T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZENSİZ ASALLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEVLÜT ÇELİK

BALIKESİR, NİSAN - 2019

T.C.
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

DÜZENSİZ ASALLAR ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEVLÜT ÇELİK

Jüri Üyeleri : Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ (Tez Danışmanı)

Prof. Dr. Recep ŞAHİN

Doç. Dr. İlker İNAM

BALIKESİR, NİSAN - 2019

KABUL VE ONAY SAYFASI

Mevlüt ÇELİK tarafından hazırlanan "**DÜZENSİZ ASALLAR ÜZERİNE**" adlı tez çalışmasının savunma sınavı 26.04.2019 tarihinde yapılmış olup aşağıda verilen jüri tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Jüri Üyeleri	İmza
Danışman Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ	....
Üye Prof. Dr. Recep ŞAHİN	....
Üye Doç. Dr. İlker İNAM	....

Jüri üyeleri tarafından kabul edilmiş olan bu tez Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulunca onanmıştır.

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

Prof. Dr. Necati ÖZDEMİR ....

ÖZET

DÜZENSİZ ASALLAR ÜZERİNE
YÜKSEK LİSANS TEZİ
MEVLÜT ÇELİK
BALIKESİR ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

(TEZ DANIŞMANI: PROF. DR SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, NİSAN - 2019

Bu tezde düzensiz asallar üzerine yapılan araştırmalar ve bulgular taranmış elde edilen bilgiler düzenlenmiştir. Düzenlenen bilgiler ışığında düzensiz asallar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Giriş bölümünde düzensiz asallar ile ilgili yapılan çalışmalardan kısaca bahsedilmiştir. Tezin ilk bölümünde temel olarak kullanılacak tanım ve teoremler verilmiş gerekli görülen durumlarda örneklendirmeler yapılmıştır.

İkinci bölümde Bernoulli sayılarının özellikleri ve Bernoulli sayıları ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş, Bernoulli sayılarının arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde düzensiz asallar ile ilgili tanımlar teoremler ile elde edilen bilgiler ve düzensiz asalların Bernoulli sayıları ve dairesel cisimlerle ilişkisi verilmiş bu bilgiler düzenlenmiştir.

Sonuç bölümünde günümüze kadar düzensiz asallar ile ilgi yapılan araştırmaların sonucunda düzensiz asalların tanımı ile ilgili yeni tanımlamalar yapılmıştır.

ANAHTAR KELİMELER: Bernoulli sayıları, Düzensiz asallar, Riemann Zeta fonksiyonu, Dairesel cisimler.

ABSTRACT

ON IRREGULAR PRIMES
MSC THESIS
MEVLÜT ÇELİK
BALIKESIR UNIVERSITY INSTITUTE OF SCIENCE
MATHEMATICS

(SUPERVISOR: PROF. DR SEBAHATTİN İKİKARDEŞ)

BALIKESİR, APRIL 2019

In this thesis , the researches and evidences about irregular prime numbers are scanned and the obtained data is composed. Under the enlightenment of this composition, some results are given related to the irregular prime numbers.

In the introduction part; the studies on irregular prime numbers are mentioned shortly. In the first part of the thesis, the principal explanations and theorems that will be use dare given and are sampled when necessary.

In the second part; the specifications of Bernoulli numbers, the definitions and theorems of the Bernoulli numbers are given and the correlations among Bernoulli numbers are stated.

In the third part; the definions about irregular primes, the data obtained through the theorems and the correlation of irregular primes between Bernoulli numbers and the cyclotomic fields are mentioned and this informational data is editted.

In the conclusion part; New definitions are given about the irregular primes as a result of the studies that have been conducted on the matter so far.

KEYWORDS: Bernoulli numbers, Irregular primes, Riemann Zeta function, Cyclotomic fields.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ

$\boldsymbol{\Sigma}$	:	Toplam sembolü.
$\boldsymbol{\zeta}(\boldsymbol{s})$	:	Riemann Zeta fonksiyonu.
$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{K}}(\boldsymbol{s})$	:	K sayı cismi üzerinde Zeta fonksiyonu.
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{Z}$	:	Tamsayılar kümesi.
$\mathbb{Q}$	:	Rasyonel sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar kümesi.
$\boldsymbol{B}_{\boldsymbol{n}}$	:	n. Bernoulli sayısı.
$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{m}}(\boldsymbol{n})$	:	$(n-1)$ kadar ardışık pozitif tam sayıların m. kuvvetlerinin toplamı.
$\boldsymbol{F}[\boldsymbol{x}]$	:	F cismi polinom halkası.
$\mathbb{Z}/\boldsymbol{n}\mathbb{Z}$	:	Bölüm grubu.
$\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{n}}$	:	Zeta n fonksiyonu.
$\mathbb{Q}(\boldsymbol{\zeta}_{\boldsymbol{n}})$	:	Dairesel cisim genişlemesi.
$\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{p}}$	:	Dairesel cismin sınıf numarası.
$\boldsymbol{D}_{\boldsymbol{2n}}$	:	Bernoulli sayısının paydası.
$\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{2n}}$	:	Bernoulli sayısının payı.
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{a})$	:	a idealinin normu.
$\boldsymbol{\iota}_{\boldsymbol{A}}$	:	A üzerindeki birim fonksiyon.
$\boldsymbol{Aut}(\boldsymbol{G})$	:	G nin otomofizma grubu.
$\dot{\boldsymbol{I}}\boldsymbol{nd}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{F})$	:	u nun F üzerindeki indirgenmez polinomu.
$\boldsymbol{\psi}_{\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}}$	:	Temel izomorfizma.

ÖNSÖZ

Bu tezde, yüksek lisans eğitimim sırasında ve tüm çalışmalarım da her zaman yanımda olan öncelikle eşim Sibel ÇELİK’ e ve kızlarıma çok teşekkür ediyorum. Matematikle tekrardan bağımın kuvvetlenmesinde aracılık eden çalışmalarımda her an bana rehberlik eden danışmanım ve hocam Prof. Dr. Sebahattin İKİKARDEŞ’ e tez aşamasında ve çalışmalarımda beni yüreklendiren Prof. Dr. Recep ŞAHİN ve Prof. Dr. Fırat ATEŞ hocalarıma teşekkür ederim.

1. GİRİŞ

1’den n’ye kadar olan pozitif tamsayıların k’ıncı kuvvetlerinin toplamı kuvvet toplam problemi olarak bilinir. Kuvvet toplam problemi birçok matematikçinin ilgisini çekmiş ve ilk kez İngiliz matematikçi Thomas Hariot (1560-1621) kuvvet toplamı probleminde k=4 için bir formül vermiştir. İsviçreli matematikçi Jacob Bernoulli (1654-1705) kendi ismi ile anılan Bernoulli sayı dizisini kullanarak kuvvet toplam problemini çözmüş ve bu problem için bir formül vermiştir. Şimdilerde bu formül kullanılarak 1’den n’ye kadar olan pozitif tamsayıların k’ıncı kuvvetlerinin toplamı kolaylıkla hesaplanabilir.

Kuvvet toplam problemi ile ortaya çıkan Bernoulli sayıları rasyonel sayı olması nedeniyle Bernoulli sayı dizisi diğer tam sayı dizilerinden farklılıklar gösterir. Özellikle Bernoulli sayılarının pay ve paydaları arasındaki ilişkiler ve nasıl bir düzende oldukları üzerine birçok inceleme yapılmıştır. Kummer bir p asalının Bernoulli sayılarının paylarını bölmesi veya bölmemesi durumundan yola çıkarak düzenli ve düzensiz asalları tanımlamıştır. Fermat’ın Son Teoremi $x^p + y^p = z^p$ eşitliğinin p düzenli asalları için sağlamadığını göstermiştir [1].

Fermat (1601-1665) 17. yüzyılda $x^n + y^n = z^n$ denkleminin $n > 2$ için pozitif tamsayı çözümünün olmadığını öne sürmüştür. Yaklaşık 350 yıl düşünülen ve üzerinde çalışılan bu eşitlik 1987'de Taniyama-Shimura Konjektürü'nün Fermat'ın Son Teoremi'ni gerektirdiği kanıtlandıktan sonra, 1994'te Andrew Wiles'in bu konjektürü ispatlamasıyla Fermat'ın son teoremi de ispatlanmıştır. Bu Teorem üzerinde yapılan çalışmalar sayılar teorisinin ve matematik dünyasının gelişmesine önemli katkıda bulunmuştur. Kummer’ın (1810-1893) Fermat’ın son teoremi üzerindeki çalışmalarından bu yana sayılar teorisi birçok matematikçi için büyük bir ilgi alanı olmuştur. Asal sayılar, cebirsel sayı cisimleri ve özellikle de kuadratik sayı cisimleri üzerinde o tarihlerden bu yana epeyce çalışmalar yapılmış ve gelişmeler oluşmuştur. Kuadratik sayı cisimleri Kummer, Dedekind (1831-1916) ve birçok matematikçi tarafından yapılan çalışmalar neticesinde daha yüksek dereceli sayı cisimlerine genişletilmiştir. Onların başarılı çalışmaları matematiğin önemli branşlarından olan cebirsel sayılar teorisinin temelini de oluşturmuştur. Kummer'ın cebirsel sayı cisimleri ile ilgili çalışmaları onun Fermat'ın son teoremi üzerindeki en başarılı sonuçları elde etmesinde rol oynamıştır öyle ki, onun kullandığı metotlar modern matematiğin yapıtaşları haline gelmiştir.

İşte bu çalışmalar yapılırken asal sayılar yine ön planda olmuştur. Fermat'ın son teoremini ispatlamaya çalışanlardan Kummer asal sayıların sınıflandırılması ile karşı karşıya kalmış ve asal sayıları düzenli ve düzensiz olarak sınıflandırmıştır. Onun çalışmaları ardından asal sayıların sınıflandırılması üzerine birçok çalışma yapılmıştır.

Düzenli asalların sonsuz sayıda olup olmadığı bilinemese de düzensiz asalların sonsuz çoklukta olduklarını ilk olarak 1915 de Jensen tarafından kanıtlanmıştır. Jensen sonsuz sayıda düzensiz asalın 4 modunda 3 denk olduğu yani $p = 4n + 3\,, n \in \mathbb{N}$ formunda olduğunu kanıtlamıştır [2]. Bundan yaklaşık olarak 40 yıl sonra 1954'te Carlitz daha basit bir ispatla düzensiz asalların sonsuz sayıda olduğunu ispatlamıştır [3].

1974 yılında yapılan çalışmalarda Johnson $p < 8000$ biçimindeki herhangi bir düzensiz asalın karesinin sonsuz çoklukta Bernoulli sayısının payını böldüğünü kanıtlamıştır [4]. 1975 yılında ise Samuel; $p < 125000$ biçimindeki düzensiz asalları tablosunu verip asal sayılar içindeki yoğunluğunu araştırmıştır [5].

Buhler, Crandall ve Sompolski daha önceki çalışmalardan da yararlanarak 1992 yılında bir milyona kadar düzensiz asalları ve düzensiz çiftleri elde etmişlerdir [6].

Buhler, Crandall, Ernvall ve Metsänkylä 1993 yılında dört milyona kadar olan düzensiz asalları bulmuşlardır [7].

En son 2011 yılındaki çalışmaları ile Buhler ve Harvey daha önce yapılan Kummer-Vandiver araştırmalarından yararlanarak 163.577.856 kadar olan düzensiz asalları belirlemişlerdir [8].

Düzensiz asalları elde etmek için genellikle bilgisayar programları ile incelemeler yapılmıştır. Bernoulli sayılarının paylarının asal bölenlerini şu anki yazılımlarla görmek önceki yıllara göre daha da kolaydır. Dairesel cisimlerin sınıf numaralarını da bulmak yazılım olmadan çok zorlayıcı işlemler gerektiriyor olsa da bilgisayar yazılımları bu konuda bize yardımcı olmaktadır.

Bu tezde düzensiz asallar üzerine yapılan araştırmalar ve bulgular taranmış elde edilen bilgi ve bulgular düzenlenmiştir. Düzenlenen bilgiler ışığında düzensiz asallar ile ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Tezin ilk bölümünde kullanılacak tanım ve teoremler verilmiş gerekli görülen durumlarda örneklendirmeler yapılmıştır.

İkinci bölümde Bernoulli sayılarının özellikleri ve Bernoulli sayıları ile ilgili tanım ve teoremler verilmiş, Bernoulli sayılarının arasındaki ilişkiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde düzensiz asallar ile ilgili tanımlar teoremler ile elde edilen bilgiler ve düzensiz asalların Bernoulli sayıları ve dairesel cisimlerle ilişkisi verilmiş olup bu bilgiler düzenlenmiştir.

Sonuç bölümünde günümüze kadar düzensiz asallar ile ilgi yapılan araştırmaların sonucunda düzensiz asallar ile ilgili yeni tanımlamalar yapılmıştır.

2. ÖN BİLGİLER

2.1 Bernoulli Sayıları

Bu bölümde daha sonra kullanacağımız bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1.1 Tanım: $\mathrm{f}: \mathrm{A} \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $\mathrm{z}_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilmiş olsun. Eğer f fonksiyonu z_0 noktasının belli bir komşuluğundaki her noktada diferansiyellenebiliyor ise f fonksiyonuna z_0 noktasında analitiktir denir [9].

2.1.2 Teorem: f fonksiyonu z_0 noktasında analitik ise f fonksiyonunun z_0 noktasını belli bir komşuluğundaki z noktasında,

$$\mathrm{f}(\mathrm{z}) = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} a_{\mathrm{n}}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}$$

$$= \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \frac{f^{(\mathrm{n})}(\mathrm{z}_0)}{\mathrm{n}!}(\mathrm{z}-\mathrm{z}_0)^{\mathrm{n}}$$

biçiminde Taylor seri açılımına sahiptir [9].

2.1.3 Tanım: $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ ve $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ iki kuvvet serisi olmak üzere bu kuvvet serilerinin çarpımı

$$C(t) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \frac{t^n}{k!\,(n-k)!} \right)$$

şeklindedir. Bu çarpıma Cauchy çarpımı denir [9].

2.1.4 Tanım: $Re(s) > 1$ için;

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona Riemann Zeta fonksiyonu denir [10].

2.1.5 Teorem: $Re(s) > 1$ olmak üzere Riemann Zeta fonksiyonu

$$\zeta(\mathrm{s}) = \prod_{\substack{p \\ asal\ sayı}} (1 - p^{-s})^{-1}$$

şeklinde Euler çarpımına sahiptir [11,12,13].

$\zeta(2), \zeta(3) \ldots \zeta(s)$ değerlerinin bazıları Bernoulli sayıları kullanılarak hesaplanabilir. Örneğin;

$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \zeta(3) = 1{,}2020569032,\ \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}$ olarak hesaplanmıştır [13].

Riemann Zeta fonksiyonun bazı değerleri özel sayı kümelerinin bulunduğu sayı kümesi içindeki yoğunlunu ifade eder. $\frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$ sayısı squarefree sayılarının tamsayılar kümesi içindeki yoğunluğunu ifade eder [14].

2.1.6 Tanım : $f(z) = \frac{z}{e^z - 1}$ fonksiyonu için $|z| \leq 2\pi$ olmak üzere $z_0 = 0$ civarında Taylor seri açılımı;

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

şeklindedir. $B_{0,} B_1, B_2, \ldots\ldots B_n \in \mathbb{Q}$ sayılarına Bernoulli sayıları denir [1].

Burada Taylor seri açılımı fonksiyonun tanımlı olmadığı $z = 0$ noktasında limit olarak,

$$\lim_{z \to 0} \frac{z}{e^z - 1} = 1$$

tanımlanmıştır.

2.1.7 Teorem : B_n n. Bernoulli sayısı olmak üzere aşağıdaki eşitlikler doğrudur.

$$(\boldsymbol{a})\ \ coth\, x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \qquad ,\ x \in [-\pi, \pi]$$

$$(\boldsymbol{b})\ \ cot(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2B_{2n}(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \qquad , x \in [-\pi, \pi]$$

$$(\boldsymbol{c})\ \ tanh(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2B_{2n}(4^n - 1)(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \quad , |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$(\boldsymbol{d})\ \ tan(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2B_{2n}(4^n - 1)(2x)^{2n-1}}{(2n)!} \quad , |z| < \frac{\pi}{2}$$

$csc(x)$, $csch(x)$, $ln\,|sin(x)\,|$, $ln|co\,s(x)|$, $ln|tan(x)|$ fonksiyonlarının seri açılımında da Bernoulli sayıları vardır [15].

2.1.8 Teorem: B_n sayıları arasında aşağıdaki eşitlik vardır.

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n$$

İspat:

$$\frac{z.e^z}{e^z - 1} = \frac{z}{e^z - 1} e^z = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right)$$

Cauchy çarpımından,

$$\frac{z.e^z}{e^z-1} = z + \frac{z}{e^z-1} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{z^n}{k!\,(n-k)!}\right)$$

$$z + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{z^n}{k!\,(n-k)!}\right)$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{z^n}{k!\,(n-k)!}\right) - \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{z^n}{k!\,(n-k)!} - B_n \frac{z^n}{n!}\right)$$

$$z = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{1}{k!\,(n-k)!} - B_n \frac{1}{n!}\right) z^n$$

$n > 1$ için z lerin kuvvetleri karşılaştırıldığında

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{1}{k!\,(n-k)!} - B_n \frac{1}{n!} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} B_k \frac{1}{k!\,(n-k)!} = B_n \frac{1}{n!}$$

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad (2.1)$$

bulunur [10,15].

Teorem 2.1.8 deki (2.1) eşitliğini Conway ve Guy binom açılımı yardımı ile daha farklı bir şekilde ifade etmişlerdir.

Bu eşitliği;

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n} B_n$$

$n \geq 2$ için; $B^n = (B+1)^n$ şeklinde düşünmüşlerdir [16].

Bu düşünce ile

$$B^n = (B+1)^n \qquad (2.2)$$

buradan da

$$B^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^{n-k}$$

eşitliği elde edilir.

Buradaki tüm kuvvetler indis olarak yazılırsa,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = \binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots \binom{n}{n} B_n$$

eşitliği elde edilir.

Şimdiye kadar verdiğimiz eşitlikleri kullanarak Bernoulli sayılarını hesaplayalım.

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$$

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = B_0 \frac{z^0}{0!} + B_1 \frac{z^1}{1!} + \cdots$$

Her iki tarafın $z \to 0$ limitini alırsak,

$$B_0 = 1$$

Benzer şekilde iki tarafın türevini alıp $z \to 0$ limitini alırsak,

$$B_1 = -\frac{1}{2}$$

Sonucunu elde ederiz. Buradan sonra (2.2) eşitliğinde $n = 3$ alacak olursak

$$B^3 = (B+1)^3$$

açılımını yapar ve istediğimiz formu düşünürsek,

$$B_3 = B_3 + 3B_2 + 3B_1 + B_0$$

elde etmiş oluruz. Buradan da,

$$B_2 = \frac{1}{6}$$

olarak elde edilir.

Genellersek $n \geq 3 \;\; için$;

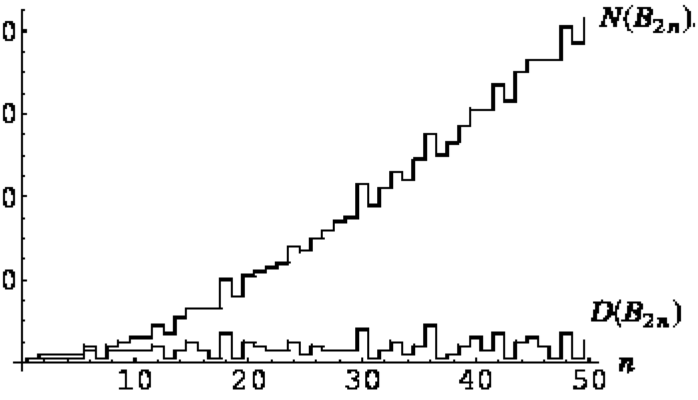
$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

şeklindedir [9].

Buradan hesaplamalar yapılırsa,

$B_0 = 1$, $B_1 = -\frac{1}{2}$, $B_2 = \frac{1}{6}$, $B_4 = -\frac{1}{30}$, $B_6 = \frac{1}{42}$, $B_8 = -\frac{1}{30}$ ve $B_{10} = \frac{5}{66}$ ..olarak bulunur.

Bernoulli sayılarının pay ve paydalarının değerlerini düşünürsek, paylarını paydalarına göre değişkenliği onların algılanmasındaki zorluğu gözler önüne serecektir. Bu değişkenlik Şekil 2.1. görülebilir.



Şekil 2.1 : Bernoulli sayılarının pay ve paydaları.

Burada $N(B_{2n})$, B_{2n} Bernoulli sayısının payını , $D(B_{2n})$, B_{2n} Bernoulli sayısının paydasını göstermektedir. Bernoulli sayılarını algılamada zorlukları düşünerek bu sayı dizisi ile benzer özellikler içeren daha kolay anlaşılabilen sayı dizilerini incelemek kolaylık sağlayabilir. Bernoulli sayıları ile benzer yapılara sahip ama terimleri tamsayı olan sayı dizisi Euler sayı dizisi buna örnek olabilir.

2.1.9 Tanım : $\{E_m\}_{m\geq 0}$ Euler sayı dizisi şu şekilde tanımlanır,

$$\sec t = \sum_{m\geq 0} E_m \frac{t^m}{m!}$$

Taylor seri açılımındaki $E_0, E_1, E_2, \ldots$ sayılarına Euler sayıları (Secant sayıları) denir. Bu sayı dizisinin listesi A122045 bilinmektedir [17].

Bernoulli sayılarında da olduğu gibi $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ ve $m = 2n+1$ için $B_m = 0$ ve $E_m = 0$ dır. Fakat Bernoulli sayıları rasyonel sayı olmasına rağmen Euler sayılarının tamamı tamsayıdır [4].

2.1.10 Teorem: $m = 2n+1$, $n \in \mathbb{N}$ ve $n \geq 1$ için $B_m = 0$ dır.

İspat:

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$$

olmak üzere;

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = B_0 \frac{x^0}{0!} + B_1 \frac{x^1}{1!} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = 1 - \frac{x}{2} + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x}{2} = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$x\left(\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{1 + e^x}{e^x - 1}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{e^{-\frac{x}{2}}}{e^{-\frac{x}{2}}} \frac{x}{2}\left(\frac{1 + e^x}{e^x - 1}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\frac{x}{2}\left(\frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}\right) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

$$\coth(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

olduğundan,

$$\coth\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}$$

eşitliği vardır. Bu iki eşitlikten dolayı,

$$1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = \frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right)$$

yazılabilir. Burada $\frac{x}{2}\coth\left(\frac{x}{2}\right)$ fonksiyonu çift fonksiyon olduğundan $B_{2k+1} = 0$ dır [18].

2.1.11 Teorem: $n \in \mathbb{N}$ $, n \geq 2$ olmak üzere;

$$\zeta(1-n) = -\frac{B_n}{n}$$

şeklinde negatif tamsayılar içinde Riemann Zeta fonksiyonu tanımlanmıştır [19].

Bu eşitlik Riemann Zeta fonksiyonu Tanım 2.1.4 de belirtilen $Re(s) > 1$ şartından daha da geniş olarak negatif tamsayı içinde değerlerin bulunmasını sağlamıştır.

2.1.12 Teorem: $m \in \mathbb{N}^+$ olmak üzere;

$$\zeta(2m) = (-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{2(2m)!}B_{2m} \quad \text{dir.}$$

İspat: Tanım 2.1.6 dan, $B(z)$ fonksiyonunu ele alırsak Teorem 2.1.7 (d) den $\tan(x)$ fonksiyonunun açılımını düşünelim.

$$tan(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{2B_{2n}(4^n-1)(2z)^{2n-1}}{(2n)!} \quad , |z| < \frac{\pi}{2}$$

$$g(z) := \frac{z}{e^z - 1} + \frac{z}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n$$

olacak şekilde bir $g(z)$ fonksiyonu tanımlayalım. $g(z) = g(-z)$ olur. $n \geq 1$ olmak üzere $B_{2n+1} = 0$ ve $n \geq 1$ için $B_n = (-1)^n B_n$ elde edilmiş olur.

$$B(z) = \frac{z}{e^z - 1} = 1 - \frac{z}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n \quad , |z| < 2\pi$$

eşitliği elde edilmiş olur.

$$\cot z = i + \frac{B(i2z)}{z}$$

$$\tan z = \cot z - \cot 2z$$

eşitliklerini de ele alarak istenilen eşitliği elde etmeye çalışalım.

$|x| < \frac{\pi}{2}, |y| < 1$olmak üzere;

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan xy \ dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)}{(2n)!} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^{2n-1} \, dx \, y^{2n-1}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}(-4)^n(1-4^n)\pi^{2n}}{(2n)!\, 2n} y^{2n-1}$$

elde edilir.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan xy \ dx = \frac{-\ln(\cos(\frac{\pi y}{2}))}{y}$$

$$= \frac{-\ln\left(\prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\left(\frac{\pi y}{2}\right)^2}{\pi^2(n-1/2)^2}\right)\right)}{y}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{2k+1}}{k} \frac{y^{2k-1}}{(2n-1)^{2k}}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{y^{2k-1}}{(2n-1)^{2k}} \qquad (2.3)$$

şimdi ise bu eşitlikte Riemann Zeta fonksiyonu aramak olacaktır.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2k}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2k}}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^{2k}}$$

eşitliği vardır ki buradan da;

$$\zeta(2k)=\left(1-\frac{1}{4^k}\right)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2k}} \qquad (2.4)$$

olur ki (2.3) ve (2.4) numaralı eşitliklerden;

$$\zeta(2k)=(-1)^{k+1}\frac{(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k}$$

bulunur ki bu da ispatı tamamlamış olur [20].

Yukarıdaki teoremden ;

$k=1$ için

$$\zeta(2)=(-1)^2\frac{(2\pi)^2}{2(2)!}B_2$$

$$\zeta(2)=\frac{4\pi^2}{4}\frac{1}{6}=\frac{\pi^2}{6}$$

$k=2$ için

$$\zeta(4)=(-1)^3\frac{(2\pi)^4}{2(4)!}B_4$$

$$\zeta(4)=-\frac{16(\pi)^4}{48}\frac{-1}{30}=\frac{\pi^4}{90}$$

2.1.13 Teorem: m ve n sayısı bir pozitif tamsayı olsun.

$$S_m(n)=1^m+2^m+3^m+\cdots..+(n-1)^m$$

olmak üzere;

$$(m+1)S_m(n) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k}$$

eşitliği vardır [21].

İspat: $f(x) = e^{kt}$ fonksiyonunun $t = 0$ noktasında Taylor seri açılımını düşünelim.

$$e^{kt} = \sum_{m=0}^{\infty} k^m \frac{t^m}{m!}$$

olmak üzere $k = 0,1,2, \ldots (n-1)$ değerlerini ayrı ayrı hesaplar ve toplam şeklinde yazarsak,

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{kt} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=0}^{\infty} k^m \frac{t^m}{m!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^m}{m!} \sum_{k=0}^{n-1} k^m$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(S_m(n) \frac{t^m}{m!} \right) = e^0 + e^t + e^{2t} + \cdots + e^{(n-1)t} = \frac{e^{nt}-1}{e^t-1}$$

eşitliğinde,

$$\frac{e^{nt}-1}{e^t-1} = \frac{e^{nt}-1}{t} \frac{t}{e^t-1}$$

yazarsak

$$\frac{e^{nt}-1}{t} \frac{t}{e^t-1} = \sum_{k=1}^{\infty} n^k \frac{t^{k-1}}{k!} \sum_{j=0}^{\infty} B_j \frac{t^j}{j!}$$

elde edilen eşitliklerden,

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left(S_m(n) \frac{t^m}{m!} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} n^k \frac{t^{k-1}}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} B_{jm} \frac{t^m}{m!}$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(S_m(n)\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{k=0}^{\infty}n^{k+1}\frac{t^k}{(k+1)!}\sum_{m=0}^{\infty}B_m\frac{t^m}{m!}$$

t^m li terimlerin katsayıları eşit olmalıdır.

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(S_m(n)\frac{t^m}{m!}\right)=\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{m}B_k\frac{t^m}{k!\,(m-k+1)!}n^{m-k+1}\right)$$

$$S_m(n)\frac{1}{m!}=\sum_{k=0}^{m}B_m\frac{n^{m-k+1}}{(m-k+1)!\,k!}$$

Her iki tarafı da $(m+1)!$ ile çarparsak,

$$(m+1)!\,S_m(n)\frac{1}{m!}=\sum_{k=0}^{m}B_m\frac{n^{m-k+1}}{(m-k+1)!\,k!}(m+1)!$$

$$(m+1)S_m(n)=\sum_{k=0}^{m}B_m\frac{n^{m-k+1}}{(m-k+1)!\,k!}(m+1)!$$

$$(m+1)S_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_mn^{m-k+1}$$

elde edilir. Buda ispatı tamamlar.

2.1.14 Örnek: Bernoulli sayılarından yararlanarak

$$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+7^6$$

sonucunu bulalım.

$$S_m(n)=1^m+2^m+3^m+\cdots..+(n-1)^m$$

olduğundan $m=6, n=8$ olacaktır.

$$(m+1)S_m(n)=\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_kn^{m+1-k}$$

eşitliğinden yararlanırsak $B_0, B_1 \dots B_6$ sayılarını kullanmamız yeterli olacaktır.

$$1^6+2^6+3^6+4^6+5^6+7^6=\frac{1}{7}.\sum_{k=0}^{6}\binom{7}{k}B_k 8^{7-k}$$

$$=\frac{1}{7}\left(\binom{7}{0}B_0 8^7+\binom{7}{1}B_1 8^6+\binom{7}{2}B_2 8^5+\binom{7}{3}B_3 8^4+\binom{7}{4}B_4 8^3+\binom{7}{5}B_5 8^2+\binom{7}{6}B_6 8^1\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left(8^7+7\left(-\frac{1}{2}\right)8^6+21\frac{1}{6}8^5+35\left(-\frac{1}{30}\right)8^3+7\frac{1}{42}8^1\right)$$

$$=\frac{1}{7}\left(8^7-28.8^5+28.8^4-\frac{28}{3}8^2+\frac{4}{3}\right)$$

$$=184820$$

elde edilmiş olur.

2.1.15 Örnek: $S_m(n)=1^m+2^m+3^m+\cdots..+(n-1)^m$

olmak üzere;

$$S_m(n)=\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}B_k n^{m+1-k}$$

eşitliklerini kullanalım.

$$S_m(n+1)=1^m+2^m+3^m+\cdots..+n^m$$

olmak üzere $m=1$ için

$$S_1(n+1)=1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k(n+1)^{2-k}$$

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{k}B_k(n+1)^{2-k}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\binom{2}{0}B_0(n+1)^2+\binom{2}{1}B_1(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(1.1.(n+1)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left((n+1)^2 - (n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{2}n(n+1)$$

elde edebiliriz. Benzer şekilde $m = 2,3,4,\dots k$ formülleri elde edilmiştir. $m = 4$ için bakalım.

$$S_4(n+1) = 1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4$$

$$= \frac{1}{5}\sum_{k=0}^{4}\binom{5}{k}B_k(n+1)^{5-k}$$

$$= \frac{1}{5}\left(\binom{5}{0}B_0(n+1)^5 + \binom{5}{1}B_1(n+1)^4 + \binom{5}{2}B_2(n+1)^3 + \binom{5}{3}B_3(n+1)^2 + \binom{5}{4}B_4(n+1)^1\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left(1.1.(n+1)^5 + 5\left(-\frac{1}{2}\right)(n+1)^4 + 10\frac{1}{6}(n+1)^3 + 10.0.(n+1)^2 + 5\left(-\frac{1}{30}\right)(n+1)^1\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 + \left(-\frac{5}{2}\right)(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)(n+1)\right)$$

$$= \frac{1}{5}\left((n+1)^5 + \left(-\frac{5}{2}\right)(n+1)^4 + \frac{5}{3}(n+1)^3 + \left(-\frac{1}{6}\right)(n+1)\right)$$

$$= \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

$S_m(n+1)$ lerin toplam formüllerine bakıldığında $S_1(n+1)$ eşitinin paydası B_1 in paydası , $S_2(n+1)$ eşitinin paydası B_2 paydasına eşittir. Sonuç olarak

Bir Bernoulli sayısını $B_m = \frac{N_m}{D_m}$ göstermek üzere;

$$S_m(n+1) = \frac{A}{D_m}$$

eşittir. Jacop Bernoulli bu şekilde ardışık sayıların kuvvet toplamı problemini çözmüştür [21].

Bernoulli sayıları üzerine birçok eşitlik ve denklikler incelenmiş ve elde edilmiştir..

2.1.16 Teorem: $n \geq 2$ olmak üzere $2B_{2n} \equiv 1\ (mod\ 4)$ denkliği vardır.

İspat: Teorem 2.1.1 den dolayı,

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$$

Burada n yerine $2n$ yazarsak,

$$B_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} B_k$$

Buradan da,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n+1}{k} B_k = 0 \qquad n > 0$$

$$\binom{2n+1}{0} B_0 + \binom{2n+1}{1} B_1 + \binom{2n+1}{2} B_2 + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{2n+1}{k} B_{2k} + \binom{2n+1}{2n} B_{2n}$$

İfadesi sıfıra eşit olmuş olur. Bu ifadede her tarafı 2 ile çarpalım ve $(mod\ 4)$ de yazarsak;

$$2 - (2n+1) + \frac{1}{3}\binom{2n+1}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \binom{2n+1}{k} 2B_{2k} + (2n+1)2B_{2n} \equiv 0\ \ (mod 4)$$

$$(2n+1)2B_{2n} + 1 - 2(2n+1) - 2\binom{2n+1}{2} \equiv 0\ \ (mod 4)$$

$n \geq 2 \quad için\ \ 2B_{2n} \equiv 1\ \ (mod\ 4)$ elde edilmiş olur [22].

2.2 Cisim Genişlemesi

2.2.1 Tanım: E bir cisim olsun. F 'de E cisminin alt cismi olsun. Bu durumda E cismine F cisminin cisim genişlemesi denir ve $F \leq E$ şeklinde gösterilir [23].

2.2.2 Örnek: $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ nin bir cisim genişlemesidir.

2.2.3 Tanım: F bir cisim ve E, F'nin bir cisim genişlemesi olsun. $a \in E$ olmak üzere $F[x]$'in sıfır polinomu olmayan $f(x)$ polinomu için $f(a) = 0_F$ oluyorsa a ya F üzerinde cebirsel eleman denir [23].

2.2.4 Örnek: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$ ve $f(x) = x^2 + 4 \in \mathbb{Q}[x]$ için $f(2i) = 0$ dır. O zaman $2i$, $\mathbb{Q}$ üzerinde bir cebirsel elemandır.

2.2.5 Tanım: E, bir F cisminin cisim genişlemesi olmak üzere. Eğer E'nin her elemanı F üzerinde cebirsel ise E ye F 'nin cebirsel cisim genişlemesi denir [23].

2.2.6 Örnek: $\forall\, z \in \mathbb{C}$ için $f(z) = 0$ olacak biçimde $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ bulunabileceğinden $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ nin bir cebirsel cisim genişlemesidir.

2.2.7 Tanım: E, F cisminin cisim genişlemesi olsun.

$$\bar{F}_E = \{c : c \in E \; ve \; c, F \; \text{üzerinde} \; cebirseldir\}$$

$\bar{F}_E$ kümesine F nin E içindeki cebirsel kapanışı denir [23].

2.2.8 Tanım: F bir cisim olmak üzere E, F'nin bir cebirsel genişlemesi olsun. $u, v \in E$ olmak üzere;

$$\dot{I}nd(u, F) = \dot{I}nd(v, F)$$

ise u ile v F üzerinde eşleniktir denir [23].

2.2.9 Tanım: (G, Δ) ve (G', ∇) iki grup olmak üzere $f: G \to G'$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $a, b \in G$ için,

$$f(a \Delta b) = f(a) \nabla f(b)$$

oluyorsa f ye bir homomorfizma denir [23].

2.2.10 Teorem: $E = F(u)$ ve $E' = F'(v)$ basit genişlemeler olsun.

$$\sigma: F \to F'$$

Bir cisim izomorfizması, $p(x) = \dot{I}nd(u, F)$ ve $\sigma^*\big(p(x)\big) = \dot{I}nd(v, F')$ olsun. O halde bir

$$\tau: E \to E'$$

cisim izomorfizması vardır ki , $\tau(u) = v$ ve $\tau|_F = \sigma$ dır [23].

2.2.11 Tanım: Teorem 2.2.10'daki $E = E'$, $F = F'$ ve $\sigma = \iota$ ise $\tau: E \to E'$ izomorfizması $\psi_{u,v}$ ile gösterilir ve buna temel izomorfizma adı verilir [23].

2.2.12 Teorem : $E = F(u)$, F'nin bir basit cebirsel genişlemesi olsun. $p(x) = \dot{I}nd(u, F)$ ve $der\big(p(x)\big) = n$ olmak üzere E nin F'yi sabit bırakan bir homomorfizması τ ve $p(x)$ in E içinde bir kökü u ise $\tau = \psi_{u,v}$ dir. Dolayısı ile τ, E'nin otomorfizmasıdır. $b \in E$, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_{n-1} \in F$ olmak üzere;

$$b = c_0 + c_1 u + c_2 u^2 + \cdots + c_{n-1} u^{n-1}$$

için,

$$\tau(b) = c_0 + c_1 v + c_2 v^2 + \cdots + c_{n-1} v^{n-1}$$

dir [23].

2.2.13 Teorem: E bir cisim olsun. E'nin bütün otomorfizmalarının kümesi $Aut(E)$ ile gösterilmek üzere $Aut(E)$ bileşke işlemine göre bir gruptur. Aynı zamanda $Aut(E)$ ye E nin otomorfizma grubu denir [23].

2.2.14 Tanım: E bir cisim F, E'nin bir alt cismi ve H , $Aut(E)$ nin bir alt grubu olsun. E 'nin F yi sabit bırakan bütün otomorfizmaların kümesi $G(E/F)$ ile ve E nin H tarafından sabit bırakılan elemanlarının kümeside E_H ile gösterilir.

$$G(E/F) = \{\sigma : \sigma \in Aut(E), \forall a \in F \text{ için } \sigma(a) = a\}$$

$$E_H = \{a : a \in E, \forall \sigma \in H \text{ için } \sigma(a) = a\}$$

dır. Ayrıca $G(E/F)$ ya E 'nin F üzerindeki grubu da denir [23].

2.2.15 Tanım: F bir cisim $f(x) \in F[x]$, $f(x)$ mertebesi $n \geq 1$ olan bir polinom ve K , F'nin bir cisim genişlemesi eğer $f(x)$, $K[x]$ içinde lineer çarpanlarına ayrılabiliyor ise başka bir deyişle $a \in F$ ve $u_1, u_2, \dots, u_n \in K$ olmak üzere;

$$f(x) = a(x - u_1)(x - u_2) \dots . (x - u_n)$$

olarak yazılabiliyorsa $f(x)$, K üzerinde parçalanır denir.

$f(x)$ K üzerinde parçalanır ama K'nın hiçbir öz alt cismi üzerinde parçalanamaz ise $K = F(u_1, u_2, \dots, u_n)$ cismine $f(x)$ in F üzerinde bir parçalanma cismi denir [23].

2.2.16 Örnek: $\mathbb{Q}$ cismin üzerinde; $f(x) = x^4 - 2$ polinomunu ele alalım. K bir cisim genişlemesi olmak üzere $f(x) = x^4 - 2$ içinde çarpanlara ayıralım.

$$f(x) = x^4 - 2 = (x - \sqrt[4]{2})(x + \sqrt[4]{2})(x - i\sqrt[4]{2})(x + i\sqrt[4]{2})$$

K= $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2}, i\sqrt[4]{2})$ cismine $f(x)$ in $\mathbb{Q}$ üzerinde bir parçalanma cismidir.

2.2.17 Teorem: F bir cisim $f(x) \in F[x]$ olsun. $f(x)$ 'in F üzerindeki bir parçalanma cismi K ve $p(x)$, $F[x]$ de bir indirgenemez polinom olsun. Eğer $p(x)$'in K içinde bir kökü varsa $p(x)$, K üzerinde parçalanır denir [23].

2.2.18 Tanım: F bir cisim ve E, F'nin bir cisim genişlemesi olsun. Eğer E içinde bir kökü olan $\forall p(x) \in F[x]$ indirgenemez polinomu E üzerinde parçalanırsa E ye F'nin bir normal genişlemesi denir [23].

2.2.19 Tanım: $p(x) \in F[x]$ bir indirgenmez polinom olsun. Eğer $p(x)$'in F üzerindeki bir parçalanma cismi içindeki her kökü basit kök ise $p(x)$ polinomuna F üzerinde bir ayrılabilir polinom denir. $f(x) \in F[x]$ sabit olmayan bir polinom olsun.

Eğer $f(x)$'in her indirgenmez çarpanı F üzerinde ayrılabilir ise $f(x)$ polinomuna F üzerinde bir ayrılabilir polinom denir [23].

2.2.20 Tanım: F bir cisim E, F'nin bir cebirsel genişlemesi ve $u \in E$ olsun. Eğer $\dot{I}nd(u, F)$ ayrılabilir ise u ya F üzerinde bir ayrılabilir eleman denir. Eğer E'nin her elemanı F üzerinde ayrılabilir ise E ye F'nin bir ayrılabilir cisim genişlemesi denir [23].

2.2.21 Tanım: F bir cisim ve E , F'nin sonlu cisim genişlemesi olsun. Eğer E, F'nin bir ayrılabilir normal genişlemesi ise E ye F cisminin bir Galois genişlemesi ve G(E/F) grubuna da bu genişlemenin Galois Grubu denir [23].

2.2.22 Örnek: $\mathbb{Q}$ üzerinde hiçbir elemanın karesi b olmasın. $x^2 - b$ polinomunun $\mathbb{Q}$ üzerindeki parçalanış cismine K diyelim. O halde $a^2 = b$ olacak şekilde $a \in K$ vardır.

$$x^2 - b = (x - a)(x + a)$$

olduğundan $K = \mathbb{Q}(a)$ yazılabilir. $g \in G(K/\mathbb{Q})$ için $I_K(a) = a$ veya $g(a) = -a$ olur. O halde $G(K/\mathbb{Q})$=$\{I_K, g\}$ dir.

2.2.23 Tanım: F bir cisim olmak üzere. $x^n - 1_F \in F[x]$ polinomu F üzerinde bir parçalanma cismine F'nin n. dairesel cisim genişlemesi denir [23].

2.2.24 Örnek: ζ_n , $x^n - 1 = 0$ denkleminin bir kökü olmak üzere $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ cismi $\mathbb{Q}$ nun bir cebirsel genişlemesidir ve bu cisme $\mathbb{Q}$ nun dairesel cisim genişlemesi denir.

2.2.25 Tanım: $\mathbb{Q}$ nun sonlu cebirsel genişlemelerine cebirsel sayı cisimleri denir [23].

2.2.26 Örnek: $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ dairesel cisim genişlemesi bir cebirsel sayı cismidir.

2.2.27 Teorem: ζ_n , 1'in n. dereceden bir kökü olmak üzere;

$$[\mathbb{Q}(\zeta_n): \mathbb{Q}] = \phi(n)$$

dir. $\mathbb{Q}(\zeta_n) = \left\{a_0 + a_1\zeta_n + a_2\zeta_n^2 + \cdots + a_{\phi(n)-1}\zeta_n^{\phi(n)-1} : a_i \in \mathbb{Q}\right\}$ dir [23].

2.2.28 Örnek: ζ_{37} , $x^{37} - 1 = 0$ denkleminin kökleri,

$$x^{37} = \cos(k2\pi) + i.\sin(k2\pi)\ ,\ k \in \mathbb{Z}$$

olmak üzere;

$$x_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{37}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{37}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots 36$$

olacağından

$$\zeta_{37} = \cos\left(\frac{2\pi}{37}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{37}\right)$$

$$[\mathbb{Q}(\zeta_{37}) : \mathbb{Q}] = \phi(37) = 36$$

$$\mathbb{Q}(\zeta_{37}) = \{a_0 + a_1\zeta_{37} + a_2\zeta_{37}^2 + \cdots + a_{35}\zeta_{37}^{35} : a_i \in \mathbb{Q}\}$$

2.2.29 Tanım: S değişmeli halka ve $S \leq \mathbb{R}$ olmak üzere. $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f(\alpha) = 0$ olacak şekilde bir $f(x) \in S[x]$ monik polinomu mevcut ise α'ya S üzerinde integral eleman denir [23].

2.2.30 Örnek: $\frac{1}{2} \in \mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde integral eleman değildir. $\sqrt{17} \in \mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$ üzerinde integral elemandır.

2.2.31 Teorem: F bir cisim F'nin bir n. dairesel cisim genişlemesi E olmak üzere E içinde birimin n. köklerinin kümesi U_n olsun. U_n mertebesi n olan devirli gruptur. E içinde birimin bir ilkel kökü w vardır ve $E = F(w)$ dir [23].

2.2.32 Örnek: $\mathbb{C}$ içinde $\mathbb{Q}'$nun n. dairesel genişlemesi E olsun.

$$z^n = 1$$

denkleminin köklerini yazalım.

$$z_k = \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right), \qquad k = 0,1,2,\ldots(n-1)$$

dir. Böylece $U_n = \{1, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}\}$ ve $w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{2\pi}{n})$ olsun.

$\forall k \geq 0$ için $z_k = w^k$ olduğundan w bir ilkel köktür. $E = \mathbb{Q}(w)$ dir.

$n = 3$ olmak üzere bu kökleri yazalım.

$w = \cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + i\sin(\frac{2\pi}{n}) = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ilkel kök olmak üzere diğer ilkel kökler ise $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right), (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})$ dir.

$E = \mathbb{Q}(\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, i)$ bulunur.

$n = p$ ve p asal sayı olmak üzere $w = \cos\left(\frac{2\pi}{p}\right) + i\sin(\frac{2\pi}{p})$ ilkel kök olur.

$$w = e^{\frac{2\pi i}{p}} \text{ dir [23].}$$

2.2.33 Tanım: K sayı cisminin bir a elemanını ele alalım.

$$a^n + c_1 a^{n-1} + c_2 a^{n-2} + \cdots + c_n = 0$$

koşulunu sağlayan c_k, $(k = 1,2,3 \dots n)$ tamsayıları bulunabiliyor ise a elemanına K cisminin Cebirsel tamsayıları denir ve $a\ ceb/\mathbb{Z}$ ile gösterilir [24,25].

2.2.34 Tanım: K sayı cisminin cebirsel tamsayı elemanlarının oluşturduğu küme $\mathcal{O}_k = \{a \in K : a\ ceb/\mathbb{Z}\}$ ile gösterilir. Bu küme toplama ve çarpma işlemine göre bir halkadır. Bu halkaya K cisminin tamlık halkası denir [24,25].

2.2.35 Tanım: K bir sayı cismi olsun. $\mathcal{J} \subseteq K$ için;

(i) $a, b \in \mathcal{J}$ ise $a + b \in \mathcal{J}$

(ii) $a \in \mathcal{J}$, k ∈ K ise $ka \in \mathcal{J}$

oluyorsa $\mathcal{J}$ ya K cisminin ideali denir [26].

2.2.36 Tanım: K bir sayı cismi olsun.$\mathcal{J} \subseteq K$. $a\,\mathcal{J} = \{ai: i \in \mathcal{J}\}$ olmak üzere $(a \neq 0)$ $a \in \mathcal{O}_k$ için $a\,\mathcal{J}$, $\mathcal{O}_k$ nın ideali ise $\mathcal{J}$ ya kesirsel ideal denir. Aynı zamanda $a\,\mathcal{J}$ asıl ideal ise $\mathcal{J}$ da asıl ideal denir [27].

2.2.37 Tanım: Bir K sayı cisminin tüm kesirsel idealleri çarpma işlemine göre bir gruptur ki bu grup G olsun. G grubunun esas ideallerinin oluşturduğu gruba da E ile gösterelim. G/E bölüm grubu sonlu bir gruptur. Bu grubun eleman sayısına da K cisminin sınıf sayısı denir ve h_K ile gösterilir [24].

2.2.38 Tanım: $Re(s) > 1$ olmak üzere $K\,/\,\mathbb{Q}$ alanını her sayıya ilişkilendiren fonksiyon şu şekilde tanımlanır:

$$\zeta_K(s) = \sum_a \frac{1}{N(a)^s} \text{ dir.}$$

Bu fonksiyona Dedekind Zeta fonksiyonu denir [28].

Burada a sayısı K'nın tüm tamsayı halkalarının sayısı üzerinde çalıştırılır.

K bir sayı cismi ve $\mathbb{Q}_K$ K'nın integral elemanlarından oluşan bir özel alt halkası olsun d_K diskriminant ve h_K sınıf numarası olmak üzere;

2.2.39 Teorem: $K\,/\,\mathbb{Q}$ bir sayı cismi olsun. $Re(s) > 1$ ve Dedekind fonksiyonu $\zeta_K(s)$ ve $s = 1$ için,

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1)\,\zeta_K(s) = \frac{2^{r_1}(2\pi)^{r_2} R_K}{e_K\sqrt{|d_K|}}\, h_K$$

burada,

(r_1, r_2) K imzası e_K K'nın köklerinin sayısı d_K K'nın diskriminantı R_K K'nın regülatörü h_K da sınıf numarası olmuş olur. p asal sayısı için $K = Q(\zeta_p)$ olmak üzere

$$R(K) = R(p)$$

ve

$$\lim_{s \to 1^+} (s-1)\, \zeta_K(s) = \frac{2^{\frac{p-3}{2}} \pi^{\frac{p-1}{2}} R_p}{p^{\frac{p}{2}}} h_p$$

olur [28].

p asal sayısı tarafından üretilen Dairesel cisim $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ olmak üzere p. kök $\zeta_p = e^{\frac{2\pi i}{p}}$ dır [29].

3. DÜZENSİZ ASALLAR

3.1 Giriş

Bu bölümde düzensiz asallar ile ilgili tanımlar teoremler ile elde edilen bilgiler ve düzensiz asalların Bernoulli sayıları ve dairesel cisimlerle ilişkisi verilecek ve bu bilgiler düzenlenecektir.

3.1.1 Tanım: Bir p asal sayısı $n \in \mathbb{N}$ ve $2 \leq 2n \leq p-3$ için B_{2n} sayısının en az birinin payını bölüyorsa bu p asalına düzensiz asal denir [1].

Düzensiz asal sayı tanımlamasını dairesel cisim genişlemesi yardımı ile de tanımlayabiliriz. $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$ ve h da K kümesinin sınıf numarası olmak üzere;

$$p|h_p \Leftrightarrow p|B_k \qquad k = 0,2,4,\ldots\ldots.p-3$$

olması durumunda da p asal sayısına düzensiz asal denir [1].

3.1.2 Örnek: $p = 37$ düzensiz asaldır. Çünkü $k = 2,4,6,\ldots,34$ olmak üzere B_{32} sayısının payını bölmektedir.

$$B_{32} = \frac{-7709321041217}{510} = -\frac{208360028141.37}{510}$$

dir.

3.1.3 Örnek: h_p , $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ Dairesel cisminin sınıf numarası olmak üzere

$p \leq 19$ için $h_p = 1$, $p \nmid h_p$ dir.

$h_{37} = 37$, $h_{59} = 3.59.33$, $h_{67} = 67.12739$ olduğundan 37, 59 ve 67 düzensiz asallara örnektir.

Düzensiz asalların sınıflandırılması olayının başlangıcı olan Fermat'ın Son Teoremini hatırlayalım.

3.2 Fermat'ın Son Teoremi

3.2.1 Teorem: $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ olmak üzere;

$$x^n + y^n = z^n$$

eşitliğini sağlayan $xyz \neq 0, x, y, z \in \mathbb{Z}$ bulunamaz [30].

Matematik dünyasını 350 yıl uğraştıran bu Teoremin matematiğe katkıları düşünüldüğünde önemi daha da iyi anlaşılacaktır.

Fermat'ın Son Teoremi için Wiles'ın ispatından uzun yıllar önce Vandiver aşağıdaki ifadeyi kanıtlamıştır.

$$x^p + y^p = z^p$$

Eşitliğini sağlayan sayıların varlığı ile ilgili p tek asal sayı olmak üzere

$p \nmid xyz \ ve \ E_{p-3} \equiv 0 \ (mod\, p)$ olacak şekilde x, y, z pozitif tamsayılarının bulunmayacağını kanıtlamıştır [31].

Devamında ise Gut, Fermat'ın Son Teoremi için,

$$x^{2p} + y^{2p} = z^{2p}$$

Eşitlini sağlayan sayıların varlığı ile ilgili olarak $x, y,$ ve z pozitif tamsayı $p \geq 11$ p asal sayısı ve $p \nmid xyz$ için,

$$E_{p-3} \equiv E_{p-5} \equiv E_{p-7} \equiv E_{p-9} \equiv E_{p-11} \equiv 0 \quad (mod\, p)$$

ise bu eşitliğin sağlamaz olduğunu kanıtladı [32].

3.2.2 Teorem: x, y, z pozitif tamsayı ve p düzenli asal olmak üzere;

$x^p + y^p = z^p$ çözümü yoktur [1,3].

3.3 Düzensiz Asallar Üzerine İlişkiler

Düzensiz asalların Bernoulli ve Dairesel cisimler ile ilişkisi olduğunu önceki bölümlerde bahsetmiştik şimdi bu ilişkiler nelerdir onun üzerinde duralım. Düzensiz asalların Bernoulli sayılarının paydalarını bölmesi ile ilgili bazı bilgiler verelim.

Bu bilgiyi vermeden önce Bernoulli sayılarının pay ve paydalarını daha iyi analiz edebilmek için şu teoremi verelim.

3.3.1 Teorem: p asal sayı olmak üzere;

$$B_{2n} = a - \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p}$$

olacak şekilde $a \in \mathbb{Z}$ vardır [33].

3.3.2 Örnek: B_{14} sayısını inceleyelim.

$$\mathrm{B}_{14} = \frac{7}{6} = a - \sum_{p-1|14} \frac{1}{p}$$

$$= a - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right)$$

$$= a - \frac{5}{6}$$

Burada $a = 2$ olduğunu görüyoruz. Tüm Bernoulli sayılarını bu şekilde asalları kullanarak yazabiliriz.

Teorem 3.3.1 biraz düzenlemeye çalışalım.

$$B_{2n} = a - \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p}$$

$$B_{2n} = a - \left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots \ldots + \frac{1}{p_i}\right)$$

Şeklinde yazarsak buradaki p_i asal sayılar ve $p_i - 1|2n$ dir. Yani bir Bernoulli sayısının paydasını bu p_i asallarının çarpımı oluşturur ki pay ile payda her zaman aralarında asaldır. Bu durumda

$$n \in \mathbb{N} \text{ ve } B_{2n} = \frac{N_{2n}}{D_{2n}} N_{2n},\ D_{2n} \in \mathbb{Z},\ D_{2n} > 0 \quad ve\ (N_{2n}, D_{2n}) = 1$$

$$D_{2n} = \prod_{\substack{p\ asal \\ p-1|2n}} p$$

olarak düşünebiliriz [32].

Eğer, $n = q$ ve q asal sayı alınırsa,

$$B_{2q} = a - \frac{5}{6}$$

şeklinde olacaktır. Benzer şekilde q asal ve $s \in \mathbb{Z}^+$ için $n = q^s$ olması durumunda

$$B_{2q^s} = a - \frac{5}{6}$$

bulunur.

3.3.3 Teorem: Bir p asal sayısı için $p \equiv 3 \pmod 4$ ise

$$B_{\frac{p+1}{2}} \not\equiv 0 \pmod p$$

dir [34].

3.3.4 Örnek: $k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere $p = 4k + 3$ formundaki asal sayıyı düşünelim. Teorem 3.3.3 kullanılarak $p = 4k + 3$ formundaki asal sayılar B_{2k+2} sayısının payını bölmeyeceği görülür.

$k = 1$ için $p = 7$ asalı B_4 sayısınını payını bölmez ($B_4 = -\frac{1}{30}$).

3.3.5 Teorem: Eğer $n \geq 1$, $p \geq 5$ p asal sayı ve $p - 1 \nmid 2n$ ise

$$\frac{B_{2n+p-1}}{2n + p - 1} \equiv \frac{B_{2n}}{2n} (mod\ p).$$

dir [4,34].

Bu teoremden yola çıkılarak düzensiz bir asalın bir Bernoulli sayısının payını böldüğü bilindiğinde bu düzensiz asalın böldüğü diğer Bernoulli sayıları bulunabilir.

Kummer yukarıda verilen teoremi aşağıdaki şekilde de ifade etmiştir.

3.3.6.Teorem: $p\ asal\ sayı\ ve\ \ m \equiv n \not\equiv 0 \ \big(mod\ (p-1)\big)$ olacak şekilde m, n pozitif çift tamsayılar olmak üzere;

$$\frac{B_m}{m} \equiv \frac{B_n}{n} \quad (mod\ p)$$

dir [4].

$p = 37$ asal sayısını ele alalım. 37 asal sayısı B_{32} Bernoulli sayısı için,

$$\frac{B_{32}}{32} \equiv 0\ (mod\ 37)$$

dir.

$32 \equiv 68 \not\equiv 0\ (mod\ 36)$ olduğundan,

$$\frac{\mathrm{B}_{68}}{68} \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ 37)$$

olacaktır.

$$B_{68} = \frac{-17.37.101.123143.1822329343.5525473366510930028227481}{30}$$

Kummer bir başka denkliği daha genel olarak şu teorem ile ifade etmiştir.

3.3.7.Teorem: p bir asal ve $p < 8000$ olmak üzere $2 \leq r+1 \leq 2n \;\; n, r \in \mathbb{N}$ ve $p\ asal\ sayısı\ için\ \ p-1 \nmid 2n$:

$$\sum_{s=0}^{r} (-1)^s \binom{r}{s} \frac{B_{2n+s(p-1)}}{2n+s(p-1)} \equiv 0 \quad (\,mod\ p^r)$$

dir [4].

$r = 1$ için Teorem 3.3.7 ile Teorem 3.3.8 çakışır.

3.3.8 Teorem: $n \geq 2$ ve n çift tam sayı olmak üzere $B_n = \frac{N_n}{D_n}$ için

p asal sayı $\ p-1 \nmid n$ iken $(r \geq 1) \quad p^r\ |N_n$ vardır [35].

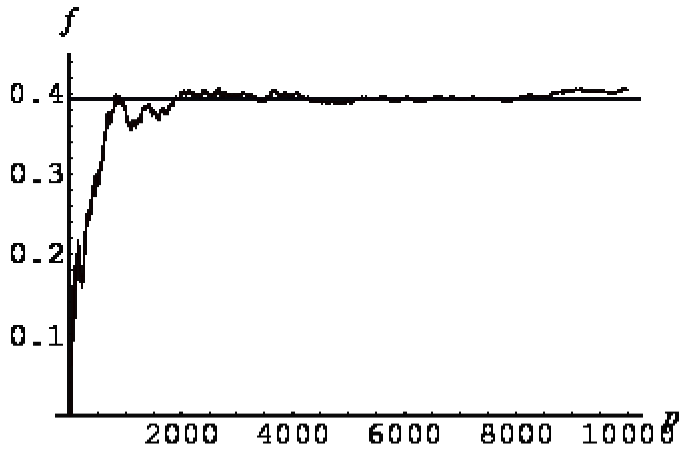
3.3.9 Teorem: p asal sayı ve $n \geq 1$ olmak üzere;

$$S_n(p) \equiv \begin{cases} -1\ (mod\ p) & ; p-1|n \ \ ise \\ \ 0\ (mod\ p) & ; p-1 \nmid n\ ise \end{cases}$$

dir [36].

3.3.10 Teorem: Düzensiz asallar sonsuz çokluktadır [37].

Düzensiz asalların dağılımı Şekil 3.1 de gösterilmiştir.



Şekil 3.1 : Düzensiz asalların dağılımı.

Düzensiz asallar sonsuz tane olmakla birlikte asallar içinde yoğunluğu %40 civarındadır [8].

Şimdi p asal sayısı için bilgilerimizi hem Bernoulli sayıların da hem de dairesel cisimlerin sınıf numaraları arasında ilişkiler kurmamızda kullanabiliriz. p asal sayı ve h da p sayısına bağlı dairesel cisminin sınıf numarası olsun.

$B_k \not\equiv 0 \pmod p$ $k = 0,2,4, \ldots .p-3$ ise $p \nmid h$ dır [37].

İlk düzenli asallar : 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31,41, ... Bu düzenli asalların listesi ise $A007703$ dir. İlk düzensiz asallar ise 37,59,67,101,103,131,149, ... Bu düzensiz asalların listesi ise $A000928$ dir.

3.3.11 Tanım: p asal sayı ve $2n$ doğal sayıları için $2 \leq 2n \leq p-3$ olmak üzere p asal sayısı B_{2n} sayılarından en az birinin payını bölüyorsa bu p ve $2n$ sayılarının oluşturduğu $(p, 2n)$ ikilisine düzensiz çift adı verilir [8].

3.3.12 Tanım: p düzensiz bir asal olsun. n bir doğal sayı olmak üzere $p|B_{2n}$ koşulunu sağlayan Bernoulli sayılarının kümesine p asalı için düzensiz çift sınıfı denir.

3.3.13 Örnek: $37|B_{32}$ olduğundan $(37,32)$ düzensiz çifttir.

Teorem 3.3.5 den $\frac{B_{2n+p-1}}{2n+p-1} \equiv \frac{B_{2n}}{2n}\ (mod\ p).$ Kullanılarak 37 düzensiz asalı ile çift olan sayılar çoğaltılabilir. $2n = 32$ ve $p = 37$ olmak üzere $37|B_{68}$ bulunurki $(32,68)$ de düzensiz çifttir. $p < 163577586$ için tüm düzensiz çiftler Buhler H. tarafından 2011 yılında elde edilmiştir.

Bu düzensiz $(p, 2n)$ arasında bariz bir bağıntı olmasa da bazı düzensiz çiftler için $p \equiv \pm 1(mod\ 2n)$ bağıntısı vardır.

3.3.14 Örnek: $(3617,16)$, $(5479,1826)$, $(43867,18)$, $(90247,6942)$, $(131,22)$, $(593,22)$, $(9433,178)$, $(9539,1060)$, $(60353,6706)$ gibi Düzensiz asal çiftlerinde sonsuz çoklukta olduğunu söylemek yanlış olmayacaktır. Genel olarak asalların içerisinde %61 düzenli %39 düzensiz asaldır [38].

4. SONUÇ

4.1 Teorem: p asal sayı olmak üzere;

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.6^n} \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{(p^2-1)^n}{p^{2n}-1}$$

dir.

İspat: Teorem 2.1.5 ve Teorem 2.1.12 den yararlanarak ;

$$|B_{2n}| = \frac{\zeta(2n)(2n)!}{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

ve

$$\zeta(2n) = \prod_{p\ asal\ sayı} \left(1-\frac{1}{p^{2n}}\right)^{-1}$$

İki eşitliği düzenlersek,

$$|B_{2n}| = \frac{(2n)!}{(-1)^{n-1}2^{2n-1}\pi^{2n}}.\prod_{p\ asal\ sayı} \left(1-\frac{1}{p^{2n}}\right)^{-1}$$

elde edilir. Burada π^2 yerinede $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ dan $\pi^2 = 6.\zeta(2)$ yazalım.

$$|B_{2n}| = \frac{(2n)!}{(-1)^{n-1}2^{2n-1}.6^n.\zeta(2)^n}.\prod_{p\ asal\ sayı} \left(\frac{p^{2n}}{p^{2n}-1}\right)$$

$$\zeta(2) = \prod_{p\ asal\ sayı} \left(\frac{p^2}{p^2 - 1}\right)$$

olmak üzere bu eşitliğide yerine yazarsak,

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.6^n} \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{\frac{p^{2n}}{p^{2n}-1}}{\left(\frac{p^2}{p^2-1}\right)^n}$$

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.6^n} \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{p^{2n}}{p^{2n} - 1}.\frac{(p^2 - 1)^n}{p^{2n}}$$

$$B_{2n} = \frac{(2n)!}{2^{2n-1}.6^n} \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{(p^2 - 1)^n}{p^{2n} - 1}$$

elde edilmiş olur.

p düzensiz asal ve $2 \leq 2n \leq p - 3$ için $p|B_{2n}$ olduğunu göz önüne alırsak $(2n)!$ içinde p asalı olamaz. Biliyoruz ki en küçük düzensiz asal sayı 37 olduğundan p düzensiz asalı için 2 ve 3 asallarınında bir kısıtlaması olamaz. O halde yukarıdaki eşitliğikten faydalanarak;

$$M_n = \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{(p^2 - 1)^n}{p^{2n} - 1}$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

4.2 Sonuç: p asal sayı ve $1 \leq n \leq \frac{p-3}{2}$ olmak üzere;

$M_n \equiv 0(mod\ p)$ ise p asalına düzensiz asaldır.

4.3 Sonuç: p düzensiz asal ve $p + 2$ de düzensiz asal ise bu düzensiz asallara ikiz düzensiz asallar denir. İkiz düzensiz asalların sayısı düşünülürse ilk 9551 düzensiz asal içinde 758 tane ikiz düzensiz asal vardır. İlk ikiz düzensiz asallar 101 ve 103 asallarıdır.

4.4 Sonuç: p_i asal sayısı için $2 \leq n \leq \frac{p_i-3}{2}$ olacak şekilde $p_i|M_n$ olsun. p_i düzensiz asalı,

$$p_i| \prod_{p\ asal\ sayı} \frac{(p^2-1)^n}{p^{2n}-1}$$

dir.

Teorem 3.3.11 den p düzensiz asal ise 0≤ 2n ≤ p − 3 olacak şekilde

$$B_{2n} \equiv 0\ (mod\ p)$$

B_{2n} sayısı vardır. Dolayısıyla $(p, 2n)$ düzensiz çifti vardır. Şimdi şu teoremi verebiliriz.

4.5 Teorem: p düzensiz asal ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere:

$$B_{2n} \equiv 0\ (mod\ p)$$

denkliğini sağlayan sonsuz sayıda $n \in \mathbb{N}$ sayısı vardır.

İspat: Teorem 3.2.5 den $\frac{B_{2n+p-1}}{2n+p-1} \equiv \frac{B_{2n}}{2n}\ (mod\ p)$ yola çıkarak şu sonuca ulaşabiliriz.

$$B_{2n} \equiv 0\ (mod\ p)$$

olsun.

$$\frac{B_{2n+p-1}}{2n+p-1} \equiv \frac{B_{2n}}{2n} (mod\ p)$$

olduğundan dolayı,

$$B_{2n+p-1} \equiv B_{2n} \equiv 0\ (mod\ p)$$

denkliği vardır. Bu nedenle bir p düzensiz asalı sonsuz sayıda Bernoulli sayısının payını böler.

p düzensiz asal olmak üzere;

$$B_{2n} \equiv 0\ (mod\ p)$$

$$B_{2n+p-1} \equiv 0\ (mod\ p)$$

buradan da $k \in \mathbb{N}$ için

$$B_{2n+k(p-1)} \equiv 0\ (mod\ p)$$

olacağından şöyle bir küme tanımlayabiliriz;

p düzensiz asalının böldüğü Bernoulli sayılarının kümesini I^p ile gösterelim.

$$I^p = \left\{ B_{2n+k(p-1)} : k \in \mathbb{N} \ ve \ B_{2n} \equiv 0 \ (mod \ p) \right\}$$

dir.

4.6 Sonuç: p_i ve p_j iki düzensiz asal ise

$$I^{p_i} \cap I^{p_j} \neq \emptyset$$

dir.

5. KAYNAKLAR

[1] Kellner,B.C., “On Irregular Prime Power Divisors of the Bernoulli Numbers”, *American Mathematical Society*, 76(257), 405-441, (2007).

[2] Jensen,K.L., “Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske tal”, *Nyt Tidsskrift f. Mat B*, 26, 73-83, (1915).

[3] Carlitz,L., “Note on irregular primes”, *Proc.Amer.Math.Soc*., 82, 329-331, (1954).

[4] Wells,J., “Irregular Prime Divisors of the Bernoulli Numbers”, *Mathematics of Computation*, 28 (126), 653-657, (1974).

[5] Samuel,S., “The Irregular Prime 125000”, *Mathematics of Computation*, 32 (142), 583-591, (1978).

[6] Buhler, J. P., Crandall, R.E. ve Sompolski,R.W., “Irregular Primes to one Million”, *Mathematics of Computation* , 59 (200), 717-722, (1992).

[7] Buhler,J.,Crandall,R.,Ernvall,R. ve Metsänkylä,T., “Irregular Primes and Cyclotomic Invariants to Four Million”, *Mathematics of Computation*, 61(203), 151-153, (1993).

[8] Buhler,J.P. ve Harvey,D.,“Irregular Prime to 163 million”, *Mathematics of Computation*,80(276), 2435-2444, (2011).

[9] Başkan,T., *Kompleks Fonksiyonlar Teorisi*, Ankara:Nobel Yayıncılık, (2001).

[10] Conway,J.B., *Fonctions Of One Complex Variable*, New York: Springer-Verlag, 330, (1986).

[11] Apostol,T.M., *Introduction to Analytic Number Theory*, New York,Springer - Verlag, - Heidelberg – Berlin, (1976).

[12] Ball,K. And Rivoal,T., “Irrationalit´ed’uneinfinit´e de valeurs de la fonction zeta auxentiersimpairs”. *Invent. Math*., 146 (1), 193–207 (2001),

[13] Brendan,W.S., “Numerous Proofs of $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ [online]”, (05.01.2018), http://math.cmu.edu/~bwsulliv/MathGradTalkZeta2.pdf, (2013).

[14] Narkiewicz, W., *Elementary and Analytic Theory of Algebraic Numbers*, Third Edition, Springer, 708, (1990),

[15] Carlitz,L., “The Staudt-Clausen theorem”, *Mathematics Magazine*, 34(3), (1961).

[16] Conway,J.H. ve Guy,R.K.,*In The Book of Numbers*. New York:Springer-Verlag, 107-110, (1996).

[17] Sloane,N.J.A., “The On-line Encyclopedia of Integer Sequences [online]”, (04.052017), https://oeis.org/A122045/list, (1964).

[18] Junior,M., “Bernoulli-odd-numbers [online]” (19.08.2018), https://math.stackexchange.com/questions/1302594/bernoulli-odd-numbers-are-0-b-2n1-0-n0, (2015).

[19] Berndt,B.C., “Elementary Evaluation of ζ(2n)”, *Mathematical Association of America*, 48(3), 148-154, (1975).

[20] Deamo,E.,Diaz Carrillo,M.ve Fernandez-Sanchez,J., “Nother Proof Of Euler’s Formula For $\zeta(2k)$”, *American Mathematical Society*, 139(4), 1441-1444, (2011).

[21] Nunemacher, J., Young, R. M., “On the Sum of Consecutiveth Powers”, *Mathematical Association of America*, 60 (4), 237-238, (1987).

[22] Carlitz,L., “A Property of the Bernoulli Numbers”, *The American mathematical Monthly*, 66(8), 714-715, (1959).

[23] Asar,A.O.,Arıkan,A. ve Arıkan, A..*Cebir*, Ankara: Gazi Kitapevi, (2012).

[24] Jacobson,M.J., “Computational Techniques in Quadratic Fields.”, Msc Thesis, *University Manitoba*, Manitoba, (1995).

[25] Özer,Ö,. “Bazı Reel Kuadratik Sayı Cisimlerinin İncelenmesi”, Doktora Tezi, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,* Matematik Anabilim Dalı,Isparta, (2014).

[26] Kimball,M., “ideals [online]”, (20.06.2018), http://www2.math.ou.edu/~kmartin/nti/chap11.pdf, (2009).

[27] Kimball,M., “Prime Ideals [online]”, (20.06.2018), http://www2.math.ou.edu/~kmartin/nti/chap12.pdf, (2009).

[28] Lacy,A., “Infinitude Irregular Primes [online]”, (20.06.2018), http://math.uga.edu/~alacy/InfinitudeIrregularPrimes.pdf, (2011).

[29] Kummer,E.E., “Allgemeiner Beweis des Fermatschen Satzes, dass die Gleichung $x^{\lambda} + y^{\lambda} = z^{\lambda}$durch ganze Zahlen unlösbar ist, für alle diejenigen Potenz-Exponenten λ, welche ungerade Primzahlen sind und in den Zählern der ersten Bernoullischen Zahlenals Factoren nicht vorkommen*”, J. Reine, Angew, Math.*, 40, 131-138, (1850).

[30] Wiles,A., “Modular Elliptic Curves and Fermat's Last Theorem”, *Annals of Mathematics Second Series*, 141(3), 443-551, (1995).

[31] Vandiver,H.S., “Note on Euler number criteria for the first case of Fermat’s last theorem”, *Amer.J.Math.,* 62, 79-82, (1940).

[32] Gut,M., “Eulers cheZahlen und grosser Fermat’scherSatz”, *Comment. Math. Helv*, 24, 73-99, (1950).

[33] Robledo,A.L., “Bernoulli numbers, Hurwitz numbers, p-adic L-functions and Kummer’s”,*Real Academia. Ciencias Serie A. Mat*, 101 (1), 1–32, (2007).

[34] Schettler,J., *Bernoulli Numbers*, Department of Mathematics The University of Arizona P.O. Box 210089, 617 N. Santa Rita Tucson, AZ 85721-0089, USA

[35] Girstmair,K., “A Theorem on the Numerators of the Bernoulli Numbers”, *The American Mathematical Monthly*, 97(2), 136-138, (1990).

[36] MacMillan,K.J., “Proofs of Power Sum and Binomia Coefficient Congruences Via Pascal’s Identity”, *The American Mathematical Monthly*, 118(6), 549-551, (2011).

[37] Matilde,N.L., “Bernoulli Numbers”, *Junior Number Theory Seminar*, University of Texas at Austin, (2005).

[38] Milne,J.S., *Algebraic Number Theory*, 100-101, (2017).