	f polinomunun ilk kelimesi
$(f, g)_w$	:	f ve g polinomlarının w kesişim belirsizine bağlı olarak oluşturduğu polinom, kompozisyon
$K\langle X \rangle$	:	X ile üretilen K cismi üzerinde birleşmeli serbest cebir
$Id(S)$	:	S ile üretilen $K\langle X \rangle$ in bir ideali
S^{comp}	:	Gröbner-Shirshov taban
Γ	:	Graf
$\bigcup_{i=1}^{n} X_i$	:	$X_1, X_2, \ldots, X_n$ kümelerinin birleşimi
$\overline{u}$	:	u kelimesinin son harfi hariç olan kısmı

$\underline{u}$	:	u kelimesinin ilk harfi hariç olan kısmı
$i \cap j$	:	i. ve j. bağıntıların kesişim kompozisyonu
$\times$	:	Direk çarpım
$\circ$	:	Schützenberger çarpım
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi
GBR^*	:	Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi
$\blacksquare$	:	İspat sonlarına konur

ÖNSÖZ

Öncelikle bu çalışmam boyunca benden sabırla yardımını, desteğini ve bilgisini esirgemeyen sayın hocam ve danışmanım Doç. Dr. Fırat ATEŞ'e ne kadar teşekkür etsem azdır.

Bu güne kadar yoluma ışık tutan ve bu günlere gelmemi sağlayan başta Prof. Dr. Ahmet Sinan ÇEVİK olmak üzere tüm hocalarıma teşekkürü bir borç biliyorum.

Hiçbir zaman desteğini benden esirgemeyen, bugünlere gelmem için varlığını ortaya koyan en büyük destekçim bir tanecik anneme, abime ve canım aileme sonsuz teşekkürler.

Sabırla ve merakla çalışmamı bitirip onunla ilgilenmem için bekleyen, hayatıma varlığıyla anlam katan yaşama sebebim bir tanecik kızım Dila'ya teşekkür ederim.

Tanıştığımız günden bugüne attığım her adımda bana desteğini esirgemeyen eşime teşekkürler.

Canım kızım Dila'ya...

Balıkesir-2013 Canan KOCAPINAR

1. GİRİŞ

1.1 Giriş

Anatolii Illarionovich Shirshov [40], 1962 de yapmış olduğu çalışmasında tek bağlantılı Lie cebirleri için kelime probleminin algoritmik karar verilebilirliğini ispatlamıştır. Bunu yaparken günümüzde Gröbner-Shirshov taban olarak isimlendirilen teoriyi oluşturmuştur. Shirshov, Lie polinomlarının tüm aşikar olmayan kompozisyonlarının üzerinde bir algoritma geliştirmiştir.

Bu yıllarda gelişen bir başka teoride günümüzde Gröbner taban olarak bilinen teoridir. Gröbner taban teorisi değişmeli cebirler için 1970 de Bruno Buchberger tarafından [14,15] da ortaya atılmıştır.

Leonid Arkad'evich Bokut [8] ise 1976'da Shirshov'un Lie cebirler için uyguladığı yöntemi birleşmeli cebirler üzerine taşımıştır. Newman'ın [35] 1942'de "Graflar için Newman'ın Diamond Lemması" adıyla ünlenen çalışmasının ardından Bergman [6] 1978'de "Diamond Lemma" adlı çalışması ile Shirshov'un teorisinin gelişimine katkıda bulunmuştur.

Son yıllarda hızla gelişen Shirshov'un Gröbner-Shirshov taban teorisiyle ilgili bir çok çalışma yapılmaktadır. Braid gruplar, coxeter gruplar, tek bağıntılı gruplar, Novikov gruplarının Adyan genişlemesi gibi bir çok önemli cebirsel yapının Gröbner-Shirshov Tabanı hesaplanmış ve uygulamalarına yer verilmeye çalışılmıştır.

Tezimizin bu bölümünde tezin genel amaç ve yapısı hakkında bilgi verilecektir. Özellikle monoid sunuşları, terim sıralamaları ve Gröbner-Shirshov taban ile ilgili detaylı bilgiler verilecektir.

1.2 Monoid Sunuşları

Tezin bu bölümünde bir sonraki bölümler için kullanılacak olan temel tanım ve ifadelere yer verilecektir. Bu konuyla ilgili daha detaylı bilgilere [17,24,26] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

1.2.1 Tanım: X boştan farklı bir küme olsun. X kümesinin elemanlarını kullanarak bu kümeye bire-bir karşılık gelen ve bu X kümesinin elemanlarının terslerini temsil eden X^{-1} kümesini tanımlayalım. Ayrıca $X^{\pm} = X \cup X^{-1}$ olsun. Burada $X^{\pm}$ kümesinin her bir elemanına ***harf*** denir. Harflerden oluşan

$$x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n} \qquad (x_i \in X,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ 1 \leq i \leq n,\ n \in \mathbb{N}) \tag{1.1}$$

ifadesine X kümesi üzerinde bir ***kelime*** denir. Bu kelimeyi w ile gösterirsek, w kelimesinin başlangıç harfi $\iota(w) = x_1^{\varepsilon_1}$ ve bitiş harfi de $\tau(w) = x_n^{\varepsilon_n}$ olur. Eğer $n = 0$ ise ***boş kelime*** elde edilir ve 1_w ile gösterilir. Boş olmayan bir kelime için, $\varepsilon = +1$ oluyorsa, w kelimesine ***pozitif kelime*** denir. Ayrıca X kümesinin elemanlarıyla oluşturulan w kelimesinin ***uzunluğu***, w içindeki harflerin sayısı olarak tanımlanır ve $|w|$ ile gösterilir.

Bir $w = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2}\dots x_n^{\varepsilon_n}$ kelimesinin tersi,

$$x_n^{-\varepsilon_1}x_{n-1}^{-\varepsilon_2}\dots x_1^{-\varepsilon_n} \tag{1.2}$$

kelimesi olarak tanımlanır ve w^{-1} ile gösterilir.

X kümesi üzerinde iki kelime w ve u olmak üzere ***w ve u kelimelerinin çarpımı***, w kelimesinin devamı olarak u kelimesinin yazılmasıyla elde edilir ve bu çarpım wu şeklinde gösterilir. Verilen bu çarpım altında kelimeler üzerinde aşağıdaki şekilde işlemler tanımlanabilir:

1. Bir w kelimesi içinde, 1_w boş kelimesi varsa bu boş kelime w kelimesinden silinir. Yapılan bu işleme, kelime üzerindeki ***indirgeme (sadeleştirme) işlemi*** denir.
2. Benzer şekilde bir w kelimesi içine, 1_w boş kelimesi eklenebilir. Yapılan bu işleme de kelime üzerinde ***ekleme işlemi*** denir.

X kümesi üzerindeki iki kelime w ve w' olsun. Eğer bu kelimelerden biri diğerinden sadeleştirme veya ekleme işlemlerinin sonlu sayıda uygulanmasıyla elde ediliyorsa, bu iki kelimeye ***serbest olarak eşit kelimeler*** denir ve $w \approx w'$ ile gösterilir. Elde edilen $\approx$ bağıntısı ***denklik bağıntısı*** olup herhangi bir w kelimesini içeren ***serbest denklik sınıfı*** $[w]$ veya $\overline{w}$ ile gösterilir. X kümesi üzerindeki tüm kelimelerin serbest denklik sınıflarının kümesi $F(X)$ olsun. $F(X)$ kümesi üzerindeki çarpma işlemi,

$$[w][u] = [wu]$$

şeklinde tanımlanır. Bu çarpma işlemi altında $F(X)$ bir monoid oluşturur ve oluşan bu monoide X kümesi üzerindeki ***serbest monoid*** denir. Kolaylık sağlaması açısından, bazı durumlarda $[w]$ yerine w gösterimi kullanılacaktır.

1.2.2 Teorem (Normal Form Teoremi [17]): Her denklik sınıfı içinde en fazla bir tane indirgenmiş kelime vardır.

1.2.3 Tanım: $X \neq \emptyset$ bir küme (alfabe) olsun. 1_X boş kelimeyi göstermek üzere, X deki tüm kelimelerin kümesini X^*, boş kelimeden farklı tüm sonlu kelimelerinin kümesini X^+ ile gösterelim. Dikkat edilecek olursa $X^* = X^+ \cup \{1_X\}$ dir. Burada X kümesine X^+ kümesinin ***üreteç (doğuray) kümesi*** denir.

$1_X^2 = 1_X$ olmak üzere her $w \in X^+$ için $w1_X = 1_Xw = w$ olsun. X^* üreteç kümesi olmak üzere $R \subset X^* \times X^*$ kümesi $(u, v) \in R$ (ki bu genellikle $u = v$

şeklinde gösterilir) elemanlarından oluşan bir ***bağıntı kümesi*** olsun. Bu durumda $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n\}$ için

$$\langle X|R\rangle = \langle x_1, x_2, \dots, x_m | u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n\rangle$$

ikilisine bir ***monoid sunuşu*** denir.

1.2.4 Tanım: A boştan farklı bir küme (üreteç kümesi), A^+ boş kelimeden farklı tüm sonlu kelimelerin kümesi olmak üzere $R \subseteq A^+ \times A^+$ kümesi, $u, v \in A^+$ için $(u, v) \in R$ (ki bu genellikle $u = v$ şeklinde gösterilir) elemanlarından oluşan bir ***bağıntı kümesi*** olsun. Bu durumda $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ve $R = \{u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n\}$ için,

$$\langle A|R\rangle = \langle a_1, a_2, \dots, a_m | u_1 = v_1, \dots, u_n = v_n\rangle \tag{1.3}$$

ikilisine bir ***yarıgrup sunuşu*** denir. Eğer A kümesi sonlu ise (1.3) ile verilen sunuşun temsil ettiği yarıgruba ***sonlu üreteçlidir***, A ve R kümelerinin her ikisi de sonlu ise (1.3) ile verilen sunuşun temsil ettiği yarıgruba ***sonlu sunumludur*** denir.

1.3 Terim Sıralaması

Tezin bu bölümünde monomial, toplam derece, toplam sıralama, terim sıralaması, sözlük (lex) sıralaması, derece sözlük (deg-lex) sıralaması tanımları verilecektir. Bu konuyla ilgili bu bölümde bulunan bilgilere ve daha fazlasına [1,20,33] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

1.3.1 Tanım: K bir cisim olmak üzere $R = K[x_1, \dots, x_n]$, $(n \geq 1)$ bir polinomlar halkası olsun. R nin

$$p = x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n},\ q = x_1^{\gamma_1} x_2^{\gamma_2} \dots x_n^{\gamma_n}\ (\varepsilon_i, \gamma_i \geq 0, 1 \leq i \leq n) \qquad (1.4)$$

formundaki elemanlarına ***kuvvet çarpanı*** (power product) veya ***terim*** denir. p kuvvet çarpanının ***toplam derecesi*** (total degree)

$$deg(p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i$$

ile hesaplanır. p kuvvet çarpanının herhangi bir x_i $(1 \leq i \leq n)$ değişkeninin derecesi ise $deg_{x_i}(p) = \varepsilon_i$ dir.

1.3.2 Tanım: p kuvvet çarpanı (1.4) ile tanımlandığı gibi olsun. $a \in K$ olmak üzere ap formundaki terime bir ***monomial*** denir.

1.3.3 Tanım: $x_1, \dots, x_n$ harflerini içeren tüm kuvvet çarpanlarının kümesi

$$PP = \{x_1^{\varepsilon_1} x_2^{\varepsilon_2} \dots x_n^{\varepsilon_n} | \varepsilon_i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n\} \qquad (1.5)$$

olmak üzere p ve q kuvvet çarpanları (1.4) ile tanımlandığı gibi olsun. (1.5) ile tanımlanan kuvvet çarpanları kümesi üzerinde tanımlanan ***toplam sıralama*** (total order) $<$ aşağıdaki koşulları sağladığında ***kabul edilebilir***dir (admissible) denir;

1. Her $p \in PP, p \neq 1$ için $1 < p$,
2. $p, q \in PP$ için $p < q$ ise her $a \in PP$ için $ap < aq$.

PP üzerinde bir ***terim sıralaması*** ile kast edilen PP üzerinde bir $<$ toplam sıralamadır.

1.3.4 Tanım: PP kümesi (1.5) ile tanımlanan kuvvet çarpanları kümesi ve p, q kelimeleri (1.4) ile verilen kuvvet çarpanları olsun. $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ sıralamasına göre soldan itibaren birbirinden farklı ilk üst için $\varepsilon_i < \gamma_i$ ise $p <_{lex} q$ sıralamasına ***sözlük (lex) sıralaması*** (lexicographic order) denir.

1.3.5 Tanım: PP, (1.5) ile tanımlanan kuvvet çarpanları kümesi ve p, q kelimeleri (1.4) ile tanımlan kuvvet çarpanları olsun. $x_1 > x_2 > \cdots > x_n$ sıralamasına göre

$$p <_{deg-lex} q = \begin{cases} deg(p) < deg(q) \text{ ise} \\ deg(p) = deg(q) \text{ iken } p <_{lex} q \text{ ise} \end{cases}$$

sıralamasına ***toplam derece sıralaması*** (total degree order) veya ***derece sözlük (deg-lex) sıralaması*** (degree lexicographic order) denir.

1.4 Gröbner-Shirshov Taban

Tezin bu bölümünde Gröbner-Shirshov tabanın temel tanım ve özelliklerine yer verilecektir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [3,7,8,9,10,11,12,16,27] kaynaklarından ulaşılabilir.

Bu tezde K bir cisim olmak üzere $K\langle X\rangle$ ile, X ile üretilen K üzerinde birleşmeli serbest cebir ve X^* ile, X ile üretilen serbest monoid gösterilecektir. Burada boş kelime birimdir ve bu 1_X ile gösterilecektir. Herhangi bir $w \in X^*$ kelimesinin uzunluğunu ise $|w|$ ile gösterilecektir.

1.4.1 Tanım: X^* iyisıralı bir küme olmak üzere sıfırdan farklı her $f \in K\langle X\rangle$ polinomu için $\overline{f}$, f nin ***ilk kelimesi*** (leading word) olsun. Burada eğer $\overline{f}$ nin f içindeki katsayısı 1 ise f e ***monik polinom*** denir.

1.4.2 Tanım: f ve g, $K\langle X\rangle$ içinde monik iki polinom olsun. Bu durumda aşağıdaki iki farklı durum söz konusudur:

1. w kelimesi $w = \bar{f}b = a\bar{g}$ olacak şekilde $|\bar{f}| + |\bar{g}| > |w|$ iken $a, b \in X^*$ bulunubiliyorsa f ve g nin w ya bağlı olarak oluşturduğu polinom $(f, g)_w = fb - ag$ dir. Burada w ya ***kesişim belirsizi*** (an ambiguity of intersection) denir.
2. Eğer w kelimesi, bazı $a, b \in X^*$ için $w = \bar{f} = a\bar{g}b$ ise f ve g nin w ya bağlı olarak oluşturduğu polinom $(f, g)_w = f - agb$ dir. Burada w ya ***kapsama belirsizi*** (an ambiguity of inclusion) denir.

1.4.3 Tanım: $f, g \in K\langle X\rangle$ ve $a, b \in X^*$ için, g monik polinom ve $\bar{f} = a\bar{g}b$ ise α, f nin katsayısı olmak üzere $f \mapsto f - \alpha agb$ dönüşümüne g nin f içinde ***ilk kelimesinin sadeleşmesi*** (elimination leading word / ELW) denir.

1.4.4 Tanım: $S \subseteq K\langle X\rangle$ için $s \in S$ monik olsun. $(f, g)_w$ ***kompozisyonu***, $\alpha_i \in K$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$ ve $\overline{a_i s_i b_i} < w$ olmak üzere $(f, g)_w = \sum \alpha_i a_i s_i b_i$ ise (S, w) ya ***aşikar modül*** (trivial modulo) denir ve

$$(f, g)_w \equiv 0 \ mod(S, w)$$

ile gösterilir. Genel olarak ise $p, q \in K\langle X\rangle$ için

$$p \equiv q \ mod(S, w)$$

ile ifade edilen $\alpha_i \in K$, $a_i, b_i \in X^*$, $s_i \in S$ ve $\overline{a_i s_i b_i} < w$ için $p - q = \sum \alpha_i a_i s_i b_i$ dir.

1.4.5 Tanım (Gröbner-Shirshov Taban): $S \subseteq K\langle X\rangle$ olmak üzere S içindeki polinomların herhangi bir $(f, g)_w$ kompozisyonu için $(f, g)_w \equiv 0 \ mod(S, w)$ ise, S kümesi $<$ iyi sıralaması ile $K\langle X|S\rangle$ için ***Gröbner-Shirshov tabanı*** oluşturur denir.

Aşağıdaki önermeyi Shirshov [40] 1962 de serbest Lie cebirler için (deg-lex sıralamaya göre) ispatlamıştır. 1976 da Bokut [8] Shirshov'un yaklaşımını birleşmeli cebirler için özelleştirmiştir.

1.4.6 Önerme (Composition Diamond Lemma)[8, 40]: K bir cisim ve $Id(S)$, S ile üretilen, $K\langle X\rangle$ in bir ideali olmak üzere

$$A = K\langle X|S\rangle = K\langle X\rangle/Id(S)$$

ve $<$, X^* üzerinde monomial sıralaması olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

1. S, bir Gröbner-Shirshov tabandır.
2. $f \in Id(S) \Rightarrow \bar{f} = a\bar{s}b \ \ (a, b \in X^* \ ve \ s \in S\,)$
3. $Irr(S) = \{u \in X^* \mid u \neq a\bar{s}b, a, b \in X^*, s \in S\}$ ifadesi $A = K\langle X|S\rangle$ cebiri için bir tabandır.

1.4.7 Tanım (Shirshov Algoritması): $S \subseteq K\langle X\rangle$ olmak üzere eğer S, Gröbner-Shirshov taban değilse, S ye S nin polinomlarının tüm aşikar olmayan kompozisyonlarını ekleyebiliriz. Bu işleme devam edecek olursak (bu işlem sonsuz kez de olabilir) sonunda bir S^{comp} ile gösterilen Gröbner-Shirshov tabanı elde ederiz. İşte bu işleme ***Shirshov Algoritması*** denir.

Eğer S, yarıgrup bağıntılarının bir kümesi ise herhangi bir aşikar olamayan kompozisyon yine aynı forma sahip olacaktır. Sonuç olarak S^{comp} kümesi yarıgrup bağıntılarını da içerebilir.

2. MONOİDLERİN GRAF ÇARPIMI İÇİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARIN BELİRLENMESİ

2.1 Giriş

Graf grupları ilk olarak 1970 lerde Andreas Baudisch [5] tarafından çalışılmıştır. Ayrıca Carl Droms ve Herman Servatius [21] bu yapıyı daha da geliştirmişlerdir. Daha sonra Elisabeth Ruth Green'in 1990'da doktora tezinde yaptığı çalışmasında geliştirdiği Graf Çarpım ile graf grupları konusuna bambaşka bir boyut kazandırmıştır. Son zamanlarda S.Hermiller, J.Meier, T.Hsu, D.Wise ve A.V.Costa gibi matematikçiler graf çarpım yapısını geliştirmişlerdir [18,23,25]. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [5,18,21,22,23,25] kaynaklarından ulaşılabilir.

Tezin bu bölümünde öncelikle graf çarpım tanıtılmıştır. Ayrıca Alt Bölüm 2.3 de bu bölümün ana amacı olan monoidlerin graf çarpımının Gröbner-Shirshov tabanlarının hesaplanmasına yer verilmiştir.

2.2 Graf Çarpım

Bu bölümde Graf Çarpım ile ilgili temel tanım ve teoremlere değinilecektir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [5,18,19,21,22,24] kaynaklarından ulaşılabilir.

2.2.1 Tanım: V boş olmayan bir küme (***köşe kümesi***) ve $E \subseteq V \times V$ (***kenar kümesi***) olmak üzere, $\Gamma = (E, V)$ ye ***graf*** denir. Bu Γ grafında herhangi iki u ve v köşesini alalım. Bu u ve v köşeleri bir kenar ile birleştiriliyor ise yani $(u, v) \in E$ ise bu köşelere ***ardışık*** (komşu) (adjacent) ***köşeler*** denir ve u ve v köşeleri bu kenara ***bitişik***tir (incident) denir. Benzer şekilde Γ grafının farklı iki kenarı ortak bir köşeye sahip ise bu kenarlara ***ardışık*** (komşu) ***kenarlar*** denir. Γ grafının herhangi bir köşesi v olmak üzere ***v nin derecesi*** bu v köşesine bitişik olan kenarların sayısıdır. Eğer bir grafta bütün köşeler birbirine bir kenar ile bağlı ise bu durumda bu graf ***tam graf***

adını alır. Eğer bir graf bir köşeyi kendisiyle birleştiren bir kenar (*ilmek*) ve aynı köşe çiftini birleştiren iki yada daha fazla kenara (*çoklu kenar*) sahip değilse bu grafa ***basit graf*** denir.

2.2.2 Tanım: $M_1, M_2, \ldots, M_n$ monoidlerin sonlu bir ailesi ve sunuşları sırasıyla $X_1, X_2, \ldots, X_n$ kümeleri ayrık olmak üzere $\langle X_1 | R_1 \rangle$, $\langle X_2 | R_2 \rangle$,..., $\langle X_n | R_n \rangle$ olsun. Ayrıca Γ, köşeleri $M_1, M_2, \ldots, M_n$ monoidler ailesi ile etiketlenmiş bir basit graf olsun. $M_1, M_2, \ldots, M_n$ monoidler ailesinin graf çarpımı, üreteç kümesi

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

ve bağıntı kümesi ise

$$R = \bigcup_{i=1}^{n} R_i \cup R_\Gamma$$

olan, $\wp = \langle X | R \rangle$ sunuşunun temsil ettiği monoidtir. Burada R_Γ, M_i, M_j monoidleri Γ grafının ardışık köşeleri olmak üzere $ab = ba$ $(a \in X_i,\ b \in X_j,\ i \neq j)$ biçimindeki elemanların kümesidir.

Graf çarpım aslında direkt ve serbest çarpımların bir karışımıdır. Eğer grafın hiçbir kenarı yok ise, graf çarpım monoidlerin bir serbest çarpımıdır. Eğer graf tam ise, bu durumda monoidlerin bir direkt çarpımıdır [19].

2.3 Monoidlerin Graf Çarpımının Gröbner-Shirshov Tabanlarının Belirlenmesi

Tezin bu bölümünde öncelikle monoidlerin graf çarpımının sunuşu verilecektir. Daha sonra bu bölümün ana amacı olan monoidlerin graf çarpımının Gröbner-Shirshov tabanını veren Teorem 2.3.2 tarafımızdan ispatlanmış olup "Discrete Mathematics" dergisinde yayımlanmıştır [3].

2.3.1 Tanım: $M_1, M_2, \ldots, M_j$ $(j \geq 4)$ birer monoid olmak üzere sunuşları sırasıyla

$$\wp_{M_1} = \langle X_1 | R_1 \rangle,\ \wp_{M_2} = \langle X_2 | R_2 \rangle,\ \ldots,\ \wp_{M_j} = \langle X_j | R_j \rangle \tag{2.1}$$

olsun. Burada (2.1) de verilen $R_1, R_2, \ldots, R_j$, sırasıyla $M_1, M_2, \ldots, M_j$ için X_i^* üzerinde tanımlı $<_{M_i}$, deg-lex sıralamasına göre birer Gröbner-Shirshov taban ve $X_1, X_2, \ldots, X_j$ üreteç kümeleri ayrık ve iyi sıralı kümeler olarak alınmıştır. Ayrıca $m_1, m_2, \ldots, m_j$ birer doğal sayı olmak üzere

$$R_1 = \{u_{1_1} = v_{1_1}, u_{1_2} = v_{1_2}, \ldots, u_{1_{m_1}} = v_{1_{m_1}}\}, \tag{2.2}$$

$$R_2 = \{u_{2_1} = v_{2_1}, u_{2_2} = v_{2_2}, \ldots, u_{2_{m_2}} = v_{2_{m_2}}\}, \tag{2.3}$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$R_j = \{u_{j_1} = v_{j_1}, u_{j_2} = v_{j_2}, \ldots, u_{j_{m_j}} = v_{j_{m_j}}\} \tag{2.4}$$

dir. Burada u_{i_r} kelimeleri ($i \leq j$ ve $r \leq m_i$) , $f_{u_{i_r}} = u_{i_r} - v_{i_r}$ polinomlarının ilk terimleridir.

Bütün bunlardan hareketle M_i $(1 \leq i \leq j)$ mononidlerinin graf çapımına M diyelim. M nin sunuşu

$$\wp_{\mathrm{M}} = \langle X_1, X_2, \ldots, X_j | R_1, R_2, \ldots, R_j, S' \rangle \tag{2.5}$$

dir ve burada $S' = \{x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i,\ x_1\, x_j - x_j\, x_1\}$ $(1 \leq i < j)$ ve M_i, M_{i+1}, Γ basit grafının $M_1, M_2, \ldots, M_j$ ile etiketlenmiş ardışık köşeleridir.

Şimdi bu bölümün ana teoremini verebilmek için $(X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_j)^*$ kümesini deg-lex sıralamaya göre aşağıdaki şekilde sıralayalım:

$$x_i > x_k \text{ eğer } i < k \ (x_i \in X_i, x_k \in x_k). \tag{2.6}$$

Şimdi bu sıralamaya göre M monoidinin Gröbner-Shirshov tabanını veren bu bölümün ana teoremini verebiliriz.

2.3.2 Teorem: Sunuşu (2.5) ile verilen Mmonoidi sunuşları (2.1) ile verilen $M_1, M_2, \ldots, M_j$ ($j \geq 4$) monoidlerinin graf çarpımı olsun. Bu durumda $w_{i+2} \in X_{i+2}^*$ için (2.6) ile verilen sıralamaya göre M monoidinin bir Gröbner-Shirshov tabanı

$$u_{i_r} - v_{i_r} \qquad (1 \leq i \leq j), \tag{2.7}$$

$$x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i\,,\ x_1 x_j - x_j x_1 \qquad (1 \leq i \leq j-1), \tag{2.8}$$

$$x_i w_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i w_{i+2} \qquad (1 \leq i \leq j-2). \tag{2.9}$$

bağıntılarından oluşur.

İspat: İspatta temel olarak yapmamız gereken (2.7)-(2.9) ile verilen bağıntıların aşikar olduğunu göstermektir. (2.5) sunuşuyla verilen bağıntıların kümesi $S = \{R_1, R_2, \ldots, R_j, S'\}$ olsun. S içindeki bütün kesişim kompozisyonlarını aşağıdaki durumlarda kontrol edelim;

Durum 1: R_i ve R_k ($1 \leq i, k \leq j$ ve $i \neq k$) içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonları,

Durum 2: S' içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonları,

Durum 3: S' ve R_i ($1 \leq i \leq j$) içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonları.

Durum 1: İlk durum olan (2.2)-(2.4) ile verilen R_i ve R_k ($1 \leq i, k \leq j$ ve $i \neq k$) içindeki polinomların ilk terimleri kontrol edildiğinde kendi içlerinde kesişim kompozisyonlarının olmadığı görülmektedir. Dolayısıyla R_i ve R_k ($1 \leq i, k \leq j$ ve $i \neq k$) içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonlarına bakmamıza gerek yoktur.

Durum 2: S' içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonlarını göz önünde bulundurarak hesaplamalar yapmamız gerekmektedir. Bunun için (2.8) in kendi aralarındaki ve bunların (2.7) ile olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim. Bu durumda

$$g_1 = x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i \text{ ve } g_2 = x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} \in S' \tag{2.10}$$

bağıntılarını ele alalım. Aşağıdaki Tablo 2.1 de bu kesişim kompozisyonlarından gelen kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar özetlenmiştir.

Tablo 2.1: (2.8) ile verilen bağıntıların kendi aralarındaki ve bunların (2.7) ile olan kesişim kompozisyonları, bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar

$i \cap j$	w	*yeni bağıntı*
$g_1 \cap g_2$	$x_i x_{i+1} x_{i+2}$	$h = x_i w_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i w_{i+2}$
$h \cap h$	$x_i w_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2}$	$aşikar$
$g_1 \cap h$	$x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2}$	$aşikar$
$f_{u_{i_r}} \cap h$	$\overline{u}_{i_r} x_i w_{i+2} x_{i+1}$	$aşikar$
$h \cap f_{u_{i_r}}$	$x_i w_{i+2} x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}}$	$aşikar$

Şimdi Tablo 2.1 ile özetlediğimiz kesişim kompozisyonlarını ve elde edilen yeni bağıntıları gösterelim.

$w = x_i x_{i+1} x_{i+2}$ kesişim belirsizi, $a = x_i$ ve $b = x_{i+2}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(g_1, g_2)_w &= g_1 b - a g_2 \\
&= (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) x_{i+2} - x_i (x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1}) \\
&= x_i x_{i+1} x_{i+2} - x_{i+1} x_i x_{i+2} - x_i x_{i+1} x_{i+2} + x_i x_{i+2} x_{i+1} \\
&= x_i x_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i x_{i+2}
\end{aligned}
$$

bağıntısı S içinde aşikar değildir.

Şimdi bu bağıntıyı $h_1 = x_i x_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i x_{i+2}$ olarak isimlendirelim. h_1 ile (2.10) da tanımladığımız g_2 nin kesişim kompozisyonunu hesapladığımızda $h_2 = x_i x_{i+2}^2 x_{i+1} - x_{i+1} x_i x_{i+2}^2$ polinomu elde edilir. Bu işlem benzer şekilde sürdürüldüğünde aşikar olmayan

$$h = x_i w_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i w_{i+2} \quad (i \in \{1,2,\dots,(j-2)\}), \tag{2.11}$$

polinomu elde edilir. Burada $w_{i+2} \in X_{i+2}^*$ dir. Şimdi elde ettiğimiz bu bağıntının kendi içinde kesişim kompozisyonlarına bakalım. Burada kesişim belirsizi $w = x_i w_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2}$ dir ve buradan

$$\begin{aligned}
(h,h)_w &= (x_i w_{i+2} x_{i+1} - x_{i+1} x_i w_{i+2}) w_{i+3} x_{i+2} \\
&\quad - x_i w_{i+2}(x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3}) \\
&= x_i w_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+1} x_i w_{i+2} w_{i+3} x_{i+2} \\
&\quad - x_i w_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} + x_i w_{i+2} x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} \\
&= x_i w_{i+2} x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+2} w_{i+3} x_{i+2} \\
&= x_{i+1} x_i w_{i+2} x_{i+2} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+2} w_{i+3} x_{i+2} \\
&= x_{i+1} x_i w_{i+2} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+1} x_i w_{i+2} w_{i+3} x_{i+2} \\
&\equiv 0.
\end{aligned}$$

Bu aşamada

$$f_{u_{i_r}} = u_{i_r} - v_{i_r} \in R_i \ (1 \leq i \leq j) \tag{2.12}$$

olmak üzere (2.10) ve (2.11) ile tanımlanan bağıntılar g_1 ve h için, g_1 in h ile, $f_{u_{i_r}}$ nin h ile ve h nin $f_{u_{i_r}}$ ile kesişim kompozisyonlarını kontrol etmemiz gerekir. $g_1 \cap h$, $f_{u_{i_r}} \cap h$ ve $h \cap f_{u_{i_r}}$ nin kesişim belirsizi sırasıyla $w = x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2}$, $w = \overline{u}_{i_r} x_i w_{i+2} x_{i+1}$ ve $w = x_i w_{i+2} x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
(g_1,h)_w &= (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) w_{i+3} x_{i+2} - x_i (x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3}) \\
&= x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} \\
&\quad - x_i x_{i+1} w_{i+3} x_{i+2} + x_i x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} \\
&= x_i x_{i+2} x_{i+1} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2} \\
&= x_{i+1} x_i x_{i+2} w_{i+3} - x_{i+1} x_i w_{i+3} x_{i+2}
\end{aligned}$$

$$= x_{i+1}x_iw_{i+3}x_{i+2} - x_{i+1}x_iw_{i+3}x_{i+2} \equiv 0.$$

$$\begin{aligned}
(f_{u_{i_r}}, h)_w &= (u_{i_r} - v_{i_r})w_{i+2}x_{i+1} - \overline{u}_{i_r}(x_iw_{i+2}x_{i+1} - x_{i+1}x_iw_{i+2}) \\
&= u_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} - v_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} - \overline{u}_{i_r}x_iw_{i+2}x_{i+1} + \overline{u}_{i_r}x_{i+1}x_iw_{i+2} \\
&= \overline{u}_{i_r}x_{i+1}x_iw_{i+2} - v_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} \\
&= x_{i+1}\overline{u}_{i_r}x_iw_{i+2} - v_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} \\
&= x_{i+1}u_{i_r}w_{i+2} - v_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} \\
&= x_{i+1}v_{i_r}w_{i+2} - v_{i_r}w_{i+2}x_{i+1} \equiv 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h, f_{u_{i_r}})_w &= (x_iw_{i+2}x_{i+1} - x_{i+1}x_iw_{i+2})\underline{u_{i+1_r}} - x_iw_{i+2}(u_{i+1_r} - v_{i+1_r}) \\
&= x_iw_{i+2}x_{i+1}\underline{u_{i+1_r}} - x_{i+1}x_iw_{i+2}\underline{u_{i+1_r}} - x_iw_{i+2}u_{i+1_r} + x_iw_{i+2}v_{i+1_r} \\
&= x_iw_{i+2}v_{i+1_r} - x_{i+1}x_iw_{i+2}\underline{u_{i+1_r}} \\
&= v_{i+1_r}x_iw_{i+2} - x_{i+1}\underline{u_{i+1_r}}x_iw_{i+2} \\
&= v_{i+1_r}x_iw_{i+2} - v_{i+1_r}x_iw_{i+2} \equiv 0\,.
\end{aligned}$$

Burada aşikar modül elde edildiğinden tabana eklenecek yeni bir bağıntı elde edilmemiştir. Şimdi ispatın üçüncü ve son kısmına geçebiliriz.

Durum 3: İspatın bu bölümünde S' ve R_i $(1 \leq i \leq j)$ içindeki polinomların ilk terimlerinin kesişim kompozisyonlarını kontrol edeceğiz. Bunun için öncelikle (2.10) ve (2.12) ile tanımlanan g_1 ve $f_{u_{i_r}}$ bağıntılarını alalım. Dolayısıyla $f_{u_{i_r}}$ nin g_1 ile olan kesişim belirsizi $w = \overline{u}_{i_r}x_ix_{i+1}$ dir. Buradan

$$\begin{aligned}
(f_{u_{i_r}}, g_1)_w &= (u_{i_r} - v_{i_r})x_{i+1} - \overline{u}_{i_r}(x_ix_{i+1} - x_{i+1}x_i) \\
&= u_{i_r}x_{i+1} - v_{i_r}x_{i+1} - \overline{u}_{i_r}x_ix_{i+1} + \overline{u}_{i_r}x_{i+1}x_i \\
&= u_{i_r}x_{i+1} - v_{i_r}x_{i+1} - u_{i_r}x_{i+1} + \overline{u}_{i_r}x_{i+1}x_i \\
&= \overline{u}_{i_r}x_{i+1}x_i - v_{i_r}x_{i+1} \\
&= x_{i+1}\overline{u}_{i_r}x_i - v_{i_r}x_{i+1} \\
&= x_{i+1}u_{i_r} - x_{i+1}v_{i_r} \equiv 0.
\end{aligned}$$

Benzer şekilde g_1 in $f_{u_{i_r}}$ ile olan kesişim kompozisyonlarına bakıldığında kesişim belirsizi $w = x_i x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}}$ dir ve

$$
\begin{aligned}
(g_1, f_{u_{i_r}})_w &= (x_i x_{i+1} - x_{i+1} x_i) \underline{u_{i+1_r}} - x_i (u_{i+1_r} - v_{i+1_r}) \\
&= x_i x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}} - x_{i+1} x_i \underline{u_{i+1_r}} - x_i u_{i+1_r} + x_i v_{i+1_r} \\
&= x_i v_{i+1_r} - x_{i+1} x_i \underline{u_{i+1_r}} \\
&= x_i v_{i+1_r} - x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}} x_i \\
&= x_i v_{i+1_r} - x_{i+1} \underline{u_{i+1_r}} x_i \\
&= x_i v_{i+1_r} - u_{i+1_r} x_i \\
&= v_{i+1_r} x_i - v_{i+1_r} x_i \equiv 0
\end{aligned}
$$

aşikar olduğu görülür.

Dolayısıyla yukarıda yaptığımız işlemlerden görüldüğü gibi (2.7)-(2.9) ile verilen bağıntılar (2.6) ile verilen sıralamaya göre monoidlerin graf çarpımı için bir Gröbner-Shirshov taban belirtir.■

2.3.3 Not: Bu bölümün başında $j \geq 4$ olarak almıştık. Çünkü dörtten daha az sayıda monoidin graf çarpımı direkt çarpımı verir. Böyle bir durumda ise Gröbner-Shirshov taban (2.7) - (2.8) bağıntılarından oluşur.

2.3.4 Sonuç: M nin her w elemanı $w_1 w_2 \dots w_n$ biçiminde bir normal forma sahiptir. Burada w_i elemanı $M_k (1 \leq k \leq j)$ monodinin köşesidir. Ayrıca

1. $w_i = 1$ yazılır.
2. M_k monoidinin aynı köşesinde olan ardışık köşeleri olan w_i ve w_{i+1} yerleri değiştirilir.
3. $w_i \in M_i$, $w_{i+1} \in M_{i+1}$ ve $w_1 \in M_1$, $w_j \in M_j$ ardışık elemanları için, M_i, M_{i+1} ve M_1, M_j bitişik monoidler, w_i , w_{i+1} ve w_1 , w_j elemanları değiştirilir.

3. MONOİDLERİN SCHÜTZENBERGER ÇARPIMI İÇİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARIN BELİRLENMESİ

3.1 Giriş

Schützenberger çarpım 1965 te Marcel-Paul Schützenberger [39] tarafından ortaya konmuş ve 1981 de Howard Straubing [41] tarafından genelleştirilmiştir. Daha sonra A. Lascoux [29] M.P. Schützenberger ile birlikte değişmeli olamayan yapılar için, S.W. Margolis, J.E. Pin [31] serbest tersinir yarıgruplar için, O.Neto, H.Sezinando [36] serbest gruplar için yaptıkları çalışmalarında Schützenberger çarpımı geliştirmişlerdir. J.M. Howie ve N.Ruskuc [24] çalışmalarında Schützenberger çarpımın monoid sunuşunu vermişlerdir. F.Ateş ve A.S.Çevik ise [2,4] yaptıkları çalışmalarında Schützenberger çarpım yardımıyla yeni monoid yapıları tanımlamışlardır.

Tezin bu bölümünde öncelikle Shützenberger çarpım tanıtılacaktır. Ayrıca Alt Bölüm 3.3 de bu bölümün ana amacı olan Shützenberger çarpım için Gröbner-Shirshov taban hesabına yer verilecektir.

3.2 Schützenberger Çarpım

Bu bölümde Schützenberger çarpımın temel tanım ve özelliklerine değinilecektir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [2,4,24,39,41] kaynaklarından ulaşılabilir.

3.2.1 Tanım: A ve B birer monoid olmak üzere $P \subseteq A \times B, a \in A, b \in B$ için

$$\begin{aligned} aP &= \{(ac,d) \mid (c,d) \in P\}, \\ Pb &= \{(c,db) \mid (c,d) \in P\} \end{aligned}$$

olarak tanımlayalım. A ve B nin Schützenberger çarpımı

$$(a_1, P_1, b_1)(a_2, P_2, b_2) = (a_1 a_2, P_1 b_2 \cup a_1 P_2, b_1 b_2)$$

işlemi altında tanımlı $A \times \wp(A \times B) \times B$ kümesi olup $A \circ B$ ile gösterilir. $A \circ B$, birimi $(1_A, \emptyset, 1_B)$ olan bir monoidtir.

3.3 Monoidlerin Schützenberger Çarpımı için Gröbner-Shirshov Tabanların Belirlenmesi

Tezin bu bölümünde öncelikle monoidlerin Schützenberger çarpımının sunuşu verilecektir. Daha sonra bu bölümü ana amacı olan monoidlerin Schützenberger çarpımının Gröbner-Shirshov tabanını veren Teorem 3.3.2 tarafımızdan ispatlanmış olup "Discrete Mathematics" dergisinde yayımlanmıştır [3].

3.3.1 Tanım[24]: M_1 ve M_2 birer monoid olmak üzere sunuşları sırasıyla

$$\wp_{M_1} = \langle X_1 | R_1 \rangle \,,\, \wp_{M_2} = \langle X_2 | R_2 \rangle \tag{3.1}$$

olsun. Bu durumda $M_1 \circ M_2$ Schützenberger çarpımının sunuşu, $x_i \in X_i, w_i, w_i' \in M_i$ $(1 \leq i \leq 2)$ ve $Z = X_1 \cup X_2 \cup \{z_{w_1,w_2} \mid w_1 \in M_1, w_2 \in M_2\}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\wp_{M_1 \circ M_2} = \langle\ Z \ \mid R_1 \,,\, R_2 \,,\, z_{w_1,w_2}^2 = z_{w_1,w_2} \,,\, z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} = z_{w_1',w_2'} z_{w_1',w_2'} \,, \\ x_1 z_{w_1,w_2} = z_{x_1 w_1,w_2} x_1 \,,\, z_{w_1,w_2} x_2 = x_2 z_{w_1,w_2 x_2} \,,\, x_1 x_2 = x_2 x_1 \rangle\end{aligned} \tag{3.2}$$

şeklindedir.

Burada (3.1) sunuşuyla verilen R_1 ve R_2, M_1 ve M_2 için X_i^* $(i = 1,2)$ üzerinde $<_{M_i}$deg-lex sıralamaya göre bir Gröbner-Shirshov taban olsun. Bu durumda bu bölümün ana teoremini verebilmek için Z^* kümesini deg-lex sıralamaya göre aşağıdaki şekilde sıralayalım;

$x_1 > x_2$	deg-lex sıralamaya göre $x_i \in X_i\ (1 \leq i \leq 2)$,	(3.3)
$x_1 > z_{w_1,w_2} > x_2$	tüm $w_i \in M_i\ (1 \leq i \leq 2)$,	(3.4)
$(w_1, w_2) > (w_1', w_2')$	eğer $w_1 > w_2$ veya $w_1 = w_1'$ ve $w_2 > w_2'$,	(3.5)
$z_{w_1,w_2} > z_{w_1',w_2'}$	eğer $(w_1, w_2) > (w_1', w_2'), w_i, w_i' \in M_i\ (1 \leq i \leq 2)$.	(3.6)

Şimdi bu sıralamaya göre M_1 ve M_2 monoidleri için $M_1 \circ M_2$ Schützenberger çarpımın Gröbner-Shirshov tabanını veren bu bölümün ana teoremini verebiliriz.

3.3.2 Teorem: M_1 ve M_2 monoidlerinin sunuşları (3.1) de verildiği gibi olmak üzere $M_1 \circ M_2$ nin sunuşu (3.2) deki gibi olsun. Buna göre (3.3)-(3.6) da verilen sıralamaya göre $M_1 \circ M_2$ Schützenberger çarpımının Gröbner-Shirshov tabanı

$$u_1 - v_1 \tag{3.7}$$

$$u_2 - v_2 \tag{3.8}$$

$$z_{w_1,w_2}^2 - z_{w_1,w_2} \tag{3.9}$$

$$z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1',w_2'}, \tag{3.10}$$

$$x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_1 \tag{3.11}$$

$$z_{w_1,w_2} x_2 - x_2 z_{w_1,w_2 x_2} \tag{3.12}$$

$$x_1 x_2 - x_2 x_1 \tag{3.13}$$

bağıntılarından oluşur. Burada $x_i \in X_i, w_i, w_i' \in M_i\ (1 \leq i \leq 2)$, $u_i - v_i\ \in R_i\ (1 \leq i \leq 2)$ dir.

İspat: Gröbner-Shirshov tabanı belirleyebilmek için (3.7)-(3.13) arasındaki tüm kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim. Burada oluşan tüm kesişim belirsizleri aşağıdaki Tablo 3.1 de gösterilmiştir

Tablo 3.1: (3.7)-(3.13) ile verilen bağıntıların kendi arasındaki kesişim kompozisyonları ve bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
$(3.7) \cap (3.11)$	$\overline{u}_1 x_1 z_{w_1,w_2}$	$(3.10) \cap (3.12)$	$z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} x_2$
$(3.7) \cap (3.13)$	$\overline{u}_1 x_1 x_2$	$(3.11) \cap (3.9)$	$x_1 z_{w_1,w_2}$
$(3.9) \cap (3.10)$	$z^2_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'}$	$(3.11) \cap (3.10)$	$x_1 z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'}$
$(3.9) \cap (3.12)$	$z^2_{w_1,w_2} x_2$	$(3.11) \cap (3.12)$	$x_1 z_{w_1,w_2} x_2$
$(3.10) \cap (3.9)$	$z_{w_1,w_2} z^2_{w_1',w_2'}$	$(3.12) \cap (3.8)$	$z_{w_1,w_2} x_2 \underline{u_2}$
$(3.10) \cap (3.10)$	$z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1'',w_2''}$	$(3.13) \cap (3.8)$	$x_1 x_2 \underline{u_2}$

Bu tabloda gösterilen kesişim belirsizleri verilen kesişim kompozisyonlarının aşikar modül olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(f_7, f_{11})_w &= (u_1 - v_1) z_{w_1,w_2} - \overline{u}_1 (x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1 w_1,w_2} x_1) \\
&= u_1 z_{w_1,w_2} - v_1 z_{w_1,w_2} - \overline{u}_1 x_1 z_{w_1,w_2} + \overline{u}_1 z_{x_1 w_1,w_2} x_1 \\
&= \overline{u}_1 z_{x_1 w_1,w_2} x_1 - v_1 z_{w_1,w_2} \\
&= z_{\overline{u}_1 x_1 w_1,w_2} \overline{u}_1 x_1 - z_{v_1 w_1,w_2} v_1 \\
&= z_{u_1 x_1 w_1,w_2} u_1 - z_{v_1 w_1,w_2} v_1 \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_7, f_{13})_w &= (u_1 - v_1) x_2 - \overline{u}_1 (x_1 x_2 - x_2 x_1) \\
&= u_1 x_2 - v_1 x_2 - \overline{u}_1 x_1 x_2 + \overline{u}_1 x_2 x_1 \\
&= \overline{u}_1 x_2 x_1 - v_1 x_2 \\
&= x_2 \overline{u}_1 x_1 - x_2 v_1 \\
&= x_2 u_1 - x_2 v_1 \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_9, f_{10})_w &= (z^2_{w_1,w_2} - z_{w_1,w_2}) z_{w_1',w_2'} - z_{w_1,w_2} (z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}) \\
&= z^2_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} \\
&\quad - z_{w_1,w_2} z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} + z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} - z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} z_{w_1,w_2} - z_{w_1',w_2'}\, z_{w_1,w_2} \\
&= z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_9, f_{12})_w &= (z^2_{w_1,w_2} - z_{w_1,w_2})x_2 - z_{w_1,w_2}(z_{w_1,w_2}x_2 - x_2 z_{w_1,w_2x_2}) \\
&= z^2_{w_1,w_2}x_2 - z_{w_1,w_2}x_2 - z_{w_1,w_2}z_{w_1,w_2}x_2 + z_{w_1,w_2}x_2 z_{w_1,w_2x_2} \\
&= z_{w_1,w_2}x_2 z_{w_1,w_2x_2} - z_{w_1,w_2}x_2 \\
&= x_2 z_{w_1,w_2x_2} z_{w_1,w_2x_2} - x_2 z_{w_1,w_2x_2} \\
&= x_2 z_{w_1,w_2x_2} - x_2 z_{w_1,w_2x_2} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{10}, f_9)_w &= (z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}) z_{w_1',w_2'} - z_{w_1,w_2}(z^2_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'}) \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} \\
&\quad - z_{w_1,w_2} z^2_{w_1',w_2'} + z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} \\
&= z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} \\
&= z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{10}, f_{10})_w &= (z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}) z_{w_1'',w_2''} \\
&\quad - z_{w_1,w_2}(z_{w_1',w_2'} z_{w_1'',w_2''} - z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'}) \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1'',w_2''} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} \\
&\quad - z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1'',w_2''} + z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'} \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} z_{w_1'',w_2''} \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1,w_2} z_{w_1'',w_2''} z_{w_1',w_2'} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{10}, f_{12})_w &= (z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}) x_2 \\
&\quad - z_{w_1,w_2}(z_{w_1',w_2'} x_2 - x_2 z_{w_1',w_2'x_2}) \\
&= z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} x_2 - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} x_2 \\
&\quad - z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} x_2 + z_{w_1,w_2} x_2 z_{w_1',w_2'x_2} \\
&= x_2 z_{w_1,w_2x_2} z_{w_1',w_2'x_2} - z_{w_1',w_2'} x_2 z_{w_1,w_2x_2} \\
&= x_2 z_{w_1,w_2x_2} z_{w_1',w_2'x_2} - x_2 z_{w_1',w_2'x_2} z_{w_1,w_2x_2} \\
&= x_2 z_{w_1',w_2'x_2} z_{w_1,w_2x_2} - x_2 z_{w_1',w_2'x_2} z_{w_1,w_2x_2} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
(f_{11}, f_9)_w &= (x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1)z_{w_1,w_2} - x_1(z^2_{w_1,w_2} - z_{w_1,w_2}) \\
&= x_1 z_{w_1,w_2} z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1 z_{w_1,w_2} - x_1 z^2_{w_1,w_2} + x_1 z_{w_1,w_2} \\
&= x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1 z_{w_1,w_2} \\
&= z_{x_1w_1,w_2}x_1 - z_{x_1w_1,w_2} z_{x_1w_1,w_2}x_1 \\
&= z_{x_1w_1,w_2}x_1 - z_{x_1w_1,w_2}x_1 \equiv 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_{11}, f_{10})_w &= (x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1)z_{w_1',w_2'} - x_1(z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2}) \\
&= x_1 z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} - z_{x_1w_1,w_2}x_1 z_{w_1',w_2'} \\
&\quad - x_1 z_{w_1,w_2} z_{w_1',w_2'} + x_1 z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} \\
&= x_1 z_{w_1',w_2'} z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1 z_{w_1',w_2'} \\
&= z_{x_1w_1',w_2'}x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2} z_{x_1w_1',w_2'}x_1 \\
&= z_{x_1w_1',w_2'} z_{x_1w_1,w_2}x_1 - z_{x_1w_1,w_2} z_{x_1w_1',w_2'}x_1 \\
&= z_{x_1w_1',w_2'} z_{x_1w_1,w_2}x_1 - z_{x_1w_1',w_2'} z_{x_1w_1,w_2}x_1 \equiv 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_{11}, f_{12})_w &= (x_1 z_{w_1,w_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1)x_2 - x_1(z_{w_1,w_2}x_2 - x_2 z_{w_1,w_2x_2}) \\
&= x_1 z_{w_1,w_2}x_2 - z_{x_1w_1,w_2}x_1x_2 - x_1 z_{w_1,w_2}x_2 + x_1x_2 z_{w_1,w_2x_2} \\
&= x_1x_2 z_{w_1,w_2x_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_1x_2 \\
&= x_2x_1 z_{w_1,w_2x_2} - z_{x_1w_1,w_2}x_2x_1 \\
&= x_2 z_{x_1w_1,w_2x_2}x_1 - x_2 z_{x_1w_1,w_2x_2}x_1 \equiv 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_{12}, f_8)_w &= (z_{w_1,w_2}x_2 - x_2 z_{w_1,w_2x_2})\underline{u_2} - z_{w_1,w_2}(u_2 - v_2) \\
&= z_{w_1,w_2}x_2\underline{u_2} - x_2 z_{w_1,w_2x_2}\underline{u_2} - z_{w_1,w_2}u_2 + z_{w_1,w_2}v_2 \\
&= z_{w_1,w_2}v_2 - x_2 z_{w_1,w_2x_2}\underline{u_2} \\
&= v_2 z_{w_1,w_2v_2} - x_2\underline{u_2}\, z_{w_1,w_2x_2\underline{u_2}} \\
&= v_2 z_{w_1,w_2v_2} - u_2\, z_{w_1,w_2u_2} \equiv 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_{13}, f_8)_w &= (x_1x_2 - x_2x_1)\underline{u_2} - x_1(u_2 - v_2) \\
&= x_1x_2\underline{u_2} - x_2x_1\underline{u_2} - x_1u_2 + x_1v_2 \\
&= x_1v_2 - x_2x_1\underline{u_2} \\
&= v_2x_1 - x_2\underline{u_2}x_1
\end{aligned}$$

$= v_2x_1 - u_2x_1 \equiv 0.$

Görülüyor ki (3.7)-(3.13) arasındaki tüm kesişim kompozisyonları aşikardır. Dolayısıyla (3.7)-(3.13) ile verilen polinomlar $M_1 \diamond M_2$ Schützenberger çarpımı için bir Gröbner-Shirshov taban belirtir.■

Monoidlerin Schützenberger çarpımı için Gröbner-Shirshov taban bağıntılarından hareketle aşağıdaki şekilde kelimeler için normal form verilebilir:

3.3.3 Sonuç: $M_1 \diamond M_2$ Schützenberger çarpımının her w elemanı $u_2 z_{m_1,m_2} u_1$ biçiminde tek bir şekilde yazılabilir öyle ki $z_{m_1,m_2} \in \{z_{w_1,w_2} | w_1 \in M_1, w_2 \in M_2\}^*$, $u_2 \in X_2^*$ ve $u_1 \in X_1^*$ kelimeleri indirgenemezdirler.

4. REES MATRİS YARIGRUPLARI İÇİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARIN BELİRLENMESİ

4.1 Giriş

Rees matris yarıgrupları ilk olarak Rees [37] tarafından 1940 ta Suschkevitch [42] in 1928 deki çalışmasının öncülüğünde yaptığı çalışma ile ortaya atılmıştır. Zaman içinde yarıgrup yapıları içinde en önemlilerinden biri haline gelen Rees matris yarıgrupları bir çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

Tezin bu bölümünde öncelikle Rees matris yarıgrupları tanıtılmıştır. Alt Bölüm 4.3 ile de bu bölümün ana amacı olan Rees matris yarıgruplarının Gröbner-Shirshov tabanlarının hesaplanmasına yer verilmiştir.

4.2 Rees Matris Yarıgrupları

Bu bölümde Rees matris yarıgruplarının temel tanım ve özelliklerine değinilecektir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [24,30,32,37,42] kaynaklarından ulaşılabilir.

4.2.1 Tanım: A bir monoid ve 0, A ya bağlı olmayan bir eleman ve I ve Λ index kümesi olsun. Ayrıca $P = (p_{\lambda_i})_{\lambda_i \in \Lambda, i \in I}$, $|\Lambda| \times |I|$ tipinde bir matris olup elemanları $A \cup \{0\}$ kümesindendir. Rees matris yarıgrubu

$$(i_1, a_1, \lambda_1)(i_2, a_2, \lambda_2) = \begin{cases} (i_1, a_1 p_{\lambda_i i_2} a_2, \lambda_2), & p_{\lambda_i i_2} \neq 0 \\ 0 \quad , & p_{\lambda_i i_2} = 0 \end{cases}$$

işlemi altında tanımlı $(I \times A \times \Lambda) \cup \{0\}$ kümesidir ve $M^0[A;\, I, \Lambda;\, P]$ ile gösterilir. Öyle ki $0(i, a, \lambda) = (i, a, \lambda)0 = 00 = 0$ dır.

4.3 Rees Matris Yarıgruplarının Gröbner-Shirshov Tabanlarının Belirlenmesi

Tezin bu bölümünde öncelikle Rees matris yarıgrubunun sunuşu verilecektir. Daha sonra bu bölümün ana amacı olan Rees matris yarıgrubunun Gröbner-Shirshov tabanını veren Teorem 4.3.2 tarafımızdan ispatlanmış olup "Discrete Mathematics" dergisinde yayımlanmıştır [3].

4.3.1 Tanım: A bir monoid olmak üzere A nın yarıgrup sunuşu

$$\wp_A = \langle X | R \rangle \tag{4.1}$$

olmak üzere R, A için X^* üzerinde $<_A$ deg-lex sıralamaya göre bir Gröbner-Shirshov taban olsun. Ayrıca $e \in X^*$ ise, A nın birimi 1_A yı temsil eden boş olmayan kelime olsun. Buna ek olarak P, elemanları A kümesinden olan ve $p_{11} = 1_A$ olan $|\Lambda| \times |I|$ tipinde bir matris olsun. Bu durumda $S = M^0[A;\ I, \Lambda;\ P]$ bir Rees matris yarıgrubu olsun. $Y = X \cup \{y_i : i \in I - \{1\}\} \cup \{z_\lambda : \lambda \in \Lambda - \{1\}\}$ olmak üzere S nin sunuşu

$$\wp_S = \langle\ Y \quad | \ R, y_i e = y_i, e y_i = p_{1i}, z_\lambda e = p_{\lambda 1}, e z_\lambda = z_\lambda, z_\lambda y_i = p_{\lambda i}\ \rangle \tag{4.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $(i \in I - \{1\}, \lambda \in \Lambda - \{1\})$ dır.

Şimdi bu bölümün ana teoremini verebilmek için Y^* kümesini deg-lex sıralamaya göre aşağıdaki şekilde sıralayalım;

$$z_\lambda\, , z_{\lambda'} > x \text{ ve } y_i\, , y_j > x \ (x \in X). \tag{4.3}$$

Burada $i, j \in I - \{1\}$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda - \{1\}$ için $|p_{\lambda 1}| = |p_{\lambda' 1}| = |p_{1i}| = |p_{1j}| = 1$ ve $|p_{\lambda i}|\, , |p_{\lambda' i}| \le 2$ olarak kabul edelim.

Şimdi (4.3) ile verilen sıralamaya göre S Rees matris yarıgrubunun Gröbner-Shirshov tabanını veren bu bölümün ana teoremini verebiliriz.

4.3.2 Teorem: Sunuşu (4.1) ile verilen A monoidi için tanımlanan Rees matris yarıgrubu $S = M^0[A;\ I, \Lambda;\ P]$ nin sunuşu (4.2) ile verildiği gibi olsun. Bu durumda S Rees matris yarıgrubunun (4.3) ile verilen sıralamaya göre Gröbner-Shirshov tabanı

$$u - v \tag{4.4}$$
$$y_i e - y_i \tag{4.5}$$
$$e y_i - p_{1i} \tag{4.6}$$
$$z_\lambda e - p_{\lambda 1} \tag{4.7}$$
$$e z_\lambda - z_\lambda \tag{4.8}$$
$$z_\lambda y_i - p_{\lambda i} \tag{4.9}$$
$$y_i y_j - y_i p_{1j} \tag{4.10}$$
$$p_{1i} e - p_{1i} \tag{4.11}$$
$$z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i \tag{4.12}$$
$$z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'} \tag{4.13}$$
$$e p_{\lambda 1} - p_{\lambda 1} \tag{4.14}$$
$$e p_{\lambda i} - p_{\lambda i} \tag{4.15}$$
$$p_{\lambda i} e - p_{\lambda i} \tag{4.16}$$
$$p_{1i} y_j - p_{1i} p_{1j} \tag{4.17}$$
$$z_\lambda p_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1} p_{\lambda' 1} \tag{4.18}$$
$$z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1} p_{\lambda' i} \tag{4.19}$$
$$p_{\lambda i} y_j - p_{\lambda i} p_{1j} \tag{4.20}$$

bağıntılarından oluşur. Burada $u - v \in R$, $i, j \in I - \{1\}$ ve $\lambda, \lambda' \in \Lambda - \{1\}$ dir.

İspat: İlk olarak her zaman yaptığımız gibi sunuşta verilen bağıntıların ve bunlardan elde edilen yeni bağıntıların birbirleriyle olan kesişim kompozisyonlarının aşikar olduğunu göstermemiz gerekir. Bunun için ilk olarak sunuşta verilen bağıntılar olan (4.4)-(4.9) arasındaki bağıntıların kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim.

Bu bağıntılardan elde edilen kesişim belirsizleri ve elde edilen yeni bağıntılar aşağıdaki Tablo 4.1 de verildiği gibidir.

Tablo 4.1: (4.4)-(4.9) ile verilen bağıntıların kendi aralarındaki kesişim kompozisyonları, bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar

$i \cap j$	w	*yeni bağıntı*
(4.5) ∩ (4.6)	$y_i e y_j$	(4.10) $y_i y_j - y_i p_{1j}$
(4.5) ∩ (4.8)	$y_i e z_\lambda$	$aşikar$
(4.6) ∩ (4.5)	$e y_i e$	(4.11) $p_{1i} e - p_{1i}$
(4.7) ∩ (4.6)	$z_\lambda e y_i$	(4.12) $z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i$
(4.7) ∩ (4.8)	$z_\lambda e z_{\lambda'}$	(4.13) $z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'}$
(4.8) ∩ (4.7)	$e z_\lambda e$	(4.14) $e p_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}$
(4.8) ∩ (4.9)	$e z_\lambda y_i$	(4.15) $e p_{\lambda i} - p_{\lambda i}$
(4.9) ∩ (4.5)	$z_\lambda y_i e$	(4.16) $p_{\lambda i} e - p_{\lambda i}$

Şimdi bunların nasıl elde edildiğini gösterelim.

$$\begin{aligned}(f_5, f_6)_w &= (y_i e - y_i) y_j - y_i (e y_j - p_{1j}) \\ &= y_i e y_j - y_i y_j - y_i e y_j + y_i p_{1j} \\ &= y_i p_{1j} - y_i y_j \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}(f_5, f_8)_w &= (y_i e - y_i) z_\lambda - y_i (e z_\lambda - z_\lambda) \\ &= y_i e z_\lambda - y_i z_\lambda - y_i e z_\lambda + y_i z_\lambda \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}(f_6, f_5)_w &= (e y_i - p_{1i}) e - e (y_i e - y_i) \\ &= e y_i e - p_{1i} e - e y_i e + e y_i \\ &= -p_{1i} e + e y_i \\ &= -p_{1i} e + p_{1i} \end{aligned} \tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}(f_7, f_6)_w &= (z_\lambda e - p_{\lambda 1})y_i - z_\lambda(ey_i - p_{1i}) \\ &= z_\lambda e y_i - p_{\lambda 1}y_i - z_\lambda e y_i + z_\lambda p_{1i} \\ &= -p_{\lambda 1}y_i + z_\lambda p_{1i} \qquad (4.24)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_7, f_8)_w &= (z_\lambda e - p_{\lambda 1})z_{\lambda'} - z_\lambda(ez_{\lambda'} - z_{\lambda'}) \\ &= z_\lambda e z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'} - z_\lambda e z_{\lambda'} + z_\lambda z_{\lambda'} \\ &= -p_{\lambda 1}z_{\lambda'} + z_\lambda z_{\lambda'} \qquad (4.25)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_8, f_7)_w &= (ez_\lambda - z_\lambda)e - e(z_\lambda e - p_{\lambda 1}) \\ &= ez_\lambda e - z_\lambda e - ez_\lambda e + ep_{\lambda 1} \\ &= -z_\lambda e + ep_{\lambda 1} \\ &= -p_{\lambda 1} + ep_{\lambda 1} \qquad (4.26)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_8, f_9)_w &= (ez_\lambda - z_\lambda)y_i - e(z_\lambda y_i - p_{\lambda i}) \\ &= ez_\lambda y_i - z_\lambda y_i - ez_\lambda y_i + ep_{\lambda i} \\ &= -z_\lambda y_i + ep_{\lambda i} \\ &= -p_{\lambda i} + ep_{\lambda i} \qquad (4.27)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_9, f_5)_w &= (z_\lambda y_i - p_{\lambda i})e - z_\lambda(y_i e - y_i) \\ &= z_\lambda y_i e - p_{\lambda i}e - z_\lambda y_i e + z_\lambda y_i \\ &= -p_{\lambda i}e + z_\lambda y_i \\ &= -p_{\lambda i}e + p_{\lambda i} \qquad (4.28)\end{aligned}$$

Yukarıda (4.22) ile verilen işlemlerden görüldüğü gibi $(f_5, f_8)_w$ aşikardır. (4.21), (4.23)-(4.28) ile verilen işlemlere bakıldığında ise aşikar olmadığı görülür. Dolayısıyla (4.3) ile verilen sıralama göz önünde bulundurularak $(f_5, f_6)_w$, $(f_6, f_5)_w$, $(f_7, f_6)_w$, $(f_7, f_8)_w$, $(f_8, f_7)_w$, $(f_8, f_9)_w$ ve $(f_9, f_5)_w$ den sırasıyla $f_{10} = y_i y_j - y_i p_{1j}$, $f_{11} = p_{1i}e - p_{1i}$, $f_{12} = z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1}y_i$, $f_{13} = z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'}$, $f_{14} = ep_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}$, $f_{15} = ep_{\lambda i} - p_{\lambda i}$ ve $f_{16} = p_{\lambda i}e - p_{\lambda i}$ biçiminde bağıntılar elde edilir ve Gröbner-Shirshov tabana eklenir.

Şimdi burada elde edilen yeni bağıntıların (4.10)-(4.16), kendi aralarında olan ve bunların (4.4)-(4.9) ile olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim.

Tablo 4.2: (4.10)-(4.16) ile verilen bağıntıların kendi aralarında ve (4.4)-(4.9) ile olan kesişim kompozisyonları ve bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
$(4.10) \cap (4.10)$	$y_i y_j y_{j'}$	$(4.11) \cap (4.6)$	$p_{1i} e y_j$
$(4.11) \cap (4.14)$	$p_{1i} e p_{\lambda 1}$	$(4.11) \cap (4.8)$	$p_{1i} e z_\lambda$
$(4.11) \cap (4.15)$	$p_{1i} e p_{\lambda i'}$	$(4.12) \cap (4.4)$	$z_\lambda p_{1i} \underline{u}$
$(4.12) \cap (4.11)$	$z_\lambda p_{1i} e$	$(4.13) \cap (4.7)$	$z_\lambda z_{\lambda'} e$
$(4.13) \cap (4.12)$	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{1i}$	$(4.13) \cap (4.9)$	$z_\lambda z_{\lambda'} y_i$
$(4.15) \cap (4.16)$	$e p_{\lambda i} e$	$(4.14) \cap (4.4)$	$e p_{\lambda 1} \underline{u}$
$(4.16) \cap (4.14)$	$p_{\lambda i} e p_{\lambda' 1}$	$(4.15) \cap (4.4)$	$e p_{\lambda i} \underline{u}$
$(4.16) \cap (4.15)$	$p_{\lambda i} e p_{\lambda' i'}$	$(4.16) \cap (4.6)$	$p_{\lambda i} e y_j$
$(4.10) \cap (4.5)$	$y_i y_j e$	$(4.16) \cap (4.8)$	$p_{\lambda i} e z_{\lambda'}$

Yukarıdaki Tablo 4.2 de özetlendiği şekilde (4.10)-(4.16) nın kendi aralarında olan kesişim kompozisyonlarına bakıldığında hepsinin aşikar olduğunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\begin{aligned}(f_{10}, f_{10})_w &= (y_i y_j - y_i p_{1j}) y_{j'} - y_i (y_j y_{j'} - y_i p_{1j}) \\ &= y_i y_j y_{j'} - y_i p_{1j} y_{j'} - y_i\, y_j y_{j'} + y_i y_i p_{1j'} \\ &= -y_i p_{1j} y_{j'} + y_i y_i p_{1j'} \\ &= -y_i p_{1j} p_{1j'} + y_i p_{1j} p_{1j'} \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.29}$$

$$\begin{aligned}(f_{11}, f_{14})_w &= (p_{1i} e - p_{1i}) p_{\lambda 1} - p_{1i} (e p_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}) \\ &= p_{1i} e p_{\lambda 1} - p_{1i} p_{\lambda 1} - p_{1i} e p_{\lambda 1} + p_{1i} p_{\lambda 1} \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$\begin{aligned}(f_{11}, f_{15})_w &= (p_{1i} e - p_{1i}) p_{\lambda i} - p_{1i} (e p_{\lambda i} - p_{\lambda i}) \\ &= p_{1i} e p_{\lambda i} - p_{1i} p_{\lambda i} - p_{1i} e p_{\lambda i} + p_{1i} p_{\lambda i} \equiv 0. \end{aligned} \tag{4.31}$$

$$(f_{12}, f_{11})_w = (z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i) e - z_\lambda (p_{1i} e - p_{1i})$$

$$
\begin{aligned}
&= z_\lambda p_{1i}e - p_{\lambda 1}y_i e - z_\lambda p_{1i}e + z_\lambda p_{1i} \\
&= -p_{\lambda 1}y_i e + z_\lambda p_{1i} \\
&= -p_{\lambda 1}y_i + p_{\lambda 1}y_i \equiv 0. \qquad (4.32)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{13}, f_{12})_w &= (z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'})p_{1i} - z_\lambda(z_{\lambda'}p_{1i} - p_{\lambda' 1}y_i) \\
&= z_\lambda z_{\lambda'}p_{1i} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'}p_{1i} - z_\lambda z_{\lambda'}p_{1i} + z_\lambda p_{\lambda' 1}y_i \\
&= -p_{\lambda 1}z_{\lambda'}p_{1i} + z_\lambda p_{\lambda' 1}y_i \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}y_i + z_\lambda p_{\lambda' 1}y_i \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}y_i + p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}y_i \equiv 0. \qquad (4.33)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{15}, f_{16})_w &= (ep_{\lambda i} - p_{\lambda i})e - e(p_{\lambda i}e - p_{\lambda i}) \\
&= ep_{\lambda i}e - p_{\lambda i}e - ep_{\lambda i}e + ep_{\lambda i} \\
&= -p_{\lambda i}e + ep_{\lambda i} \\
&= -p_{\lambda i} + p_{\lambda i} \equiv 0. \qquad (4.34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{16}, f_{14})_w &= (p_{\lambda i}e - p_{\lambda i})p_{\lambda 1} - p_{\lambda i}(ep_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}) \\
&= p_{\lambda i}ep_{\lambda 1} - p_{\lambda i}p_{\lambda 1} - p_{\lambda i}ep_{\lambda 1} + p_{\lambda i}p_{\lambda 1} \equiv 0. \qquad (4.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{16}, f_{15})_w &= (p_{\lambda i}e - p_{\lambda i})p_{\lambda i} - p_{\lambda i}(ep_{\lambda i} - p_{\lambda i}) \\
&= p_{\lambda i}ep_{\lambda i} - p_{\lambda i}p_{\lambda i} - p_{\lambda i}ep_{\lambda i} + p_{\lambda i}p_{\lambda i} \equiv 0. \qquad (4.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{10}, f_5)_w &= (y_i y_j - y_i p_{1j})e - y_i(y_j e - y_j) \\
&= y_i y_j e - y_i p_{1j}e - y_i\, y_j e + y_i y_j \\
&= -y_i p_{1j}e + y_i y_j \\
&= -y_i p_{1j} + y_i p_{1j} \equiv 0. \qquad (4.37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{11}, f_6)_w &= (p_{1i}e - p_{1i})y_i - p_{1i}(ey_i - p_{1i}) \\
&= p_{1i}ey_i - p_{1i}y_i - p_{1i}ey_i + p_{1i}p_{1i} \\
&= -p_{1i}y_i + p_{1i}p_{1i} \\
&= -p_{1i}p_{1i} + p_{1i}p_{1i} \equiv 0. \qquad (4.38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{11}, f_8)_w &= (p_{1i}e - p_{1i})z_\lambda - p_{1i}(ez_\lambda - z_\lambda) \\
&= p_{1i}ez_\lambda - p_{1i}z_\lambda - p_{1i}ez_\lambda + p_{1i}z_\lambda \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.39}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{12}, f_4)_w &= (z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1}y_i)\underline{u} - z_\lambda(u - v) \\
&= z_\lambda p_{1i}\underline{u} - p_{\lambda 1}y_i\underline{u} - z_\lambda u + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}y_i\underline{u} + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}p_{1i}\underline{u} + p_{\lambda 1}v \\
&= -p_{\lambda 1}u + p_{\lambda 1}v \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.40}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{13}, f_7)_w &= (z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'})e - z_\lambda(z_{\lambda'}e - p_{\lambda 1}) \\
&= z_\lambda z_{\lambda'}e - p_{\lambda 1}z_{\lambda'}e - z_\lambda z_{\lambda'}e + z_\lambda p_{\lambda' 1} \\
&= -p_{\lambda 1}z_{\lambda'}e + z_\lambda p_{\lambda' 1} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1} + z_\lambda p_{\lambda' 1} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1} + p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.41}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{13}, f_9)_w &= (z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'})y_i - z_\lambda(z_{\lambda'}y_i - p_{\lambda' i}) \\
&= z_\lambda z_{\lambda'}y_i - p_{\lambda 1}z_{\lambda'}y_i - z_\lambda z_{\lambda'}y_i + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}z_{\lambda'}y_i + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} + p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.42}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{14}, f_4)_w &= (ep_{\lambda 1} - p_{\lambda 1})\underline{u} - e(u - v) \\
&= ep_{\lambda 1}\underline{u} - p_{\lambda 1}\underline{u} - eu + ev \\
&= eu - u - eu + ev \\
&= -u + ev \\
&= -u + v \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.43}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{15}, f_4)_w &= (ep_{\lambda i} - p_{\lambda i})\underline{u} - e(u - v) \\
&= ep_{\lambda i}\underline{u} - p_{\lambda i}\underline{u} - eu + ev \\
&= eu - u - eu + ev \\
&= -u + ev \\
&= -u + v \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.44}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{16}, f_6)_w &= (p_{\lambda i}e - p_{\lambda i})y_j - p_{\lambda i}(ey_j - p_{1j}) \\
&= p_{\lambda i}ey_j - p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}ey_j + p_{\lambda j}p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i}y_j + p_{\lambda i}p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i}p_{1j} + p_{\lambda i}p_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.45}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{16}, f_8)_w &= (p_{\lambda i}e - p_{\lambda i})z_{\lambda'} - p_{\lambda i}(ez_{\lambda'} - z_{\lambda'}) \\
&= p_{\lambda i}ez_{\lambda'} - p_{\lambda i}z_{\lambda'} - p_{\lambda i}ez_{\lambda'} + p_{\lambda j}z_{\lambda'} \\
&= -p_{\lambda i}z_{\lambda'} + p_{\lambda i}z_{\lambda'} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.46}
$$

Şimdi de (4.4)-(4.9) ile (4.10)-(4.16) arasında olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim. Aşağıdaki Tablo 4.3 de bu kesişim kompozisyonlarından gelen kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar özetlenmiştir.

Tablo 4.3: (4.4)-(4.9) ile verilen bağıntıların (4.10)-(4.16) ile olan kesişim kompozisyonları, bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar

$i \cap j$	w	*yeni bağıntı*
(4.4) ∩ (4.11)	$\tilde{u}p_{1i}e$	$aşikar$
(4.5) ∩ (4.14)	$y_iep_{\lambda 1}$	$aşikar$
(4.5) ∩ (4.15)	$y_iep_{\lambda i'}$	$aşikar$
(4.6) ∩ (4.10)	ey_iy_j	(4.17) $p_{1i}y_j - p_{1i}p_{1j}$
(4.7) ∩ (4.14)	$z_\lambda ep_{\lambda' 1}$	(4.18) $z_\lambda p_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}$
(4.7) ∩ (4.15)	$z_\lambda ep_{\lambda' i}$	(4.19) $z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}$
(4.8) ∩ (4.12)	$ez_\lambda p_{1i}$	$aşikar$
(4.8) ∩ (4.13)	$ez_\lambda z_{\lambda'}$	$aşikar$
(4.9) ∩ (4.10)	$z_\lambda y_iy_j$	(4.20) $p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}p_{1j}$
(4.4) ∩ (4.16)	$up_{\lambda i}e$	$aşikar$

Şimdi Tablo 4.3 ile özetlediğimiz kesişim kompozisyonlarını ve elde edilen yeni bağıntıları gösterelim.

$$\begin{aligned}
(f_4, f_{11})_w &= (u-v)e - \tilde{u}(p_{1i}e - p_{1i}) \\
&= ue - ve - \tilde{u}p_{1i}e + \tilde{u}p_{1i} \\
&= ue - ve - ue + u \\
&= -ve + u \\
&= -v + u \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}
(f_5, f_{14})_w &= (y_ie - y_i)p_{\lambda 1} - y_i(ep_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}) \\
&= y_iep_{\lambda 1} - y_ip_{\lambda 1} - y_iep_{\lambda 1} + y_ip_{\lambda 1} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.48}$$

$$\begin{aligned}
(f_5, f_{15})_w &= (y_ie - y_i)p_{\lambda i} - y_i(ep_{\lambda i} - p_{\lambda i}) \\
&= y_iep_{\lambda i} - y_ip_{\lambda i} - y_iep_{\lambda i} + y_ip_{\lambda i} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
(f_6, f_{10})_w &= (ey_i - p_{1i})y_j - e(y_iy_j - y_ip_{1j}) \\
&= ey_iy_j - p_{1i}y_j - ey_iy_j + ey_ip_{1j} \\
&= -p_{1i}y_j + ey_ip_{1j} \\
&= -p_{1i}y_j + p_{1i}p_{1j}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
(f_7, f_{14})_w &= (z_\lambda e - p_{\lambda 1})p_{\lambda' 1} - z_\lambda(ep_{\lambda' 1} - p_{\lambda' 1}) \\
&= z_\lambda ep_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1} - z_\lambda ep_{\lambda' 1} + z_\lambda p_{\lambda' 1} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1} + z_\lambda p_{\lambda' 1}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
(f_7, f_{15})_w &= (z_\lambda e - p_{\lambda 1})p_{\lambda' i} - z_\lambda(ep_{\lambda' i} - p_{\lambda' i}) \\
&= z_\lambda ep_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} - z_\lambda ep_{\lambda' i} + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} + z_\lambda p_{\lambda' i}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

$$\begin{aligned}
(f_8, f_{12})_w &= (ez_\lambda - z_\lambda)p_{1i} - e(z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1}y_i) \\
&= ez_\lambda p_{1i} - z_\lambda p_{1i} - ez_\lambda p_{1i} + ep_{\lambda 1}y_i \\
&= -z_\lambda p_{1i} + ep_{\lambda 1}y_i
\end{aligned}$$

$$= -p_{\lambda 1}y_i + p_{\lambda 1}y_i \equiv 0. \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
(f_8, f_{13})_w &= (ez_\lambda - z_\lambda)z_{\lambda'} - e(z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1}z_{\lambda'}) \\
&= ez_\lambda z_{\lambda'} - z_\lambda z_{\lambda'} - ez_\lambda z_{\lambda'} + ep_{\lambda 1}z_{\lambda'} \\
&= -z_\lambda z_{\lambda'} + ep_{\lambda 1}z_{\lambda'} \\
&= -p_{\lambda 1}z_{\lambda'} + p_{\lambda 1}z_{\lambda'} \equiv 0. \qquad (4.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_9, f_{10})_w &= (z_\lambda y_i - p_{\lambda i})y_j - z_\lambda(y_i y_j - y_i p_{1j}) \\
&= z_\lambda y_i y_j - p_{\lambda i}y_j - z_\lambda y_i y_j + z_\lambda y_i p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i}y_j + z_\lambda y_i p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i}y_j + p_{\lambda i}p_{1j} \qquad (4.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(f_4, f_{16})_w &= (u - v)e - \tilde{u}(p_{\lambda i}e - p_{\lambda i}) \\
&= ue - ve - \tilde{u}p_{\lambda i}e + \tilde{u}p_{\lambda i} \\
&= ue - ve - ue + u \\
&= -ve + u \\
&= -v + u \equiv 0. \qquad (4.56)
\end{aligned}$$

Yukarıda (4.47)-(4.49), (4.53), (4.54), (4.56) ile verilen işlemlerden görüldüğü gibi $(f_4, f_{11})_w$, $(f_5, f_{14})_w$, $(f_5, f_{15})_w$, $(f_8, f_{12})_w$, $(f_8, f_{13})_w$ ve $(f_4, f_{16})_w$ aşikardır. (4.50)-(4.52) ve (4.55) ile verilen işlemlere bakıldığında ise aşikar olmadığı görülür. Dolayısıyla (4.3) ile verilen sıralama göz önünde bulundurularak $(f_6, f_{10})_w$, $(f_7, f_{14})_w$, $(f_7, f_{15})_w$ ve $(f_9, f_{10})_w$ dan sırasıyla $f_{17} = p_{1i}y_j - p_{1i}p_{1j}$, $f_{18} = z_\lambda p_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}$, $f_{19} = z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}$ ve $f_{20} = p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}p_{1j}$ biçiminde bağıntılar elde edilir ve Gröbner-Shirshov tabana eklenir.

Şimdi yine burada elde edilen yeni bağıntıların (4.17)-(4.20), kendi aralarında olan ve bunların (4.4)-(4.16) ile olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim.

Tablo 4.4: (4.17)-(4.20) ile verilen bağıntıların kendi aralarında olan ve (4.4)-(4.16) ile olan kesişim kompozisyonları ve bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
$(4.4) \cap (4.17)$	$\bar{u}p_{1i}y_j$	$(4.18) \cap (4.4)$	$z_\lambda p_{\lambda'1}\underline{u}$
$(4.4) \cap (4.20)$	$\bar{u}p_{\lambda i}y_j$	$(4.17) \cap (4.5)$	$p_{1i}y_j e$
$(4.8) \cap (4.18)$	$ez_\lambda p_{\lambda'1}$	$(4.19) \cap (4.4)$	$z_\lambda p_{\lambda' i}\underline{u}$
$(4.8) \cap (4.19)$	$ez_\lambda p_{\lambda' i}$	$(4.15) \cap (4.20)$	$ep_{\lambda i}y_j$
$(4.12) \cap (4.17)$	$z_\lambda p_{1i}y_j$	$(4.19) \cap (4.16)$	$z_\lambda p_{\lambda' i}e$
$(4.13) \cap (4.18)$	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda''1}$	$(4.19) \cap (4.20)$	$z_\lambda p_{\lambda' i}y_j$
$(4.13) \cap (4.19)$	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda'' i}$	$(4.20) \cap (4.5)$	$p_{\lambda i}y_j e$
$(4.17) \cap (4.10)$	$p_{1i}y_j y_{j'}$	$(4.20) \cap (4.10)$	$p_{\lambda i}y_j y_{j'}$

Benzer şekilde yukarıdaki Tablo 4.4 de özetlendiği gibi (4.17)-(4.20) nin kendi aralarında olan ve bunların (4.4)-(4.16) ile olan kesişim kompozisyonlarına bakıldığında hepsinin aşikar olduğunu aşağıdaki gibi gösterelim:

$$\begin{aligned}
(f_4, f_{17})_w &= (u-v)y_j - \bar{u}(p_{1i}y_j - p_{1i}p_{1j}) \\
&= uy_j - vy_j - \bar{u}p_{1i}y_j + \bar{u}p_{1i}p_{1j} \\
&= uy_j - vy_j - uy_j + \bar{u}p_{1i}p_{1j} \\
&= -vy_j + up_{1j} \\
&= -vp_{1j} + up_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned}
(f_4, f_{20})_w &= (u-v)y_j - \bar{u}(p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}p_{1j}) \\
&= uy_j - vy_j - \bar{u}p_{\lambda i}y_j + \bar{u}p_{\lambda i}p_{1j} \\
&= uy_j - vy_j - uy_j + up_{1j} \\
&= -vy_j + up_{1j} \\
&= -vp_{1j} + up_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
(f_8, f_{18})_w &= (ez_\lambda - z_\lambda)p_{\lambda'1} - e(z_\lambda p_{\lambda'1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda'1}) \\
&= ez_\lambda p_{\lambda'1} - z_\lambda p_{\lambda'1} - ez_\lambda p_{\lambda'1} + ep_{\lambda 1}p_{\lambda'1}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -z_\lambda p_{\lambda'1} + e p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} \\
&= -p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} + p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} \equiv 0. &&(4.59)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_8, f_{19})_w &= (e z_\lambda - z_\lambda) p_{\lambda' i} - e(z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1} p_{\lambda' i}) \\
&= e z_\lambda p_{\lambda' i} - z_\lambda p_{\lambda' i} - e z_\lambda p_{\lambda' i} + e p_{\lambda 1} p_{\lambda' i} \\
&= -z_\lambda p_{\lambda' i} + e p_{\lambda 1} p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1} p_{\lambda' i} + p_{\lambda 1} p_{\lambda' i} \equiv 0. &&(4.60)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{12}, f_{17})_w &= (z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i) y_j - z_\lambda (p_{1i} y_j - p_{1i} p_{1j}) \\
&= z_\lambda p_{1i} y_j - p_{\lambda 1} y_i y_j - z_\lambda p_{1i} y_j + z_\lambda p_{1i} p_{1j} \\
&= -p_{\lambda 1} y_i y_j + z_\lambda p_{1i} p_{1j} \\
&= -p_{\lambda 1} y_i p_{1j} + p_{\lambda 1} y_i p_{1j} \equiv 0. &&(4.61)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{13}, f_{18})_w &= (z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'}) p_{\lambda''1} - z_\lambda (z_{\lambda'} p_{\lambda''1} - p_{\lambda'1} p_{\lambda''1}) \\
&= z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda''1} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'} p_{\lambda''1} - z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda''1} + z_\lambda p_{\lambda'1} p_{\lambda''1} \\
&= -p_{\lambda 1} z_{\lambda'} p_{\lambda''1} + z_\lambda p_{\lambda'1} p_{\lambda''1} \\
&= -p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} p_{\lambda''1} + p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} p_{\lambda''1} \equiv 0. &&(4.62)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{13}, f_{19})_w &= (z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'}) p_{\lambda'' i} - z_\lambda (z_{\lambda'} p_{\lambda'' i} - p_{\lambda'1} p_{\lambda'' i}) \\
&= z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda'' i} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'} p_{\lambda'' i} - z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda'' i} + z_\lambda p_{\lambda'1} p_{\lambda'' i} \\
&= -p_{\lambda 1} z_{\lambda'} p_{\lambda'' i} + z_\lambda p_{\lambda'1} p_{\lambda'' i} \\
&= -p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} p_{\lambda'' i} + p_{\lambda 1} p_{\lambda'1} p_{\lambda'' i} \equiv 0. &&(4.63)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{15}, f_{20})_w &= (e p_{\lambda i} - p_{\lambda i}) y_j - e(p_{\lambda i} y_j - p_{\lambda i} p_{1j}) \\
&= e p_{\lambda i} y_j - p_{\lambda i} y_j - e p_{\lambda i} y_j + e p_{\lambda i} p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i} y_j + e p_{\lambda i} p_{1j} \\
&= -p_{\lambda i} p_{1j} + p_{\lambda i} p_{1j} \equiv 0. &&(4.64)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{17}, f_{10})_w &= (p_{1i} y_j - p_{1i} p_{1j}) y_{j'} - p_{1i} (y_j y_{j'} - y_j p_{1j'}) \\
&= p_{1i} y_j y_{j'} - p_{1i} p_{1j} y_{j'} - p_{1i} y_j y_{j'} + p_{1i} y_j p_{1j'} \\
&= -p_{1i} p_{1j} y_{j'} + p_{1i} y_j p_{1j'}
\end{aligned}
$$

$$= -p_{1i}p_{1j}p_{1j'} + p_{1i}p_{1j}p_{1j'} \equiv 0. \tag{4.65}$$

$$\begin{aligned}
(f_{18}, f_4)_w &= (z_\lambda p_{\lambda'1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda'1})\underline{u} - z_\lambda(u - v) \\
&= z_\lambda p_{\lambda'1}\underline{u} - p_{\lambda 1}p_{\lambda'1}\underline{u} - z_\lambda u + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda'1}\underline{u} + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}u + p_{\lambda 1}v \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.66}$$

$$\begin{aligned}
(f_{19}, f_4)_w &= (z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i})\underline{u} - z_\lambda(u - v) \\
&= z_\lambda p_{\lambda' i}\underline{u} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}\underline{u} - z_\lambda u + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}\underline{u} + z_\lambda v \\
&= -p_{\lambda 1}u + p_{\lambda 1}v \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.67}$$

$$\begin{aligned}
(f_{17}, f_5)_w &= (p_{1i}y_j - p_{1i}p_{1j})e - p_{1i}(y_j e - y_j) \\
&= p_{1i}y_j e - p_{1i}p_{1j}e - p_{1i}y_j e + p_{1i}y_j \\
&= -p_{1i}p_{1j}e + p_{1i}y_j \\
&= -p_{1i}p_{1j} + p_{1i}p_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.68}$$

$$\begin{aligned}
(f_{19}, f_{16})_w &= (z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i})e - z_\lambda(p_{\lambda' i}e - p_{\lambda' i}) \\
&= z_\lambda p_{\lambda' i}e - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}e - z_\lambda p_{\lambda' i}e + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}e + z_\lambda p_{\lambda' i} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} + p_{\lambda 1}p_{\lambda' i} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\begin{aligned}
(f_{19}, f_{20})_w &= (z_\lambda p_{\lambda' i} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i})y_j - z_\lambda(p_{\lambda' i}y_j - p_{\lambda' i}p_{1j}) \\
&= z_\lambda p_{\lambda' i}y_j - p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}y_j - z_\lambda p_{\lambda' i}y_j + z_\lambda p_{\lambda' i}p_{1j} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}y_j + z_\lambda p_{\lambda' i}p_{1j} \\
&= -p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}p_{1j} + p_{\lambda 1}p_{\lambda' i}p_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.70}$$

$$\begin{aligned}
(f_{20}, f_5)_w &= (p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}p_{1j})e - p_{\lambda i}(y_j e - y_j) \\
&= p_{\lambda i}y_j e - p_{\lambda i}p_{1j}e - p_{\lambda i}y_j e + p_{\lambda i}y_j \\
&= -p_{\lambda i}p_{1j}e + p_{\lambda i}y_j \\
&= -p_{\lambda i}p_{1j} + p_{\lambda i}p_{1j} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.71}$$

$$
\begin{aligned}
(f_{20}, f_{10})_w &= (p_{\lambda i}y_j - p_{\lambda i}p_{1j})y_{j'} - p_{\lambda i}(y_j y_{j'} - y_j p_{1j'}) \\
&= p_{\lambda i}y_j y_{j'} - p_{\lambda i}p_{1j}y_{j'} - p_{\lambda i}y_j y_{j'} + p_{\lambda i}y_j p_{1j'} \\
&= -p_{\lambda i}p_{1j}y_{j'} + p_{\lambda i}y_j p_{1j'} \\
&= -p_{\lambda i}p_{1j}p_{1j'} + p_{\lambda i}p_{1j}p_{1j'} \equiv 0.
\end{aligned} \tag{4.72}
$$

Böylece görülüyor ki (4.2) ile verilen sunuştan gelen bağıntılar (4.4)-(4.9) ile gerekli işlemler yapıldığında S Rees matris yarıgrubunun Gröbner-Shirshov tabanı (4.4)-(4.20) ile verilen bağıntılardan oluşmaktadır.■

Teorem 4.3.2 de $i,j \in I - \{1\}$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda - \{1\}$ için $|p_{\lambda 1}| = |p_{\lambda' 1}| = |p_{1i}| = |p_{1j}| = 1$ ve $|p_{\lambda i}|, |p_{\lambda' i}| \leq 2$ olarak kabul etmiştik. Ancak bu eşitsizliği $p_{\lambda i}$, $p_{\lambda' i}$ kelimelerinin uzunluklarına göre genişletecek olursak sunuşu (4.2) ile verilen Rees matris yarıgrubu $S = M^0[A;\ I, \Lambda;\ P]$ nin Gröbner-Shirshov tabanı Teorem 4.3.3 de verildiği gibi olur.

4.3.3 Teorem: Sunuşu (4.1) ile verilen A monoidi için tanımlanan Rees matris yarıgrubu $S = M^0[A;\ I, \Lambda;\ P]$ nin sunuşu (4.2) ile verildiği gibi olsun. $i,j \in I - \{1\}$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda - \{1\}$ için $|p_{\lambda 1}| = |p_{\lambda' 1}| = |p_{1i}| = |p_{1j}| = 1$ ve $|p_{\lambda i}|$, $|p_{\lambda' i}| > 2$ için S Rees matris yarıgrubunun (4.3) ile verilen sıralamaya göre Gröbner-Shirshov tabanı

$$u - v \tag{4.73}$$

$$y_i e - y_i \tag{4.74}$$

$$e y_i - p_{1i} \tag{4.75}$$

$$z_\lambda e - p_{\lambda 1} \tag{4.76}$$

$$e z_\lambda - z_\lambda \tag{4.77}$$

$$p_{\lambda i} - z_\lambda y_i \tag{4.78}$$

$$y_i y_j - y_i p_{1j} \tag{4.79}$$

$$p_{1i} e - p_{1i} \tag{4.80}$$

$$z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i \tag{4.81}$$

$$z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'} \tag{4.82}$$

$$e p_{\lambda 1} - p_{\lambda 1} \tag{4.83}$$

$$p_{1i} y_j - p_{1i} p_{1j} \tag{4.84}$$

$$z_\lambda p_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1} p_{\lambda' 1} \tag{4.85}$$

bağıntılarından oluşur.

İspat: Teorem 4.3.2 de olduğu gibi (4.2) ile verilen sunuştan gelen (4.73)-(4.78) arasındaki bağıntıların kendi arasındaki kesişim kompozisyonlarının aşikar olup olmadığını kontrol etmemiz gerekir. Burada dikkat edilirse (4.4)-(4.8) ile verilen bağıntılar ile (4.73)-(4.77) ile verilen bağıntılar aynıdır. Ayrıca (4.9) ile verilen bağıntı $|p_{\lambda i}|, |p_{\lambda' i}| > 2$ için (4.3) ile verilen sıralamaya göre (4.78) biçiminde değiştirilmiştir.

Buna göre bu bağıntılardan elde edilen kesişim belirsizleri ve elde edilen yeni bağıntılar aşağıdaki Tablo 4.5 de verildiği gibidir.

Tablo 4.5: (4.73)-(4.78) ile verilen bağıntıların kendi aralarında olan kesişim kompozisyonları, bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar

$i \cap j$	w	*yeni bağıntı*
(4.74) ∩ (4.75)	$y_i e y_j$	(4.79) $y_i y_j - y_i p_{1j}$
(4.74) ∩ (4.77)	$y_i e z_\lambda$	$aşikar$
(4.75) ∩ (4.74)	$e y_i e$	(4.80) $p_{1i} e - p_{1i}$
(4.76) ∩ (4.75)	$z_\lambda e y_i$	(4.81) $z_\lambda p_{1i} - p_{\lambda 1} y_i$
(4.76) ∩ (4.77)	$z_\lambda e z_{\lambda'}$	(4.82) $z_\lambda z_{\lambda'} - p_{\lambda 1} z_{\lambda'}$
(4.77) ∩ (4.76)	$e z_\lambda e$	(4.83) $e p_{\lambda 1} - p_{\lambda 1}$
(4.78) ∩ (4.73)	$p_{\lambda i} \underline{u}$	$aşikar$

Burada elde edilen kesişim kompozisyonları bkz. Tablo 4.1 de verilen kesişim kompozisyonları ile aynıdır. Dolayısıyla burada yapılacak olan işlemler

(4.21)-(4.26) ile aynıdır. Sadece değişen bağıntı olan (4.78) in (4.73) ile olan kesişim kompozisyonunun aşikar olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(f_{78}, f_{73})_w &= (p_{\lambda i} - z_\lambda y_i)\underline{u} - \overline{p_{\lambda i}}(u - v) \\
&= p_{\lambda i}\underline{u} - z_\lambda y_i \underline{u} - \overline{p_{\lambda i}}u + \overline{p_{\lambda i}}v \equiv 0.
\end{aligned}
$$

Şimdi burada elde edilen yeni bağıntıların (4.79)-(4.83), kendi aralarında olan ve bunların (4.73)-(4.78) ile olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim.

Tablo 4.6: (4.79)-(4.83) ile verilen bağıntıların kendi aralarında olan ve (4.73)-(4.78) ile olan kesişim kompozisyonlarını ve bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
(4.79) ∩ (4.79)	$y_i y_j y_{j'}$	(4.80) ∩ (4.77)	$p_{1i} e z_\lambda$
(4.80) ∩ (4.83)	$p_{1i} e p_{\lambda 1}$	(4.80) ∩ (4.75)	$p_{1i} e y_j$
(4.81) ∩ (4.80)	$z_\lambda p_{1i} e$	(4.81) ∩ (4.73)	$z_\lambda p_{1i} \underline{u}$
(4.82) ∩ (4.81)	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{1i}$	(4.82) ∩ (4.76)	$z_\lambda z_{\lambda'} e$
(4.79) ∩ (4.74)	$y_i y_j e$	(4.83) ∩ (4.73)	$e p_{\lambda 1} \underline{u}$
(4.82) ∩ (4.81)	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{1i}$		

Yukarıdaki Tablo 4.6 da özetlendiği şekilde (4.79)-(4.83) ün kendi aralarında olan kesişim kompozisyonlarına bakıldığında hepsinin aşikar olduğu (4.29), (4.30), (4.32), (4.33), (4.37)-(4.41), (4.43) işlemlerinden rahatlıkla görülebilir.

Şimdi de (4.79)-(4.83) ile (4.73)-(4.78) arasında olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim. Aşağıdaki Tablo 4.7 de bu kesişim kompozisyonlarından gelen kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar özetlenmiştir.

Tablo 4.7: (4.73)-(4.78) ile verilen bağıntıların (4.79)-(4.83) ile olan kesişim kompozisyonlarını, bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri ve yeni oluşan bağıntılar

$i \cap j$	w	*yeni bağıntı*
(4.73) ∩ (4.80)	$\bar{u}p_{1i}e$	*aşikar*
(4.74) ∩ (4.83)	$y_i e p_{\lambda 1}$	*aşikar*
(4.75) ∩ (4.79)	$e y_i y_j$	(4.84) $p_{1i}y_j - p_{1i}p_{1j}$
(4.76) ∩ (4.83)	$z_\lambda e p_{\lambda' 1}$	(4.85) $z_\lambda p_{\lambda' 1} - p_{\lambda 1}p_{\lambda' 1}$
(4.77) ∩ (4.81)	$e z_\lambda p_{1i}$	*aşikar*
(4.77) ∩ (4.82)	$e z_\lambda z_{\lambda'}$	*aşikar*

Tablo 4.7 ile özetlediğimiz kesişim kompozisyonlarından aşikar olanlar ve elde edilen yeni bağıntılar (4.47), (4.48), (4.50), (4.51), (4.53) ve (4.54) işlemlerinden görülebilir.

Şimdi yine burada elde edilen yeni bağıntıların (4.84)-(4.85), kendi aralarında olan ve bunların (4.73)-(4.83) ile olan kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim.

Tablo 4.8: (4.84)-(4.85) ile verilen bağıntıların kendi aralarında ve (4.73)-(4.83) ile olan kesişim kompozisyonları ve bu kesişim kompozisyonlarının kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
(4.73) ∩ (4.84)	$\bar{u}p_{1i}y_j$	(4.84) ∩ (4.79)	$p_{1i}y_j y_{j'}$
(4.77) ∩ (4.85)	$e z_\lambda p_{\lambda' 1}$	(4.85) ∩ (4.73)	$z_\lambda p_{\lambda' 1}\underline{u}$
(4.81) ∩ (4.84)	$z_\lambda p_{1i} y_j$	(4.84) ∩ (4.74)	$p_{1i}y_j e$
(4.82) ∩ (4.85)	$z_\lambda z_{\lambda'} p_{\lambda'' 1}$		

Benzer şekilde yukarıdaki Tablo 4.8 de özetlendiği gibi (4.84)-(4.85) in kendi aralarında olan ve bunların (4.73)-(4.83) ile olan kesişim kompozisyonlarına bakıldığında hepsinin aşikar olduğu (4.57), (4.61), (4.62), (4.65), (4.66) ve (4.68) işlemlerinden kolaylıkla görülebilir.

Böylece görülüyor ki (4.2) ile verilen sunuştan gelen bağıntılar (4.73)-(4.78) ile gerekli işlemler yapıldığında S Rees matris yarıgrubunun Gröbner-Shirshov tabanı (4.73)-(4.85) ile verilen bağıntılardan oluşmaktadır. ■

5. MONOİDLER İÇİN GENELLEŞTİRİLMİŞ BRUCK-REILLY *-GENİŞLEMENİN GRÖBNER-SHİRSHOV TABANLARININ BELİRLENMESİ

5.1 Giriş

Bruck-Reilly genişlemeler ilk olarak 1958 de Richard Hubert Bruck [13] tarafından yarıgruplar üzerine çalışılmıştır. Daha sonra Norman R. Reilly [38] 1966 da bu yapıyı gruplar üzerine, 1968 de B. P. Kochin [28] ise grupların sonlu dizisi üzerine taşımıştır. 1970 de ise Walter Douglas Munn [34] daha önce Bruck ve Reilly nin çalıştıkları konuyu keyfi bir monoidin genişlemesi haline getirmiştir. Son yıllarda bir çok özelliği incelenen ve gitgide yarıgrup teorinin en önemli konularından biri haline gelen Bruck-Reilly genişlemeler günümüzde de bir çok matematikçi tarafından çalışılmaktadır. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [13,28,34,38] gibi kaynaklardan ulaşılabilir.

Tezin bu bölümünde öncelikle Bruck-Reilly genişlemeler tanıtılmıştır. Alt Bölüm 5.3 de genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin sunuşu tarafımızdan ortaya konmuştur. Daha sonra Alt bölüm 5.4 ile de bu bölümün ana amacı olan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin Gröbner-Shirshov tabanının hesaplanmasına yer verilmiştir.

5.2 Bruck-Reilly Genişlemeler

Bu bölümde Bruck-Reilly genişlemenin temel tanım ve özelliklerine değinilecektir. Bu konuyla ilgili detaylı bilgiye [13,24,28,34,38] kaynaklarından ulaşılabilir.

5.2.1 Tanım: A bir monoid ve $\theta: A \to A$ bir endomorfizma olsun. Buna göre $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ kümesi üzerinde

$$(m,a,n)(p,b,q) = (m-n+t,(a\theta^{t-n})(b\theta^{t-p}),q-p+t)$$

işlemi tanımlansın. Burada $t = max(n,p)$ dir. $\mathbb{N}^0 \times A \times \mathbb{N}^0$ kümesi yukarıda verilen işlemle birlikte birim elemanı $(0,1_A,0)$ olan bir monoid olur ve bu monoid $S(A,\theta)$ ile gösterilir.

Eğer her $a \in A$ için $a\theta = 1_A$ ise $S(A,\theta)$ Bruckun genişlemesine, A nın bir grup olması durumunda ise Reillynin genişlemesine sahip oluruz. Eğer θ nın görüntüsü A grubunun birimini içeriyorsa bu durumda genel Bruck-Reilly genişlemesini elde etmiş oluruz.

5.2.2 Önerme[24]: X kümesi A monoidi için bir üreteç kümesi olsun. Bu durumda

$$\{(0,x,0)|x \in X\} \cup \{(0,1_A,1),(1,1_A,0)\}$$

kümesi de $S(A,\theta)$ monoidi için bir üreteç kümesi olur.

5.2.3 Teorem [24]: A monoidi $\wp_A = \langle X|R\rangle$ sunuşu ile temsil edilsin ve $\theta: A \to A$ bir endomorfizma olsun. Bu durumda $S(A,\theta)$ monoidi

$$\wp_S = \langle X,y,z|R, yz = 1, yx = (x\theta)y, xz = z(x\theta), x\epsilon X\rangle$$

şeklinde bir sunuşa sahiptir.

5.3 Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemeler

Tezin bu bölümünde genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi tanımlanarak sunuşu Teorem 5.3.3 ile tarafımızdan ortaya konmuş olup "Algebra Colloquium" dergisinde yayımlanmıştır [27].

5.3.1 Tanım: T, H_1^* ile birlikte bir monoid olsun öyle ki H_1^*-sınıfı T nin birimi 1_T yi içersin. Ayrıca β ve γ, T den H_1^* a birer homomorfizma olsun. $u \in H_1$ olmak üzere λ_u,

$$x \mapsto uxu^{-1} \text{ öyle ki } \gamma\lambda_u = \beta\gamma \tag{5.1}$$

olarak tanımlı H_1^* ın bir iç otomorfizması olsun. Bu durumda $S = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times T \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$, bir yarıgurubun içine aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$(m,n,v,p,q)(m',n',v',p',q') =$$
$$\begin{cases} (m, n-p+max(p,n'), (v\beta^{max(p,n')-p})(v'\beta^{max(p,n')-n'}), p'-n'+max(p,n'), q'), & q = m' \\ (m,n,v(((u^{-n'}(v'\gamma)u^{p'})\gamma^{q-m'-1})\beta^{p}), p, q'-m'+q), & q > m' \\ (m-q+m', n', (((u^{-n}(v\gamma)u^{p})\gamma^{m'-q-1})\beta^{n'})v', p', q'), & q < m' \end{cases} \tag{5.2}$$

Burada β^0 ve γ^0, T nin birim dönüşümü olarak ve u^0, T nin birimi 1_T olarak alınmıştır. Yukarıda (5.2) ile tanımlanmış olan $S = \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0 \times T \times \mathbb{N}^0 \times \mathbb{N}^0$ monoidi T nin β, γ morfizmaları ve u elemanı ile belirlenmiş genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemesi olarak isimlendirilir. Bu monoid $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ ile gösterilir ve birim elemanı $(0,0,1_T,0,0)$ dır.

5.3.2 Önerme: T bir monoid olmak üzere X, T nin üreteç kümesi olsun. Bu durumda

$$\{(0,0,x,0,0): x \in X\} \cup (0,1,1_T,0,0) \cup$$
$$(1,0,1_T,0,0) \cup (0,0,1_T,1,0) \cup (0,0,1_T,0,1) \tag{5.3}$$

kümesi (5.2) ile tanımlanan $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ monoid için bir üreteç kümesidir.

İspat: İspat için $v, v_1, v_2 \in T$ ve $m_i, n_i, p_i, q_i \in \mathbb{N}^0 (1 \leq i \leq 2)$ için aşağıdaki eşitliklerini göstermek yeterlidir.

$$(0,0,v_1,0,0)(0,0,v_2,0,0) = (0,0,v_1v_2,0,0) \tag{5.4}$$
$$(m_1,0,1_T,0,0)(m_2,0,1_T,0,0) = (m_1+m_2,0,1_T,0,0) \tag{5.5}$$
$$(0,n_1,1_T,0,0)(0,n_2,1_T,0,0) = (0,n_1+n_2,1_T,0,0) \tag{5.6}$$
$$(0,0,1_T,p_1,0)(0,0,1_T,p_2,0) = (0,0,1_T,p_1+p_2,0) \tag{5.7}$$
$$(0,0,1_T,0,q_1)(0,0,1_T,0,q_2) = (0,0,1_T,0,q_1+q_2) \tag{5.8}$$
$$(m_1,0,1_T,0,0)(0,n_2,1_T,0,0) = (m_1,n_2,1_T,0,0) \tag{5.9}$$
$$(0,0,1_T,p_1,0)(0,0,1_T,0,q_2) = (0,0,1_T,p_1,q_2) \tag{5.10}$$
$$(m_1,n_2,1_T,0,0)(0,0,v,0,0)(0,0,1_T,p_1,q_2) = (m_1,n_2,v,p_1,q_2). \tag{5.11}$$

Yukarıda (5.4)-(5.11) ile verilen eşitliklerden görüldüğü gibi (5.3) ile verilen küme (5.2) ile verilen $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ monoidi için bir üreteç kümesidir.■

5.3.3 Teorem: T bir monoid olmak üzere sunuşu $\wp_T = \langle X|R\rangle$ olsun. Ayrıca β,γ dönüşümleri T den H_1^* a birer homomorfizma olsun. Bu durumda (5.2) ile tanımlanan ve üreteç kümesi (5.3) ile belirlenen $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ monoidinin sunuşu, $x \in X$ için

$$\wp_S = \langle\ X,y,z,a,b \ \mid \ R, \tag{5.12}$$
$$yz = 1, ba = 1, \tag{5.13}$$
$$yx = (x\gamma)y, xz = z(x\gamma), \tag{5.14}$$
$$bx = (x\beta)b, xa = a(x\beta), \tag{5.15}$$
$$yb = uy\,, ya = u^{-1}y, \tag{5.16}$$
$$bz = zu, az = zu^{-1}\rangle \tag{5.17}$$

biçimindedir.

İspat: $X \cup \{y, z, a, b\}$ kümesini Y ile ifade edelim. $\phi: Y^* \to GBR^*(T; \beta, \gamma; u)$ homomorfizmasını aşağıdaki şekilde tanımlayalım;

$$\begin{aligned} x\phi &= (0,0,x,0,0) \quad & y\phi &= (0,0,1_T,0,1) \quad & z\phi &= (1,0,1_T,0,0), \\ a\phi &= (0,1,1_T,0,0) \quad & b\phi &= (0,0,1_T,1,0). \end{aligned} \tag{5.18}$$

Önerme 5.3.2 ye göre, ϕ bir epimorfizmadır. Şimdi $GBR^*(T; \beta, \gamma; u)$ nin (5.12)-(5.17) ile verilen bağıntıları sağlayıp sağlamadığını kontrol edelim. (5.12) ile verilen R bağıntıları T monoidini sağladığına göre Önerme 5.3.2 ye göre $GBR^*(T; \beta, \gamma; u)$ yi de sağlar. Bu durumda diğer bağıntıları $x \in X$ için aşağıdaki gibi kontrol edelim:

$$\begin{aligned} (0,0,1_T,0,1)(1,0,1_T,0,0) &= (0,0,1_T,0,0), \\ (0,0,1_T,1,0)(0,1,1_T,0,0) &= (0,0,1_T,0,0); \end{aligned} \tag{5.19}$$

$$\begin{aligned} (0,0,1_T,0,1)(0,0,x,0,0) &= (0,0,x\gamma,0,1) = (0,0,x\gamma,0,0)(0,0,1_T,0,1), \\ (0,0,x,0,0)(1,0,1_T,0,0) &= (1,0,x\gamma,0,0) = (1,0,1_T,0,0)(0,0,x\gamma,0,0); \end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned} (0,0,1_T,1,0)(0,0,x,0,0) &= (0,0,x\beta,1,0) = (0,0,x\beta,0,0)(0,0,1_T,1,0), \\ (0,0,x,0,0)(0,1,1_T,0,0) &= (0,1,x\beta,0,0) = (0,1,1_T,0,0)(0,0,x\beta,0,0); \end{aligned} \tag{5.21}$$

$$\begin{aligned} (0,0,1_T,0,1)(0,0,1_T,1,0) &= (0,0,u,0,1) = (0,0,u,0,0)(0,0,1_T,0,1), \\ (0,0,1_T,0,1)(0,1,1_T,0,0) &= (0,0,u^{-1},0,1) = (0,0,u^{-1},0,0)(0,0,1_T,0,1); \end{aligned} \tag{5.22}$$

$$\begin{aligned} (0,0,1_T,1,0)(1,0,1_T,0,0) &= (1,0,u,0,0) = (1,0,1_T,0,0)(0,0,u,0,0), \\ (0,1,1_T,0,0)(1,0,1_T,0,0) &= (1,0,u^{-1},0,0) = (1,0,1_T,0,0)(0,0,u^{-1},0,0). \end{aligned} \tag{5.23}$$

Buradan (5.18) ile verilen eşitlikler göz önüne alındığında (5.19) ile (5.13) te verilen, (5.20) ile (5.14) te verilen, (5.21) ile (5.15) te verilen, (5.22) ile (5.16) da verilen ve (5.23) ile de (5.17) de verilen bağıntılara ulaşıldığı görülür.

Ayrıca ϕ epimorfizması, (5.12)-(5.17) ile M den $GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ üzerine tanımlanan $\bar{\phi}$ epimorfizmasını gerektirir.

w herhangi bir kelime olmak üzere, M de herhangi bir boştan farklı $w \in Y^*$ kelimesi $f(m,n,v,p,q) = z^m a^n v b^p y^q$, $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$ ve $v \in X^*$ biçiminde normal forma sahiptir. Burada $|w| = 1$ ise $x \in X$ için $w = x = f(0,0,x,0,0)$ veya $w = y = f(0,0,1_T,0,1)$ veya $w = z = f(1,0,1_T,0,0)$ veya $w = a = f(0,1,1_T,0,0)$ veya $w = b = f(0,0,1_T,1,0)$ dır. Tümevarımlı olarak devam edecek olursak uzunluğu k dan daha küçük olan her kelime formu $f(m,n,v,p,q)$ ve $|w| = k$ olan bir kelimeye indirgenebilir. Dolayısıyla w kelimesi $f(m,n,v,p,q)x$, $(x \in X)$ veya $f(m,n,v,p,q)y$ veya $f(m,n,v,p,q)a$ veya $f(m,n,v,p,q)b$ biçimlerinden biri ile ifade edilebilir. Bunu aşağıdaki şekilde gösterelim:

$$\begin{aligned} f(m,n,v,p,q)x &= z^m a^n v b^p y^q x \\ &= z^m a^n v((x\gamma^q)\beta^p) b^p y^q \\ &= f(m,n,v((x\gamma^q)\beta^p),p,q); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m,n,v,p,q)y &= z^m a^n v b^p y^q y \\ &= z^m a^n v b^p y^{q+1} \\ &= f(m,n,v,p,q+1); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(m,n,v,p,q)a &= z^m a^n v b^p y^q a \\ &= \begin{cases} f(m,n,v((u^{-1}\gamma^{q-1})\beta^p),p,q), & q \geq 1, \\ f(m,n,v,p-1,0), & q = 0, p \geq 1, \\ f(m,n+1,v\beta,0,0), & q = p = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(m,n,v,p,q)b = z^m a^n v b^p y^q b$$

$$= \begin{cases} f(m,n,v((u\gamma^{q-1})\beta^p),p,q), & q \geq 1, \\ f(m,n,v,p+1,0), & q = 0; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(m,n,v,p,q)z &= z^m a^n v b^p y^q z \\ &= \begin{cases} f(m,n,v,p,q-1), & q \geq 1, \\ f(m+1,0,u^{-n}(v\gamma)u^p,0,0), & q = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Son olarak $(f(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1))\phi = (m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)\phi$ ise

$$(z^{m_1}a^{n_1}v_1b^{p_1}y^{q_1})\phi = (z^{m_2}a^{n_2}v_2b^{p_2}y^{q_2})\phi$$

dir ve dolayısıyla $(m_1,n_1,v_1,p_1,q_1) = (m_2,n_2,v_2,p_2,q_2)$ dir. Burada $v_1, v_2 \in X^*$ ve $m_i,n_i,p_i,q_i \in \mathbb{N}^0$ $(1 \leq i \leq 2)$. Sonuç olarak T de $v_1 = v_2$ dir ve $m_1 = m_2$, $n_1 = n_2$, $p_1 = p_2$ ve $q_1 = q_2$ dir. $GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ nin sunuşunda R olduğundan M de $v_1 = v_2$ ve dolayısıyla $z^{m_1}a^{n_1}v_1b^{p_1}y^{q_1} = z^{m_2}a^{n_2}v_2b^{p_2}y^{q_2}$ dir. Buradan da $\bar{\phi}$ birebirdir.■

5.3.4 Sonuç: v, X^* içinde herhangi bir kelime olsun. Her $m,n \in \mathbb{N}^0$ için $GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$

$$\begin{aligned} y^m v &= (v\gamma^m)y^m, & b^n v &= (v\beta^n)b^n, \\ v z^m &= z^m(v\gamma^m), & v a^n &= a^n(v\beta^n), \\ y^m b^n &= (u\gamma^{m-1})^n y^m, & y^m a^n &= (u^{-1}\gamma^{m-1})^n y^m, \\ b^n z^m &= z^m(u\gamma^{m-1})^n, & a^n z^m &= z^m(u^{-1}\gamma^{m-1})^n, \end{aligned}$$

bağıntılarını sağlar. Sonuç olarak her $w \in (X \cup (y,z,a,b))^*$ kelimesi $GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ içinde $m,n,p,q \in \mathbb{N}^0$ ve $v \in X^*$ için $z^m a^n v b^p y^q$ formunda bir kelimeye denktir.

5.4 Monoidler için Genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-Genişlemenin Gröbner-Shirshov Tabanının Belirlenmesi

Tezin bu bölümünde sunuşu Alt Bölüm 5.3 ile tarafımızdan ortaya konmuş olan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin Gröbner-Shirshov tabanını veren Teorem 5.4.2 tarafımızdan ispatlanmış olup "Algebra Colloquium" dergisinde yayımlanmıştır [27].

5.4.1 Tanım: T bir monoid olmak üzere sunuşu

$$\wp_T = \langle X | R \rangle \tag{5.24}$$

olsun. Ayrıca R, T için X^* üzerinde $<_T$ deg-lex sıralamaya göre bir Gröbner-Shirshov taban olsun. Burada $R = \{r_1 = v_1, r_2 = v_2, \ldots, r_m = v_m\}$ olmak üzere m bir tam sayıdır ve r_i $(i \leq m)$, $f_{r_i} = r_i - v_i$ polinomlarının ilk terimleridir. Ayrıca T sunuşu (5.24) ile verilen bir monoid ve β, γ, T den H_1^* a birer morfizma olmak üzere $S = GBR^*(T; \beta, \gamma; u)$ monoidinin sunuşu Teorem 5.3.3 ile verildiği gibi olsun.

Şimdi bu bölümün ana teoremini verebilmek için $(X \cup (y, z, a, b))^*$ kümesini sözlük (lex) sıralamasına göre aşağıdaki şekilde sıralayalım;

$$y > b > x > a > z \qquad (x \in X). \tag{5.25}$$

Bu bölümün ana teoreminde $S = GBR^*(T; \beta, \gamma; u)$ genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin (5.25) ile verilen sıralamaya göre Gröbner-Shirshov tabanını hesaplarken $x\gamma, x\beta, u \in X$ için $|x\gamma| = |x\beta| = |u| = 1$ olarak kabul ettik. Ayrıca bu bölüm boyunca $\overline{r}$, r kelimesinin son harfi hariç, $\underline{r}$, r kelimesinin ilk harfi hariç anlamında kullanılmıştır.

Şimdi (5.25) ile verilen sıralamaya göre $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin Gröbner-Shirshov tabanını veren bu bölümün ana teoremini verebiliriz.

5.4.2 Teorem: Sunuşu (5.24) ile verilen T monoidi için tanımlanan genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişleme $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ nun sunuşu Teorem 5.3.3 ile verildiği gibi olsun. Bu durumda S genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemenin (5.25) ile verilen sıralamaya göre Gröbner-Shirshov tabanı

$$r - v \tag{5.26}$$

$$yz - 1 \tag{5.27}$$

$$ba - 1 \tag{5.28}$$

$$yx - (x\gamma)y \tag{5.29}$$

$$bx - (x\beta)b \tag{5.30}$$

$$xz - z(x\gamma) \tag{5.31}$$

$$xa - a(x\beta) \tag{5.32}$$

$$yb - uy \tag{5.33}$$

$$ya - u^{-1}y \tag{5.34}$$

$$az - zu^{-1} \tag{5.35}$$

$$bz - zu \tag{5.36}$$

bağıntılarından oluşur.

İspat: Gröbner-Shirshov tabanı belirleyebilmek için (5.26)-(5.36) arasındaki tüm kesişim kompozisyonlarını kontrol edelim. Burada oluşan tüm kesişim belirsizleri aşağıdaki Tablo 5.1 de gösterilmiştir.

Tablo 5.1: (5.26)-(5.36) ile verilen bağıntıların kendi aralarındaki tüm kesişim kompozisyonları ve bu kompozisyonların kesişim belirsizleri

$i \cap j$	w	$i \cap j$	w
$(5.26) \cap (5.31)$	$\bar{r}xz$	$(5.30) \cap (5.31)$	bxz
$(5.26) \cap (5.32)$	$\bar{r}xa$	$(5.30) \cap (5.32)$	bxa
$(5.28) \cap (5.35)$	baz	$(5.32) \cap (5.35)$	xaz
$(5.29) \cap (5.26)$	$yx\underline{r}$	$(5.33) \cap (5.28)$	yba
$(5.29) \cap (5.31)$	yxz	$(5.33) \cap (5.30)$	ybx
$(5.29) \cap (5.32)$	yxa	$(5.33) \cap (5.36)$	ybz
$(5.30) \cap (5.26)$	$bx\underline{r}$	$(5.34) \cap (5.35)$	yaz

Bu tabloda gösterilen kesişim belirsizleri verilen kesişim kompozisyonlarının aşikar modül olduğunu gösterelim.

$$
\begin{aligned}
(f_{26}, f_{31})_w &= (r - v)z - \bar{r}(xz - z(x\gamma)) \\
&= rz - vz - \bar{r}xz + \bar{r}z(x\gamma) \\
&= rz - vz - rz + \bar{r}z(x\gamma) \\
&= -vz + \bar{r}z(x\gamma) \\
&= -z(v\gamma) + z(\bar{r}\gamma)(x\gamma) \\
&= -z(v\gamma) + z(r\gamma) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{26}, f_{32})_w &= (r - v)a - \bar{r}(xa - a(x\beta)) \\
&= ra - va - \bar{r}xa + \bar{r}a(x\beta) \\
&= ra - va - ra + \bar{r}a(x\beta) \\
&= -va + \bar{r}a(x\beta) \\
&= -a(v\beta) + a(\bar{r}\beta)(x\beta) \\
&= -a(v\beta) + a(r\beta) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{28}, f_{35})_w &= (ba-1)z - b(az - zu^{-1}) \\
&= baz - z - baz + bzu^{-1} \\
&= -z + bzu^{-1} \\
&= -z + zuu^{-1} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{29}, f_{26})_w &= (yx - (x\gamma)y)\underline{r} - y(r - v) \\
&= yx\underline{r} - (x\gamma)y\underline{r} - yr + yv \\
&= -(x\gamma)y\underline{r} + yv \\
&= -(x\gamma)(\underline{r}\gamma)y + (v\gamma)y \\
&= -(r\gamma)y + (v\gamma)y \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{29}, f_{31})_w &= (yx - (x\gamma)y)z - y(xz - z(x\gamma)) \\
&= yxz - (x\gamma)yz - yxz + yz(x\gamma) \\
&= -(x\gamma)yz + yz(x\gamma) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{29}, f_{32})_w &= (yx - (x\gamma)y)a - y(xa - a(x\beta)) \\
&= yxa - (x\gamma)ya - yxa + ya(x\beta) \\
&= -(x\gamma)ya + ya(x\beta) \\
&= -(x\gamma)u^{-1}y + u^{-1}y(x\beta) \\
&= -(x\gamma)u^{-1}y + u^{-1}((x\beta)\gamma)y
\end{aligned}
$$

(5.1) ile verilen tanıma göre

$$
\begin{aligned}
&= -(x\gamma)u^{-1}y + u^{-1}((x\gamma)\lambda_u)y \\
&= -(x\gamma)u^{-1}y + u^{-1}u(x\gamma)u^{-1}y \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{30}, f_{26})_w &= (bx - (x\beta)b)\underline{r} - b(r - v) \\
&= bx\underline{r} - (x\beta)b\underline{r} - br + bv \\
&= -(x\beta)b\underline{r} + bv \\
&= -(x\beta)(\underline{r}\beta)b + (v\beta)b \\
&= -(r\beta)b + (v\beta)b \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{30}, f_{31})_w &= (bx - (x\beta)b)z - b(xz - z(x\gamma)) \\
&= bxz - (x\beta)bz - bxz + bz(x\gamma) \\
&= -(x\beta)bz + bz(x\gamma) \\
&= -(x\beta)zu + zu(x\gamma) \\
&= -z((x\beta)\gamma)u + zu(x\gamma)
\end{aligned}
$$

(5.1) ile verilen tanıma göre

$$
\begin{aligned}
&= -z((x\gamma)\lambda_u)u + zu(x\gamma) \\
&= -zu(x\gamma)u^{-1}u + zu(x\gamma) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{30}, f_{32})_w &= (bx - (x\beta)b)a - b(xa - a(x\beta)) \\
&= bxa - (x\beta)ba - bxa + ba(x\beta) \\
&= -(x\beta)ba + ba(x\beta) \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{32}, f_{35})_w &= (xa - a(x\beta))z - x(az - zu^{-1}) \\
&= xaz - a(x\beta)z - xaz + xzu^{-1} \\
&= -az((x\beta)\gamma) + z(x\gamma)u^{-1}
\end{aligned}
$$

(5.1) ile verilen tanıma göre

$$
\begin{aligned}
&= -az((x\gamma)\lambda_u) + z(x\gamma)u^{-1} \\
&= -azu(x\gamma)u^{-1} + z(x\gamma)u^{-1} \\
&= -zu^{-1}u(x\gamma)u^{-1} + z(x\gamma)u^{-1} \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{33}, f_{28})_w &= (yb - uy)a - y(ba - 1) \\
&= yba - uya - yba + y \\
&= -uya + y \\
&= -uu^{-1}y + y \equiv 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(f_{33}, f_{30})_w &= (yb - uy)x - y(bx - (x\beta)b) \\
&= ybx - uyx - ybx + y(x\beta)b \\
&= -uyx + y(x\beta)b
\end{aligned}
$$

$$= -uyx + ((x\beta)\gamma)yb$$
$$= -u(x\gamma)y + ((x\beta)\gamma)uy$$

(5.1) ile verilen tanıma göre

$$= -u(x\gamma)y + ((x\gamma)\lambda_u)uy$$
$$= -u(x\gamma)y + u(x\gamma)u^{-1}uy \equiv 0.$$

$$\begin{aligned}(f_{33}, f_{36})_w &= (yb - uy)z - y(bz - zu)\\ &= ybz - uyz - ybz + yzu\\ &= -uyz + yzu \equiv 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_{34}, f_{35})_w &= (ya - u^{-1}y)z - y(az - zu^{-1})\\ &= yaz - u^{-1}yz - yaz + yzu^{-1}\\ &= -u^{-1}yz + yzu^{-1} \equiv 0.\end{aligned}$$

Böylelikle (5.26)-(5.36) arasındaki bağıntıların sunuşu Teorem 5.3.3 ile verilen genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişleme $S = GBR^*(T;\beta,\gamma;u)$ için bir Gröbner-Shirshov taban belirttiğini göstermiş oluruz.■

6. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde elde edilen yeni sonuçlar tezin ikinci, üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümlerinde yer almaktadır. Bu sonuçlar aşağıda kısaca özetlenmiştir.

İkinci bölümde monoidlerin graf çarpımı için belirlediğimiz sıralamaya göre Gröbner-Shirshov taban hesaplanmıştır. Bu tabana bağlı olarak monoidlerin Gröbner-Shirshov çarpımı için normal form verilmiştir.

Üçüncü bölümde monoidlerin Schützenberger çarpımı için belirlediğimiz sıralamaya göre Gröbner-Shirshov taban hesaplanmıştır. Bu tabana bağlı olarak monoidlerin Schützenberger çarpımı için normal form verilmiştir.

Dördüncü bölümde Rees matris yarıgrupları için belirlediğimiz sıralamaya göre Gröbner-Shirshov taban hesaplanmıştır.

Beşinci bölümde ise genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemeler tanımlanıp sunuşu verilmiştir. Ardından genelleştirilmiş Bruck-Reilly *-genişlemeler için belirlediğimiz sıralamaya göre Gröbner-Shirshov taban hesaplanmıştır.

7. KAYNAKLAR

[1] Adams W. W., Loustaunau P., An Introduction to Gröbner Bases, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, Volume 3, (1994).

[2] Ateş F., Some New Monoid and Group Constructions Under Semidirect Products, Ars Combinatoria, 91, 203-218, (2009).

[3] Ateş F., Karpuz E. G., Kocapınar C., Çevik A. S., Gröbner-Shirshov Bases of Some Monoids, Discrete Mathematics, 311, 1064-1071, (2011).

[4] Ateş F., Çevik A. S., A Presetation and Some Finiteness Conditions for a New Version of the Schützenberger Products of Monoids, Semigroup Forum, Submitted.

[5] Baudisch A., Subgroups of Semifree Groups, Akademie der Wissenschaften der DDR. Zentralinstitut für Mathematik und Mechanik, (1979).

[6] Bergman G. M., The Diamond Lemma for Ring Theory, Advances in Mathematics, 29, 178-218, (1978).

[7] Bokut L. A., Unsolvability of the Wold Problem and Subalgebras of Finitely Presented Lie Algebras, Izvestiya Akademii Nauk SSSR, 36, 1173-1219, (1972).

[8] Bokut L. A., Imbeddings into Simple Associative Algebras, Algebra i Logika, 15, 117-142, (1976).

[9] Bokut L. A., Chen Y., Gröbner-Shirshov Bases: Some New Results, in Proceedings of the 2nd International Congress of Algebras and Combinatorics, Wold Scientific, Singapore, 35-56, (2008).

[10] Bokut L. A., Chainikov V. V., Gröbner-Shirshov Bases of the Adyan Extension of the Novikov Group, Discrete Mathematics, 308, 4916-4930, (2008).

[11] Bokut L. A., Andrei V., Gröbner-Shirshov Bases for Some Braid Groups, Journal of Symbolic Computation, 41, 357-371, (2006).

[12] Bokut L. A., Shiao L. S., Gröbner-Shirshov Bases for Coxeter Groups, Communications in Algebra, 29 (9), 4305-4319, (2001).

[13] Bruck R. H., A Survey of Binary Systems, Ergebnisse der Mathematik, Neue Folge, Volume 20, Springer, Berlin, (1958).

[14] Buchberger B., An Algorithm for Finding a Basis for the Residue Class Ring of a Zero-Dimensional Ideal, Ph.D. Thesis, University of Innsbruck, (1965).

[15] Buchberger B., An Algorithmical Criteria for the Solvability of Algebric Systems of Equations, Aequationes Math., 4, 374-383, (1970). (in German)

[16] Chen Y., Qiu J., Gröbner-Shirshov Bases for the Chinese Monoid, Journal of Algebra and its Applications, 7 (5), 623-628, (2008).

[17] Cohen, D.E., Combinatorial group theory: topological approach, Cambridge University Press, (1989).

[18] Costa A. V., Graph Products of Monoids, Semigroup Forum, 63, 247-277, (2001).

[19] Diekert, V., Combinatorics on Traces, Lecture Notes in Computer Science, 454, Springer-Verlag, (1990).

[20] Dummit D. S., Foote R. M., Abstract Algebra, Prentice Hall, Upper Saddle River, N. J. 07458, (1999).

[21] Droms C., Servatius H., Servatius B., Surface Subgroups of Graph Groups, American Mathematical Society, 106(3),(1989).

[22] Green E., Graph Products, Ph.D. Thesis, University of Worwick, (1991).

[23] Hermiller S., J. Meier, Algorithms and Geometry for Graph Products of Groups, Journal of Algebra, 171, 230-257, (1995).

[24] Howie J. M., Ruskuc N., Constructions and Presentations for Monoids, Communications in Algebra, 22 (15), 6209-6224, (1994).

[25] Hsu T., Wise D. T., On Linear and Residual Propereties of Graph Products, Michigan Mathematical Journal, 46, 251-259, (1999).

[26] Hungerford T. W., Algebra, Holt, Rinehartand Winston, Inc., (1974).

[27] Kocapınar C., Karpuz E. G., Ateş F., Çevik A. S., Gröbner-Shirshov Bases of the Generalized Bruck-Reilly *-Extensions, Algebra Colloquium, 19, 813-820, (2012).

[28] Kochin B. P., The Structure of İnverse İdeal-Simple w-Semigroups, Vestnik Leningradskogo Universiteta., 23(7), 41-50, (1968).

[29] Lascoux A., Schützenberger M. P., Le Monoide Plaxique, "Non-Commutative Structures-Napoli 1978", Quaderni Della Ricerca, Roma, 109, 129-156, (1981).

[30] Lawson M. V., Rees Matrix semigroups, Proceeding of Edinburgh Mathematical Society, 33, 23-37, (1990).

[31] Margolis S. W., Pin J. E., Expansions, Free Inverse Semigroups and Schützenberger Product, Journal of Algebra, 110, 298-305, (1987).

[32] Meakin J., Fundamental Regular Semigroups and the Rees Construction, Quarterly Journal of Mathematics Oxford (2), 36, 91-103, (1985).

[33] Mishra B., Yap C. K., Notes on Gröbner Bases, New York University Dept. of Computer Science, Robotics Research Technical Report, (1986).

[34] Munn W., On Simple Inverse Semigroups, Semigroup Forum, 1, 63-74, (1970).

[35] Newman M. H. A., On Theories with a Combinatorial Definition of "Equivalence", Annals of Mathematics, 43, 223-243, (1942).

[36] Neto O., Sezinando H., On the Schützenberger Product of Three copies of a Free Group, International Journal of Algebra and Computation, 8, 533-551, (1998).

[37] Rees D., On Semi-Groups, Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 36, 387-400, (1940).

[38] Reilly N. R., Bisimple w-Semigroups, Proceedings of the Glasgow Mathematical Association, 7, 160-167, (1966).

[39] Schützenberger M. P., On Finite Monoids Having only Trivial Subgroups, Information and Control, 8, 190-194, (1965).

[40] Shirshov A. I., Some Algorithmic Problem for Lie Algebras, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal, 3, 292-296, (1962). (Rusça)

[41] Straubing H., A Generalization of the Schützenberger Product of Finite Monoids, Theoretical Computer Science, 13 (2), 137-150, (1981).

[42] Suschkewitsch A., Über die Endlichen Gruppen Ohne das Gesetz der Eindeutigen Umkehrbarkeit, Mathematische Annalen, 30-40, (1928).